



НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ

# Импульсное поле цилиндрической апертуры

А.Р. Саратовцев, Г. К. Усков, С.П. Скулкин

# Определение и вычисление первообразной импульсной характеристики цилиндрической апертуры

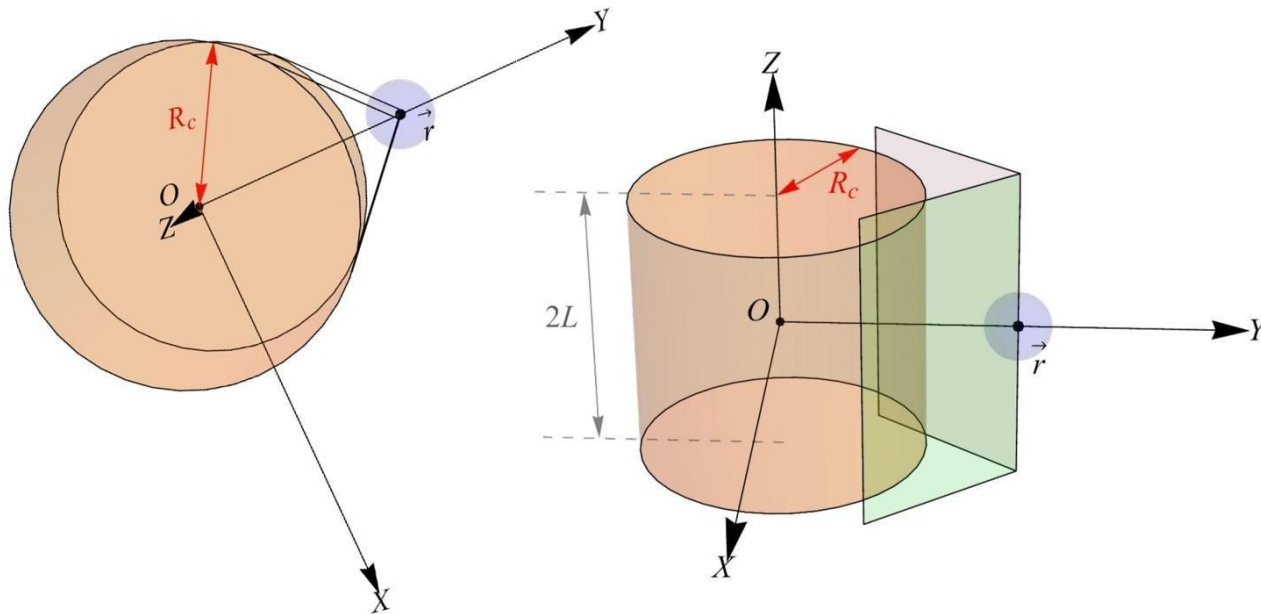


Рис. 1. Цилиндрическая апертура и её видимая из точки наблюдения часть

- Поле в любой точке пространства перед апертурой при известных излучённом сигнале и импульсной характеристике

$$E(\mathbf{r}, t) = s'(t) * E_\delta(\mathbf{r}, t) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} s'(r) E_\delta(\mathbf{r}, t - r) dr \quad (1)$$

- Первообразная импульсной характеристики

$$H(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2\pi c} \int_{S_a} \frac{q(\mathbf{r}_a) \cdot \alpha(\mathbf{r}, \mathbf{r}_a)}{R} \cdot \delta\left(t - \frac{R}{c}\right) dS_a \quad (2)$$

- Параметрическое задание цилиндрической апертуры (3) и точки наблюдения (4)

$$x_a = R_c \cos \varphi_a, y_a = R_c \sin \varphi_a, \varphi_a \in [0; 2\pi], z_a \in [-L; L] \quad (3)$$

$$x = \rho \cos \varphi, y = \rho \sin \varphi, \varphi \in [0; 2\pi], z \in (-\infty; +\infty) \quad (4)$$

- Условие интегрирования видимой части апертуры

$$|\varphi_a - \varphi| \leq \arccos \frac{R_c}{\rho} \quad (5)$$

# Определение и вычисление первообразной импульсной характеристики цилиндрической апертуры

- Основная интегральная формула:

$$H(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2\pi c} \int_{\Phi} R_c d\varphi_a \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q(\mathbf{r}_a) \cdot \alpha(\mathbf{r}, \mathbf{r}_a)}{R} \cdot \delta\left(t - \frac{R}{c}\right) dz_a, \quad R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_a| = \sqrt{R_c^2 + \rho^2 - 2R_c \rho \cos(\varphi_a - \varphi) + (z_a - z)^2}$$

$$\delta(F(z_a)) = \int \frac{\delta(z_a - z_n)}{|F'(z_n)|}, \quad F(z_a) = t - \frac{R}{c} = t - \frac{1}{c} \cdot \sqrt{R_c^2 + \rho^2 - 2R_c \rho \cos(\varphi_a - \varphi) + (z_a - z)^2}$$

$$H(\mathbf{r}, t) = \frac{R_c}{2\pi} \int_{n=1}^N \int_{\Phi_n} \frac{q(R_c \cos \varphi_a, R_c \sin \varphi_a, z_n(\varphi)) \cdot \alpha(\mathbf{r}, R_c \cos \varphi_a, R_c \sin \varphi_a, z_n(\varphi))}{\sqrt{(ct)^2 - \rho^2 - R_c^2 + 2R_c \rho \cos(\varphi_a - \varphi)}} d\varphi_a \quad (6)$$

Соответствующий неопределённый интеграл в явном виде:

$$\int \frac{d\varphi_a}{\sqrt{(ct)^2 - \rho^2 - R_c^2 + 2R_c \rho \cos(\varphi_a - \varphi)}} = \frac{R_c}{\pi \sqrt{(ct)^2 - (\rho - R_c)^2}} \cdot \mathcal{F}\left(\frac{\varphi_a - \varphi}{2}, \sqrt{\frac{4R_c \rho}{(ct)^2 - (\rho - R_c)^2}}\right) + C$$

$$q = 1, \alpha = 1$$

где  $\mathcal{F}(\phi, \kappa) \equiv \mathcal{F}(\phi|\kappa^2) \equiv \int_0^{\phi} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 \theta}}$  — неполный эллиптический интеграл 1 рода.

# ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ ОСОБЕННОСТИ ПОЛЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ АПЕРТУРЫ

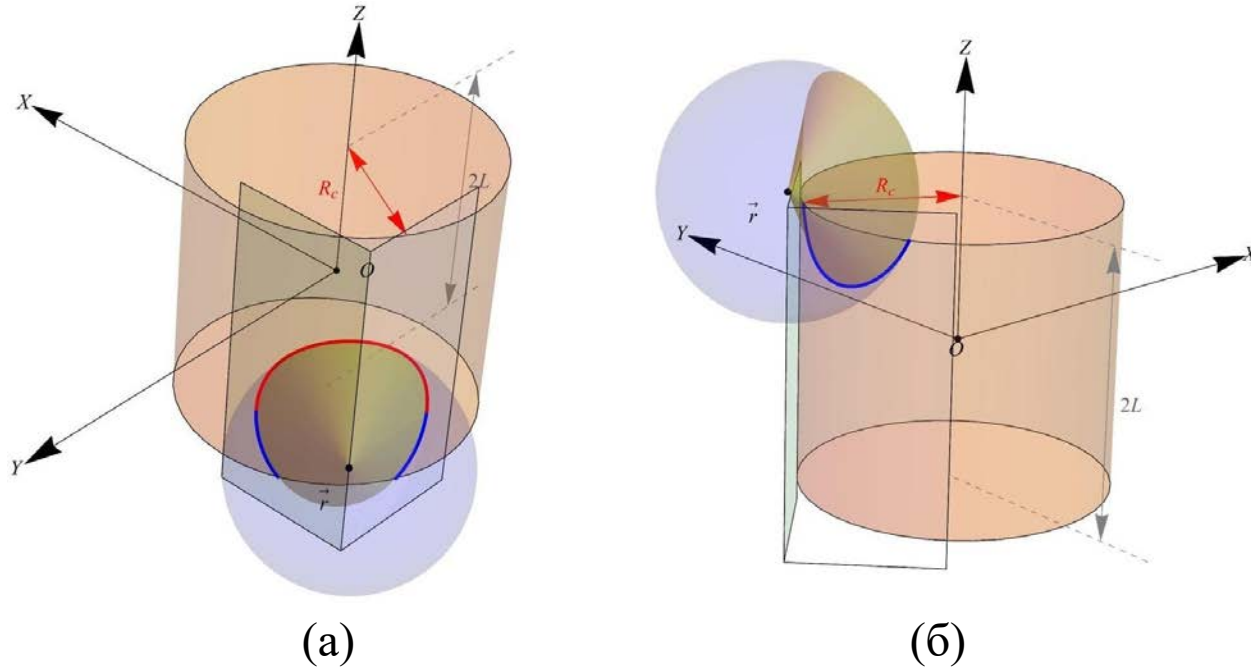


Рис. 2. Геометрия задачи при разных значениях параметров

- Ограничение на минимальное отклонение углов (следует из условия принадлежности кривой апертуре, см. рис. слева):

$$|\varphi_a - \varphi| \geq \arccos \frac{(z+L)^2 - (ct)^2 + \rho^2 + R_c^2}{2\rho R_c} \quad (7)$$

Следует учитывать, начиная с момента касания *нижней* дугой нижнего края апертуры:

$$t > \frac{\sqrt{(z+L)^2 + (\rho - R_c)^2}}{c} \quad (8)$$

- Ограничение на максимальное отклонение углов (для точек вне прожекторного луча):

$$|\varphi_a - \varphi| \leq \arccos \frac{(z-L)^2 - (ct)^2 + \rho^2 + R_c^2}{2\rho R_c} \quad (9)$$

Следует учитывать, начиная с момента когда *нижняя* дуга дошла до верхнего края апертуры:

$$t > \frac{\sqrt{(z-L)^2 + (\rho - R_c)^2}}{c} \quad (10)$$

# ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ ОСОБЕННОСТИ ПОЛЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ АПЕРТУРЫ

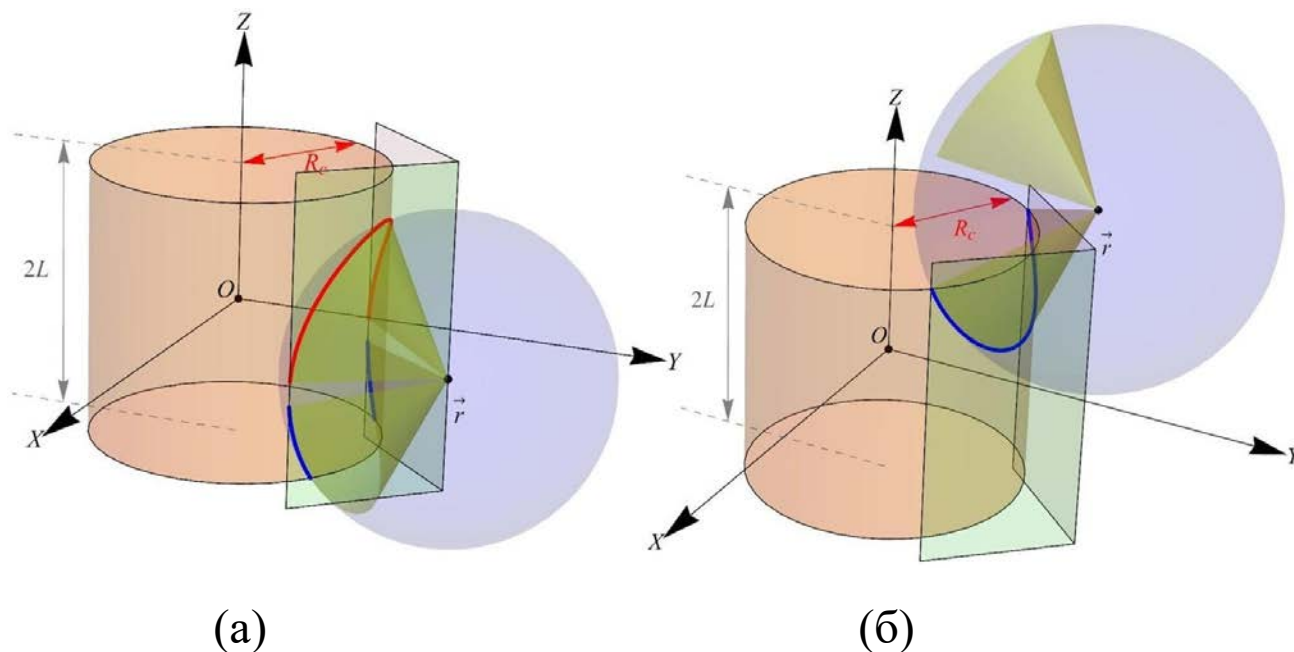


Рис. 3. Ограничение кривой пересечения горизонтом на апертуре

Также ограничение на углы накладывает условие невыхода кривых за горизонт (5):  $|\varphi_a - \varphi| \leq \arccos(R_c T \rho)$

Таким образом диапазон  $\Phi_n$  углов интегрирования  $\varphi_a$  имеет вид  $\Delta\varphi_{\min} \leq |\varphi_a - \varphi| \leq \Delta\varphi_{\max}$ :

$$\Delta\varphi_{\min}^{\varphi} = \begin{cases} \arccos \frac{(z+L)^2 - (ct)^2 + \rho^2 + R_c^2}{2\rho R_c}, & t > \frac{1}{c} \cdot \sqrt{(z+L)^2 + (\rho - R_c)^2}; \\ 0, & t < \frac{1}{c} \cdot \sqrt{(z+L)^2 + (\rho - R_c)^2}; \end{cases} \quad (11)$$

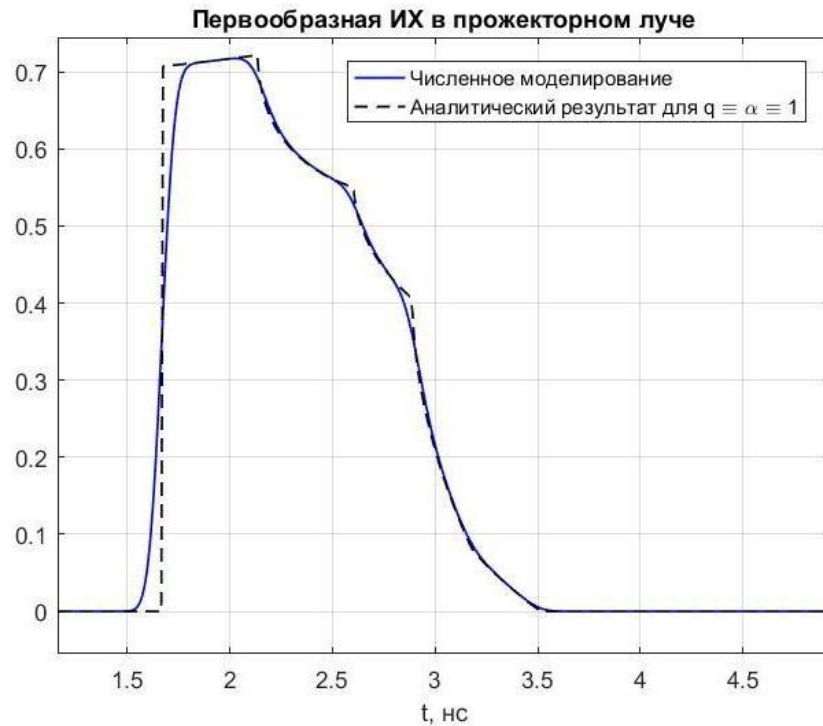
$$\Delta\varphi_{\max}^x = \begin{cases} \arccos \frac{R_c^2 + \rho^2 - (ct)^2 + (z-L)^2 \cdot \Theta(z-L)}{2R_c \rho}, & t < \frac{\sqrt{\rho^2 - R_c^2 + (z-L)^2 \cdot \Theta(z-L)}}{c}; \\ \arccos \frac{R_c}{\rho}, & t > \frac{\sqrt{\rho^2 - R_c^2 + (z-L)^2 \cdot \Theta(z-L)}}{c}; \end{cases} \quad (12)$$

Условие ненулевого вклада нижней ветви:

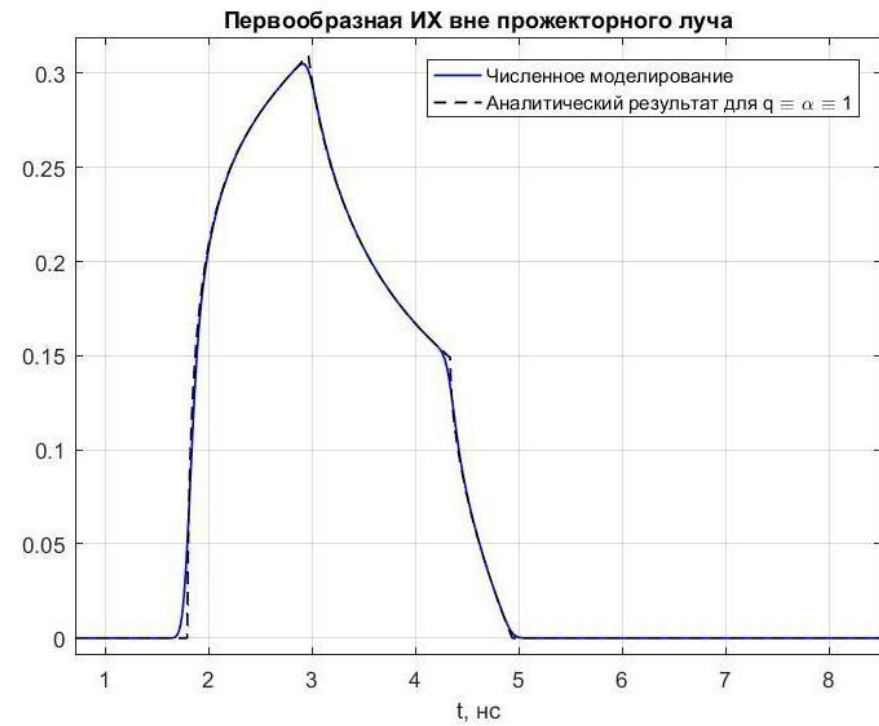
$$\frac{\sqrt{(z-L)^2 \cdot \Theta(z-L) + (\rho - R_c)^2}}{c} < t < \frac{\sqrt{\rho^2 - R_c^2 + (z+L)^2}}{c}, \quad z > -L \quad (13)$$

*Анализ верхней ветви кривой пересечения абсолютно симметричен.*

# Первообразная импульсной характеристики



(а)



(б)

Рис. 3. Первообразная импульсной характеристики при расположении точки наблюдения внутри прожекторного луча (а) и вне его (б).



**Спасибо за внимание!**