

Смотр выпускных квалификационных работ  
математиков России 2024

# СБОРНИК ДИПЛОМНЫХ РАБОТ



Нижний Новгород

2024

Смотр выпускных квалификационных работ математиков России 2024.  
Сборник дипломных работ. Составитель А.В. Веденин.

Кафедра фундаментальной математики НИУ ВШЭ, Нижний Новгород,  
21 июня 2024 г.

Объём 897 с.

Тираж: 1 электронный экземпляр, опубликованный на сайте Смotra  
<https://nнов.hse.ru/bipm/fm/smotr2024> и свободно распространяемый под  
лицензией, описанной в стандарте Creative Commons Attribution-NoDerivs

# Оглавление

## ВКР бакалавров

1. Баин Д.Д. Регулярная и хаотическая динамика одного класса дифференциальных уравнений второго порядка с релейной нелинейностью и запаздыванием (ВКР бакалавра, Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, Ярославль, 2024) \_\_\_\_\_ 6
2. Голицын. Д. А. Гиперболические устойчивые многочлены и полная положительность (ВКР бакалавра, Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, Ярославль, 2024) \_\_\_\_\_ 53
3. Добролюбова А. Л. О классе устойчивой изотопической связности градиентно-подобных диффеоморфизмов двумерного тора (ВКР бакалавра, Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики", Нижний Новгород, 2024) \_\_\_\_\_ 75
4. Драгунова К. А. Rate of convergence of Chernoff approximations to solutions of the Heat Equation: numerical experiment (ВКР бакалавра, Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики", Нижний Новгород, 2023) \_\_\_\_\_ 95
5. Зайчиков К. С. Аттракторы лоренцевского типа в трехмерных отображениях (ВКР бакалавра, Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики", Нижний Новгород, 2024) \_\_\_\_\_ 115
6. Искра А. Л. О произведении подстановок множества целых чисел (ВКР бакалавра, Новосибирский национальный исследовательский государственный университет, Новосибирск, 2024) \_\_\_\_\_ 141
7. Куракин. П. А. Построение периодических решений функциональных уравнений с помощью дифференциальных уравнений (ВКР бакалавра, Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, Ярославль, 2024) \_\_\_\_\_ 156
8. Кутузова А. А. Некоммутативные отображения  $n$ -симплексов (ВКР бакалавра, Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, Ярославль, 2024) \_\_\_\_\_ 184
9. Мельников И. Е. Уравнение Эйлера-Дарбу-Пуассона в контексте бегущих волн в сильно неоднородных средах (ВКР бакалавра, Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики", Нижний Новгород, 2024) \_\_\_\_\_ 214
10. Минеев Д. А. Численное исследование черновских аппроксимаций решений линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами (ВКР бакалавра, Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики", Нижний Новгород, 2024) \_\_\_\_\_ 259

11. Пушкин Н. А. Разработка RESTful API service для мессенджера с механизмом рекомендации в друзья на основе метода среднеквадратичного отклонения (ВКР бакалавра, Воронежский государственный университет, Воронеж, 2024) \_\_\_\_\_ 290
12. Рябов К. С. Синхронизация в мультиплексных сетях фазовых осцилляторов: учет взаимодействий высокого порядка (ВКР бакалавра, Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, 2023) \_\_\_\_\_ 340
13. Сараев И. А. О топологической классификации градиентно-подобных потоков на четырехмерных многообразиях (ВКР бакалавра, Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики", Нижний Новгород, 2024) \_\_\_\_\_ 364
14. Цаплина Е. В. Построение гладких дуг "источник-сток" на двумерной сфере (ВКР бакалавра, Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики", Нижний Новгород, 2024) \_\_\_\_\_ 399
15. Чирков М. А. Решения локального уравнения тетраэдров Замолотчикова (ВКР бакалавра, Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, Ярославль, 2024) \_\_\_\_\_ 414
16. Чугунов В. Е. Цилиндрические бегущие волны в рамках уравнений типа Эйлера-Дарбу-Пуассона (ВКР бакалавра, Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики", Нижний Новгород, 2024) \_\_\_\_\_ 458
17. Шустова Е. К. Динамические свойства прямых и косых произведений каскадов (ВКР бакалавра, Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики", Нижний Новгород, 2024) \_\_\_\_\_ 492

18. Якубив Ю. А. Динамика уравнения нейтрального типа с запаздыванием и разрывной правой частью (ВКР бакалавра, Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, Ярославль, 2024) \_\_\_\_\_ 515

*ВКР магистров*

19. Валиахметов Б. И. Мозаично-скелетонный метод для современных вычислительных систем и его приложения (ВКР магистра, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Москва, 2024) \_\_\_\_\_ 532
20. Еделева Ю. П. Температурные поля, индуцированные системами частиц и плоскостей (ВКР магистра, Национальный исследовательский мордовский государственный университет им. Н. П. Огарева, Саранск, 2024) \_\_\_\_\_ 583
21. Ионин В. А. Конфигурационные пространства, косы и гомотопические группы (ВКР магистра, Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, 2024) \_\_\_\_\_ 626
22. Казакова. И. С. Разработка и исследование вычислительного алгоритма для решения трехмерного уравнения теплопроводности разрывным методом Галёркина (ВКР магистра, Национальный исследовательский мордовский государственный университет им. Н. П. Огарева, Саранск, 2024) \_\_\_\_\_ 671
23. Кузьмин Н. А. Исследование количеств паросочетаний в некоторых классах графов (ВКР магистра, Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики", Нижний Новгород, 2024) \_\_\_\_\_ 749
24. Петрова Ю. Э. Об эндоморфизмах  $n$ -мерного тора с гиперболическими сжимающимися репеллерами коразмерности один (ВКР магистра, Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики", Нижний Новгород, 2024) \_\_\_\_\_ 807
25. Шубин Д. Д. Number of the Equivalence Classes of Nonsingular Morse-Smale Flows with a Unique Twisted Saddle Orbit on Orientable 3-Manifolds (Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики", Нижний Новгород, 2024) \_\_\_\_\_ 825

*ВКР специалистов*

26. Дегтярева С. Д. Классификация и особенности линейных операторов Нийенхейса с функционально независимыми инвариантами (ВКР специалиста, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Москва, 2024) \_\_\_\_\_ 850

Положение о Смотре \_\_\_\_\_ 887

Постер Смотра \_\_\_\_\_ 897

В Оргкомитет Смотра дипломных работ математиков России  
от Баина Данилы Денисовича  
Заявление о новизне

Сообщаю, что новыми в моей представленной на Смотр выпускной квалификационной работе (далее - работа) под названием «Регулярная и хаотическая динамика одного класса дифференциальных уравнений второго порядка с релейной нелинейностью и запаздыванием» являются: Лемма 5.2, Доказательство Леммы 5.2, Теоремы 3.1, 3.2, Доказательства Теорем 3.1, 3.2, Метод упрощения в случае кусочной постоянности относительно аргумента.

Также сообщаю, что для проверки новизны мною было проделано следующее:

- В период с 01 сентября 2023 г. по 20 апреля 2024 г. мною был произведён поиск в следующих поисковых системах: Google, Google Scholar, ResearchGate, Web of Science, arxiv.org, aps.org по следующим ключевым словам: дифференциальное уравнение с запаздыванием, релейная нелинейность, кусочно постоянная нелинейность, оператор Пуанкаре, метод шагов, устойчивость, устойчивые периодические решения, численные методы для дифференциальных уравнений с запаздыванием, уравнение в вариациях, ляпуновские показатели, динамический хаос, в выдаче поисковиков было исследовано 36 статей, 3 монографии, 7 препринтов и все они не содержали материала, заявляемого автором выпускной квалификационной работы в качестве нового. При поиске не было встречено работ или упоминаний работ, позволяющих усомниться в новизне материала. При этом в работе [5] были найдены конструкции, похожие на излагаемые в настоящей выпускной квалификационной работе, однако отличие их ясно видно и наличие таких работ лишь подтверждает актуальность тематики исследования.

- Проведена серия консультаций с моим научным руководителем Глызиным Сергеем Дмитриевичем, доктором физико-математических наук, зав. кафедры компьютерных сетей, профессором Ярославского государственного университета им. П.Г. Демидова.
- Проведено выступление на студенческой школе-конференции «Математическая весна» 2024 (НИУ ВШЭ - Нижний Новгород), на международной конференции ISND-23, конференции «Нелинейные дни» в Саратове для молодых.
- Таким образом, по результатам поиска в сети Интернет и тематических научных базах, а также обсуждений с указанным выше специалистом следует, что, по-видимому, представленный в моей выпускной квалификационной работе указанный выше математический материал действительно является новым.

Подтверждаю, что являюсь автором предоставляемой на Смотр работы и прошу принять её для участия в Смотре. Принимаю на себя обязательство соблюдать правила Смотра. Также (в соответствии с п. 4 Положения о Смотре) принимаю на себя обязательство оценить 5 работ участников Смотра, выданных мне Оргкомитетом в результате жеребьёвки и сверх того оценить 2-5 работ других участников Смотра на

мой выбор. Я понимаю правила оценки работ, приведённые в п. 4.3 Положения о Смотре. Даю согласие на публикацию адреса моей электронной почты.

Защита работы состоялась 17.06.2024г. На Смотр представлен окончательный текст работы.



Баев Данила Денисович  
17.06.2024г. Ярославль, Россия

МИНОБРАЗОВАНИЯ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования

«Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова»

Кафедра математического моделирования

Сдано на кафедру  
«6» июня 2024 г.  
Заведующий кафедрой  
д.ф.-м.н., доцент

\_\_\_\_\_ Кащенко И.С.

Выпускная квалификационная работа

**Регулярная и хаотическая динамика одного класса  
дифференциальных уравнений второго порядка с релейной  
нелинейностью и запаздыванием**

направление подготовки  
01.03.02 Прикладная математика и информатика

Научный руководитель  
профессор  
д.ф.-м.н., профессор

\_\_\_\_\_ Глызин С.Д.

«6» июня 2024 г.

Студент группы ПМИ-43БО

\_\_\_\_\_ Баин Д.Д.

«6» июня 2024 г.

Ярославль 2024 г.

## Реферат

**Объём:** 46 страниц, 6 глав, 14 рисунков, 25 источников.

**Ключевые слова:** дифференциальное уравнение с запаздыванием, релейная нелинейность, кусочно постоянная нелинейность, оператор Пуанкаре, метод шагов, устойчивость, устойчивые периодические решения, численные методы для дифференциальных уравнений с запаздыванием, уравнение в вариациях, ляпуновские показатели, динамический хаос.

**Объектом** исследования является дифференциальное уравнение второго порядка с релейной нелинейностью и запаздыванием.

**Целью** работы является исследование регулярной и хаотической динамики этого уравнения.

**Результатом** работы являются: аналитические условия на параметры системы для существования устойчивых периодических решений; ряд численных методов для определения существования устойчивых периодических решений или хаотических колебаний при конкретных параметрах системы, а также результаты работы этих численных методов в виде изображений разбиения пространства параметров на области наличия соответствующей динамики; исследовано явление мультистабильности для данного уравнения.

**Областью применения** результатов данной работы являются задачи релейного управления. Так же, методы, разработанные для данной системы, имеют общий характер и могут быть легко адаптированы для исследования схожих задач.

# Содержание

<b>Введение</b>	<b>4</b>
<b>1 Оператор первого возвращения</b>	<b>6</b>
1.1 Постановка начальной задачи . . . . .	6
1.2 Определение оператора первого возвращения . . . . .	6
1.3 Сведение задачи к изучению одномерного отображения . . . . .	8
<b>2 Аналитические результаты о существовании медленно осциллирующих решений</b>	<b>10</b>
2.1 Построение решения методом шагов . . . . .	10
2.2 Свойства одномерного отображения . . . . .	11
2.3 Существование устойчивой неподвижной точки . . . . .	13
<b>3 Уравнение в вариациях</b>	<b>16</b>
3.1 Класс релейных уравнений с запаздыванием . . . . .	16
3.2 Вывод уравнения в вариациях . . . . .	16
3.3 Приложения . . . . .	19
<b>4 Особенности численного построения решений</b>	<b>21</b>
4.1 Интегрирование уравнений с запаздыванием . . . . .	21
4.2 Последование разрывов производных . . . . .	22
4.3 Учёт разрывов для сохранения точности вычислений . . . . .	23
4.4 Упрощения в случае кусочной постоянности относительно запаздывающего аргумента . . . . .	25
<b>5 Численное исследование оператора Пуанкаре</b>	<b>26</b>
5.1 Замена переменных в уравнении . . . . .	26
5.2 Вычисление свойств одномерного отображения . . . . .	26
5.3 Количество неподвижных точек в зависимости от параметров системы	28
<b>6 Ляпуновские показатели</b>	<b>31</b>
6.1 Определение и свойства ляпуновских показателей . . . . .	31
6.2 Метод Бенеттина . . . . .	33
6.3 Применимость метода Бенеттина для уравнения с запаздыванием . . . . .	35
6.4 Ляпуновские показатели для итераций одномерного отображения . . . . .	37
6.5 Оценка точности вычисления ляпуновских показателей . . . . .	38
6.6 Зависимость ляпуновских показателей от параметров системы . . . . .	38
<b>Заключение</b>	<b>42</b>

# Введение

Рассматривается дифференциальное уравнение с запаздыванием

$$\ddot{x} + b\dot{x} + cx = d \operatorname{sign}(x(t - \tau)) \quad (1)$$

где  $c \neq 0, d \neq 0, \tau > 0$ .

Дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом представляют собой класс динамических систем, которые включают временные задержки в эволюции переменных [1–3]. В отличие от обыкновенных дифференциальных уравнений, дифференциальные уравнения с запаздыванием учитывают запаздывающие эффекты, когда текущее состояние системы зависит не только от её настоящего состояния, но и от её прошлых состояний. Задержка привносит временной аспект, который имеет решающее значение для моделирования различных явлений реального мира, влияя на стабильность, колебания и общее поведение системы.

Приложения дифференциальных уравнений с запаздыванием охватывают широкий спектр областей, включая биологию, медицину, физику, инженерию, экономику и так далее [2]. В биологии системы с запаздыванием используются для моделирования популяционной динамики и физиологических процессов, таких как механизмы обратной связи в регуляторных сетях и динамика нейронов. В медицине они используются в качестве моделей распространения эпидемий и иммунного ответа на болезни. В физике дифференциальные уравнения с запаздыванием находят применение при описании систем с запаздывающей обратной связью, колебательных явлений и поведения связанных систем с задержками. В технике уравнения с запаздыванием применяются при исследовании систем управления с запаздыванием, таких как сети связи, системы управления. Экономические модели часто включают задержки, чтобы отразить временные лаги в принятии решений и реакции рынка.

Релейные дифференциальные уравнения образуют очень важный класс динамических систем при изучении систем управления в технике [4]. При релейном управлении управляющий сигнал представляет собой кусочно-постоянную функцию измеряемого выходного сигнала, обычно переключаясь между двумя значениями. Кроме того, сигнал управления часто задерживается из-за конечного времени передачи и обработки сигнала, задержек выборки или других задержек в контурах управления. Другая причина изучения релейных систем заключается в том, что благодаря их простоте становятся возможными аналитические результаты, а также численные методы могут допускать значительные упрощения, хотя и негладкость правой части требует особого внимания для сохранения точности вычислений. Также, релейные системы возникают как предельные объекты при изучении систем с большим или малым параметров для нелинейностей с простым поведением на бесконечности [5–7].

Уравнение вида (1) или схожие с ним уравнения второго порядка с запаздывающей релейной нелинейной исследовались во многих работах при помощи разных подходов [4, 5, 8–13]. В работе [8] были получены условия существования медленно осциллирующих периодических решений в случае  $b^2 - 4c > 0, d < 0$ ; обзору данных результатов посвящена глава 2. В работе [5] уравнение (1) возникает как вспомогательный предельный объект для системы уравнений с малым параметром, после чего получаются результаты о существовании устойчивого периодического решения уравнения (1) для параметров  $b = 2\mu$ , где  $0 < \mu \ll 1, c = 1, d = -1$ . В работе [9] рассматриваются варианты уравнения (1) с различными видами нелинейности, в том числе релейной, для которых строятся асимптотики устойчивых релаксационных циклов и более сложных аттракторов. В работе [4] исследуются медленно

осциллирующие решения и бифуркации периодических уравнения (1), а также сосуществование устойчивых периодических решений и квазипериодических решений. В работе [10] исследуется задача стабилизации маятника для более общего вида: там релейная запаздывающая обратная связь имеет вид знака линейной комбинации  $x$  и  $\dot{x}$  от запаздывающего аргумента. В работе [11] исследуется похожее уравнение, отличающееся значениями параметров и добавлением запаздывающей нелинейности, для которого исследуется существование и устойчивость медленно осциллирующих решений. В работе [12] исследуются бифуркации периодических решений простого варианта уравнения (1). В работе [13] доказана хаотическая динамика для похожего уравнения второго порядка с релейной нелинейностью и запаздыванием. Другие ссылки можно найти в работах [1, 14].

Данная работа посвящена исследованию нелокальной динамики дифференциального уравнения (1) на предмет существования устойчивых периодических решений или хаоса. В главе 1 на множестве начальных функций простого вида определяется оператор первого возвращения (оператор Пуанкаре), доказывается, что динамика этого оператора эквивалентна динамике некоторого одномерного отображения. В главе 2 представлены аналитические результаты о существовании устойчивых введённого в главе 1 одномерного отображения. Последующие разделы посвящены разным аспектам численного исследования динамики данного уравнения. В главе 3 для класса дифференциальных уравнений с запаздыванием, содержащий как частный случай уравнение (1), было получено уравнение в вариациях, или линеаризация системы около известного решения, приложениями которых является дифференцирование решения по начальным условиям, а также вычисление ляпуновских показателей. Глава 4 посвящена особенностям численного построения решения дифференциальных уравнений с запаздыванием и учёту негладкости в правой части уравнения. Демонстрируются значительные упрощения численного метода для случая кусочной постоянности функции в правой части относительно запаздывающего аргумента. Глава 5 посвящена численному исследованию одномерного отображения. В пространстве параметров обнаруживаются фрактальные области существования устойчивых и неустойчивых неподвижных точек отображения, исследуется вопрос мультистабильности. Глава 6 посвящён построению уравнения в вариациях для релейных уравнений с запаздыванием, в разделе 6 полученное уравнение в вариациях использовано для вычисления ляпуновских показателей для аттрактора уравнения (1) и найдены значения параметров, при которых система обладает режимами хаотических колебаний. Раздел 7 посвящён простым периодическим решениям малого периода. Доказано, что уравнение (1) обладает бесконечным числом периодических решений сколь угодно малого периода.

# 1 Оператор первого возвращения

## 1.1 Постановка начальной задачи

Для корректной постановки начальной задачи для дифференциальных уравнений с запаздыванием требуется в качестве начальных условий рассматривать не только значения фазовых переменных, а целую начальную историю на временном отрезке, заведомо содержащем всевозможные значения запаздывающего аргумента [1]. Для уравнения (1) мы будем рассматривать начальную задачу

$$\begin{cases} \ddot{x} + b\dot{x} + cx = d \operatorname{sign}(x(t - \tau)), \\ x(t) = \varphi(t), \quad t \in [-\tau, 0], \end{cases} \quad (2)$$

где функция  $\varphi$  принадлежит классу  $C^1[-\tau, 0]$ , состоящему из непрерывно дифференцируемых функций. Ввиду определения начальной задачи, фазовой переменной для уравнения (1) считается часть решения, взятая на интервале длины  $\tau$ , и фазовым пространством является множество  $C^1[-\tau, 0]$ , на котором определена норма

$$\|\varphi\| = \max_{t \in [-\tau, 0]} |\varphi(t)| + \max_{t \in [-\tau, 0]} |\dot{\varphi}(t)|.$$

**Определение** (Поток  $X_\varphi^t$ ). Пусть  $\varphi \in C^1[-\tau, 0]$  и  $t \geq 0$ . Тогда пусть  $X_\varphi^t : [-\tau, 0] \rightarrow \mathbb{R}$  — это функция, определённая формулой  $X_\varphi^t(s) = x_\varphi(t + s)$ , где  $x_\varphi$ , это решение начальной задачи (2), и  $s \in [-\tau, 0]$ . Выражение  $X_\varphi^t$  называется потоком и, ввиду автономности уравнения (1), отвечает свойству

$$X_\varphi^{t_1+t_2} = X_{(X_\varphi^{t_1})}^{t_2}.$$

## 1.2 Определение оператора первого возвращения

**Замечание.** Мы следуем подходу исследования периодических решений задачи (2), который применяется в работе [5]. В этой работе уравнение (1) исследуется при параметрах  $b = 2\mu$ , где  $0 < \mu \ll 1$ ,  $c = 1$ ,  $d = -1$ , и аналогичным образом определяется класс начальных условий, только вместо функций из класса  $C^1[-\tau, 0]$  рассматриваются пары  $(\varphi, z) \in C[-\tau, 0] \times \mathbb{R}$ , и начальное условие определяется как  $x(t) = \varphi(t), t < 0; x(0) = 0; \dot{x}(0) = z$ . И в данном случае оператор Пуанкаре определяется на множестве таких пар  $(\varphi, z)$  и обнаруживается, что вопрос о неподвижных точках отображения Пуанкаре сводится к вопросу о неподвижных точках одномерного отображения для значений  $z$ , для которого оператор Пуанкаре является надстройкой.

**Определение** (Сечение Пуанкаре  $S$ ). Определим сечение Пуанкаре

$$S = \left\{ \varphi \in C^1[-\tau, 0] : \varphi(0) = 0, \dot{\varphi}(0) \neq 0, \varphi(t) \cdot \dot{\varphi}(0) < 0 \text{ для почти всех } t \in [-\tau, 0) \right\},$$

состоящее из функций  $\varphi(t)$  из фазового пространства, которые в точке  $t = 0$  имеют простой ноль, а на остальной части начального отрезка при  $t \in [-\tau, 0)$  имеют один и тот же знак, разве что за исключением нулей чётной кратности.

Выбор такого сечения Пуанкаре обусловлен тем, что на нём можно ввести отношение эквивалентности, такое что оператор первого возвращения, который будет

определён далее, сводится к одномерному отображению на фактор множестве класса  $S$  по этому отношению эквивалентности.

Действительно, заметим, что при  $\varphi \in S$ , при  $t \in [0, \tau]$  решение начальной задачи (2) находится из начальной задачи

$$\begin{cases} \ddot{x} + b\dot{x} + cx = -d \operatorname{sign} \dot{\varphi}(0), \\ x(0) = 0, \\ \dot{x}(0) = \dot{\varphi}(0), \end{cases}$$

которое однозначно определено значением  $\dot{\varphi}(0)$ . Это позволяет ввести на множестве  $S$  отношение эквивалентности

$$\varphi_1 \sim \varphi_2 \iff \dot{\varphi}_1(0) = \dot{\varphi}_2(0).$$

**Лемма 1.1.** Пусть  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$  — это решения задачи (2) при  $\varphi = \varphi_1 \in S$  и  $\varphi = \varphi_2 \in S$  соответственно. Тогда

$$x_1(t) = x_2(t) \forall t \geq 0 \iff \varphi_1 \sim \varphi_2.$$

**Доказательство.** Если  $\varphi_1 \sim \varphi_2$ , тогда это верно, так как эти решения уже будут совпадать уже при  $t \in [0, \tau]$ , а значит и  $t \geq \tau$  тоже. Если  $\varphi_1 \not\sim \varphi_2$ , тогда  $\dot{x}_1(0) \neq \dot{x}_2(0)$  и эти решения не совпадают в правой окрестности нуля. ■

**Определение** (Параметризация  $\sigma(v)$ ). На множестве классов эквивалентности  $S/\sim$  определена параметризация

$$\sigma : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow S/\sim, \quad \sigma(v) = \{\varphi \in S : \dot{\varphi}(0) = v\}.$$

**Определение** (Время первого возвращения  $T(\varphi)$ ). Пусть  $\varphi \in S$ . Тогда  $T(\varphi) = \inf\{t > 0 : X_\varphi^t \in S\}$  — это время первого возвращения решения во множество  $S$ . Заметим, что по свойству инфимума, если  $X_\varphi^t$  никогда не возвращается в класс  $S$ , то  $T(\varphi) = +\infty$ .

**Определение** (Оператор первого возвращения  $\Pi(\varphi)$ ). Определим оператор первого возвращения (также называемый оператор последования Пуанкаре)  $\Pi(\varphi) = X_\varphi^{T(\varphi)}$ .

**Определение** (Множества  $S_0$  и  $V_0$ ). Заметим, что отображение  $\Pi(\varphi)$ , равно как и время первого возвращения  $T(\varphi)$ , вообще определено не для любых  $\varphi \in S$ , а только для  $\varphi \in S_0$ , где

$$S_0 = \{\varphi \in S : T(\varphi) < +\infty\} \subseteq S.$$

Соответственно, определим множество

$$V_0 = \{v \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : \sigma(v) \subseteq S_0\}.$$

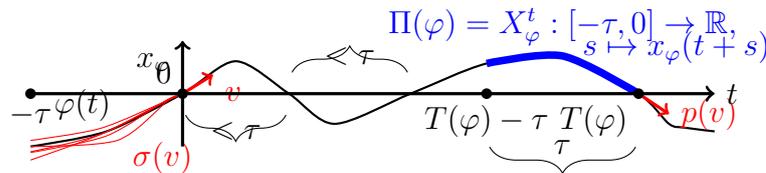


Рис. 1: Иллюстрация к определениям данной главы.

### 1.3 Сведение задачи к изучению одномерного отображения

**Определение** (одномерное отображение  $p(v)$ ). Определим одномерное отображение

$$p(v) = \dot{X}_{\varphi_v}^{T(\varphi_v)} = \dot{x}_{(v)}(T(\varphi_v))$$

где  $\varphi_v \in \sigma(v)$  и  $x_{(v)}$  — это решение начальной задачи (2) при  $\varphi = \varphi_v$ . Отображение определено корректно, так как не зависит от конкретного выбора  $\varphi_v$ , как было показано в лемме 1.1. При этом отображение  $p(v)$  определено только на множестве  $V_0$ . Верно соотношение:

$$\varphi \in \sigma(v) \implies \Pi(\varphi) \in \sigma(p(v)). \quad (3)$$

**Теорема 1.2** (Однозначность периодических точек  $p(v)$  и  $\Pi(v)$ ). Пусть  $k \in \mathbb{N}$ . Верны следующие соотношения:

- Пусть  $\varphi_*$  —  $k$ -периодическая точка отображения  $\Pi$ , тогда  $v_* = \dot{\varphi}_*(0)$  — это  $k$ -периодическая точка отображения  $p$ .
- Пусть  $v_*$  — это  $k$ -периодическая точка отображения  $p$ , тогда существует единственная функция  $\varphi_* \in \sigma(v_*)$  —  $k$ -периодическая точка отображения  $\Pi$ .

**Доказательство.** Пусть  $\varphi_*$  — это  $k$ -периодическая точка отображения  $\Pi$ , то есть  $\Pi^k(\varphi_*) = \varphi_*$ . Пусть  $v_* = \dot{\varphi}_*(0)$ , тогда  $\varphi_* \in \sigma(v_*)$ . Тогда, применив  $k$  раз соотношение (3), получим  $\varphi_* = \Pi^k(\varphi_*) \in \sigma(p^k(v_*))$ . Следовательно,  $p^k(v_*) = v_*$ .

Пусть теперь  $v_*$  — это  $k$ -периодическая точка отображения  $p$ . Тогда пусть  $\Pi^k(\sigma(v_*)) = \{\varphi_*\}$  — образом  $\sigma(v_*)$  для  $\Pi$  является единственная точка, тогда  $\varphi_* \in \sigma(p^k(v_*)) = \sigma(v_*)$  и, следовательно,  $\Pi^k(\varphi_*) \subseteq \Pi^k(\sigma(v_*)) = \{\varphi_*\} \implies \Pi^k(\varphi_*) = \varphi_*$ . ■

**Теорема 1.3.** Соответствующие периодические точки отображений  $p(v)$  и  $\Pi(v)$  являются устойчивыми или неустойчивыми одновременно. Устойчивость для  $p(v)$  понимается в смысле нормы в  $\mathbb{R}$ . Устойчивость для  $\Pi(v)$  понимается в смысле нормы в  $C^1[-\tau, 0]$ .

**Доказательство.** Из устойчивости периодических точек для  $\Pi$  следует устойчивость периодических точек для  $p$  ввиду подчинённости нормы в  $\mathbb{R}$  нормой в  $C^1[-\tau, 0]$ :

$$|\dot{\varphi}_1(0) - \dot{\varphi}_2(0)| \leq \max_{t \in [-\tau, 0]} |\dot{\varphi}_1(t) - \dot{\varphi}_2(t)| \leq \|\varphi_1 - \varphi_2\|.$$

Аналогично из неустойчивости периодических точек для  $p$  следует неустойчивость соответствующих периодических точек для  $\Pi$ .

Из устойчивости периодической точки для  $p$  следует устойчивость соответствующих периодических точек для  $\Pi$  ввиду непрерывной зависимости решения задачи (2) от начального условия. Для решения  $x(t)$  с начальной функцией  $\varphi \in \sigma(v)$  непрерывную зависимость  $x(t)$  и  $\dot{x}(t)$  от параметра  $v$  легко можно показать методом шагов. ■

В связи с предыдущими теоремами, для исследования динамики отображения  $\Pi$  достаточно получить соответствующие результаты для отображения  $p$ . Для удобства мы будем вместо отображения  $p$  исследовать свойства отображения  $\tilde{p}$ .

**Определение** (отображение  $\tilde{p}$ ). Пусть

$$\tilde{p}(v) = |p(v)|. \quad (4)$$

**Замечание.** Ввиду симметрии уравнения относительно умножения решения на  $-1$  верно, что  $p(v) = -p(-v)$ . Поэтому для исследования динамики достаточно рассматривать положительные  $v \in V_0 \cap (0, +\infty) = V_+$ . Заметим, что так как  $\tilde{p}(v) = \pm p(v)$ , то  $p^k(v) = v \implies \tilde{p}^{2k}(v) = v$ , а также  $\tilde{p}^k(v) = v \implies p^{2k}(v) = v$ . Поэтому существование или несуществование периодических точек у отображения  $p$  и их устойчивость можно исследовать по отображению  $\tilde{p}$ .

Дадим ещё несколько полезных определений.

**Определение** (осциллирующее решение). Решение  $x(t)$  уравнения (1) называется осциллирующим, если  $x(t)$  обращается в ноль для сколь угодно больших  $t$ .

**Определение** (характер осциллирующего решение). Осциллирующее решение  $x(t)$  уравнения (1) называется

- медленно осциллирующим, если любые два различных нуля  $t_1, t_2$  функции  $x(t)$  отстоят друг от друга более, чем на величину запаздывания:  $|t_1 - t_2| > \tau$ . Эквивалентно тому, что любой замкнутый интервал длины запаздывания  $\tau$  содержит не более одного нуля решения  $x(t)$ ;
- быстро осциллирующим, если любой замкнутый интервал длины запаздывания  $\tau$  содержит хотя бы два нуля решения  $x(t)$ ;
- не быстро осциллирующим, если для сколь угодно больших  $t$  существует интервал длины запаздывания не содержащий нулей решения  $x(t)$ .

Интерес с точки зрения оператора Пуанкаре представляют медленно и не быстро осциллирующие решения. В случае медленно осциллирующего решения время первого возвращения всегда совпадает с первым положительным нулём решения, а в случае не быстро осциллирующего решения итерации оператора первого возвращения не покидают класса  $S_0$ .

## 2 Аналитические результаты о существовании медленно осциллирующих решений

В данной главе мы кратко опишем результаты, опубликованные в статье [8]. Пусть  $b^2 - 4c > 0$ , что соответствует случаю вещественных корней у характеристического многочлена у линейной части уравнения (1). Пусть также  $d < 0$ , что является случаем отрицательной запаздывающей обратной связи в системе (1). Для данного случая получены аналитические результаты о существовании и области притяжения устойчивых периодических решений, имеющих не больше одного нуля на периоде запаздывания. Для начальной функции  $\varphi \in \sigma(v)$ ,  $v > 0$  методом шагов будет явно построено решение при  $t \in [0, \tau]$  и  $t \in [\tau, T(\varphi) + \tau]$ , где  $T(\varphi)$  определено неявно. Будет определён вид множества  $V_+$ , такого что при  $\varphi \in \sigma(v)$ ,  $v \in V_+$  верно, что  $T(\varphi) < +\infty$ . Далее, при помощи оценок отображения  $\tilde{p}(v)$  и его производной будут получены области в пространстве параметров, при которых  $\tilde{p}(v)$  обладает устойчивой неподвижной точкой, и будет получена зависимость области сходимости этих неподвижных в от параметров.

### 2.1 Построение решения методом шагов

Будем методом шагов строить решение начальной задачи (2) для начальной функции  $\varphi \in \sigma(v)$  для  $v > 0$ . При  $t \in [0, \tau]$  решение задачи (2) совпадает с решением задачи Коши

$$\begin{cases} \ddot{x} + b\dot{x} + cx = -d, \\ x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = v. \end{cases} \quad (5)$$

**Определение** (Часть решения  $x_1(t, v)$ ). Будем обозначать решение задачи (5) как  $x_1(t, v)$ . Для  $x_1(t, v)$  не сложно найти явную формулу

$$x_1(t, v) = \frac{v - d/\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\lambda_1 t} + \frac{v - d/\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{\lambda_2 t} - \frac{d}{\lambda_1 \lambda_2},$$

где числа

$$\lambda_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4c}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4c}}{2},$$

являются вещественными и различными (ввиду предположения  $b^2 - 4c > 0$ ), а также отличными от нуля (так как  $c \neq 0$ ).

**Лемма 2.1.** Функция вида  $f(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t} + C$  для любых  $A, B, C, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$  :  $A^2 + B^2 \neq 0$ ,  $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$ ,  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  имеет не более одного экстремума. Если таковой экстремум существует, то он является глобальным минимумом или максимумом функции  $f(t)$ .

**Доказательство.** Функция  $f$  является гладкой, поэтому для доказательства того, что она имеет не более одного экстремума достаточно показать, что уравнение  $f'(t) = 0$  имеет не более одного корня. И действительно, явно написав это уравнение, получим

$$f'(t) = 0 \iff A\lambda_1 e^{\lambda_1 t} + B\lambda_2 e^{\lambda_2 t} = 0 \iff e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t} = -\frac{B\lambda_2}{A\lambda_1}.$$

Данное уравнение имеет ровно один корень  $t_* = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \ln \left( -\frac{B\lambda_2}{A\lambda_1} \right)$ , если величина под логарифмом положительна, и не имеет корней в противном случае. ■

Заметим, что  $x_1(t, v)$  при фиксированном  $v$  является функцией вида  $f(t)$  из леммы. При этом  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  так как  $b^2 - 4c \neq 0$ ;  $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$  так как  $c \neq 0$ ; случай  $A^2 + B^2 = 0$  выполним только при условии  $\lambda_1 = \lambda_2$ , что уже исключено. То же верно и для функции  $x_2(t, v)$ , которая будет определена позже.

**Лемма 2.2.** Следующие утверждения эквивалентны:

1.  $x_1(t, v) > 0$  при  $t \in (0, \tau]$ ;
2.  $x_1(\tau, v) > 0$ ;
3.  $v > v_0$ , где  $v_0 = d \cdot \frac{(1 - e^{\lambda_2 \tau})/\lambda_2 - (1 - e^{\lambda_1 \tau})/\lambda_1}{e^{\lambda_1 \tau} - e^{\lambda_2 \tau}}$ ;

**Доказательство.** Докажем сначала, что утверждение 1 и 2 эквивалентны. Утверждение 2 является частным случаем утверждения 1 при  $t = \tau$ . Пусть верно утверждение 2, то есть решение  $x_1(t, v)$  в точке  $t = \tau$  имеет тот же знак, что и в правой окрестности нуля. Предположим противное, существует  $t_* \in (0, \tau]$  такой, что  $x_1(t_*, v) = 0$ . Так как  $x_1(\tau, v) \neq 0$ , то  $t_* \neq \tau$ . Так как  $x_1(0, v) = x_1(t_*, v) = 0$ , то по теореме Ролля на интервале  $(0, t_*)$  есть экстремум функции. По лемме 2.1 это единственный экстремум. Но тогда  $t_*$  не является экстремумом и в его правой окрестности решение отрицательно. Следовательно, так как  $x_1(\tau, v) > 0$ , то на интервале  $(t_*, \tau)$  у решения есть ещё один ноль  $t_{**}$ , а значит по теореме Ролля на интервале  $(t_*, t_{**})$  у решения есть ещё один экстремум. Противоречие с утверждением леммы 2.1, согласно которой функция  $x_1$  может иметь не более одного экстремума. Утверждение 3 эквивалентно неравенству 2 и получается из него выражением  $v$ . ■

**Лемма 2.3.** Верно равенство  $\text{sign}(v_0) = \text{sign}(d)$ .

**Доказательство.** Это тривиально следует из определения  $v_0$ , если заметить, что  $g(z) = (1 - e^{z\tau})/z$  является убывающей при  $\tau > 0$ . ■

Следовательно, так как  $d < 0$ , то верно, что  $T(\sigma(v)) > \tau$ . Следовательно, если  $T(\sigma(v)) < +\infty$ , то  $T(\sigma(v))$  — это первый простой положительный ноль решения задачи (2). Следовательно, для  $t \in [\tau, T(v) + \tau)$  (даже если  $T(v) = +\infty$ ) решение начальной задачи (2) совпадает с решением задачи Коши

$$\begin{cases} \ddot{x} + b\dot{x} + cx = d, \\ x(\tau) = x_1(\tau, v), \quad \dot{x}(\tau) = \dot{x}_1(\tau, v), \end{cases} \quad (6)$$

**Определение** ( $x_2(t, v)$ ). Будем обозначать решение задачи (6) как  $x_2(t, v)$ . Для  $x_2(t, v)$  не сложно найти явную формулу

$$x_2(t, v) = \frac{v + (2e^{-\lambda_1 \tau} - 1)d/\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\lambda_1 t} + \frac{v + (2e^{-\lambda_2 \tau} - 1)d/\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{\lambda_2 t} + \frac{d}{\lambda_1 \lambda_2} \quad (7)$$

## 2.2 Свойства одномерного отображения

**Лемма 2.4.** Пусть  $v_* \in V_+$ , тогда  $(0, v_*] \subseteq V_+$ . Следовательно, множество  $V_+$  имеет вид интервала  $(0, \bar{v})$  для некоторого  $\bar{v} \in [0, +\infty]$  (случай  $\bar{v} = 0$  соответствует пустому множеству, случай  $\bar{v} = +\infty$  соответствует всем положительным числам).

**Доказательство.** Пусть  $v_* \in V_+$ . Заметим, что формулу (7) можно записать в виде  $x_2(t, v) = A(t) \cdot v + B(t)$ , где  $A(t) = \frac{e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}}{\lambda_1 - \lambda_2} > 0$ , при этом  $A(t), B(t)$  не зависят от  $v$ . Следовательно, для любых  $v \in (0, v_*)$  с одной стороны верно, что  $x_2(\tau, v) = x_1(\tau, v) > 0$ , а с другой стороны верно, что  $x_2(T(\sigma(v)), v) = x_2(T(\sigma(v)), v) - x_2(T(\sigma(v)), v_*) = A(T(\sigma(v)))(v - v_*) < 0$ . Следовательно, по теореме о промежуточном значении для некоторого  $t \in (\tau, T(\sigma(v)))$  решение  $x_2(t, v)$  обращается в ноль. При этом существует именно простой ноль, так как всякий простой ноль решения  $x_2(t, v)$  вместе с тем являлся бы и экстремумом, и в нём не произошло бы смены знака. Следовательно,  $T(\sigma(v)) \in (\tau, +\infty)$  и  $v \in V_+$ . ■

**Лемма 2.5.** Функция  $T(\sigma(v))$  является непрерывно дифференцируемой на множестве  $V_+$ , и её производная может быть неявно выражена как

$$\frac{dT(\sigma(v))}{dv} = \frac{\partial_v x_2(T(\sigma(v)), v)}{-\dot{x}_2(T(\sigma(v)), v)} = \frac{A(T(\sigma(v)))}{\tilde{p}(v)} = \frac{\left( \frac{e^{\lambda_1 T(\sigma(v))} - e^{\lambda_2 T(\sigma(v))}}{\lambda_1 - \lambda_2} \right)}{\tilde{p}(v)} > 0, \quad (8)$$

**Доказательство.** Заметим, что при  $v \in V_+$  верно, что

$$x_2(T(\sigma(v)), v) = 0, \quad \dot{x}_2(T(\sigma(v)), v) \neq 0.$$

Функция  $x_2$  непрерывно дифференцируема по совокупности аргументов. Следовательно, применяя теорему о неявной функции, получаем, что  $T(\sigma(v))$  — это непрерывно дифференцируемая функция на  $V_+$ , и

$$\frac{dT(\sigma(v))}{dv} = -\frac{\partial_v x_2(T(\sigma(v)), v)}{\dot{x}_2(T(\sigma(v)), v)}.$$

Из этого непосредственно получается формула (8). ■

**Лемма 2.6.** Отображение  $\tilde{p}(v)$ , определённое формулой (4), непрерывно дифференцируемо, и его производную можно неявно выразить как

$$\frac{d\tilde{p}(v)}{dv} = \frac{v + \tilde{v}}{\tilde{p}(v)} e^{(\lambda_1 + \lambda_2)T(\sigma(v))}, \quad (9)$$

где

$$\tilde{v} = 2d \frac{e^{-\lambda_1 \tau} - e^{-\lambda_2 \tau}}{\lambda_1 - \lambda_2}.$$

Легко увидеть, что так как  $d < 0$ , то  $\tilde{v} > 0$ . Следовательно, отображение  $\tilde{p}(v)$  строго возрастает на интервале  $V_+$ .

**Доказательство.** Заметим, что так как  $T(\sigma(v))$  — это первый положительный ноль решения, то в нём знак производной противоположен знаку  $v$ . Следовательно,

$$\tilde{p}(v) = |p(v)| = -\dot{x}_2(T(\sigma(v)), v),$$

отсюда

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{p}(v)}{dv} &= \frac{d}{dv}(-\dot{x}_2(T(\sigma(v)), v)) = -\ddot{x}_2(T(\sigma(v)), v) \cdot \frac{dT(\sigma(v))}{dv} - \partial_v \dot{x}_2(T(\sigma(v)), v) = \\ &= \frac{-\ddot{x}_2(T(\sigma(v)), v) \partial_v x_2(T(\sigma(v)), v)}{-\dot{x}_2(T(\sigma(v)), v)} - \partial_v \dot{x}_2(T(\sigma(v)), v) = \\ &= \frac{-\ddot{x}_2(T(\sigma(v)), v) \partial_v x_2(T(\sigma(v)), v) + \dot{x}_2(T(\sigma(v)), v) \partial_v \dot{x}_2(T(\sigma(v)), v)}{\tilde{p}(v)}. \end{aligned}$$

Далее, воспользовавшись формулой (7) для вычисления производных  $x_2$  в числителе, после многочисленных сокращений получим формулу (9). ■

**Лемма 2.7.** Из равенств  $x_2(T(\sigma(v)), v) = 0$ ,  $\dot{x}_2(T(\sigma(v)), v) = -\tilde{p}(v)$  следует соотношение

$$\tilde{p}(v) = d/\lambda_i - (v + (2e^{-\lambda_i\tau} - 1)d/\lambda_i) e^{\lambda_i T(\sigma(v))}, \quad i = 1, 2. \quad (10)$$

**Доказательство.** Для доказательства достаточно выразить выражение  $e^{\lambda_1 T(\sigma(v))}$  или  $e^{\lambda_2 T(\sigma(v))}$  из равенства  $x_2(T(\sigma(v)), v) = 0$  и подставить его в равенство  $\tilde{p}(v) = -\dot{x}_2(T(\sigma(v)), v)$ . ■

## 2.3 Существование устойчивой неподвижной точки

**Определение** (параметры  $\lambda$  и  $\Lambda$ ). Пусть  $\lambda = \min(\lambda_1, \lambda_2)$ ,  $\Lambda = \max(\lambda_1, \lambda_2)$ .

**Теорема 2.8.** Пусть  $b^2 - 4c > 0$  и  $d < 0$ . Тогда отображение  $\tilde{p}(v)$  не имеет периодических точек. При этом

- если  $\Lambda\tau < \ln 2$  и  $\lambda < \frac{\Lambda}{1 - 2e^{-\Lambda\tau}}$ , то отображение  $\tilde{p}(v)$  имеет устойчивую неподвижную точку;
- если  $\Lambda\tau > \ln 2$  или  $\lambda > \frac{\Lambda}{1 - 2e^{-\Lambda\tau}}$ , то  $\tilde{p}(v)$  не имеет неподвижных точек.

**Доказательство.** При условиях теоремы верно, что  $V_+ = (0, \bar{v})$  для некоторого  $\bar{v} \in [0, +\infty]$  (лемма 2.4); отображение  $\tilde{p}(v)$  строго возрастает (лемма 2.6).

Рассмотрим ряд случаев:

**(Случай 1).** Пусть  $\Lambda\tau > \ln 2$ . Тогда  $2e^{-\Lambda\tau} - 1 < 0$  и при  $t \geq \tau$  верно, что  $(2e^{-\Lambda\tau} - 1)e^{\Lambda t} - (2e^{-\lambda\tau} - 1)e^{\lambda t} < (2e^{-\Lambda\tau} - 1)e^{\Lambda t} - (2e^{-\Lambda\tau} - 1)e^{\lambda t} = (2e^{-\Lambda\tau} - 1)(e^{\Lambda t} - e^{\lambda t}) < 0$ . Следовательно, для любых  $t \geq \tau$

$$\dot{x}_2(t, v) = v \frac{\Lambda e^{\Lambda t} - \lambda e^{\lambda t}}{\Lambda - \lambda} + 2d \cdot \frac{(2e^{-\Lambda\tau} - 1)e^{\Lambda t} - (2e^{-\lambda\tau} - 1)e^{\lambda t}}{\Lambda - \lambda} > 0.$$

И, так как  $x_2(\tau, v) > 0$ , то  $x_2(t, v)$  не пересекает ноль ни при каких  $t \geq \tau$ ,  $v > 0$ . Следовательно,  $V_+ = \emptyset$  и о существовании неподвижных точек речи нет.

**(Случай 2).** Пусть  $0 < \Lambda\tau < \ln 2$ . Тогда в  $x_2(t, v)$  при достаточно малых  $v$  коэффициент при самом быстро растущем к бесконечности слагаемом  $e^{\Lambda t}$  меньше нуля. С другой стороны,  $x_2(\tau, v) > 0$ . Следовательно, при  $v$  достаточно близких к нулю  $T(\sigma(v)) \in (\tau, +\infty)$  и отображение  $\tilde{p}(v)$  определено. При этом предел  $\lim_{v \rightarrow 0^+} \tilde{p}(v)$ , далее обозначаемый как  $\tilde{p}(0^+)$ , существует и  $\tilde{p}(0^+) \geq 0$  так как при  $v > 0$  функция  $\tilde{p}(v)$  ограничена снизу нулём ( $\tilde{p}(v) > 0$ ) и возрастает. При этом имеет место строгое неравенство  $\tilde{p}(0^+) > 0$ , так как из равенства  $\tilde{p}(0^+) = 0$  следует существование у функции  $x_2(t, 0^+)$  корня нечётной кратности больше двух, что невозможно.

Рассмотрим теперь ряд случаев в предположении  $0 < \Lambda\tau < \ln 2$ :

**(Случай 2.1).** Пусть  $\Lambda + \lambda \geq 0$ . Пусть  $v_* > 0$  — наименьшая положительная неподвижная точка  $\tilde{p}(v)$ , тогда

$$\frac{d\tilde{p}(v_*)}{dv} = \frac{v_* + \tilde{v}}{v_*} e^{(\Lambda + \lambda)T(\sigma(v_*))} \geq \frac{v_* + \tilde{v}}{v_*} > 1.$$

Рассмотрим функцию  $q(v) = \tilde{p}(v) - v$ , корни которой однозначно соответствуют неподвижным точкам  $\tilde{p}(v)$ . Тогда с одной стороны  $q(0^+) = \tilde{p}(0^+) > 0$ , а с другой стороны  $\frac{dq(v_*)}{dv} > 1 - 1 = 0$ , то есть в левой окрестности  $v_*$  верно, что  $q(\cdot) < 0$ . По теореме

о промежуточном значении у  $q$  есть ещё один ноль на интервале  $(0, v_*)$ , что противоречит тому, что  $v_*$  — это наименьшая положительная неподвижная точка  $\tilde{p}(v)$ . Следовательно,  $\tilde{p}(v)$  не имеет неподвижных точек.

**(Случай 2.2).** Пусть  $\Lambda + \lambda < 0$ , тогда  $\lambda < -\Lambda < 0$ . При  $v < -(2e^{-\Lambda\tau} - 1)d/\Lambda$  функция  $x_2(t, v)$  стремится к минус бесконечности при  $t \rightarrow \infty$ , следовательно, где-то ноль пересекает, а при  $v = -(2e^{-\Lambda\tau} - 1)d/\Lambda$  функция  $x_2(t, v)$  монотонно стремится к  $d/(\Lambda\lambda) > 0$  и никогда ноль не пересекает. Следовательно,  $\bar{v} = -(2e^{-\Lambda\tau} - 1)d/\Lambda$ . Предположим, что  $t_* = \lim_{v \rightarrow \bar{v}} T(\sigma(v)) < +\infty$ , тогда  $x_2(t_*, \bar{v}) = \lim_{v \rightarrow \bar{v}} x_2(T(\sigma(v)), v) = 0$  — противоречие. Следовательно  $T(\sigma(v)) \rightarrow +\infty$  при  $v \rightarrow \bar{v}$ . Далее, из соотношения (10) получим

$$\tilde{p}(v) = d/\lambda - (v + (2e^{-\lambda\tau} - 1)d/\lambda) e^{\lambda T(\sigma(v))} \implies \lim_{v \rightarrow \bar{v}} \tilde{p}(v) = d/\lambda.$$

Так как  $\tilde{p}(v)$  возрастает, то  $d/\lambda$  — это точная верхняя грань. Теперь, если  $\bar{v} > d/\lambda$ , то по теореме о промежуточном значении, применённой к функции  $q(v) = \tilde{p}(v) - v$ , получим, что отображение  $\tilde{p}(v)$  имеет неподвижную точку при этом она, очевидно, устойчива. При  $\bar{v} < d/\lambda$  можно показать, что для всякой неподвижной точки  $v_*$  должно быть верно, что  $d\tilde{p}(v_*)/dv > 1$ , что невозможно. Условие  $\bar{v} < d/\lambda$  (соответственно  $\bar{v} > d/\lambda$ ) эквивалентно неравенству  $\lambda < \frac{\Lambda}{1 - 2e^{-\Lambda\tau}}$  (соответственно  $\lambda > \frac{\Lambda}{1 - 2e^{-\Lambda\tau}}$ ).

**(Случай 3).** Пусть  $\Lambda < 0$ . Тогда  $\lambda_1, \lambda_2 \leq \Lambda < 0$  и  $\lambda < \frac{\Lambda}{1 - 2e^{-\Lambda\tau}}$ . Заметим, что  $x_2(t, v) \rightarrow x_* = d/(\lambda_1\lambda_2) < 0$  при  $t \rightarrow \infty$ . Так как  $x_2(\tau, v) > 0$  и  $x_* < 0$ , то на интервале  $t \in (\tau, +\infty)$  решение обязательно имеет простой ноль для любых  $v$ . Следовательно,  $V_+ = (0, +\infty)$ . Далее, из соотношения (10) получим

$$\tilde{p}(v) = d/\lambda - (v + (2e^{-\lambda\tau} - 1)d/\lambda) e^{\lambda T(\sigma(v))}.$$

Так как здесь выражение в скобках положительно при  $v > 0$ , то  $\tilde{p}(v)$  ограничено сверху числом  $d/\lambda > 0$  при  $v > 0$ . Следовательно, функция  $q(v) = \tilde{p}(v) - v < 0$  при  $v > \frac{d}{\lambda}$ . Следовательно, по теореме о промежуточном значении  $q(v)$  имеет ноль  $v_*$  на промежутке  $(0, d/\lambda)$ , являющийся устойчивой неподвижной точкой  $\tilde{p}(v)$ . ■

На рис. 2 изображены области пространства параметров, отвечающие случаям из теоремы 2.8. При этом можно заметить, что вид рис. 2 не зависит от выбора  $\tau > 0$ . На рис. 3 и 4 изображены графики отображения  $\tilde{p}(v)$  при соответствующих параметрах. На рис. 3 отражён характер потери устойчивой неподвижной точки при переходе параметров из области (c) в область (b<sub>2</sub>). На рис. 5 изображено численное решение начальной задачи (2) при значениях параметров из случая (c), имеет место наматывание на устойчивый цикл, соответствующий устойчивой неподвижной точке отображения  $\tilde{p}(v)$ .

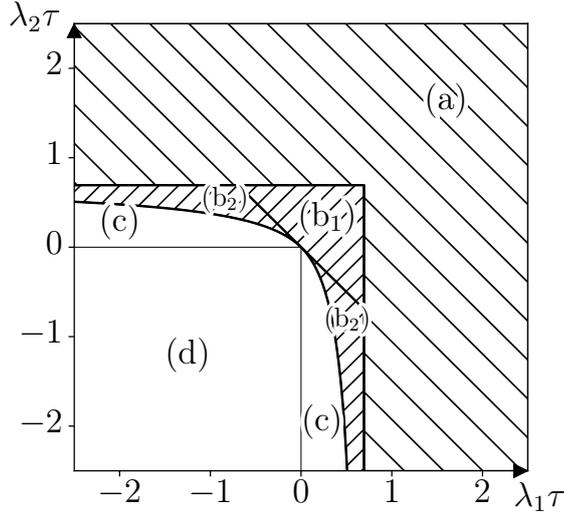


Рис. 2: Области пространства параметров, отвечающие случаям из теоремы 2.8. Область (a) отвечает условию  $\Lambda\tau > 0$ ; область (b<sub>1</sub>) отвечает условию  $0 < \Lambda\tau < \ln 2$ ,  $\Lambda + \lambda > 0$ ; область (c) отвечает условию  $0 < \Lambda\tau < \ln 2$ ,  $\lambda < \frac{\Lambda}{1 - 2e^{-\Lambda\tau}}$ ; область (d) отвечает условию  $\Lambda < 0$ .

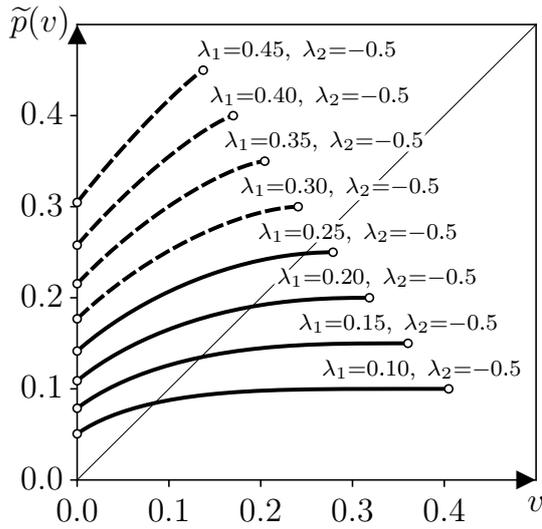


Рис. 3: Графики отображения  $\tilde{p}(v)$  в случаях (b<sub>2</sub>) (пунктиром) и (c) (сплошной).

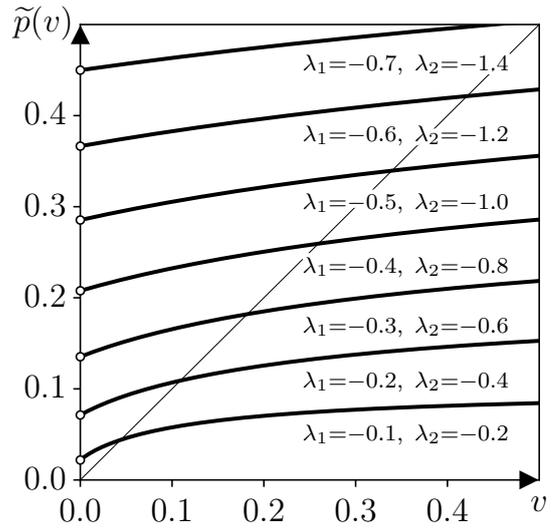


Рис. 4: Графики отображения  $\tilde{p}(v)$  в случае (d) (при  $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ ).

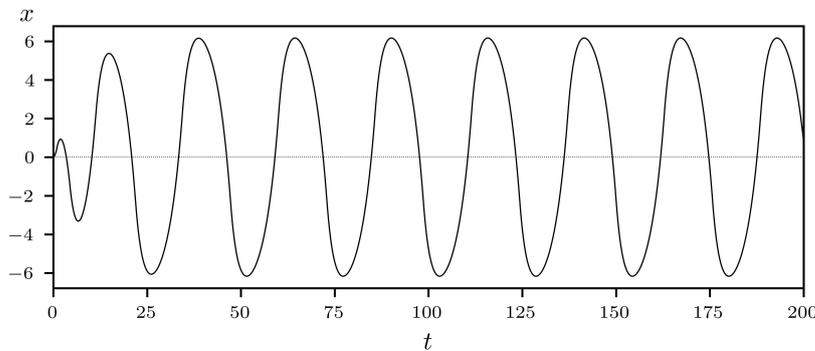


Рис. 5: График решения начальной задачи (2) при соответствующих параметрах  $b = 0.25$ ,  $c = -0.125$ ,  $d = -1$ ,  $\tau = 1$  и начальная функция принадлежит классу  $\sigma(v)$  для  $v = 0.05$ . В каждом из случаев решение стремится к устойчивому циклу соответствующему устойчивой неподвижной точке для  $\tilde{p}(v)$ . Первый график отвечает случаю (d), а второй отвечает случаю (c).



где  $\varepsilon > 0$  — малый параметр. Пусть выполнены следующие условия невырожденности:

- Функция возмущений  $w_\varepsilon$  ограничена на любом конечном отрезке равномерно по  $\varepsilon$ .
- Все точки перехода функции  $x_\tau$  невырождены.
- Для любой точки перехода  $t$  для  $x_\tau$  точка  $t - \tau(t)$  не является точкой перехода для  $x_\tau$ .

Для функции возмущения  $w_\varepsilon(t)$  верно равенство  $w_\varepsilon(t) = w(t) + O(\varepsilon)$ , где  $w(t)$  является решением начальной задачи

$$\begin{cases} \dot{w} = f'_x(x, t)w + R'(x_\tau)w_\tau + \sum_i \delta(t - t_i) \frac{(r_2(x_\tau) - r_1(x_\tau))b'(x_\tau)}{|(1 - \tau')b'(x_\tau)\dot{x}_\tau|} w_\tau, \\ w(t) = \psi(t), \quad t \in [-\bar{\tau}, 0], \end{cases} \quad (13)$$

где значения  $t_i$  пробегает все нули решения  $x(t - \tau(t))$ . Здесь  $O(\varepsilon)$  равномерно по  $t$  на любом конечном отрезке без окрестностей точек  $t_i$ .

**Доказательство.** Подставим  $x(t) + \varepsilon w_\varepsilon(t)$  в начальную задачу (12). Воспользовавшись тем, что  $x(t)$  удовлетворяет начальной задаче (11), получим, что

$$\begin{cases} \dot{w}_\varepsilon = \frac{f(x + \varepsilon w_\varepsilon, t) - f(x, t)}{\varepsilon} + \frac{R(x_\tau + \varepsilon w_{\varepsilon\tau}) - R(x_\tau)}{\varepsilon}, \\ w(t) = \psi(t), \quad t \in [-\bar{\tau}, 0]. \end{cases} \quad (14)$$

Далее, для любых значений  $t$ , не являющихся переходными точками функции  $x_\tau$  верно, что

$$\dot{w}_\varepsilon = f'_x(x, t)w_\varepsilon + R'(x_\tau)w_{\varepsilon\tau} + O(\varepsilon),$$

ввиду непрерывной дифференцируемости функций в окрестности соответствующих значений. Пусть теперь  $t_0$  — это переходная точка функции  $x_\tau$ :

$$b(x_\tau(t_0)) = 0, \quad \frac{d}{dt}b(x_\tau(t))|_{t=t_0} = b'(x_\tau(t_0))\dot{x}_\tau(1 - \tau') \neq 0.$$

Тогда, по теореме об обратной функции, в окрестности точки 0 определена непрерывно дифференцируемая функция  $\xi$ , такая что

$$\xi(b(x_\tau(t))) = t.$$

Далее, пусть  $t_1$  — это точка перехода функции  $x_\tau + \varepsilon w_{\varepsilon\tau}$ , тогда

$$\begin{aligned} b(x_\tau(t_1) + \varepsilon w_{\varepsilon\tau}(t_1)) &= 0 \implies \\ b(x_\tau(t_1)) &= -b'(x_\tau(t_1))\varepsilon w_{\varepsilon\tau}(t_1) + o(\varepsilon) \implies \\ \xi(b(x_\tau(t_1))) &= \xi(-b'(x_\tau(t_1))\varepsilon w_{\varepsilon\tau}(t_1) + o(\varepsilon)) \implies \\ t_1 &= t_0 - \xi'(0)b'(x_\tau(t_1))\varepsilon w_{\varepsilon\tau}(t_1) + o(\varepsilon) \implies \\ t_1 - t_0 &= -\varepsilon \frac{b'(x_\tau(t_1))w_{\varepsilon\tau}(t_1)}{\frac{d}{dt}b(x_\tau(t))|_{t=t_0}} + o(\varepsilon). \end{aligned}$$

Теперь, так как  $t_0 - \tau(t_0)$  не является точкой перехода верно, что  $\dot{w}_{\varepsilon\tau} = f'_x(x_\tau, t - \tau(t))w_{\varepsilon\tau} + R'(x_{\tau\tau})w_{\tau\tau} + O(\varepsilon)$  — равномерно ограниченная по  $\varepsilon$  величина. Тогда  $w_{\varepsilon\tau}(t_1) = w_{\varepsilon\tau}(t_0) + O(\varepsilon)$ , и справедливо, что

$$t_1 - t_0 = -\varepsilon \frac{b'(x_\tau)w_{\varepsilon\tau}}{b'(x_\tau)\dot{x}_\tau(1 - \tau')} \Big|_{t=t_0} + o(\varepsilon).$$

Заметим, что в окрестности точки  $t_0$  правая часть уравнения (14) имеет величину порядка  $1/\varepsilon \rightarrow \infty$  (см рис. 6). Однако временной отрезок между  $t_0$  и  $t_1$ , на котором это верно имеет длину порядка  $\varepsilon$ . Этим обстоятельством объясняется возникновение дельта функции в уравнении в вариациях.

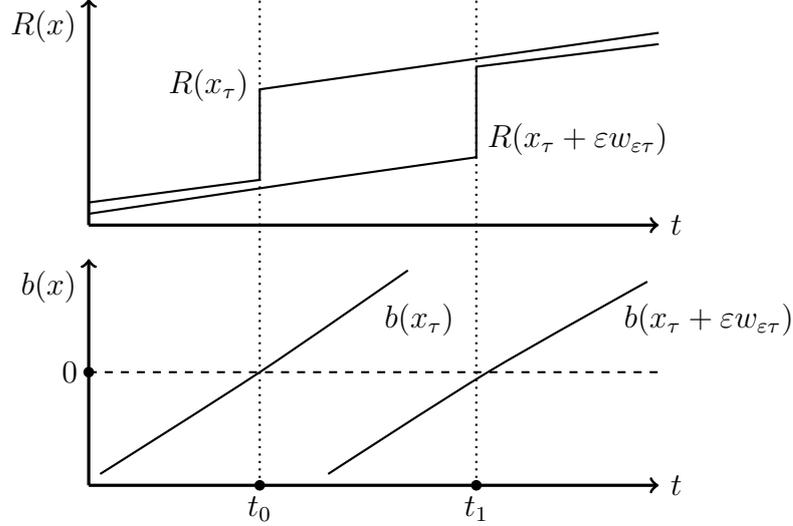


Рис. 6: Разрыв функции  $R$  приводит к тому что правая часть уравнения в формуле (14) в окрестности точки перехода  $t_0$  функции  $x_\tau$  имеет величину порядка  $1/\varepsilon \rightarrow \infty$ .

Пусть решение  $w_\varepsilon$  найдено до момента  $\min(t_0, t_1)$ . Так как  $t_1 - t_0 = O(\varepsilon)$ , то

$$\begin{aligned} w_\varepsilon(t_1) - w_\varepsilon(t_0) &= O(\varepsilon) + \int_{t_0}^{t_1} \frac{R(x_\tau + \varepsilon w_{\varepsilon\tau}) - R(x_\tau)}{\varepsilon} ds = \\ &= O(\varepsilon) - \text{sign}(t_1 - t_0) \text{sign} \left( \frac{d}{dt} b(x_\tau(t)) \Big|_{t=t_0} \right) \int_{t_0}^{t_1} \frac{r_2(x_\tau) - r_1(x_\tau)}{\varepsilon} ds = \\ &= O(\varepsilon) + \text{sign}(t_1 - t_0) \frac{(r_2(x_\tau) - r_1(x_\tau))b'(x_\tau)w_{\varepsilon\tau}}{|b'(x_\tau)\dot{x}_\tau(1 - \tau')|} \Big|_{t=t_0}. \end{aligned}$$

Следовательно, в малой окрестности точки  $t_0$  происходит быстрое изменение  $w_\varepsilon$  на величину  $\frac{(r_2(x_\tau) - r_1(x_\tau))b'(x_\tau)w_{\varepsilon\tau}}{|b'(x_\tau)\dot{x}_\tau(1 - \tau')|} \Big|_{t=t_0}$ . ■

**Замечание.** Для уравнения (1) вариационное уравнение (13) принимает вид

$$\begin{cases} \ddot{w} + bw + cw = 2d \cdot \sum_i \delta(t - t_i) \frac{w(t - \tau)}{|\dot{x}(t - \tau)|}, \\ w(t) = \psi(t), \quad t \in [-\tau, 0]. \end{cases} \quad (15)$$

**Замечание.** Формулу (13) можно получить формально дифференцируя функцию в точке в смысле обобщённых функций. Проделаем это для случая  $R(x_\tau) = r \cdot H(b(x_\tau))$ ,

где  $H(z)$  — ступенчатая функция Хевисайда ( $= 0$  при  $z < 0$ ,  $= 1$  при  $z > 0$ ) и  $r \in \mathbb{R}^d$  — величина скачка. Тогда, согласно цепному правилу,

$$\frac{dR(x_\tau)}{dx_\tau} = r \cdot \delta(b(x_\tau)) \cdot b'(x_\tau),$$

но тогда в виду правила для композиции с дельта функцией получаем, что

$$\frac{dR(x_\tau)}{dx_\tau} = r \cdot \sum_i \frac{\delta(t - t_i)}{|db(x_\tau)/dt|} \cdot b'(x_\tau) = \sum_i \delta(t - t_i) \frac{rb'(x_\tau)}{|(1 - \tau')b'(x_\tau)\dot{x}_\tau|}.$$

Где  $t_i$  перечисляют все нули функции  $b(x_\tau) = b(x(t - \tau(t)))$ .

### 3.3 Приложения

Уравнение в вариациях описывает эволюцию малых возмущений начальных функций, подобно тому как производная функции описывает как бесконечно малое изменение аргумента отражается на изменении образа. Пусть  $x_\varphi(t)$  — это решение задачи (11) и  $w_{\varphi,\psi}$  — это соответствующее ему решение задачи (13), тогда верно соотношение

$$w_{\varphi,\psi} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{x_{\varphi+\varepsilon\psi}(t) - x_\varphi(t)}{\varepsilon}, \quad (16)$$

которое можно интерпретировать как производную решения по направлению изменения начальных условий.

**Теорема 3.2.** Заметим, что уравнение (13) является линейным, а значит его решения образуют линейное пространство. Пусть  $R$  — это кусочно постоянная функция, то есть  $R' \equiv 0$ , тогда любое решение уравнения (13) за конечное время попадает на конечномерное линейное подпространство решений уравнения (13). Следовательно, спектр ляпуновских показателей (определён в следующей главе) в этом случае всегда состоит из конечного числа значений, а ляпуновская размерность (определена в следующей главе) не превышает размерности этого линейного подпространства.

**Доказательство.** Пусть  $r_1(x) = r_1 = \text{const}$  и  $r_2(x) = r_2 = \text{const}$ . Тогда уравнение (13) имеет вид

$$\begin{cases} \dot{w} = f'_x(x, t)w + \sum_i \delta(t - t_i) \frac{(r_2(x_\tau) - r_1(x_\tau))b'(x_\tau)}{|(1 - \tau')b'(x_\tau)\dot{x}_\tau|} w_\tau, \\ w(t) = \psi(t), \quad t \in [-\bar{\tau}, 0]. \end{cases} \quad (17)$$

Пусть  $e_1(t), \dots, e_n(t)$  — это фундаментальная система решений обыкновенного неавтономного линейного дифференциального уравнения

$$\dot{w} = f'_x(x, t)w,$$

тогда решение уравнения (17) записывается как

$$w(t) = \begin{cases} \psi(t), & t \leq 0, \\ \sum_{s=1}^n c_{i,s} e_s(t), & t \in [t_i, t_{i+1}), \end{cases}$$

где  $t_0 = 0$  и  $t_i$  при  $i \geq 1$  это упорядоченный набор точек перехода функции  $x_\tau$ , и  $c_{i,s}$  — некоторые константы. Пусть  $t_k > \bar{\tau}$ , тогда, как легко заметить, коэффициенты

$c_{i,s}$  при  $i \geq k$  линейным образом выражаются через коэффициенты  $c_{i,s}$  при  $i < k$ . Пространство этих коэффициентов конечномерно и сюръективно линейным образом отображается на линейное пространство решений при  $t \geq t_k$ , которое, следовательно, конечномерно и имеет размерность не более  $n \cdot k$ . Если такой минимальный  $k$  равен 1, то размерность пространства решений становится не более порядка системы  $n$ . ■

Как следствие, аттрактор системы с кусочно постоянной запаздывающей обратной связью, на котором решения являются не быстро осциллирующими, имеет ляпуновская размерность не выше порядка системы. Также конечная размерность пространства решений уравнения в вариациях говорит нам об эквивалентности всех норм на этом пространстве.

## 4 Особенности численного построения решений

### 4.1 Интегрирование уравнений с запаздыванием

Рассмотрим начальную задачу для уравнения с запаздыванием общего вида

$$\begin{cases} \dot{y} = f(t, y(t), y(t - \tau(t))), \\ y(t) = \varphi(t), \quad t \in [-\bar{\tau}, 0], \end{cases} \quad (18)$$

где  $y(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $\tau(t) \geq \underline{\tau} > 0$ ,  $\tau(t) \leq \bar{\tau} < +\infty$ .

Классическим подходом для численного построения решений уравнений с запаздыванием является адаптация непрерывных методов Рунге-Кутты, где для вычисления значений запаздывающего аргумента в промежуточных значениях временной сетки используется полиномиальная интерполяция [15, 16].

**Определение** (Непрерывные методы Рунге-Кутты). Непрерывным методом Рунге-Кутты [15–17] для построения численного решения обыкновенного дифференциального уравнения

$$\begin{cases} \dot{z} = f(t, z), \\ z(t_0) = z_0, \end{cases}$$

называется формула вида

$$\begin{aligned} z_{n+1} &= z_n + h_n \sum_{i=1}^s b_i K_{n,i}, \\ K_{n,i} &= f \left( t_n + c_i h_n, z_n + h_n \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j} K_{n,j} \right), \\ \zeta_n(\theta) &= z_n + h_n \sum_{i=1}^s \beta_i(\theta) K_{n,i}, \end{aligned} \quad (19)$$

где  $a_{i,j}, b_i, c_i \in \mathbb{R}$ , величина  $h_n = t_{n+1} - t_n$  называется величиной шага, набор значений  $\Delta = (t_0, t_1, \dots, t_N)$  называется временной сеткой,  $\beta_i(\theta)$  — многочлены от переменной  $\theta \in [0, 1]$ , при этом  $\beta_i(0) = 0, \beta_i(1) = b_i$ , так что  $\zeta_n(0) = z_n, \zeta_n(1) = z_{n+1}$ . Таким образом, интерполяционный многочлен  $\zeta_n(\theta)$  является приближением решения дифференциального уравнения на целом промежутке  $[t_n, t_{n+1}]$ .

Для начальной задачи (18) формула (19) тогда применяется как

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + h_n \sum_{i=1}^s b_i K_{n,i}, \\ K_{n,i} &= f \left( t_n + c_i h_n, z_n + h_n \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j} K_{n,j}, \Psi \left( t_n + c_i h_n - \tau(t_n + c_i h_n) \right) \right), \\ \psi_n(\theta) &= y_n + h_n \sum_{i=1}^s \beta_i(\theta) K_{n,i}, \end{aligned}$$

где

$$\Psi(t) = \begin{cases} \varphi(t), & t \in [-\bar{\tau}, 0], \\ \psi_n((t - t_n)/(h_n)), & t \in [t_n, t_{n+1}]. \end{cases}$$

При этом мы требуем, чтобы было верно, что  $h_n < \underline{\tau}$ , так что на каждом шаге используемые значения  $\Psi(t)$  уже были известны.

## 4.2 Последование разрывов производных

Для дифференциальных уравнений с запаздыванием свойственно наличие разрывов производной из-за несогласованности производной начальной функции и производной решения в начальный момент [15, 16]. Действительно, пусть  $y(t)$  это решение задачи (18), тогда верно, что  $\dot{y}(0^-) = \dot{\varphi}(0)$  и  $\dot{y}(0^+) = f(0, \varphi(0), \varphi(-\tau(0)))$  и эти величины вообще не обязательно совпадают. Другим источников разрывов производных решения являются разрывы производных в функциях  $f, \tau, \varphi$ .

Рассмотрим явление распространение разрывов производной на примере задачи

Пусть  $\dot{x} = x(t - 1)$ ,  $x(t) \equiv 1$  при  $t \in [-1, 0]$ . Будем строить решение данной задачи методом шагов:

$$\left\{ \begin{array}{l} t \in [0, 1] : \quad \begin{cases} \dot{x} = 1 \\ x(0) = 1 \end{cases} \xrightarrow[\text{на } [0, 1]]{\text{решение}} x_1(t) = 1 + t, \\ t \in [1, 2] : \quad \begin{cases} \dot{x} = x_1(t - 1) = t \\ x(1) = x_1(1) = 2 \end{cases} \xrightarrow[\text{на } [1, 2]]{\text{решение}} x_2(t) = t^2/2 + 3/2, \\ \dots \\ t \in [n - 1, n] : \quad x_n(t) = t^n/n! + \dots \end{array} \right.$$

Легко заметить, что при  $t = n$ ,  $n \in \mathbb{Z}_{\geq}$  имеет место разрыв производной порядка  $n + 1$  (см. рис. 7):

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}(0^-) = 0 \neq 1 = \dot{x}(0^+), \\ \ddot{x}(1^-) \neq \dot{x}(0^-) = 0 \neq 1 = \dot{x}(0^+) = \ddot{x}(1^+), \\ \dots \\ x^{(n+1)}(n^-) = x^n((n-1)^-) = 0 \neq 1 = x^n((n-1)^+) = x^{(n+1)}(n^+). \end{array} \right.$$

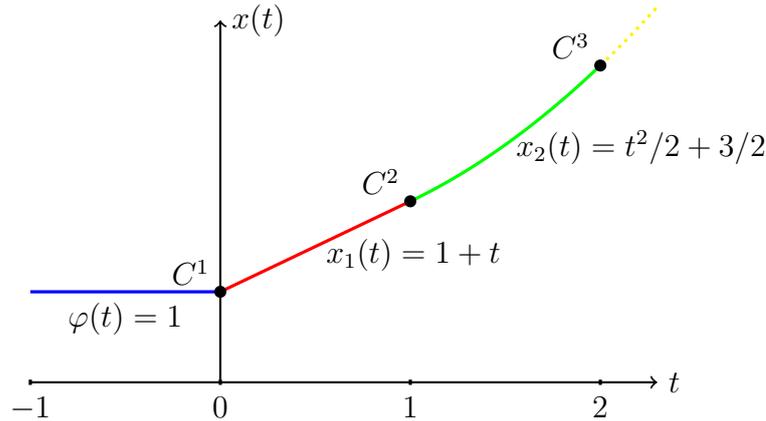


Рис. 7: Решение задачи  $\dot{x}(t) = x(t - 1)$ ;  $x(t) = 1$  при  $t \leq 0$ . В точках  $0, 1, 2, \dots$  имеют место разрывы производной порядка  $1, 2, 3, \dots$  соответственно. Для любого  $k \in \mathbb{N}$ , при  $t \geq k$  решение принадлежит классу гладкости  $C^{k+1}$ .

**Теорема 4.1.** Пусть в точке  $t = \xi_0$  решение  $y(t)$  задачи (18) имеет непрерывные производные до порядка  $w - 1$  включительно, тогда в точке  $t = \xi_1$  решение  $y(t)$  имеет непрерывные производные до порядка  $w \cdot z$  включительно, где  $\xi_1$  — это корень уравнения  $t - \tau(t) = \xi_0$  нечётной кратности  $z$ .

### 4.3 Учёт разрывов для сохранения точности вычислений

Анализ точности численных методов опирается на степень гладкости решения [17]. Игнорирование разрыва в производной порядка  $q$  на шаге длины  $\tilde{h}$  приводит к локальной ошибке метода порядка  $O(\tilde{h}^{q+1})$ , что приводит к тому, что порядок численного метода на практике становится не больше  $q + 1$ . Эта проблема как правило решается одним из двух подходов [16–18].

Первый подход связан с использованием схем Рунге-Кутты, которые снабжены оценкой погрешности на каждом шаге. В этом случае на шаге, содержащем разрыв, оценка ошибки будет велика и величина этого шага будет уменьшаться пока оценка ошибки не станет ниже порогового значения. Недостатком данного метода является то, что он может приводить к большому числу отвергнутых шагов. Вторым подходом является нахождение точки разрыва с точностью порядка  $O(h^{p/(q+1)})$  и добавлением этой точки в сетку интегрирования [18]. Мы будем следовать именно этому подходу.

#### 4.3.1 Локализация разрывов

Пусть определена некоторая вещественная функция от переменных в уравнении  $t, y, y_\tau$ , нули которой совпадают, или, по крайней мере, содержат все поверхности разрывов функции  $f$  или  $\tau$ . Тогда задача нахождения разрывов сводится к нахождению нулей этой функции, так называемых “событий”. Пусть для определённости, эта функция зависит только от  $y_\tau$ . Пусть определена непрерывно дифференцируемая функция  $b(y_\tau)$ , такая, что функция  $f$  имеет достаточный порядок гладкости на множествах  $Q_1 = \{(t, y, y_\tau) : b(y_\tau) < 0\}$  и  $Q_2 = \{(t, y, y_\tau) : b(y_\tau) > 0\}$ , а на множестве  $\Sigma = \{(t, y, y_\tau) : b(y_\tau) = 0\}$  функция  $f$  может иметь разрыв в своей производной порядка  $k \geq 0$ . Стоит задача нахождения нулей сложной функции  $b(y(t - \tau(t)))$  с достаточной точностью и добавления их во временную сетку. Это происходит в два этапа:

- Обнаружение: на некотором шаге построения решения меняется знак выражения  $b_n = b(\Psi(t_n - \tau(t_n)))$ , то есть  $b_n \cdot b_{n+1} \leq 0$ ,  $b_{n+1} \neq 0$  (второе условие нужно, чтобы дважды не обнаруживать один и тот же ноль в крайних случаях), что свидетельствует о том, что на интервале  $[t_n, t_{n+1}]$  содержится искомым ноль. При этом шаг должен быть не слишком большим, чтобы не допустить двух изменений знака  $b$  на одном шаге.
- Приближение: после того, как обнаружен интервал, содержащий ноль функции  $b(y(t - \tau(t)))$ , применяется некоторый вариант одного из стандартных итерационных методов приближённого нахождения нулей нелинейных функций, таких как метод Ньютона или бинарный поиск [18]. При этом в качестве непрерывного численного решения уравнения (18), при помощи которого ищутся корни используется либо функция  $\Psi$ , либо итерация метода Рунге-Кутты из точки  $t_n$  с длиной шага в качестве непрерывной переменной.

#### 4.3.2 Включение точек разрыва во временную сетку

- Добавление разрывной точки  $\xi_0$  в сетку интегрирования, а также точек  $\xi_k$ , являющиеся решениями уравнения  $t - \tau(t) = \xi_{k-1}$  для  $k = 1, \dots, p$ . Основная задача этой части заключается в способе сортировки уже ожидающихся точек разрыва при добавлении новых. В случае, когда функция запаздывающего аргумента  $\alpha(t) = t - \tau(t)$  строго монотонна, эта задача существенно упрощается.

Пусть  $\xi_{j,0}$  — это новые добавляемые точки, а  $\xi_{j,k}$  — это решения уравнений  $\alpha(t) = \xi_{j,k-1}$ , тогда точки с одинаковым индексом  $k$  упорядочены по возрастанию:  $\xi_{j+1,k} > \xi_{j,k} \iff \xi_{j+1,k+1} > \xi_{j,k+1}$ . Это обстоятельство подсказывает, что для упорядочивания значений  $\xi_{j,k}$  мы можем хранить элементы с одинаковым индексом  $k$  в структуре данных типа очередь, а также хранить номер очереди  $k$  с наименьшим первым элементом. При удалении этого наименьшего элемента, линейным поиском обновляется индекс очереди с наименьшим первым элементом: так как их у нас порядка 4-10 в зависимости от порядка выбранного метода Рунге-Кутты, то это очень быстрая операция. При добавлении новой точки разрыва  $\xi_{j,0}$ , вычисляются точки  $\xi_{j,k}$  и каждая добавляется в конец своей очереди. Пример реализации такой структуры на языке C++ представлен в следующем коде:

```
#include <vector>
#include <limits>
using namespace std;
class DiscoQueue {
public:
    const int order = 4;
    vector<vector<double>> disco(order);
    vector<int> disco_i(order);
    vector<double> top {numeric_limits<double>::max()};
    int top_i = -1;

    double next(double t) {
        // solve for t* from t = t* - tau(t*)
        return t + tau; // constant delay case
    }

    void update_top() {
        top = numeric_limits<double>::max();
        top_i = -1;
        for (int order_i = 0; order_i < order; order_i++) {
            if (disco_i[order_i] < disco[order_i].size() &&
                disco[order_i][disco_i[order_i]] < top) {
                top = disco[order_i][disco_i[order_i]];
                top_i = order_i;
            }
        }
    }

    void push(double t) {
        for (int order_i = 0; order_i < order; order_i++) {
            t = next(t);
            disco[order_i].push_back(t);
        }
        if (top_i == -1)
            update_top();
    }

    void pop() {
        disco_i[top_i]++;
        update_top();
    }
};
```

#### 4.4 Упрощения в случае кусочной постоянности относительно запаздывающего аргумента

Пусть при фиксированных  $t$  и  $y$  и изменяющимся  $y_\tau$ , функция  $g(y_\tau) = f(t, y, y_\tau)$  является кусочно постоянной. Будем для определённости считать, что есть непрерывно дифференцируемая функция  $b(y_\tau)$ , такая что

$$f(t, y, y_\tau) = \begin{cases} f_1(t, y), & b(y_\tau) < 0, \\ f_2(t, y), & b(y_\tau) > 0, \end{cases}$$

где в свою очередь  $f_1$  и  $f_2$  являются гладкими функциями. Тогда функция  $b$  как раз является функцией из пункта про локализацию разрывов. Так как в данной постановке, функция  $f$  вообще разрывна на множестве  $\Sigma$ , то есть необходимость в локализации разрывов, описанной ранее, при этом заметим, что пока  $y_\tau$  при интегрировании находится в одном из множеств  $Q_1$  или  $Q_2$ , задача сводится к интегрированию обыкновенного дифференциального уравнения: из прошлой истории нужно помнить только то, что  $y(t - \tau(t)) \in Q_i$ . Поэтому, для решения такой задачи не обязательно прибегать к непрерывным методам Рунге-Кутты. Вместо этого можно прибегнуть к следующему подходу:

- При интегрировании локализовать корень  $t = \xi_0$  функции  $\beta(t) = b(y(t))$ .
- Для всех точек  $t = \xi_{i,1}$ , являющимися корнями уравнения  $t - \tau(t) = \xi_{i,1}$ , найти их последующие точки разрыва  $\xi_{i,s}$  до нужного порядка.
- При очередном шаге численного метода проверять условие  $t_k + h_k \geq \xi_{i,s}$ , и если оно нарушено, то присвоить  $t_{k+1} \leftarrow \xi_{i,1}$  и  $h_k \leftarrow \xi_{i,s} - h_k$ . Удалить  $\xi_{i,s}$  из очереди разрывов.
- Сделать шаг интегрирования в предположении, что на всём интервале  $[t_k, t_{k+1}]$  знак  $b(y(t - \tau(t)))$  сохранится. И если  $s = 1$ , то начиная со следующего шага считать, что знак  $b(y(t - \tau(t)))$  изменился.

Упрощения также и касаются уравнения в вариациях, у которых зависимость эволюции от прошлых состояний появляется только в виде дельта возмущений. Для построения решений уравнения в вариациях в этом случае нужно вместе с точками  $\xi_{i,1}$ , сохранять производную решения основного уравнения, а также значения решения уравнения в вариациях в точке  $\xi_0$ , что существенно проще, чем хранить всю историю решения.

## 5 Численное исследование оператора Пуанкаре

В данной главе мы описываем особенности численного вычисления отображения  $\tilde{p}$ . В частности, мы показываем, как при помощи вариационного уравнения легко сосчитать производную отображения  $\tilde{p}$ , которая оказывается полезной для определения устойчивости неподвижных точек, а также может быть использована для лучшего приближения значения устойчивых и неустойчивых неподвижных точек при помощи метода Ньютона.

### 5.1 Замена переменных в уравнении

**Лемма 5.1.** Пусть  $x(t) = \alpha y(\beta t)$ , где  $\alpha \neq 0, \beta > 0$ . Тогда  $x(t)$  является решением уравнения (1) тогда и только тогда, когда  $y(t)$  является решением дифференциального уравнения

$$\ddot{y} + \frac{b}{\beta} \dot{y} + \frac{c}{\beta^2} y = \frac{d}{|\alpha| \beta^2} \text{sign}(y(t - \beta\tau)). \quad (20)$$

Полученное уравнение имеет тот же вид, что и исходное. Данная замена, конечно, не влияет на существование и устойчивость неподвижных точек отображение  $\tilde{p}$ , а изменяет только пространственный и временной масштаб соответствующих решений. Мы хотим выбрать  $\alpha$  и  $\beta$  так, чтобы количество параметров в уравнении сократилось. Можно видеть, при данных заменах нельзя изменить знаки коэффициентов, поэтому попытка нормировки этих коэффициентов приводит к необходимости рассматривать несколько случаев в зависимости от знака данного коэффициента. Пусть  $\beta = 1/\tau$  и  $|\alpha| \beta^2 = |d|$ , тогда уравнение (20) принимает вид

$$\ddot{y} + \hat{b} \dot{y} + \hat{c} y = \text{sign}(d) \cdot \text{sign}(y(t - 1)),$$

где  $\hat{b} = b\tau$ ,  $\hat{c} = |\alpha|c/|d|$  — два новых непрерывных параметра и  $\text{sign}(d)$  — дискретный параметр, принимающий значения  $\pm 1$ . Ввиду этих рассуждений при численном счёте будем рассматривать уравнение (1) только для  $d = \pm 1$  и  $\tau = 1$ .

### 5.2 Вычисление свойств одномерного отображения

#### 5.2.1 Вычисление одномерного отображения и его производной

Будем численно строить одномерное отображение  $\tilde{p}(v)$ , определённое в главе 1. По определению,  $\tilde{p}(v) = |p(v)| = \left| \dot{x} \left( T(\sigma(v)), \sigma(v) \right) \right|$ , где  $T(\sigma(v))$  — это первый положительный ноль  $t_*$  решения  $x(t, \sigma(v))$ , такой, что на интервале  $[t_* - \tau, t_*]$  у этого решения нет нулей. Нахождение этого нуля в данном случае происходит также как и локализация разрывов, описанная в разделе 4.3.1.

Важной задачей является вычисление производной отображения  $\tilde{p}$  для определения устойчивости неподвижных точек: неподвижная точка  $v_*$  устойчива если  $|\tilde{p}'(v_*)| < 1$  и неустойчива, если  $|\tilde{p}'(v_*)| > 1$ . Также, производная отображения  $\tilde{p}$  может быть использована для вычисления Ляпуновских показателей системы в разделе 6

**Лемма 5.2.** Пусть  $x_v(t)$  — это решение начальной задачи (1), (2) с начальной функцией из класса  $\sigma(v)$ . Пусть  $w_v(t)$  — это решение уравнения в вариациях (15) для

$x(t) = x_v(t)$  и  $\psi(t) = t$  (так что  $\psi(0) = 0, \dot{\psi}(0) = 1$ ). Тогда

$$p'(v) = \left( \dot{w}_v - \frac{\ddot{x}_v}{\dot{x}_v} w_v \right) \Big|_{t=T(\sigma(v))}. \quad (21)$$

Заметим, что для вычисления данной величины достаточно посчитать решение  $x_v$  до точки  $T(\sigma(v))$ , которое и так необходимо посчитать для вычисления  $p(v)$ ; решение  $w_v$ ; и величина  $\ddot{x}$  явно выражается из уравнения (1).

**Доказательство.** Так как  $p(v) = \dot{x}_v(T(\sigma(v)))$ , то, ввиду соотношения (16),

$$p'(v) = \left( \dot{w}_v + \ddot{x}_v \cdot T'(\sigma(v)) \right) \Big|_{t=T(\sigma(v))}.$$

С другой стороны,

$$x_v(T(\sigma(v))) = 0 \xrightarrow{\frac{d}{dv}} \left( w_v + \dot{x}_v \cdot T'(\sigma(v)) \right) \Big|_{t=T(\sigma(v))} = 0.$$

Выразив из этого соотношения величину  $T'(\sigma(v))$  и подставив её в выражение для  $p'(v)$  выше, получится доказываемое равенство. ■

Понятно, что тогда для вычисления  $\tilde{p}'(v)$  достаточно домножить выражение (21) на знак  $\dot{x}_v$ . Данный способ вычисления производной отображения  $\tilde{p}(v)$  является желательным по сравнению с аппроксимацией методом конечных приращений. Метод конечных приращений требует вычисления двух значений отображения  $\tilde{p}(v)$  то есть численного построения двух решений уравнения (1), а формула (21) требует построения одного решения уравнения (1) и одного решения уравнения в вариациях (15). Следовательно, данный метод ничем не уступает в скорости, при этом не содержит соответствующей погрешности. Далее мы увидим, что при определённых значениях параметров, производная отображения  $\tilde{p}(v)$  неограниченна, и само отображение  $\tilde{p}(v)$  имеет множество разрывов. В окрестности разрывов метод конечных приращений, когда приращение переступает через точку разрыва, неизбежно даст ошибочный результат, в то время как вычисление по формуле (21) даёт хорошее приближение сколь угодно близко к точке разрыва.

## 5.2.2 Поиск неподвижных точек и их устойчивость

Неподвижные точки отображения  $\tilde{p}(v)$  ищутся как нули функции  $q(v) = \tilde{p}(v) - v$ . Выбирается сетка значений  $v_1 < v_2 < \dots < v_n$  и на каждом из этих значений вычисляется функция  $q$ . Если на  $k$ -ом значении сетки произошла смена знака функции  $q$ , то есть  $q(v_k) \cdot q(v_{k+1}) \leq 0$ , то на отрезке  $[v_k, v_{k+1}]$  предполагается существование неподвижной точки. Далее бинарным поиском или иным численным способом нахождения корней с хорошей точностью находится точка, в которой  $q$  меняет знак. Важно проверить, что найденная точка действительно является корнем, а не скачком функции, который переходит через ноль, так как в ряде случаев для отображения  $\tilde{p}(v)$  типично наличие разрывов. Если значение функции  $q$  в найденной точке действительно близко к нулю, тогда это считается неподвижной точкой, и её устойчивость определяется по величине абсолютного значения производной в этой точке, как было указано ранее.

### 5.2.3 Выявление точек разрыва

Быстрый способ выявить точку разрыва полезен для того, чтобы сэкономить машинное время при поиске неподвижных точек, а также для более корректного представления графика отображения  $\tilde{p}(v)$ , так как на графике может быть трудно отличить разрыв от участка с большим значением производной. Пусть для соседних точек сетки  $v_k$  и  $v_{k+1}$  посчитаны значения и производная отображения. Тогда величины

$$g_1 = \frac{\tilde{p}(v_{k+1}) - \tilde{p}(v_k)}{v_{k+1} - v_k}, \quad g_2 = \frac{\tilde{p}'(v_{k+1}) + \tilde{p}'(v_k)}{2}$$

являются аппроксимациями для  $\tilde{p}'\left(\frac{v_{k+1} + v_k}{2}\right)$  порядка  $O(v_{k+1} - v_k)^2$  и  $O(v_{k+1} - v_k)$  соответственно. Если разность  $g_1 - g_2$  является большой величиной, например порядка  $(g_1 + g_2)$ , то между точками  $v_k$  и  $v_{k+1}$  уточняется место потенциального разрыва.

### 5.3 Количество неподвижных точек в зависимости от параметров системы

**Определение.** Пусть  $F^s$  и  $F^u$  обозначают количество соответственно устойчивых и неустойчивых неподвижных точек отображения  $\tilde{p}(v)$  в зависимости от параметров системы.

**Определение.** Пусть  $\lambda_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4c}}{2}$ ,  $\lambda_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4c}}{2}$ , если  $b^2 - 4c > 0$ , и  $\rho = -b/2$ ,  $\theta = (4c - b^2)/2$ , если  $b^2 - 4c < 0$ .

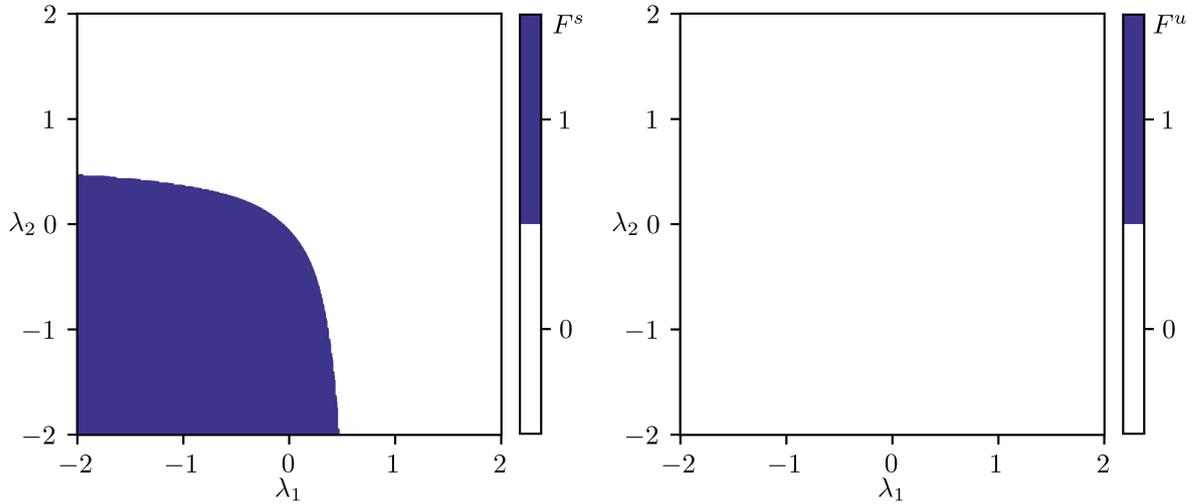


Рис. 8: Величины  $F^s$  и  $F^u$  в случае  $b^2 - 4c > 0$ ,  $d < 0$  в зависимости от величин  $\lambda_1, \lambda_2$ . Примеры графиков отображения в этом случае были представлены в главе 2. Полученное множество существования устойчивой неподвижной точки в точности совпадает с аналитическим результатом. Видно, что эта точка всегда единственна, а неустойчивых неподвижных точек не наблюдается. Случай  $d > 0$  мы не приводим, так как в нём все решения либостремятся к неподвижной точке, либо убегают на бесконечность.

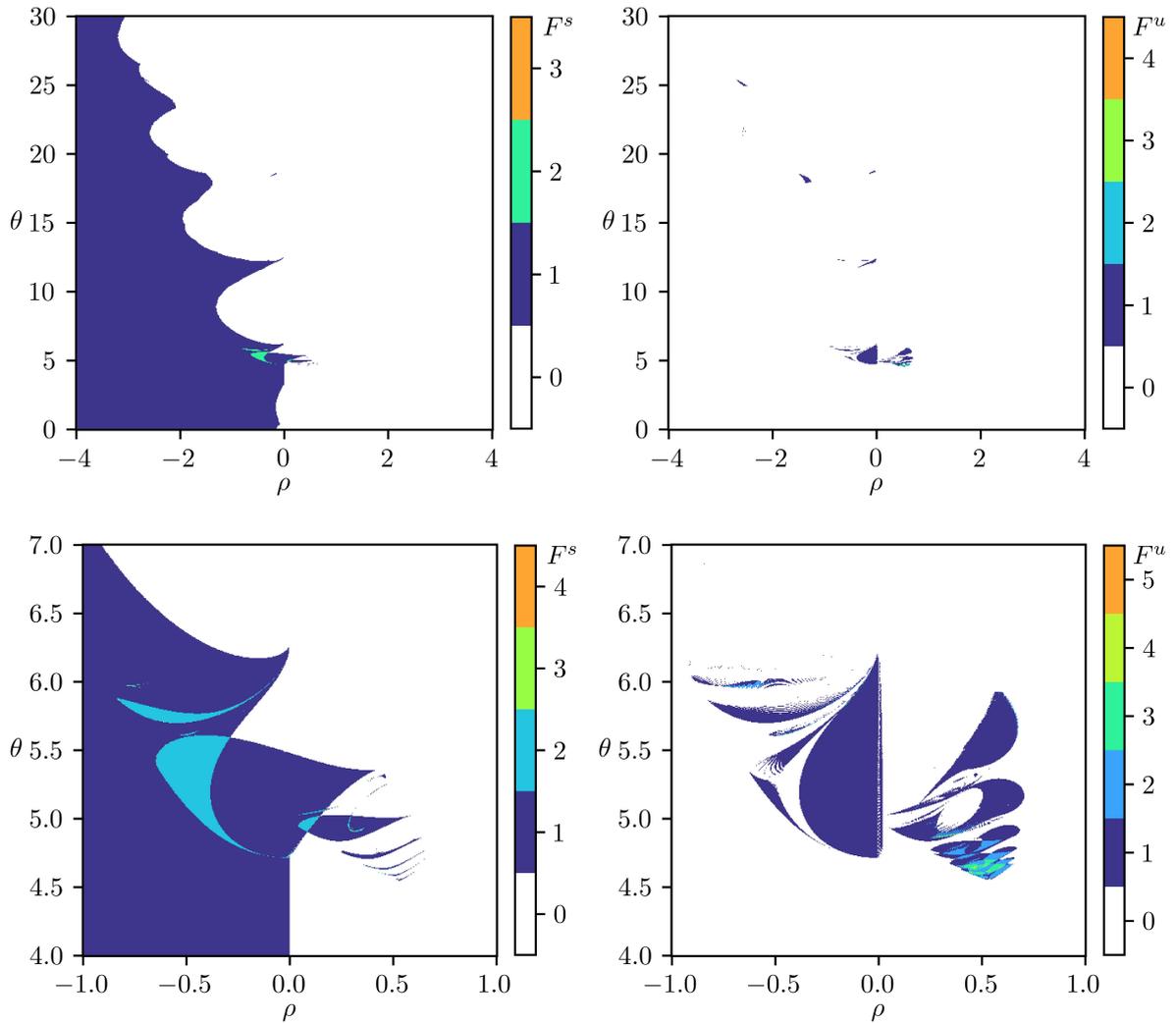


Рис. 9: Величины  $F^s$  и  $F^u$  в случае  $b^2 - 4c < 0$ ,  $d < 0$  в зависимости от величин  $\rho, \theta$ . Сверху и снизу изображения отличаются масштабом. Мы можем наблюдать фрактальную структуру множеств существования устойчивых и неустойчивых неподвижных точек.

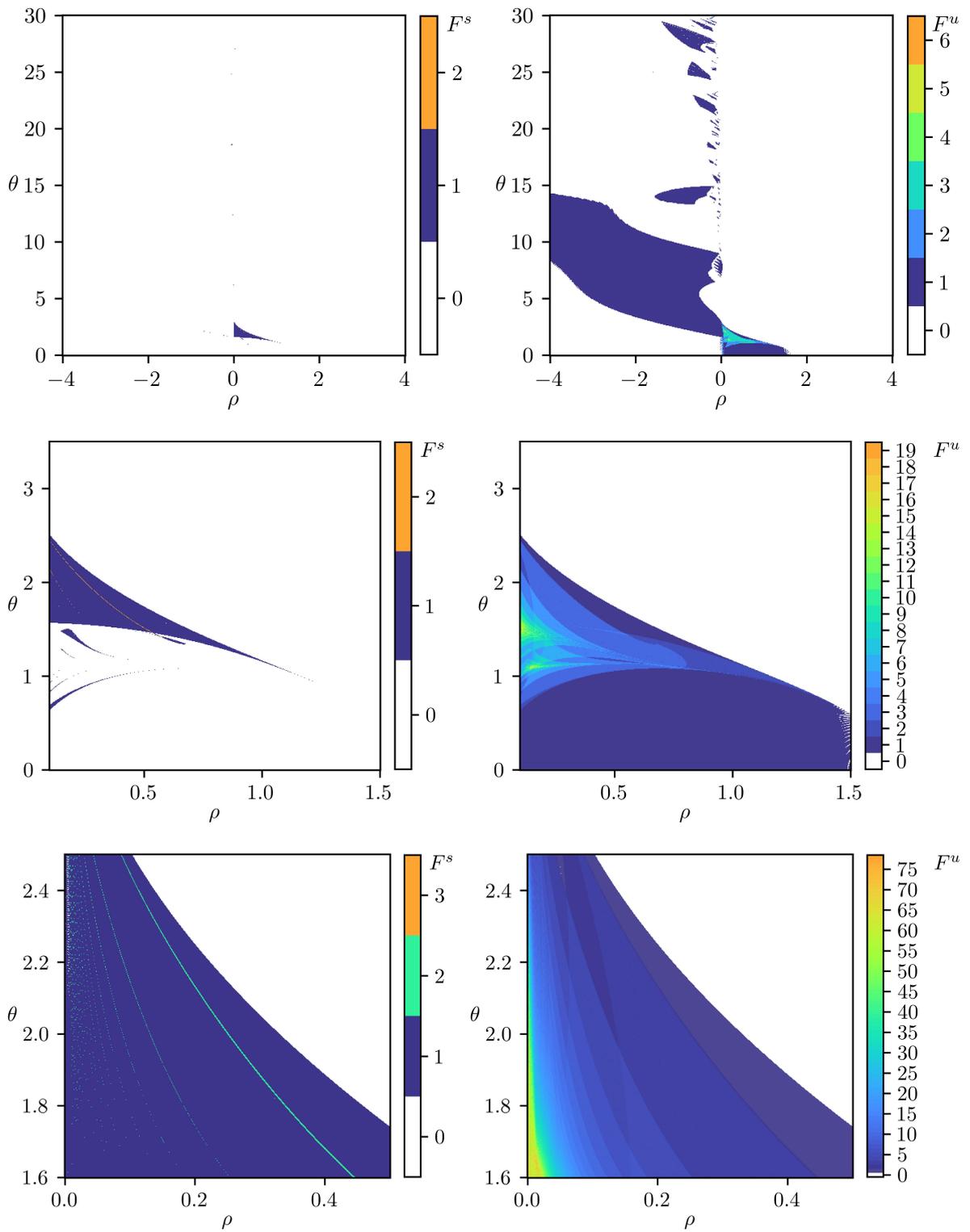


Рис. 10: Величины  $F^s$  и  $F^u$  в случае  $b^2 - 4c < 0$ ,  $d > 0$  в зависимости от величин  $\rho$ ,  $\theta$ . Изображения сверху и снизу отличаются только масштабом. Можно заметить, что на нижнем изображении  $F^u$  величины на палитре довольно большие, что свидетельствует о большом числе неустойчивых неподвижных точек.

## 6 Ляпуновские показатели

Вычисление ляпуновских показателей для разрывных дифференциальных уравнений с запаздыванием сопряжено с рядом трудностей. Первой трудностью является бесконечномерность фазового пространства, в различных работах данную трудность преодолевают заменой уравнения с запаздыванием на разностную схему большой размерности [2, 19]. Другим подходом является переход к конечномерным отображениям посредством оператора Пуанкаре, как это возможно в нашем случае. Второй трудностью является наличие разрывов в правой части, которые, как мы уже показали, приводят к скачкам в решениях уравнения в вариациях. Подобный анализ уже был проделан для обыкновенных дифференциальных уравнений [20]. Также есть подход, который избегает уравнения в вариациях и реализует метод конечных возмущений [21]. См. также [22].

### 6.1 Определение и свойства ляпуновских показателей

Руководствуясь классической теорией [23], мы определим ляпуновские показатели на линейном пространстве решений уравнения (13). С поправкой на возможную бесконечномерность пространства решений уравнения (13) мы определим пирамиды для линейных пространств и их ступени.

**Определение.** Показателем Ляпунова для решения  $w_\psi(t)$  уравнения (13) называется величина

$$\lambda(\psi) = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \|w_\psi(t)\|, \quad (22)$$

или

$$\Lambda(\psi) = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \|W_\psi^t\|, \quad (23)$$

где  $W_\psi^t : [-\bar{\tau}, 0] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $W_\psi^t(s) = w_\psi(t+s)$  — фазовая величина для уравнения с запаздыванием (13). Норма в формуле (22) — это норма в  $\mathbb{R}^n$ , а норма в формуле (23) берётся из нормы фазового пространства  $PC[-\bar{\tau}, 0]$  кусочно непрерывных функций, определённую так же, как в пространстве непрерывных функций  $C[-\bar{\tau}, 0]$ .

Полагается, что  $\lambda(0) = \Lambda(0) = -\infty$ .

Не очевидно, что формулы (22) и (23) могут давать один и тот же результат, так как соответствующие нормы не являются эквивалентными, тем не менее, наличие именно верхнего предела в определении позволяет нам доказать следующую теорему.

**Теорема 6.1.** Верно, что  $\lambda(\psi) = \Lambda(\psi)$ , для любых  $\psi$

**Доказательство.** Так как  $\|w(t, \psi)\| \leq \|W_\psi^t A\|$ , то  $\lambda(\psi) \leq \Lambda(\psi)$ . Тогда, если  $\Lambda(\psi) = -\infty$ , то  $\lambda(\psi) = -\infty$ . Далее, пусть  $\Lambda(\psi) \neq -\infty$ , тогда  $\|W_\psi^t\| > 0$  для любых  $t$ . Пусть  $(t_k)$  — возрастающая к бесконечности последовательность, такая что

$$\Lambda(\psi) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{t_k} \ln \|W_\psi^{t_k}\|.$$

Фиксируем  $\varepsilon \in (0, 1)$ . Для любого  $t_k$  найдётся  $\tilde{t}_k \in [t_k - \bar{\tau}, t_k]$ , такой что

$$\|w(\tilde{t}_k, \psi)\| \geq \sup_{-\bar{\tau} \leq s \leq 0} \|w(t_k + s, \psi)\| - \varepsilon \|W_\psi^{t_k}\| = \|W_\psi^{t_k}\| (1 - \varepsilon),$$

ввиду определения супремума. Но тогда

$$\lambda(\psi) \geq \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{t_k} \ln \|w(\tilde{t}_k, \psi)\| \geq \lim_{k \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{1 - \frac{\tilde{t}_k - t_k}{t_k}} \right) \frac{1}{t_k} (\ln \|W_\psi^{t_k}\| + \ln(1 - \varepsilon)) = \Lambda(\psi).$$

Мы получили, что  $\lambda(\psi) \leq \Lambda(\psi)$  и  $\lambda(\psi) \geq \Lambda(\psi)$ . Теорема доказана.  $\blacksquare$

Ввиду данной теоремы все свойства показателя (22) эквивалентны соответствующим свойствам для показателя (23).

**Лемма 6.2.** Верно, что  $\lambda(\psi) < +\infty$ , то есть норму всякого решение уравнения (13) всегда можно оценить некоторой экспоненциальной функцией: для любого  $\psi$  существуют константы  $c$  и  $\bar{\lambda}$ , такие что  $\|w(t, \psi)\| \leq ce^{\bar{\lambda}t}$  для любых  $t > 0$ .

**Лемма 6.3.** Показатели Ляпунова обладают следующими свойствами, прямо следующими из определения [23]:

- $\lambda(c\psi) = \lambda(\psi)$  для любых  $c \neq 0$ ;
- $\lambda(\psi_1 + \psi_2) \leq \max\{\lambda(\psi_1), \lambda(\psi_2)\}$ .

**Определение.** Пусть  $L$  — это линейное пространство. Назовём пирамидой всякую последовательность (строго) убывающих в смысле вложения подпространств пространства  $L$ :

$$L = L_1 \supset L_2 \supset \dots \supset L_s = \{0\},$$

где  $s$  может быть равно  $+\infty$  в случае, когда пирамида состоит из бесконечного числа подпространств бесконечномерного пространства. Если пространство конечномерно, то всякая его пирамида конечна.

Теоретико-множественную разность соседних элементов пирамиды  $\widehat{L}_k = L_k \setminus L_{k+1}$  назовём ступенями этой пирамиды, величину  $n_k = \dim(L_k/L_{k+1})$  — коразмерность пространства  $L_{k+1}$  в пространстве  $L_k$ , равную  $\dim(L_k) - \dim(L_{k+1})$  если это конечномерные пространства — назовём кратностью ступени. По определению положим  $\widehat{L}_s = \{0\}$ , тогда для любых  $k$  верно, что

$$L_k = \bigcup_{i=k}^s \widehat{L}_i.$$

**Теорема 6.4.** Для ляпуновского показателя (22) существует единственным образом определённая (возможно бесконечная) строго убывающая последовательность вещественных чисел

$$\Lambda_1 > \Lambda_2 > \Lambda_3 > \dots > \Lambda_{s-1} \geq -\infty,$$

и отвечающая ей пирамида в пространстве решений  $L$  уравнения (13)

$$L = L_1 \supset L_2 \supset \dots \supset L_{s-1} \supset L_s = \{0\},$$

такая, что на каждой из ступеней  $\widehat{L}_k$  ляпуновский показатель равен  $\lambda_k$ :

$$\psi \in \widehat{L}_k \iff \lambda(\psi) = \lambda_k.$$

При этом,

$$\psi \in L_k \iff \lambda(\psi) \leq \lambda_k.$$

**Доказательство.** Полностью аналогично конечномерному случаю [23].  $\blacksquare$

**Определение.** Последовательность значений

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n,$$

где

$$\begin{aligned} \lambda_1, \dots, \lambda_{n_1} &= \Lambda_1, \\ \lambda_{n_1+1}, \dots, \lambda_{n_1+n_2} &= \Lambda_2, \\ \lambda_{n_1+n_2+1}, \dots, \lambda_{n_1+n_2+n_3} &= \Lambda_3, \\ &\dots, \\ \dots, \lambda_n &= \Lambda_{s-1}. \end{aligned}$$

называется спектром ляпуновского показателя (22).

**Определение.** Пусть  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  — это спектр ляпуновских показателей. Ляпуновской размерностью называется величина

$$D_\lambda = m + \frac{\sum_{i=1}^m \lambda_i}{|\lambda_m|}, \text{ где } m = \max\{m_0 : \sum_{i=1}^{m_0} \lambda_i \geq 0\}.$$

Ляпуновская размерность является величиной, которая приближает ёмкостную размерность аттрактора как множества на фазовой плоскости [24]. Заметим, что при условиях теоремы 3.2, начиная с некоторого индекса, показатели Ляпунова равны  $-\infty$ . А в случае не быстро осциллирующих колебаний эта размерность не превышает порядка системы.

## 6.2 Метод Бенеттина

Рассмотрим начальную задачу для обыкновенного дифференциального уравнения

$$\begin{cases} \dot{z} = f(z), \\ z(t_0) = z_0, \end{cases}$$

где  $z \in \mathbb{R}^n$  и  $f$  непрерывна. Будем обозначать решение данной задачи как  $z(t; z_0)$ . Для данной системы уравнение в вариациях, определяющее эволюцию бесконечно малого возмущения  $w(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{z(t; z_0) - z(t; z_0 + \varepsilon w_0)}{\varepsilon}$ , имеет вид

$$\begin{cases} \dot{w} = f'_z(z)w, \\ w(t_0) = w_0, \end{cases}$$

где  $z = z(t; z_0)$ . Совершенно аналогично определены ляпуновские показатели для данной линеаризованной системы:

$$\lambda(w_0) = \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \ln \|w(t; w_0)\|.$$

Классическим методом для численного нахождения ляпуновского спектра является метод Бенеттина [25]. Опишем его. Будем обозначать решение начальной задачи

$$\begin{cases} \dot{w} = f'_z(z)w, \\ w(s) = u \end{cases}$$

как  $w(t; s, u)$ . Мы выбираем последовательность точек на временной оси  $t_0 = \hat{t}_0 < \hat{t}_1 < \hat{t}_2 < \dots$  (её не стоит путать с временной сеткой численного метода построения решений системы). Разности  $\hat{t}_{i+1} - \hat{t}_i$  не обязательно малы, однако они не должны быть слишком велики для избежания ошибок округления при численном счёте. Мы выбираем набор из  $n$  ортонормированных векторов

$$w_{0,1}, \dots, w_{0,n} \in \mathbb{R}^n.$$

Далее процесс происходит итеративно. На  $k$ -ом шаге мы получим набор из  $n$  ортонормированных векторов

$$w_{k-1,1}, \dots, w_{k-1,n},$$

после чего на отрезке  $[\hat{t}_{k-1}, \hat{t}_k]$  мы строим решения уравнения в вариациях для каждого из этих векторов взятых в качестве начальных условий. В точке  $\hat{t}_k$  получим набор из  $n$  векторов

$$\begin{aligned} \hat{w}_{k,1} &= w(\hat{t}_k; \hat{t}_{k-1}, w_{k-1,1}), \\ &\vdots \\ \hat{w}_{k,i} &= w(\hat{t}_k; \hat{t}_{k-1}, w_{k-1,i}), \\ &\vdots \\ \hat{w}_{k,n} &= w(\hat{t}_k; \hat{t}_{k-1}, w_{k-1,n}). \end{aligned}$$

Применим к данному набору векторов ортогонализацию Грама-Шмидта, получим набор из  $n$  ортогональных (но вообще не ортонормированных векторов)

$$\begin{aligned} \tilde{w}_{k,1} &= \hat{w}_{k,1}, \\ \tilde{w}_{k,2} &= \hat{w}_{k,2} - \frac{(\tilde{w}_{k,1}, \hat{w}_{k,2})}{(\tilde{w}_{k,1}, \tilde{w}_{k,1})} \tilde{w}_{k,1}, \\ &\vdots \\ \tilde{w}_{k,i} &= \hat{w}_{k,i} - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{(\tilde{w}_{k,j}, \hat{w}_{k,i})}{(\tilde{w}_{k,j}, \tilde{w}_{k,j})} \tilde{w}_{k,j}, \\ &\vdots \\ \tilde{w}_{k,n} &= \hat{w}_{k,n} - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{(\tilde{w}_{k,j}, \hat{w}_{k,n})}{(\tilde{w}_{k,j}, \tilde{w}_{k,j})} \tilde{w}_{k,j}, \end{aligned}$$

Далее, эти вектора нормируются, и получается ортогональный набор векторов

$$w_{k,1} = \frac{\tilde{w}_{k,1}}{\|\tilde{w}_{k,1}\|}, \quad \dots, \quad w_{k,n} = \frac{\tilde{w}_{k,n}}{\|\tilde{w}_{k,n}\|}.$$

И итерация повторяется для набора  $w_{k,1}, \dots, w_{k,n}$ .

Ляпуновские показатели  $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$  тогда вычисляются по формуле

$$\lambda_i = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{\hat{t}_k - \hat{t}_0} \ln \|\tilde{w}_{k,i}\| = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{2(\hat{t}_k - \hat{t}_0)} \ln \left( (\tilde{w}_{k,i}, \tilde{w}_{k,i}) \right), \quad i = \overline{1, \dots, n}. \quad (24)$$

Метод Бенеттина решает две проблемы связанные с вычислением ляпуновских показателей решают две проблемы. Первая проблема связана с тем, что решения уравнения в вариациях имеют экспоненциальный характер роста или затухания, поэтому

при вычислениях на больших временных промежутках неизбежно возникает проблема переполнения чисел с плавающей точкой. Эту проблему решает нормализация. Точки  $\hat{t}_k$  должны быть расположены не слишком часто, чтобы не делать много избыточных перенормировок, но и не слишком далеко, чтобы не допустить переполнений операций с плавающей точкой. Вторую проблему опишем на примере вычисления двух первых показателей. Вообще первые два показателя можно считать так. Брать два ортонормированных вектора в качестве начального условия уравнения в вариациях, тогда норма первого решения изменяется как  $e^{\lambda_1 t}$ , а площадь, натянутая на два вектора возмущения изменяется как  $e^{(\lambda_1 + \lambda_2)t}$ . Как правило при вычислении оба возмущения выстраиваются в направлении наибольшего роста и становятся почти параллельны, из-за чего вычисление площади такого параллелограмма становится неточным. Для вычисления большего числа ляпуновских показателей, эта проблема становится только существеннее. Метод Бенеттина решает эту проблему путём ортогонализации Грама-Шмидта, которое предотвращает выстраивание векторов в одном направлении, и при этом сохраняет объёмы параллелограммов (или объёмы эллипсов), натянутые на первые  $m$  векторов.

### 6.3 Применимость метода Бенеттина для уравнения с запаздыванием

Вычисление ляпуновских показателей траектории системы (1) при помощи одномерного отображения  $\tilde{p}(v)$  является очень удобным методом, однако имеет существенное ограничение. Для применимости этого метода соответствующее решение системы (1) должно быть не быстро осциллирующим для того, чтобы итерации отображения  $\tilde{p}$  были определены. Также данный метод является специфическим для задачи (1). Поэтому стоит вопрос о том, как можно адаптировать метод Бенеттина для вычисления спектра ляпуновских показателей (23).

Для применения метода Бенеттина к уравнению (11) и соответственного его линеаризации (13) вместо векторов  $w_{k,i}$  из метода Бенеттина для обыкновенного дифференциального уравнения используются соответствующие фазовые функции  $W_{k,i}$ . Не ясным является определение понятия скалярного произведения для пространства фазовых функций. Предлагается два подхода. Первый (“наивный”) подход заключается в выборе квазискалярного произведения  $(W_{k,j}, W_{k,i}) := (W_{k,j}(0), W_{k,i}(0))$ , индуцированного обычным скалярным произведением в  $\mathbb{R}^n$ . Второй подход заключается в выборе интегрального скалярного произведения  $(W_{k,j}, W_{k,i}) := \int_{-\bar{\tau}}^0 W_{k,j}(s) \cdot W_{k,i}(s) ds$ .

#### 6.3.1 “Наивный” метод

**Определение.** Квазискалярным произведением называется вещественная функция от двух переменных  $(\cdot, \cdot) \rightarrow \mathbb{R}$ , такая что

1.  $(x, y) = (y, x)$  для любых  $x, y$  (симметричность);
2.  $(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y) = \alpha_1 (x_1, y) + \alpha_2 (x_2, y)$  для любых  $x_1, x_2, y$  и любых  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ .
3.  $(x, x) \geq 0$  для любых  $x$ .

Данное определение отличается от обычного определения скалярного произведения отсутствием требования  $(x, x) = 0 \iff x = 0$ . Для квазискалярного произведения верно только следствие в одну сторону  $x = 0 \implies (x, x) = 0$ .

Определим квазискалярное произведение на линейном фазовом пространстве решения уравнения в вариациях (13) по формуле

$$(W_{k,j}, W_{k,i})_{\mathbb{R}^n} := (W_{k,j}(0), W_{k,i}(0)).$$

При таком определении при ортогонализации Грама-Шмидта все функции  $\widetilde{W}_{k,i}$  при  $i \geq s + 1$  будут равны нулю в точке  $s = 0$  и влиять на значения друг друга не будут, поэтому этот метод не применим для вычисления показателей Ляпунова с номерами большими, чем порядок системы. Тем не менее, в этом случае ортогонализация Грама-Шмидта сохраняет свойство линейной независимости векторов и предотвращает выстраивание функций в одном направлении. Более того, ввиду теоремы 3.2, в кусочно постоянном случае запаздывающей обратной связи, если решение основного уравнения не быстро осциллирующее, то не более  $n$  ляпуновских показателей не равны  $-\infty$ , поэтому вычислять  $\lambda_i$  для  $i \geq n + 1$  в таком случае не нужно. Ввиду теоремы 6.1 нормы  $\|W_{k,i}\|$  и  $\|W_{k,i}(0)\|$  асимптотически растут или убывают с одинаковой скоростью, поэтому мы предполагаем, что такая “наивная” ортогонализация позволяет получать корректный результат. В применении к уравнению (1) мы будем использовать именно этот метод. В практике выбор относительно малого интервала между точками ортогонализации  $\widehat{t}_k$  приводит к лучшему результату.

### 6.3.2 Второй метод

Ясно, что решения уравнения в вариациях (13) ограничены на каждом конечном отрезке и кусочно непрерывны, поэтому фазовые переменные  $W_{\varphi,\psi}^t$  являются интегрируемыми в смысле пространства  $L^2$ , и на них можно определить соответствующее скалярное произведение

$$(W_{k,j}, W_{k,i})_{L^2} := \int_{-\tau}^0 (W_{k,j}(s), W_{k,i}(s)) ds,$$

где под интегралом находится обычное скалярное произведение в смысле  $\mathbb{R}^n$ .

Данный метод в теории не обладает недостатками предыдущего метода, однако вычисление такого интеграла вычислительно существенно сложнее, и применение такого подхода не позволяет пользоваться упрощениями численных методов в случае кусочно постоянной зависимости правой части от запаздывающего аргумента, так как требует сохранения всех предыдущих значений решения на интервале длины запаздывания. Ещё одним нюансом, который стоит принять во внимание, что норма, порождённая данным скалярным произведением, которую мы используем в процессе нормировки, вообще не эквивалентна нормам, которую мы используем в определениях (22) и (23). Можно заметить, что при численном решении задач мы так или иначе заменяем дифференциальное уравнение на разностное, и при дискретизация уравнений с запаздыванием мы получаем конечномерную разностную схему, для которой все нормы эквивалентны. Более того, в случае кусочно постоянной зависимости от запаздывающего аргумента, пространство решений уравнения в вариациях окончательно конечномерно, и тогда тоже все нормы на этом пространстве эквивалентны. Есть гипотеза, что на классе решений уравнения в вариациях, то есть в виду системы, эти нормы всегда эквивалентны.

## 6.4 Ляпуновские показатели для итераций одномерного отображения

Определим траектории для отображения  $\tilde{p}$  как

$$v_{k+1} = \tilde{p}(v_k),$$

для некоторого  $v_0 = v$ . Пусть  $v_k + \varepsilon u_k$  это другая траектория отображения  $\tilde{p}$ , то есть

$$v_{k+1} + \varepsilon u_{k+1} = \tilde{p}(v_k + \varepsilon u_k),$$

тогда, полагая непрерывную дифференцируемость отображения  $\tilde{p}$  в любой точке траектории  $v_k$ , получим, что

$$u_{k+1} = \tilde{p}'(v_k)u_k + O(\varepsilon).$$

В пределе  $\varepsilon \rightarrow 0$  верно, что

$$u_k = \left( \prod_{j=0}^{k-1} \tilde{p}'(v_j) \right) u_0.$$

Полагая, что величина  $\lambda_p$  это такое минимальное число, что  $u_k = O(\exp(\lambda_p k))$ , получим следующее определение.

**Определение.** Показателем Ляпунова для траектории  $v_k$  называется величина

$$\lambda_p(v) = \overline{\lim}_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{k} \ln \left| \prod_{j=0}^{k-1} \tilde{p}'(v_j) \right| = \overline{\lim}_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} \ln |\tilde{p}'(v_j)|. \quad (25)$$

В нашем случае отображение  $\tilde{p}$  существует не само по себе, а связано с динамикой уравнения (1). Поэтому мы так же определим показатель, который будет учитывать временной масштаб соответствующей траектории динамической системы. Пусть  $\lambda_T$  это минимальное такое число, что  $u_k = O(\exp(\lambda_T \cdot T_k))$ , где  $T_k$  — это время  $k$ -ого возвращения, определяемого соотношением

$$T_{k+1} = T_k + T(\sigma(v_k)), \quad T_0 = 0.$$

Понятно, что тогда

$$T_k = \sum_{j=0}^{k-1} T(\sigma(v_j)).$$

Из этих соображений дадим следующее определение.

**Определение.** Нормированным показателем Ляпунова для траектории  $v_k$  называется величина

$$\lambda_T(v) = \overline{\lim}_{k \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{j=0}^{k-1} \ln |\tilde{p}'(v_j)|}{\sum_{j=0}^{k-1} T(\sigma(v_j))}. \quad (26)$$

Легко увидеть, что  $\lambda_T(v) = \lambda_p(v) \cdot \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} T(\sigma(v_j))$ , то есть  $\lambda_T$  отличается от  $\lambda_p$

только нормировкой на среднее время первого возвращения для итераций отображения  $\tilde{p}(v)$ .

## 6.5 Оценка точности вычисления ляпуновских показателей

**Определение.** Пусть определена конечная последовательность чисел  $z = (z_1, \dots, z_k)$  средним этой последовательности и стандартным отклонением этой последовательности соответственно называются величины

$$\mu(z) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k z_i, \quad \sigma(z) = \sqrt{\frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^k (z_i - \mu(z))^2}.$$

При вычислениях ляпуновских показателей по формулам (24), (25), (26) предел в строгом смысле посчитать нельзя, и вместо этого вычисляют последовательность величин под знаком предела для больших значений  $k$ . Так как процесс вычисления в каждом из случаев итеративный, то не составляет труда записывать промежуточные результаты для каждого последовательного значения  $k$ . Дальше полученную последовательность можно исследовать статистически, а именно разбить её на части (например по 100 итераций) и для каждой части посчитать среднее и стандартное отклонение. Если данная последовательность стабилизируется, то среднее должно приближаться к настоящему значению предела, а стандартное отклонение должно приближаться к нулю. В качестве критерия прекращения вычислений можно выбрать достижение стандартного отклонения некоторого малого порогового значения.

## 6.6 Зависимость ляпуновских показателей от параметров системы

В области параметров существования большого числа неустойчивых неподвижных точек одномерного отображения  $\tilde{p}(v)$  (соответственно неустойчивых периодических решений системы (1)) существуют области, в которых наблюдается хаотическая динамика. Об этом свидетельствует положительность первого ляпуновского показателя для соответствующих решений. На последующих картинках приведены решения и соответствующие им ряды вычисления ляпуновских показателей согласно формулам (24) и (26), а также стандартное отклонение во временном окне порядка  $10^2$ .

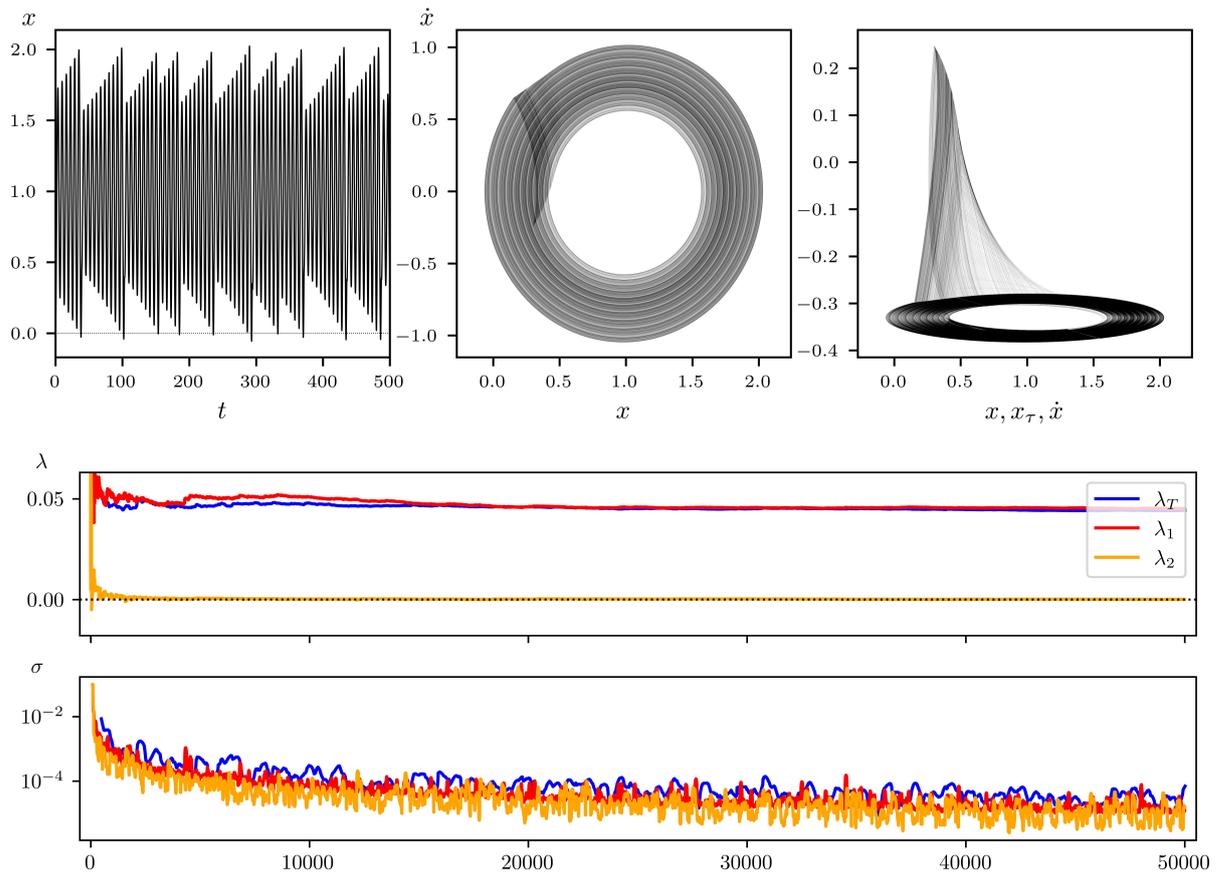


Рис. 11: Решение уравнения (1) с параметрами  $b = -0.02$ ,  $c = 1$ ,  $d = 1$ ,  $\tau = 1$  для начального условия из класса  $\sigma(v)$  при  $v = -0.1$ . Визуально портрет в стробоскопической проекции  $(x, \dot{x}, x_\tau)$  напоминает аттрактор Рёсслера.

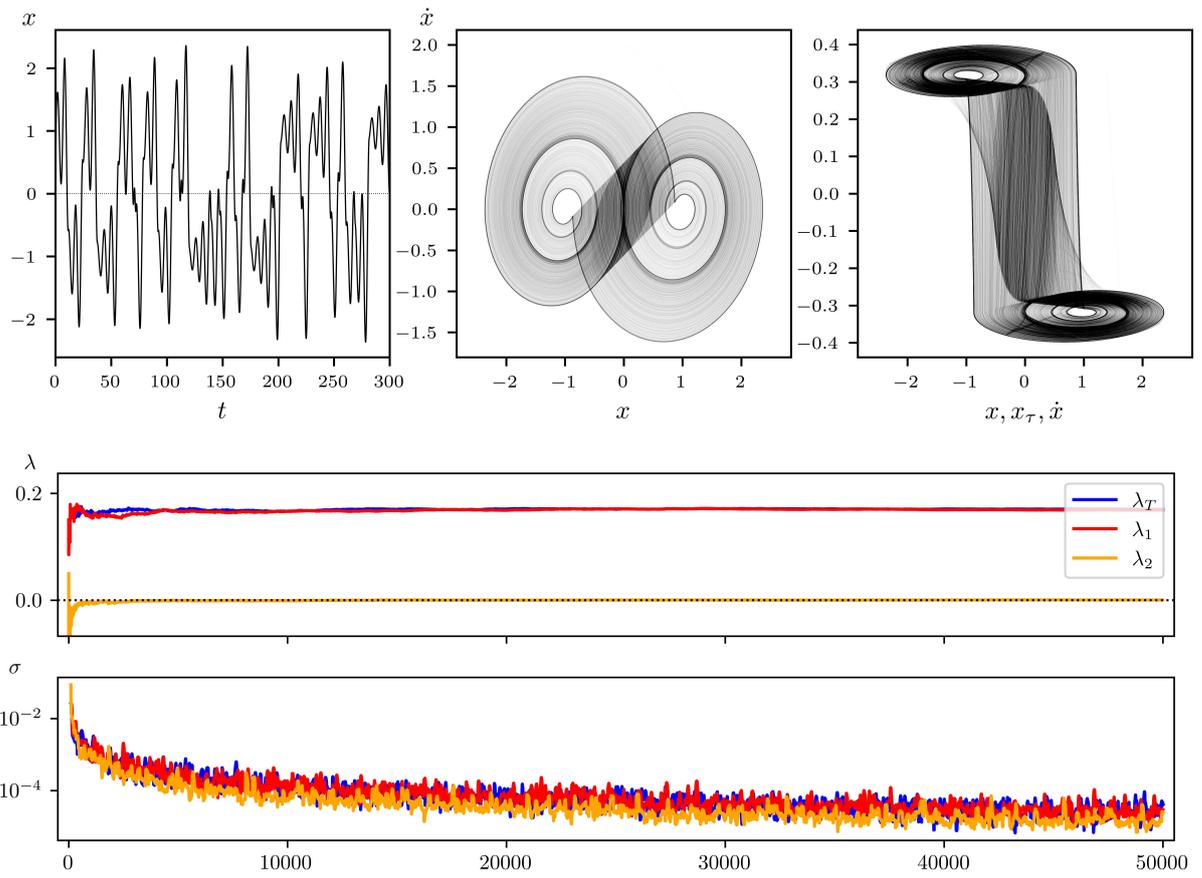


Рис. 12: Решение уравнения (1) с параметрами  $b = -0.2$ ,  $c = 1$ ,  $d = 1$ ,  $\tau = 1$  для начального условия из класса  $\sigma(v)$  при  $v = 2$ . Визуально портрет в проекции  $(x, \dot{x})$  напоминает аттрактор Лоренца.

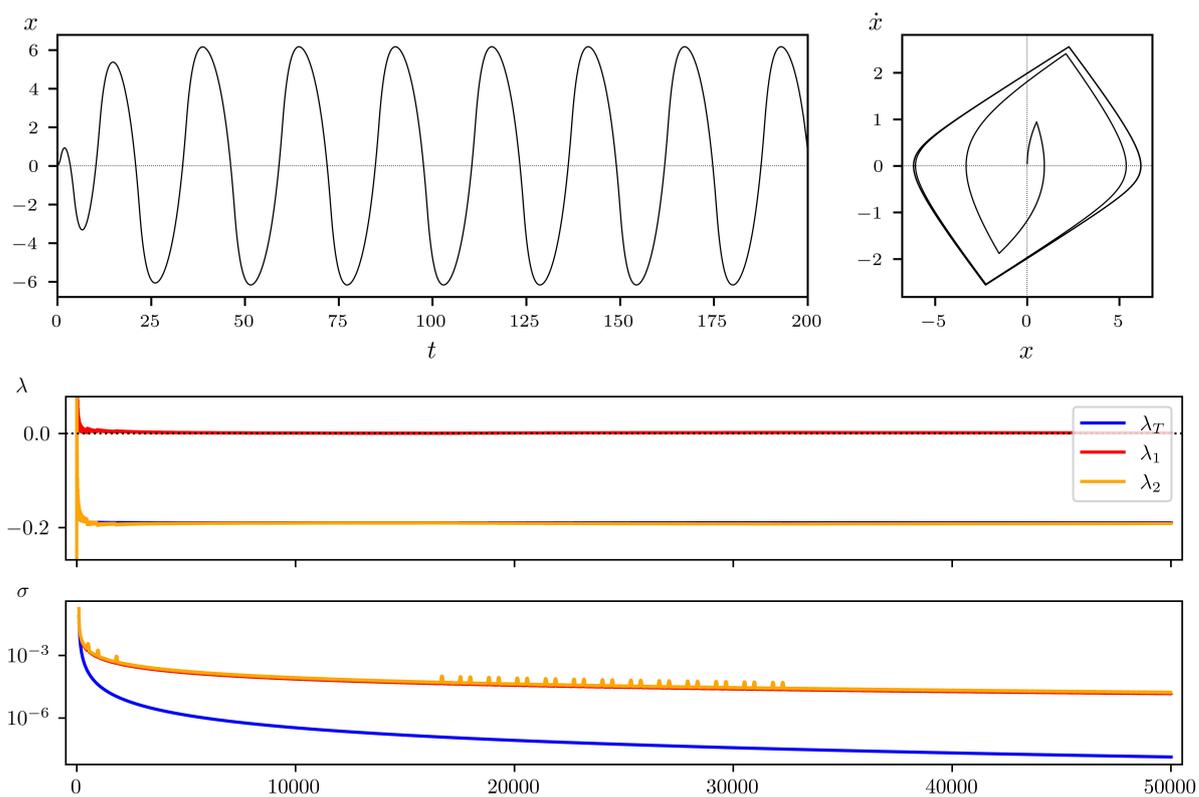


Рис. 13: Решение уравнения (1) с параметрами  $b = -0.02$ ,  $c = 1$ ,  $d = 1$ ,  $\tau = 1$  для начального условия из класса  $\sigma(v)$  при  $v = -0.1$ . Визуально портрет в стробоскопической проекции  $(x, \dot{x}, x_\tau)$  напоминает аттрактор Рёсслера.

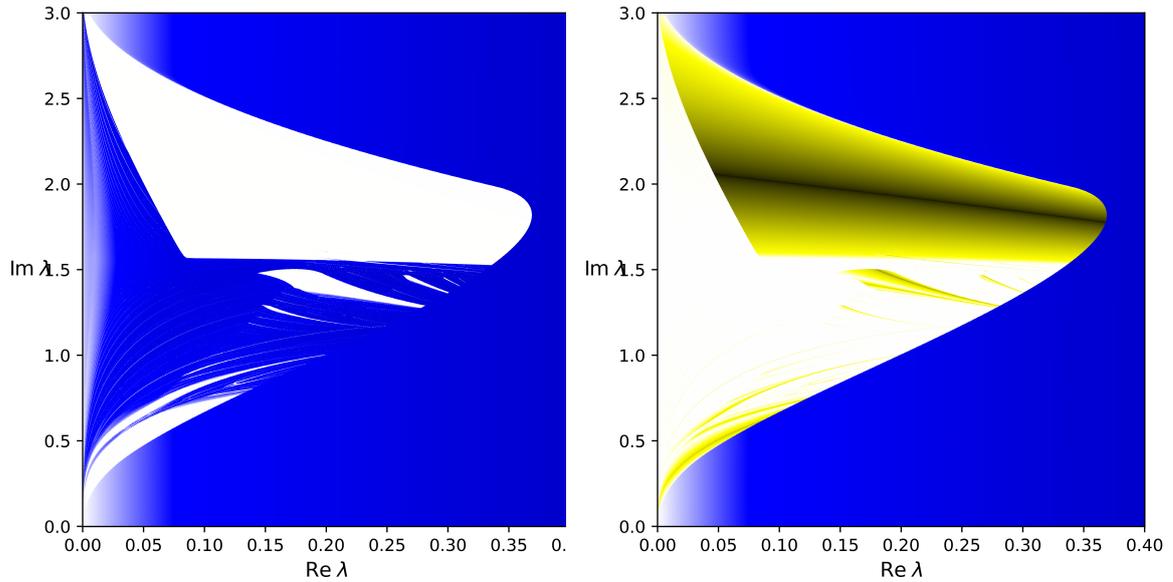


Рис. 14: Значения первого и второго ляпуновских показателей для траектории уравнения (1) с близким к нулю начальным условиям в зависимости от значений параметров системы. На осях расположены вещественная и мнимая части корней характеристического уравнения линейной части системы, когда они являются комплексными. Цвета означают знак соответствующего значения согласно схеме **Синий**  $\gg 0$ , **Белый**  $\approx 0$ , **Жёлтый**  $\ll 0$ . Можно заметить, что для любых значений параметров присутствует нулевой ляпуновский показатель, присущий непрерывным системам. В областях, где первый ляпуновский показатель равен нулю, а второй отрицателен, наблюдаются устойчивые периодические решения. При параметрах, таких, что первый показатель положителен, а второй равен нулю, наблюдаются хаотические колебания.

## Заключение

Были получены условия на параметры системы для существования медленно осциллирующих решений системы. Был разработан ряд инструментов для анализа динамики уравнения (1), таких как уравнение в вариациях, упрощённый метод построения решения, алгоритм вычисления производной одномерного отображения эквивалентного оператору возвращения, и другие. Были затронуты теоретические вопросы вычисления Ляпуновских показателей для таких систем, определено и опробовано два метода для вычисления ляпуновских показателей, использующий одномерное отображения и использующий адаптацию метода Бенеттина под данный класс задач. Использование данных методов для исследования динамики уравнения (1) позволило обнаружить богатую динамику, несмотря на простоту нелинейности исходного уравнения. Было показано сосуществование нескольких не быстро осциллирующих устойчивых циклов, а также сосуществование устойчивых циклов и хаоса.

## Список литературы

- [1] A. M. Zverkin, G. A. Kamenskiĭ, S. B. Norkin, and L. È. Èl'sgol'ts. Differential equations with deviating argument. *Russ. Math. Surv.*, 17(2):1–146, 1962.
- [2] Hendrik Wernecke, Bulcsú Sándor, and Claudius Gros. Chaos in time delay systems, an educational review. *Physics Reports*, 824:1–40, September 2019.
- [3] Jack K. Hale. *Theory of Functional Differential Equations*, volume 3 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer, New York, NY, 1977.
- [4] Lucas Illing, Pierce Ryan, and Andreas Amann. Dynamics of a time-delayed relay system. *Phys. Rev. E*, 109:014223, Jan 2024.
- [5] Сергей Дмитриевич Глызин, Sergey Dmitrievich Glyzin, Андрей Юрьевич Колесов, Andrei Yur'evich Kolesov, Николай Христович Розов, and Nikolai Khristovich Rozov. Явление буферности в кольцевых цепочках однонаправленно связанных генераторов. *Известия Российской академии наук. Серия математическая*, 78(4):73–108, 2014.
- [6] A. Yu. Kolesov, E. F. Mishchenko, and N. Kh. Rozov. A modification of hutchinson's equation. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 50:1990–2002, December 2010. ADS Bibcode: 2010CMMPH..50.1990K.
- [7] Alexandra Kashchenko. Asymptotics of solutions to a differential equation with delay and nonlinearity having simple behaviour at infinity. *Mathematics*, 10(1818):3360, January 2022.
- [8] Д. Д. Баин. Периодические решения дифференциального уравнения с релейной нелинейностью с запаздыванием. *Материалы Воронежской международной весенней математической школы «Современные методы краевых задач. Понтрягинские чтения—XXXIV»*. Воронеж, 3-9 мая 2023 г. Часть 2, *Итоги науки и техн. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 231, ВИНТИ РАН, М., 3-12, 2024.
- [9] С. А. Кащенко. Сравнительный асимптотический анализ динамики автогенераторов с различными нелинейными запаздывающими связями. *Фундамент. и прикл. матем.*, 5:4:1017–1060, 1999.
- [10] Jan Sieber. Dynamics of delayed relay systems. *Nonlinearity*, 19, 11 2006.
- [11] Eugenii Shustin, Emilia Fridman, and Leonid Fridman. Oscillations in a second-order discontinuous system with delay. *Discrete and continuous dynamical systems*, 9, 03 2003.
- [12] David Barton, Bernd Krauskopf, and R. Wilson. Periodic solutions and their bifurcations in a non-smooth second-order delay differential equation. *Dynamical Systems*, 21, 09 2006.
- [13] Wolf Bayer Uwe an der Heiden. Chaos proved for a second-order difference differential equation. *Nonlinear Analysis*, 21:461–474, 01 2000.
- [14] Leonid Fridman, Eugenii Shustin, and Emilia Fridman. *Steady modes and sliding modes in relay control systems with delay*, pages 263–293. 01 2002.

- [15] Guang-Da Hu Taketomo Mitsui. *Numerical Analysis of Ordinary and Delay Differential Equations*. Springer Singapore, 5 2023.
- [16] Alfredo Bellen and Marino Zennaro. *Numerical methods for delay differential equations*. Oxford University Press, Mar 2003.
- [17] Ernst Hairer, Gerhard Wanner, and Syvert P. Nørsett. *Solving ordinary differential equations I*, volume 8 of *Springer Series in Computational Mathematics*. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 1993.
- [18] Luca Dieci and Luciano Lopez. A survey of numerical methods for ivps of odes with discontinuous right-hand side. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 236(16):3967–3991, October 2012.
- [19] Andreas Otto and Günter Radons. Lyapunov spectrum of linear delay differential equations with time-varying delay. *IFAC Proceedings Volumes*, 43(2):206–211, January 2010.
- [20] B. S. Berger and M. Rokni. Lyapunov exponents for discontinuous differential equations. *Quarterly of Applied Mathematics*, 48(3):549–553, 1990.
- [21] Marek Balcerzak, Artur Dąbrowski, Andrzej Stefański, and Jerzy Wojewoda. Spectrum of lyapunov exponents in non-smooth systems evaluated using orthogonal perturbation vectors. *MATEC Web Conf.*, 148:10003, 2018.
- [22] Zhi Zhang, Yang Liu, and Jan Sieber. Calculating the lyapunov exponents of a piecewise-smooth soft impacting system with a time-delayed feedback controller. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 91:105451, 07 2020.
- [23] Б. Ф. Былов, Р. Э. Виноград, Д. М. Гробман, and В. В. Немыцкий. *Теория показателей Ляпунова и её приложения к вопросам устойчивости*. М., 1966.
- [24] С. П. Кузнецов. *Динамический хаос*. М.: Издательство. Физико-математической литературы, 2001.
- [25] Giancarlo Benettin, L. Galgani, Antonio Giorgilli, and Marie Strelcyn. Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for hamiltonian systems; a method for computing all of them. part 2: Numerical application. *Meccanica*, 15:21–30, March 1980.

В Оргкомитет Смотра дипломных работ математиков России  
от Голицына Дениса Антоновича

Заявление о новизне

Сообщаю, что новыми в моей представленной на Смотр выпускной квалификационной работе (далее - работа) под названием «Гиперболические устойчивые многочлены и полная положительность» являются: Лемма 1, Замечание 2, Лемма 2, доказательство Леммы 3, доказательство Теоремы 7.

Также сообщаю, что для проверки новизны мною было проделано следующее:

1. В период с 1 апреля по 10 июня 2024 г. мною был произведён поиск в следующих поисковых системах: Яндекс, Google, Google Scholar, Web of Science, arxiv.org по следующим ключевым словам: гиперболические многочлены, устойчивые многочлены, теорема Штурма, полная положительность, осцилляционные матрицы. Были проанализированы материалы 19 статей, 1 монография, 1 диссертация, ни одна из них не содержала материала, заявляемого автором выпускной квалификационной работы в качестве нового. При поиске не было встречено работ или упоминаний работ, позволяющих усомниться в новизне материала. При этом в работах [3-5], [10-13] были найдены конструкции, похожие на излагаемые в настоящей выпускной квалификационной работе, однако отличие их ясно видно и наличие таких работ лишь подтверждает актуальность тематики исследования.
2. Материал научно-исследовательской работы основан на совместной статье в соавторстве с А. А. Кутузовой и Д. В. Талалаевым. На данный момент статья находится на рецензии в журнале «Математические заметки РАН».
3. Вопросы, связанные с материалом исследовательской работы, неоднократно обсуждались в рамках семинаров рабочей группы Центра интегрируемых систем, в том числе с Д. В. Талалаевым (МГУ им. М.В. Ломоносова, ЯрГУ им. П.Г. Демидова).
4. С докладом по данной тематике принято участие в следующих конференциях:
  - 10-я молодежная летняя школа-конференция по геометрическим методами математической физики, МГУ им. М. В. Ломоносова в 2023 г.
  - Международная конференция “Dynamics in Siberia”, институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, г. Новосибирск в 2024 г.

Подтверждаю, что являюсь автором предоставляемой на Смотр работы и прошу принять её для участия в Смотре. Принимаю на себя обязательство соблюдать правила Смотра. Также (в соответствии с п. 4 Положения о Смотре) принимаю на себя обязательство оценить 5 работ участников Смотра, выданных мне Оргкомитетом в результате жеребьёвки и сверх того оценить 2-5 работ других участников Смотра на мой выбор. Я понимаю правила оценки работ, приведённые в п. 4.3 Положения о Смотре. Даю согласие на публикацию адреса моей электронной почты.

Защита работы состоится 17.06.2024 г. На Смотр представлен проект текста работы.



Подпись

Голицын Денис Антонович  
17 июня 2024 г. Ярославль, Россия

Министерство науки и высшего образования  
Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова»  
Кафедра нелинейной динамики

Сдано на кафедру  
«\_\_\_» июня 2024 г.  
Заведующий кафедрой  
Академик РАН, д.ф.-м.н., профессор  
\_\_\_\_\_ Козлов В.В.

Выпускная квалификационная работа  
**Гиперболические устойчивые многочлены и полная положительность**  
направление подготовки  
01.03.02 Прикладная математика и информатика

Научный руководитель  
PhD по математике (University of Twente, Нидерланды),  
\_\_\_\_\_ С. А. Игонин  
«\_\_\_» июня 2024 г.

Студент группы ПМИ-43БО  
\_\_\_\_\_ Голицын Д.А.  
«\_\_\_» июня 2024 г.

Ярославль 2024 г.

# Реферат

Объем 21 с., 3 гл., 1 рис., 17 источников

**Гиперболические многочлены, устойчивые многочлены, конусы Гординга, теорема Штурма, полная положительность, осцилляционные матрицы.**

**Объектом исследования** являются гиперболические устойчивые многочлены и полностью положительные матрицы.

**Предметом исследования** является связь условия полной положительности с гиперболическими и устойчивыми многочленами.

**Цель работы:** получить новый критерий гиперболичности и устойчивости многочлена одной переменной в терминах осцилляционности ассоциированной с ним матрицы.

**В результате работы** исследовано понятие полной положительности, возникающее в разных областях математики, найдена и проанализирована связь данного понятия с условиями гиперболичности и устойчивости вещественного многочлена. В частности, получен новый критерий локализации корней многочлена, использующий осцилляционные матрицы, а также найдена связь полученного результата с задачей положительных параметризаций специальных клеток многообразий.

# Содержание

<b>1</b>	<b>Гиперболичность, устойчивость и конусы Гординга</b>	<b>6</b>
1.1	$\alpha$ -гиперболические многочлены и конусы Гординга . . . . .	6
1.2	Полностью положительные грассманианы и устойчивость . . . . .	8
<b>2</b>	<b>Связь корней многочлена со свойствами цепи Штурма</b>	<b>10</b>
2.1	Каноническая цепь Штурма: определение и свойства . . . . .	10
2.2	Свойства матрицы Штурма и ее связь с корнями вещественного многочлена . . . . .	11
<b>3</b>	<b>Осцилляционные матрицы и специальные клетки неотрицательных многообразий</b>	<b>14</b>
3.1	Теорема о связи гиперболичности и устойчивости многочлена со свойством осцилляционности . . . . .	14
3.2	Теорема Шонберга и параметризации положительных клеток многообразий . . . . .	16

## Введение

Задача, связанная с поиском критериев локализации корней многочленов, занимает особое место среди открытых математических проблем. Утверждения и теоремы, позволяющие сказать о том, лежат ли корни многочлена в заданной области, особенно важны в теории дифференциальных уравнений при анализе устойчивости их решений. Существует целое семейство различных утверждений такого рода: классическая теорема Декарта, критерий Рауса-Гурвица об устойчивости многочленов, широко используемая в дифференциальных уравнениях и теории динамических систем, теорема Борхардта-Якоби о числе пар комплексных корней многочлена, теоремы Шура и Энстрема как критерии принадлежности всех корней многочлена единичной окружности (см., например, [4]), теорема Якоби о числе различных корней многочлена и теорема Иоахимстала о количестве корней многочлена на заданном интервале, использующая ганкелевы матрицы [2].

В данной же исследовательской работе основное внимание будет уделено не менее важному утверждению о локализации корней многочлена – теореме Штурма, утверждающей о том, что количество различных вещественных корней на заданном интервале можно выразить через число перемен знака цепи Штурма [10]. Важность критерия Штурма подтверждает также тот факт, что на нем основывается теорема Будана-Фурье, подсчитывающая четность вещественных корней на заданном интервале с учетом их кратности [6].

Оказывается, что метод последовательностей Штурма напрямую связан с еще одной богатой областью современной математики, а именно с теорией кластерных многообразий. Собственно, понятие кластерных алгебр и многообразий сформировалось вокруг проблемы параметризации пространств полностью положительных матриц. Первоначально такие пространства возникли в динамических задачах малых устойчивых колебаний [5], где особое место занимают т.н. осцилляционные матрицы как особый вид полностью неотрицательных матриц. Определенная реинкарнация этой идеи связана с теорией канонических базисов Люстига [9], общей теорией кластерных алгебр [8] и многочисленными приложениями в теории интегрируемых систем [7], [17], диофантовых уравнениях и моделях статистической механики [14], [16].

Кроме того, в настоящей исследовательской работе отдельное внимание уделено условиям гиперболичности и устойчивости вещественного многочлена (терминологию гиперболических многочленов см, например, [1]) – данные свойства имеют особенную важность в теории нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных. Связанные с этими свойствами понятия  $a$ -гиперболичности и конуса Гординга имеют прямое отношение к анализу устойчивости решения задачи Коши [3].

Основным результатом исследования является утверждение, выражающее условие гиперболичности и устойчивости вещественного многочлена в терминах осцилляционности некоторой ассоциированной с ним матрицы (теорема [7]). Более того, получена полезная лемма, выражающая главные миноры матрицы Штурма в терминах членов последовательности Штурма (лемма [1]).

Данная работа организована следующим образом. В разделе [1] приводятся определения гиперболичности, устойчивости, приводится утверждение о связи, возникающей между данными понятиями через т.н. конусы Гординга, а также отношение этих понятий к полностью неотрицательным клеткам грассманиана. В разделе [2] мы напоминаем стандартное описание критерия Штурма и знакомим с необходимыми техническими средствами. Отдельное внимание в данном разделе уделено связи собственных значений матрицы Штурма с корнями вещественного многочлена. В разделе [3] мы напоминаем основные определения и свойства осцилляционных матриц и доказываем основной результат, заключающийся в интерпретации применения теоремы Штурма к гиперболическим устойчивым многочленам в терминах условия осцилляционности ассоциированной матрицы. Далее в этом разделе мы связываем полученный результат с задачей положительной параметризации специальных клеток положительных многообразий. В частности, описывается вложение положительной клетки трехдиагональных матриц, возникающее при параметризации устойчивых гиперболических многочленов в клетку Теплица полностью неотрицательных унипотентных матриц, обусловленное теоремой Айссена–Эдрея–Шонберга [13] и результатом Ритш [12].

# 1 Гиперболичность, устойчивость и конусы Гординга

## 1.1 $a$ -гиперболические многочлены и конусы Гординга

Анализ устойчивости дифференциального оператора играет важную роль в исследовании устойчивости решений дифференциальных уравнений. В случае, когда ОДУ принимает вид  $P(\frac{d}{dx})x(t) = 0$ , где  $P \in \mathbb{R}[x]$  – вещественный многочлен, важной задачей является исследование расположения его корней в комплексной плоскости.

**Определение 1.** Вещественный многочлен  $p \in \mathbb{R}[x]$  называется *устойчивым*, если  $p(x + iy) = 0 \Rightarrow x \leq 0$ . Иными словами, многочлен устойчив тогда и только тогда, когда все его корни лежат в левой комплексной полуплоскости.

**Определение 2.** Многочлен  $p \in \mathbb{C}[x]$  называется *гиперболическим*, если все его корни вещественны.

У понятий гиперболичности и устойчивости существуют многомерные аналоги, применимые к многочленам многих переменных. Одним из таких обобщений являются  $a$ -гиперболические многочлены.

**Определение 3.** Рассмотрим многочлен нескольких переменных  $P(x)$ , где  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , и пусть  $a \in \mathbb{R}^n$ ,  $a \neq 0$ . Тогда многочлен  $P(x)$  называется  *$a$ -гиперболическим*, если  $p(t) = P(at + x)$  является гиперболическим  $\forall x \in \mathbb{R}^n$ .

Заметим, что если многочлен  $a$ -гиперболический, то он также является и  $(-a)$ -гиперболическим. Следующее же замечание несет в себе геометрическую интерпретацию определения  $a$ -гиперболичности.

**Замечание 1.** Многочлен  $P(x)$ ,  $\deg P(x) = m$ , является  $a$ -гиперболическим тогда и только тогда, когда любая прямая, задаваемая направляющим вектором  $a \in \mathbb{R}^n$  пересекает алгебраическую гиперповерхность  $P(x) = 0$  ровно в  $m$  точках.

**Пример 1.** Предположим, что  $x = (x_1, x_2)$  и  $P(x) = x_1^2 - x_2^2$ , то есть  $\deg P = 2$ . В случае  $P(a) \neq 0$  любая прямая, задаваемая направляющим вектором  $a \in \mathbb{R}^n$ , имеет ровно два пересечения с гиперповерхностью  $P(x) = 0$ , а значит рассматриваемый многочлен  $a$ -гиперболический (рис. 1).

**Определение 4.** Пусть  $P$  – однородный  $a$ -гиперболический многочлен,  $a \in \mathbb{R}^n$ . **Конусом Гординга**  $K(P, a)$  называется наибольшее связное множество в  $\mathbb{R}^n$ , содержащее вектор  $a$  и состоящее из таких векторов, что  $P(x)$  является гиперболическим в их направлении.

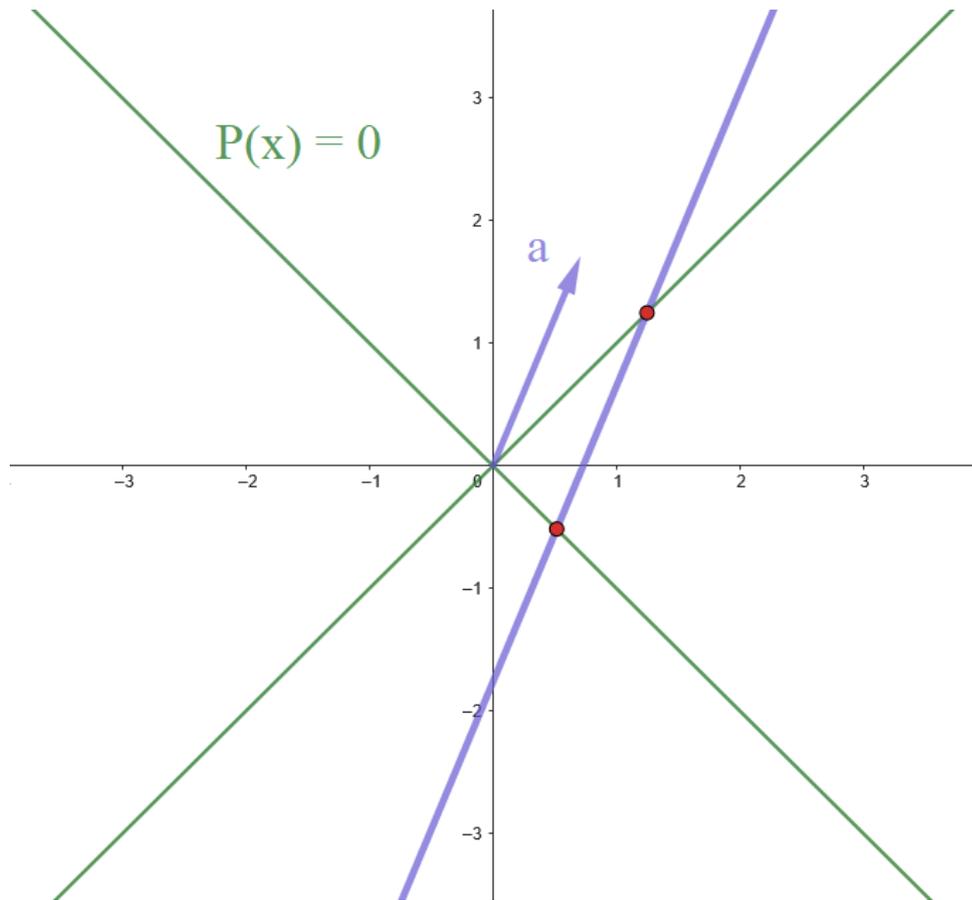


Рис. 1: Иллюстрация к примеру 1

**Теорема 1** (Гординг). *Конус  $K(p, a)$  состоит из всех таких  $x \in \mathbb{R}^n$ , что многочлен одной переменной  $p(t) = P(at + x)$  является устойчивым.*

На данную теорему можно смотреть как на альтернативное определение конуса Гординга. Тот факт, что конус Гординга можно определять одновременно и через условие гиперболичности, и через устойчивость, тесно связывает эти понятия.

**Пример 2.** *Рассмотрим  $V = \text{Sym}_{n \times n}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$  и  $P(x) = \det x$ . Известно, что любая симметрическая матрица имеет вещественный спектр. Это в точности условие того, что многочлен  $p(t) = \det(Et + x)$  является гиперболическим. Отсюда, многочлен  $P(x)$  является  $E$ -гиперболическим (здесь  $E$  – единичная матрица).*

*Исследуем теперь конус Гординга  $K(P, E)$ . Заметим, что многочлен  $p(t) = \det(Et - (-x))$  устойчив тогда и только тогда, когда  $x$  положительно полуопределена, так как симметрические положительно полуопределенные матрицы имеют вещественный неотрицательный спектр. Отсюда следует, что  $K(P, E) = \text{Sym}_{n \times n}^+(\mathbb{R})$ , где  $\text{Sym}_{n \times n}^+(\mathbb{R})$  – множество симметрических положительно полуопределенных матриц.*

*Аналогичное рассуждение можно провести для  $-E$ . Окажется, что  $P(x)$  является  $(-E)$ -гиперболическим, и этой матрице соответствует конус*

$K(P, -E) = \text{Sym}_{n \times n}^-(\mathbb{R})$ , где  $\text{Sym}_{n \times n}^-(\mathbb{R})$  – множество симметрических отрицательно полуопределенных матриц.

## 1.2 Полностью положительные грассманианы и устойчивость

Пусть  $X \in G(k, n)$  – точка грассманова многообразия, представляющая собой подпространство размерности  $k$  в векторном пространстве размерности  $n$ . Сопоставим точке  $X$  матрицу  $A \in \text{Mat}_{k \times n}(\mathbb{C})$ , в строках которой записаны векторы, на которые натянуто рассматриваемое подпространство. Заметим, что такая матрица не единственна: любые матрицы, полученные домножением  $A$  на невырожденную  $k \times k$  матрицу слева также будут задавать точку  $X$ . Однако по матрице  $A$  можно построить набор  $k \times k$ -миноров  $\det(A_I)$ ,  $I \in \binom{[n]}{k}$ , называемый **координатами Плюккера** на грассманиане  $G(k, n)$ , которые с точностью до некоторых соотношений параметризуют многообразие Грассмана.

**Определение 5.** Точка  $X \in G(k, n)$  называется **полностью неотрицательной**, если для соответствующей ей матрицы  $A$  верно, что все ее плюккеровы координаты неотрицательны.

Множество всех полностью неотрицательных точек грассманиана формируют т.н. **полностью неотрицательную часть** грассманиана  $G_{\geq 0}(k, n)$ . Такое множество является одним из простейших примеров полностью неотрицательных клеток многообразий флагов, впервые представленных Люстигом [9]. Одной из актуальных задач этой теории является вопрос параметризации таких клеток, о котором в настоящей исследовательской работе будет сказано в главе 3.

Ассоциируем с  $X \in G(k, n)$  однородный многочлен

$$P = \sum_{I \in \binom{[n]}{k}} \det(A_I) x^I,$$

где  $x^I = \prod_{i \in I} x_i$ , а запись  $\binom{[n]}{k}$  обозначает все подмножества множества  $\{1, 2, \dots, n\}$ , имеющие мощность  $k$ .

**Определение 6.** Будем говорить, что многочлен многих переменных  $P(x) \in \mathbb{C}[x]$ , где  $x = (x_1, \dots, x_n)$ , **устойчив**, если либо  $P \equiv 0$ , либо  $P(x) \neq 0$  для всех  $x = (x_1, \dots, x_n)$  таких, что  $\text{Im}(x_i) > 0 \forall i \in \{1, \dots, n\}$ .

Следующая теорема, доказательство которой использует теорию мультиаффинных многочленов, связывает понятия устойчивости и полностью неотрицательных матриц и многообразий.

**Теорема 2** (Purbhoo, [11]). Многочлен  $P$ , ассоциированный с  $X \in G(k, n)$  устойчив в смысле определения [6] тогда и только тогда, когда  $X$  – полностью неотрицательная точка грассманиана.

## 2 Связь корней многочлена со свойствами цепи Штурма

Данный раздел посвящен изучению свойств так называемых цепей и матриц Штурма – эти понятия тесно связаны с задачей локализации корней вещественного многочлена, а именно с классической теоремой Штурма, позволяющей считать количество различных вещественных корней на заданном интервале.

### 2.1 Каноническая цепь Штурма: определение и свойства

**Определение 7.** Пусть  $f \in \mathbb{R}[x]$  – многочлен одной переменной, положим  $f_0(x) = f(x)$  и  $f_1(x) = f'(x)$ . **Каноническая цепь Штурма** — это набор многочленов  $\{f_0(x), f_1(x), \dots, f_n(x)\}$ , определяемый алгоритмом Евклида:

$$\begin{aligned} f_0(x) &= d_1(x)f_1(x) - f_2(x), \quad \deg f_2(x) < \deg f_1(x), \\ f_1(x) &= d_2(x)f_2(x) - f_3(x), \quad \deg f_3(x) < \deg f_2(x), \\ &\dots \\ f_{n-2}(x) &= d_{n-1}(x)f_{n-1}(x) - f_n(x), \quad \deg f_n(x) < \deg f_{n-1}(x), \\ f_{n-1}(x) &= d_n(x)f_n(x). \end{aligned}$$

Отметим некоторые свойства цепи Штурма. Во-первых, последний ее член  $f_n(x)$  есть не что иное, как наибольший общий делитель  $f$  и  $f'$ . Если записать  $f(x) = (x - x_1)^{k_1}(x - x_2)^{k_2} \dots (x - x_m)^{k_m}$ , то верно, что  $f_n(x) = C(x - x_1)^{k_1-1}(x - x_2)^{k_2-1} \dots (x - x_m)^{k_m-1}$  ( $C$  – ненулевая вещественная константа). Объяснение этого факта состоит в следующем: множество корней  $f'$  содержит корни  $f$  (но с кратностью на 1 ниже для каждого корня: в частности, простые корни  $f$  не являются корнями  $f'$ ), а  $f_n$  обязан иметь все общие корни  $f$  и  $f'$ , причем максимально возможных кратностей. Во-вторых, сравнивая формулы для  $f$  и  $f_n$ , получаем верхнюю оценку на длину цепи Штурма: так как  $\deg f_{i+1} < \deg f_i$ , то  $n \leq m$ . Максимальная длина достигается в том случае, когда  $\deg f_{i+1} = \deg f_i - 1$ , иными словами, когда  $d_i$  – линейные многочлены.

Обозначим через  $V_f(x)$  количество перемен знака в цепи Штурма в точке  $x$  без учета возможных нулевых значений.

**Теорема 3 (Штурм).** Пусть  $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ ,  $\deg f(x) > 0$ . Тогда для чисел  $a < b$ , не являющихся кратными корнями  $f(x)$ , верно, что число различных корней  $f(x)$  на полуинтервале  $(a, b]$  равно  $V_f(a) - V_f(b)$ .

**Пример 3.** Рассмотрим многочлен  $f(x) = x^4 + 4x^3 - 10x^2 - 28x - 15 = (x + 5)(x + 1)^2(x - 3)$ . Выполним последовательное деление многочленов,

получим следующую цепь Штурма:

$$\begin{aligned} f_0(x) &= x^4 + 4x^3 - 10x^2 - 28x - 15, \\ f_1(x) &= 4x^3 + 12x^2 + 20x - 28, \\ f_2(x) &= 8x^2 + 16x + 8, \\ f_3(x) &= 32x + 32. \end{aligned}$$

В данном случае цепь Штурма имеет максимальную длину:  $n = m = 3$ . Кроме того, вид  $f_3(x)$  говорит нам о том, что  $x = -1$  является корнем  $f$  кратности 2, а все остальные корни  $f$  – простые.

Теорема Штурма позволяет локализовать корни многочлена. К примеру, взяв  $a = -\infty, b = +\infty$ , в точке  $a$  получим последовательность  $\{+\infty, -\infty, +\infty, -\infty\}$ , откуда  $V_f(a) = 3$ , а в точке  $b$  получим  $\{+\infty, +\infty, +\infty, +\infty\}$ , т.е.  $V_f(b) = 0$ . Значит, количество различных корней  $f$  на  $\mathbb{R}$  равно  $V_f(a) - V_f(b) = 3$ . Два оставшихся корня можно продолжить искать, исследуя  $V_f(a) - V_f(b)$ , варьируя значения  $a$  и  $b$ . Например,  $V_f(0) - V_f(4) = 1 - 0 = 1$ , а значит есть один простой корень на полуинтервале  $(0, 4]$  – на самом деле, это корень  $x = 3$ .

## 2.2 Свойства матрицы Штурма и ее связь с корнями вещественного многочлена

**Определение 8.** Матрицей Штурма называется трехдиагональная матрица следующего вида:

$$S(x) = \begin{pmatrix} d_1(x) & 1 & & & \\ & 1 & d_2(x) & \cdots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & 1 & d_n(x) \end{pmatrix}.$$

Пусть  $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$  – матрица с элементами в поле  $\mathbb{K}$ . Далее символом  $A_{j_1, j_2, \dots, j_k}^{i_1, i_2, \dots, i_k}$  будем обозначать минор матрицы  $A$ , полученный пересечением строк  $i_1, i_2, \dots, i_k$  и столбцов  $j_1, j_2, \dots, j_k$ .

**Лемма 1.** Угловые миноры  $S(x)$  могут быть записаны в терминах членов цепи Штурма в следующем виде:

$$S_{1,2,\dots,k}^{1,2,\dots,k} = f_0 f_{k+1} \sum_{i=0}^k \frac{1}{f_i f_{i+1}}, \quad k \in \{1, 2, \dots, n-1\}.$$

*Доказательство.* Докажем утверждение по индукции.

При  $k = 1$ :

$$S_1^1 = d_1 = \frac{f_0 + f_2}{f_1} = f_0 f_2 \left( \frac{1}{f_0 f_1} + \frac{1}{f_1 f_2} \right).$$

Допустим, что предположение индукции справедливо для всех  $k \in \{1, 2, \dots, m-1\}$ . Тогда, при  $k = m$ :

$$\begin{aligned} S_{1,\dots,m}^{1,\dots,m} &= d_m S_{1,\dots,m-1}^{1,\dots,m-1} - S_{1,\dots,m-2}^{1,\dots,m-2} = \frac{f_{m-1} + f_{m+1}}{f_m} f_0 f_m \sum_{i=0}^{m-1} \frac{1}{f_i f_{i+1}} - \\ &- f_0 f_{m-1} \sum_{i=0}^{m-2} \frac{1}{f_i f_{i+1}} = f_0 f_{m-1} \sum_{i=0}^{m-1} \frac{1}{f_i f_{i+1}} + f_0 f_{m+1} \sum_{i=0}^{m-1} \frac{1}{f_i f_{i+1}} - \\ &- f_0 f_{m-1} \sum_{i=0}^{m-2} \frac{1}{f_i f_{i+1}} = \frac{f_0}{f_m} + f_0 f_{m+1} \sum_{i=0}^{m-1} \frac{1}{f_i f_{i+1}} = f_0 f_{m+1} \sum_{i=0}^m \frac{1}{f_i f_{i+1}}. \end{aligned}$$

□

**Замечание 2.** Если учесть  $d_n = \frac{f_{n-1}}{f_n}$  и разложить определитель по последней строке, получим формулу полного определителя матрицы  $S(x)$ :

$$\det S(x) = \frac{f_0(x)}{f_n(x)}.$$

Обозначим  $\tilde{S}(x) = MS(x)M$ , где  $M = \text{diag}(1, -1, 1, \dots)$ , и определим вектор-функцию  $F_f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  следующим образом:

$$\tilde{S}(x) = \begin{pmatrix} d_1(x) & -1 & & & \\ -1 & d_2(x) & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & -1 & \\ & & & -1 & d_n(x) \end{pmatrix}, \quad F_f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix}.$$

**Лемма 2.** Если  $x_i$  – корень  $f(x)$ , то  $\tilde{S}(x_i)F_f(x_i) = 0$ .

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} \tilde{S}(x_i)F_f(x_i) &= \begin{pmatrix} d_1(x_i) & -1 & & & \\ -1 & d_2(x_i) & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & -1 & \\ & & & -1 & d_n(x_i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1(x_i) \\ f_2(x_i) \\ \vdots \\ f_n(x_i) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} d_1(x_i)f_1(x_i) - f_2(x_i) \\ -f_1(x_i) + d_2(x_i)f_2(x_i) - f_3(x_i) \\ \vdots \\ -f_{n-1}(x_i) + d_n(x_i)f_n(x_i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

□

На самом деле, с матрицей Штурма удобно работать в случае, когда цепь Штурма имеет максимальную длину. Заметим, что множество многочленов с максимальной цепью Штурма всюду плотно в кольце многочленов, так как в общем случае при делении  $f_i$  на  $f_{i+1}$  верно  $\deg f_{i+2} = \deg f_{i+1} - 1$ , а требование на зануление нескольких старших коэффициентов в этом остатке накладывает жесткие ограничения на коэффициенты  $f_i$ . Эти ограничения, определяемые через набор уравнений, задают подпространство меньшей размерности в пространстве многочленов фиксированной степени.

В связи с этим, будем работать в случае, когда цепь Штурма максимальна. Так как  $d_i(x)$  оказываются линейными функциями, справедливо разложение:

$$S(x) = Gx + H, \quad \tilde{S}(x) = Gx + \tilde{H}.$$

В качестве следствия леммы [2](#) получаем следующее утверждение:

**Лемма 3.** *Если  $x_i$  — корень  $f(x)$  и цепь Штурма имеет максимальную длину, то  $F_f(x_i)$  — собственный вектор матрицы  $G^{-1}\tilde{S}(a)$ , соответствующий собственному значению  $a - x_i$ .*

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} 0 &= \tilde{S}(x_i)F_f(x_i) = \left(G(x_i - a) + \tilde{S}(a)\right)F_f(x_i) = \\ &= \left(E(x_i - a) + G^{-1}\tilde{S}(a)\right)F_f(x_i). \end{aligned}$$

□

Отдельного внимания заслуживает случай  $a = 0$ , так как в этом случае  $\tilde{S}(a) = \tilde{H}$ . Последняя лемма говорит, что  $F_f(x_i)$  является собственным вектором  $G^{-1}\tilde{H}$  с собственным числом  $-x_i$ . Это наталкивает на мысль о параметризации гиперболических и устойчивых многочленов (многочленов с вещественным неположительным набором корней) матрицами  $G^{-1}\tilde{H}$  с вещественным неотрицательным спектром.

### 3 Осцилляционные матрицы и специальные клетки неотрицательных многообразий

#### 3.1 Теорема о связи гиперболичности и устойчивости многочлена со свойством осцилляционности

Напомним некоторые свойства осцилляционных матриц, введенных Гантмахером и Крейном в [5].

**Определение 9.** Матрица  $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{R})$  называется *полностью положительной (полностью неотрицательной)*, если все ее миноры  $A_{j_1, \dots, j_k}^{i_1, \dots, i_k}, \forall k \in \{1, \dots, n\}$  положительны (неотрицательны).

Матрица  $A$  называется *осцилляционной*, если она полностью неотрицательна, и существует число  $r \in \mathbb{N}$  такое, что  $A^r$  полностью положительна.

**Теорема 4** (Бине, Коши). Пусть  $A \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{R}), B \in \text{Mat}_{n \times m}(\mathbb{R})$ . Тогда миноры матрицы  $AB$  вычисляются по формуле

$$(AB)_J^I = \sum_{K \in \binom{[n]}{k}} A_K^I B_J^K$$

Формула Бине-Коши из теоремы 4 является прямым аналогом формулы матричного умножения. На самом деле, эта формула следует из того факта, что миноры матрицы  $A \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{R})$  размера  $k$ , связанной с оператором  $\mathcal{A}$ , являются матричными элементами матрицы внешней степени оператора  $\Lambda^k \mathcal{A}$ .

Следствием теоремы 4 является следующий результат.

**Лемма 4** ([5]). Пусть  $C = AB$ , где  $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{R})$  – невырожденная полностью неотрицательная матрица, и  $B \in \text{Mat}_n(\mathbb{R})$  – осцилляционная матрица. Тогда  $C$  тоже является осцилляционной.

Для осцилляционных матриц имеет место следующая структурная теорема, которая применялась Гантмахером и Крейном при изучении колебаний механических систем:

**Теорема 5** (Гантмахер, Крейн, [5]). Пусть  $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{R})$  – осцилляционная, тогда:

1.  $A$  имеет вещественный простой положительный спектр:

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_n > 0. \quad (1)$$

2. Координаты собственного вектора  $v_k$ , соответствующего  $k$ -му собственному числу в (1), имеют ровно  $k - 1$  переменную знака.

**Теорема 6 (критерий осцилляционности, [5]).** *Всякая невырожденная трехдиагональная матрица  $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{R})$  является осцилляционной тогда и только тогда, когда  $\forall i, j: |i - j| = 1$  элемент  $A_{ij} > 0$ , и последовательные угловые миноры положительны.*

Все перечисленные ранее результаты позволяют сформулировать и доказать следующую теорему, связывающую гиперболические устойчивые многочлены с теорией осцилляционных матриц.

**Теорема 7.** *Пусть  $f(x) = (x - x_1)^{k_1} \dots (x - x_m)^{k_m}$  – многочлен, имеющий цепь Штурма максимальной длины (состоит из  $m + 1$  элемента). Тогда все корни  $f(x)$  действительны и лежат на  $(-\infty, a)$  тогда и только тогда, когда матрица  $G^{-1}S(a)$  – осцилляционная.*

*В частности, следующие два условия эквивалентны:*

1.  $f(x)$  является гиперболическим и устойчивым многочленом,  $f(0) \neq 0$ .
2. Матрица  $G^{-1}H$  является осцилляционной.

*Доказательство.* Докажем необходимость.

По теореме [3],  $f(x)$  имеет ровно  $V_f(-\infty) - V_f(a) = m$  различных корней. Так как в цепи Штурма  $m + 1$  элемент ( $\max V_f(x) = m, \min V_f(x) = 0$ ), имеем  $V_f(-\infty) = m, V_f(a) = 0$ . Первое равенство означает, что в последовательности старших коэффициентов цепи Штурма нет перемен знака, второе равенство говорит о том, что в последовательности значений  $\{f_i(a)\}_{i=1}^{m+1}$  нет перемен знака, то есть  $f_i(a)f_j(a) \geq 0$ . Более того, справедливо  $f_i(a) \neq 0 \forall i \in \{0, \dots, m + 1\}$ , так как  $a$  больше любого корня.

Воспользовавшись леммой [1], оценим угловые миноры  $S(a)$ :

$$S_{1, \dots, k}^{1, \dots, k}(a) = f_0(a)f_{k+1}(a) \sum_{i=0}^k \frac{1}{f_i(a)f_{i+1}(a)}, \quad k \in \{1, 2, \dots, m - 1\}.$$

Числа  $f_j(a)$  встречаются в этом выражении парами и дают в произведении положительные числа. Отсюда становится очевидно, что  $S_{1, \dots, k}^{1, \dots, k}(a)$  положительны. Положительность минора размера  $m$  следует из представления

$$\det S(a) = \frac{f_0(a)}{f_n(a)} > 0.$$

При  $|i - j| = 1$  имеем  $S_{ij}(a) = 1$ , что положительно. Матрица  $S(a)$  удовлетворяет условиям теоремы [6], а значит, является осцилляционной матрицей порядка  $m - 1$ .

Матрица  $G$  – диагональная матрица, причем ее диагональные элементы положительны. Действительно,  $G_{ii}$  – это старший коэффициент в

$d_i$ : он положителен в силу того, что последовательность старших коэффициентов цепи Штурма не содержит перемен знака. В частности,  $G^{-1}$  полностью неотрицательна.

Воспользовавшись леммой [4], установим, что  $G^{-1}S(a)$  – осцилляционная матрица порядка  $m - 1$ .

Докажем теперь достаточность. Пусть  $G^{-1}S(a)$  – осцилляционная матрица. По теореме [5], собственные числа  $G^{-1}S(a)$  вещественны и положительны. У матриц  $G^{-1}S(a)$  и  $G^{-1}\tilde{S}(a)$  наборы собственных чисел совпадают, так как они подобны. Из леммы [3] вытекает то, что все корни  $x_i$  вещественны и удовлетворяют условию  $a - x_i > 0$ , то есть  $x_i < a$ . □

### 3.2 Теорема Шонберга и параметризации положительных клеток многообразий

**Определение 10.** *Бесконечная вещественная последовательность  $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$  называется полностью положительной (полностью неотрицательной), если бесконечная матрица*

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & 0 & 0 & \dots \\ a_1 & a_0 & 0 & \dots \\ a_2 & a_1 & a_0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

*полностью положительна (полностью неотрицательна) в смысле определения [9]*

**Теорема 8** (Aissen, Edrei, Schoenberg, Whitney). *Последовательность  $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$  полностью неотрицательна тогда и только тогда, когда соответствующая ей производящая функция  $f(z)$  имеет вид*

$$f(z) = \exp(\gamma z) \frac{\prod_{i=1}^{\infty} (1 + \alpha_i z)}{\prod_{i=1}^{\infty} (1 - \beta_i z)},$$

где  $\gamma \geq 0, \alpha_i \geq 0, \beta_i \geq 0, \sum \alpha_i < +\infty, \sum \beta_i < +\infty$ .

Теорема [8] имеет и конечный аналог. Если мы рассмотрим последовательность вида  $\{a_0, a_1, \dots, a_n, 0, 0, \dots\}$ , производящие функции заменяются на многочлены, а бесконечные матрицы – на матрицы конечного размера.

**Определение 11.** *Обозначим  $U^-$  группу нижнетреугольных унитарных матриц  $n \times n$ . Ее подмножество  $X \subset U^-$  матриц Тёплица задается*

следующим образом:

$$X = \left\{ A \in U^- : A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 \\ a_{n-1} & \dots & a_1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Определим  $X_{\geq 0}$  как множество полностью неотрицательных матриц из  $X$ . Кроме того, обозначим  $\{\Delta_{n-i}(A)\}$  множество нижних левых миноров матрицы  $A$ .

**Теорема 9** (следствие теоремы [8]). Пусть  $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1}$  – вещественный многочлен ( $a_0 = 1$ ). Этот многочлен является гиперболическим и устойчивым тогда и только тогда, когда построенная по его коэффициентам матрица Тёплица  $A$  полностью неотрицательна.

Так как данный результат структурно схож с утверждением теоремы [7], разумно сравнить эти два утверждения.

С одной стороны, по теореме [7] множество гиперболических устойчивых многочленов с максимальной цепью Штурма допускает параметризацию трехдиагональными осцилляционными матрицами вида  $G^{-1}H$ . Обозначим такие матрицы  $SC_{\geq 0}$ . Более того, критерий осцилляционности (лемма [6]) говорит о том, что осцилляционность таких матриц эквивалентна их положительной определенности.

С другой же стороны, существует эффективная параметризация множества полностью неотрицательных тёплицевых матриц благодаря следующей теореме.

**Теорема 10** (К. Rietsch, [12]). Множество полностью неотрицательных матриц в  $X$  допускает эффективную параметризацию с помощью гомеоморфизма

$$\Delta_{\geq 0} := (\Delta_1, \dots, \Delta_{n-1}) : X_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}^{n-1}.$$

Следует отметить, что это утверждение существенно использует свойства кольца квантовых когомологий пространства частичных флагов. Собственно рассматриваемая неотрицательная клетка является частью клеточного разбиения пространства флагов.

Таким образом, в то время как гиперболические устойчивые многочлены с максимальной цепью Штурма параметризуются положительно определенными матрицами вида  $G^{-1}H$  (координатами являются главные миноры таких матриц), одновременно существует и параметризация всего множества гиперболических устойчивых многочленов с помощью полностью неотрицательных тёплицевых матриц (здесь координаты – левые нижние миноры).

**Замечание 3.** Благодаря теореме 9 получаем вложение нашей клетки  $SC_{\geq 0}$  в клетку Ритши:

$$\varphi : SC_{\geq 0} \rightarrow X_{\geq 0}.$$

## Заключение

Основным результатом настоящей исследовательской работы является теорема [7], интерпретирующая условия гиперболической устойчивости вещественного полинома с точки зрения осцилляционности ассоциированной с ним матрицы. Этот результат открывает новые возможности в разработке методов локализации корней многочлена с использованием современных результатов теории кластерных многообразий, в то же время позволяя решать новые задачи в области положительной геометрии, в том числе задачу описания клеточного разбиения положительных унипотентных матриц, положительных грассманианов и т.д.

В ходе исследования проведен анализ понятия полной положительности, уделено внимание различным его проявлениям в разных областях математики. Проанализированы также условия устойчивости и гиперболичности, а также их многомерные обобщения, связанные с конусом Гординга и полностью неотрицательными клетками многообразия Грассмана. Кроме того, в ходе работы над доказательством основной теоремы получены не менее важные леммы об отношении теории цепей и матриц Штурма к расположению корней вещественного многочлена.

Мы рассчитываем развить установленные связи между теорией полностью положительных матриц и проблемами устойчивости многочленов в многомерном случае в качестве продолжения работы. Особенно перспективны на наш взгляд применения условий положительности к задачам дифференциальных уравнений параболического типа, вещественных регулярных решений уравнений типа КП [15]. Еще одной важной задачей может стать изучение параметризации положительных клеток многообразий, а именно исследование структуры вложения, упомянутого в замечании [3], и поиск конкретных формул, выражающих координаты в  $SC_{\geq 0}$  через координаты пространства  $X_{\geq 0}$ . Интересной проблемой кажется также обобщение теоремы [7] для многочленов общего вида (с немаксимальной цепью Штурма), а также попытка описать такие многочлены конкретными формулами.

## Список литературы

- [1] В. И. Арнольд, *Гиперболические многочлены и отображения Вандермонда*, Функциональный анализ и его приложения, 1986, том 20, выпуск 2, с. 52–53.
- [2] Е. А. Калинина, *Применение алгебраических методов для анализа сложных систем*, Санкт-Петербург, 2016, диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук, с.27-31.
- [3] Н. В. Филимоненкова, П. А. Бакусов, *Гиперболические многочлены и конусы Гординга*, Математическое просвещение, сер. 3, вып. 20, 2016(143–166).
- [4] Н. Н. Мейман, *Некоторые вопросы расположения нулей полиномов*, Успехи математических наук, 1949, том 4, выпуск 6, 154-188.
- [5] Ф. Р. Гантмахер, М. Г. Крейн, *Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем*, М.-Л., 1950.
- [6] *Энциклопедия элементарной математики*, кн. 2 - Алгебра, М. - Л., 1951, с. 331.
- [7] A. Goncharov, R. Kenyon, *Dimers and cluster integrable systems*, 2011, Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure 46(5).
- [8] Arkady Berenstein, Sergey Fomin, Andrei Zelevinsky, *Parametrizations of Canonical Bases and Totally Positive Matrices*, 1996, Advances in mathematics 122, 49-149.
- [9] G. Lusztig, *Total positivity and canonical bases, Algebraic groups and Lie groups*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997, pp. 281-295.
- [10] K. Hou, B. Li, *A New Proof of Sturm's Theorem via Matrix Theory*, 2021, <https://arxiv.org/pdf/2110.15364.pdf>.
- [11] K. Purbhoo, *Total Nonnegativity and Stable Polynomials*, Canad. Math. Bull. Vol. 61 (4), 2018, pp. 836-847.
- [12] K. Rietsch, *Totally positive Toeplitz matrices and quantum cohomology of partial flag varieties*, 2002, Journal of the American Mathematical Society 16(02).
- [13] M. Aissen, A. Edrei, I. J. Schoenberg, A. Whitney, *On the Generating Functions of Totally Positive Sequences*, Journal d'Analyse Mathématique volume 2, pages 93-103 (1952).

- [14] Philippe Di Francesco, Rinat Kedem, *Q-system Cluster Algebras, Paths and Total Positivity*, SIGMA, **6** (2010), 014, 36 pp.
- [15] Simonetta Abenda, Petr G. Grinevich, *Real regular KP divisors on M-curves and totally non-negative Grassmannians*, Letters in Mathematical Physics (2022) 112:115.
- [16] V. Gorbounov, D. Talalaev, *Electrical varieties as vertex integrable statistical models*, 2020 J. Phys. A: Math. Theor. 53 454001.
- [17] V. Ovsienko, R. Schwartz, S. Tabachnikov, *The pentagram map: A discrete integrable system*, Comm. Math. Phys., **299** (2010), no.2, 409-446.

## Приложение

В Оргкомитет  
Смотра дипломных работ математиков России  
от Добролюбовой Алисы  
Леонидовны

### Заявление о новизне

Сообщаю, что новыми в моей представленной на Смотр выпускной квалификационной работе (далее - работа) под названием «О классе устойчивой изотопической связности градиентно-подобных диффеоморфизмов двумерного тора» являются:

Классификация относительно устойчивой изотопической связности класса градиентно-подобных диффеоморфизмов тора, которые индуцируют изоморфизм фундаментальной группы, заданный матрицей  $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ .

Также сообщаю, что для проверки новизны мною было проделано следующее: *защита диплома, обсуждение с коллегами из Международной лаборатории динамических систем и приложений, поиск в интернете связанных результатов.*

Подтверждаю, что являюсь автором предоставляемой на Смотр работы и прошу принять её для участия в Смотре. Принимаю на себя обязательство соблюдать правила Смотра. Также (в соответствии с п. 4 Положения о Смотре) принимаю на себя обязательство оценить 5 работ участников Смотра, выданных мне Оргкомитетом в результате жеребьёвки и сверх того оценить 2-5 работ других участников Смотра на мой выбор. Я понимаю правила оценки работ, приведённые в п. 4.3 Положения о Смотре. Даю согласие на публикацию адреса моей электронной почты.

Защита работы состоялась 11 июня 2024 г.. На Смотр представлен проект текста/окончательный текст работы.



Добролюбова Алиса Леонидовна

17.06.2024

Нижний Новгород, Россия

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ  
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ  
"ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ"  
НИЖЕГОРОДСКИЙ ФИЛИАЛ

*Факультет математики, информатики и компьютерных наук*

Добролюбова Алиса Леонидовна

**О классе устойчивой изотопической связности  
градиентно-подобных диффеоморфизмов  
двумерного тора**

Выпускная квалификационная работа - БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА  
по направлению подготовки 01.03.01 Математика  
образовательная программа "Математика"

Рецензент

к.ф.-м.н.

Кибкало Владислав Александрович

Научный руководитель

доцент., к.ф.-м.н.

Ноздринова Елена Вячеславовна

Нижний Новгород 2022 г.

# Содержание

Введение	3
<b>1</b> <b>Вспомогательные факты</b>	<b>4</b>
1.1 Диффеоморфизмы Морса-Смейла . . . . .	4
1.2 Периодические гомеоморфизмы и их связь с градиентно-подобными диффеоморфизмами поверхностей . . . . .	6
1.3 Устойчивые дуги . . . . .	7
<b>2</b> <b>Исчезновение периодических точек</b>	<b>8</b>
<b>3</b> <b>Построение модельного диффеоморфизма в классе <math>G_0</math></b>	<b>11</b>
<b>4</b> <b>Устойчивая изотопическая классификация       диффеоморфизмов множества <math>G_0</math></b>	<b>13</b>
Заключение	16
Список литературы	17

# Введение

Во всей работе мы будем иметь дело с замкнутыми связными ориентируемыми поверхностями  $M^2$  и сохраняющими ориентацию гомеоморфизмами или диффеоморфизмами, заданными на них. *Диффеотопность диффеоморфизмов*  $f_0, f_1 : M^2 \rightarrow M^2$  означает существование некоторой гладкой дуги  $\{f_t : M^2 \rightarrow M^2, t \in [0, 1]\}$ , соединяющей их в пространстве диффеоморфизмов. Если диффеотопные диффеоморфизмы являются *структурно устойчивыми* (качественно не меняющими своих свойств при малых шевелениях), то естественно ожидать существования *устойчивой дуги* (качественно не меняющей своих свойств при малых шевелениях) их соединяющей (см. точное определение в разделе 1.3). В этом случае, следуя Ш. Ньюхаусу, Дж. Палису, Ф. Такенсу [1], говорят, что диффеоморфизмы  $f_0, f_1 : M^2 \rightarrow M^2$  *устойчиво изотопны* или принадлежат одному и тому же классу *устойчивой изотопической связности*.

Простейшими структурно устойчивыми диффеоморфизмами поверхностей являются *градиентно-подобные* преобразования, имеющие конечное гиперболическое неблуждающее множество, инвариантные многообразия различных седловых точек которого не пересекаются (см. точное определение в разделе 1.1). Однако, даже градиентно-подобные диффеоморфизмы 2-сферы, которые всегда диффеотопны, в общем случае не являются устойчиво изотопными. Для таких диффеоморфизмов полная классификация, с точностью до устойчивой изотопности, получена Е. Ноздриновой и О. Починкой [2] (см., также обзор [3] по известным на сегодняшний день препятствиям к существованию устойчивых дуг между диффеоморфизмами многообразий). Препятствием к существованию устойчивой дуги между диффеоморфизмами 2-сферы является различие в их периодических данных, что впервые было замечено П. Бланшаром [4].

Хорошо известно (см., например, [5]), что диффеоморфизмы 2-тора диффеотопны тогда и только тогда, когда индуцированный ими изоморфизм фундаментальной группы задается одной и той же матрицей  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in Sl(2, \mathbb{Z})$ , то есть  $A$  — целочисленная квадратная матрица второго порядка с определителем, равным 1. Устойчивая связность изотопных тождественному диффеоморфизмов исследована в работе [6], где показано, что диффеоморфизмы, имеющие одинаковые периодические данные могут не соединяться устойчивой дугой из-за разности гомотопических типов кривых, составленных из инвариантных многообразий седловых точек.

В настоящей работе рассмотрен класс  $G$  градиентно-подобных диффеоморфизмов 2-тора, индуцирующих изоморфизм фундаментальной группы, определяемый матрицей  $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ . Основным результатом настоящей работы является следующая теорема.

**Теорема 1.** Для любых диффеоморфизмов класса  $G$  существует соединяющая их устойчивая дуга.

## 1 Вспомогательные факты

### 1.1 Диффеоморфизмы Морса-Смейла

Пусть диффеоморфизм  $f : M^n \rightarrow M^n$  задан на гладком замкнутом (компактном без края)  $n$ -многообразии ( $n \geq 1$ )  $M^n$  с метрикой  $d$ .

Два диффеоморфизма  $f, f' : M^n \rightarrow M^n$  называются *топологически сопряженными*, если существует гомеоморфизм  $h : M^n \rightarrow M^n$  такой, что  $fh = hf'$ .

Точка  $x \in M^n$  называется *блуждающей* для  $f$ , если существует открытая окрестность  $U_x$  точки  $x$  такая, что  $f^n(U_x) \cap U_x = \emptyset$  для всех  $n \in \mathbb{N}$ . В противном случае точка  $x$  называется *неблуждающей*. Множество неблуждающих точек диффеоморфизма  $f$  называется *неблуждающим множеством* и обозначается  $\Omega_f$ .

Например, неблуждающими являются все предельные точки диффеоморфизма. Напомним, что точка  $y \in M^n$  называется  $\omega$ -предельной точкой для точки  $x \in M^n$ , если существует последовательность  $t_k \rightarrow +\infty$ ,  $t_k \in \mathbb{Z}$ , такая, что  $\lim_{t_k \rightarrow +\infty} d(f^{t_k}(x), y) = 0$ . Множество  $\omega(x)$  всех  $\omega$ -предельных точек для точки  $x$  называется ее  $\omega$ -предельным множеством. Заменой  $+\infty$  на  $-\infty$  определяется  $\alpha$ -предельное множество  $\alpha(x)$  точки  $x$ . Множество  $L_f = \text{cl}(\bigcup_{x \in M^n} \omega(x) \cup \alpha(x))$  называется *предельным множеством* диффеоморфизма  $f$ .

Если множество  $\Omega_f$  конечно, то каждая точка  $p \in \Omega_f$  является периодической, обозначим через  $m_p \in \mathbb{N}$  период периодической точки  $p$ . С любой периодической точкой  $p$  связаны *устойчивое* и *неустойчивое* многообразия, определяемые следующим образом:

$$W_p^s = \{x \in M^n : \lim_{k \rightarrow +\infty} d(f^{km_p}(x), p) = 0\},$$

$$W_p^u = \{x \in M^n : \lim_{k \rightarrow +\infty} d(f^{-km_p}(x), p) = 0\}.$$

Устойчивые и неустойчивые многообразия называются *инвариантными многообразиями*. Говорят, что периодические орбиты  $\mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_k$  образуют *цикл*, если  $W_{\mathcal{O}_i}^s \cap W_{\mathcal{O}_{i+1}}^u \neq \emptyset$  для  $i \in \{1, \dots, k\}$  и  $\mathcal{O}_{k+1} = \mathcal{O}_1$ .

Периодическая точка  $p \in \Omega_f$  называется *гиперболической*, если все собственные значения матрицы Якоби  $\left(\frac{\partial f^{m_p}}{\partial x}\right) \Big|_p$  по модулю не равны единице. Если все собственные значения по модулю меньше (больше) единицы, то  $p$  называют *стоковой* (*источниковой*) *точкой*. Стоковые и источниковые точки называются *узловыми*. Если гиперболическая периодическая точка не является *узловой*, то она называется *седловой точкой*.

Из гиперболической структуры периодической точки  $p$  следует, что ее устойчивое  $W_p^s$  и неустойчивое  $W_p^u$  многообразия являются образами относительно инъективных иммерсий пространств  $\mathbb{R}^{q_p}$  и  $\mathbb{R}^{n-q_p}$ , где  $q_p$  – число собственных значений матрицы Якоби, по модулю больших единицы. Число  $\nu_p$ , равное  $+1(-1)$ , если отображение  $f^{m_p}|_{W_p^u}$  сохраняет (меняет) ориентацию  $W_p^u$ , называется *типом ориентации* точки  $p$ . Компонента линейной связности множества  $W_p^u \setminus p$  ( $W_p^s \setminus p$ ) называется *неустойчивой (устойчивой) сепаратрисой* точки  $p$ .

Замкнутое  $f$ -инвариантное множество  $A \subset M^n$  называется *аттрактором* дискретной динамической системы  $f$ , если оно имеет компактную окрестность  $U_A$  такую, что  $f(U_A) \subset \text{int } U_A$  и  $A = \bigcap_{k \geq 0} f^k(U_A)$ . Окрестность  $U_A$  при этом называется *захватывающей, или изолирующей*. *Репеллер* определяется как аттрактор для  $f^{-1}$ . Дополнением до захватывающей окрестности аттрактора является захватывающая окрестность дуального репеллера.

Диффеоморфизм  $f : M^n \rightarrow M^n$  называется *диффеоморфизмом Морса-Смейла*, если

- 1) неблуждающее множество  $\Omega_f$  состоит из конечного числа гиперболических орбит;
- 2) многообразия  $W_p^s, W_q^u$  пересекаются трансверсально для любых неблуждающих точек  $p, q$ .

Диффеоморфизм Морса-Смейла называется *градиентно-подобным*, если из условия  $W_{\sigma_1}^s \cap W_{\sigma_2}^u \neq \emptyset$  для различных точек  $\sigma_1, \sigma_2 \in \Omega_f$  следует, что  $\dim W_{\sigma_1}^u < \dim W_{\sigma_2}^u$ .

Топологическим (гладким) потоком на многообразии (гладком многообразии)  $(X, d)$  называется непрерывное (гладкое) отображение  $f : X \times \mathbb{R} \rightarrow X$  с групповыми свойствами

- 1)  $f(x, 0) = x$  для любого  $x \in X$ ;
- 2)  $f(f(x, t), s) = f(x, t + s)$  для любых  $x \in X, s, t \in \mathbb{R}$ .

Топологический поток  $f^t : M^2 \rightarrow M^2$  назовем *градиентно-подобным*, если гомеоморфизм  $f^1$  топологически сопряжен градиентно-подобному диффеоморфизму.

Для диффеоморфизма Морса-Смейла  $f : M^2 \rightarrow M^2$  обозначим через  $\Omega_f^0, \Omega_f^1, \Omega_f^2$  множество стоков, седел и источников. Для любого (возможно пустого)  $f$ -инвариантного множества  $\Sigma \subset \Omega_f^1$  обозначим через  $W_\Sigma^u$  объединение неустойчивых многообразий всех точек из  $\Sigma$ . Для множества  $\Sigma$  такого, что  $cl(W_\Sigma^u) \setminus W_\Sigma^u \subset \Omega_f^0$ , положим

$$A_\Sigma = \Omega_f^0 \cup W_\Sigma^u, R_\Sigma = \Omega_f^2 \cup W_{\Omega_f^1 \setminus \Sigma}^s.$$

Из работы [7] следует, что множества  $A_\Sigma$  и  $R_\Sigma$  являются *дуальными аттрактором и репеллером*, соответственно.

## 1.2 Периодические гомеоморфизмы и их связь с градиентно-подобными диффеоморфизмами поверхностей

Пусть  $M^2$  – замкнутая ориентируемая поверхность рода  $p \geq 0$ . Гомеоморфизм  $\phi : M^2 \rightarrow M^2$  называется *периодическим*, если существует такое  $n \in \mathbb{N}$ , что  $\phi^n = id$ . Наименьшее из таких  $n$  называется периодом  $\phi$ . Точка  $x_0$  называется *точкой меньшего периода*  $n_0 < n$  гомеоморфизма  $\phi$ , если  $\phi^{n_0}(x_0) = x_0$ .

Согласно результатам Я. Нильсена [8] (см. также [9]) для любого сохраняющего ориентацию периодического гомеоморфизма  $\phi : M^2 \rightarrow M^2$  множество  $B_\phi$  точек меньшего периода конечно, а пространство орбит действия гомеоморфизма  $\phi$  на  $M^2$  является сферой с  $g$  ручками (*модульной поверхностью*). В окрестности точки  $x_0$  меньшего периода  $n_0$  отображение  $\phi^{n_0}$  сопряжено повороту на некоторый рациональный угол  $2\pi \frac{\delta_0}{\lambda_0}$ , где  $\lambda_0 = \frac{n}{n_0}$ .

Обозначим через  $X_i, i = 1, \dots, k$  орбиты точек меньшего периода, их периоды – через  $n_i$  и положим  $\lambda_i = \frac{n}{n_i}$ . Обозначим через  $\frac{\delta_i}{\lambda_i}$  соответствующее число вращения и определим число  $d_i$  из условия  $d_i \delta_i \equiv 1 \pmod{\lambda_i}$ . Набор параметров

$$\kappa = (n, p, g, n_1, \dots, n_k, d_1, \dots, d_k)$$

периодического гомеоморфизма  $\phi$  называется его *полной характеристикой*.

**Утверждение 1** ([10], Theorems 3.1, 3.3, [11], [12]). *Для любого сохраняющего ориентацию градиентно-подобного диффеоморфизма  $f : M^2 \rightarrow M^2$  существует градиентно-подобный поток  $\xi_f^t : M^2 \rightarrow M^2$  и периодический гомеоморфизм  $\phi_f : M^2 \rightarrow M^2$  периода  $\mu_f$  такие, что:*

- $f = \phi_f \xi_f^1$ ;
- $\Omega_f = \Omega_{\xi_f^t}$ ,  $f|_{\Omega_f} = \phi_f|_{\Omega_f}$  и  $B_{\phi_f} \subset \Omega_f$ ;
- период любой седловой сепаратрисы диффеоморфизма  $f$  равен  $\mu_f$ .

**Утверждение 2** ([13], Теорема 1). *Любой периодический гомеоморфизм  $\phi : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  двумерного тора, индуцирующий изоморфизм*

$$\phi_* = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

*имеет следующую полную характеристику:*

$$\kappa = (2, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1).$$

Непосредственно отсюда и утверждения 1 получаем следующий факт.

**Следствие 1.** *Для любого диффеоморфизма  $f \in G$  справедливо следующее:*

- 1) *множество  $\Omega_f$  содержит в точности четыре неподвижные точки, все остальные точки имеют период 2;*
- 2) *все седловые сепаратрисы имеют период 2.*

### 1.3 Устойчивые дуги

Рассмотрим однопараметрическое семейство диффеоморфизмов (*дугу*)  $\varphi_t : M^n \rightarrow M^n, t \in [0, 1]$ . Дуга  $\varphi_t$  называется *гладкой*, если отображение  $F : M^n \times [0, 1] \rightarrow M^n$ , заданное формулой  $F(x, t) = \varphi_t(x)$ , является *диффеотопией* – гладким отображением, которое при каждом фиксированном  $t$  является диффеоморфизмом. В топологической категории такое отображение называется *изотопией*.

Гладкая дуга  $\varphi_t$  называется *гладким произведением* гладких дуг  $\phi_t$  и  $\psi_t$  таких, что  $\phi_1 = \psi_0$ , если  $\varphi_t = \begin{cases} \phi_{\tau(2t)}, & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ \psi_{\tau(2t-1)}, & \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases}$  где  $\tau : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  – гладкое монотонное отображение такое, что  $\tau(t) = 0$  для  $0 \leq t \leq \frac{1}{3}$  и  $\tau(t) = 1$  для  $\frac{2}{3} \leq t \leq 1$ . Будем писать

$$\varphi_t = \phi_t * \psi_t.$$

Согласно [1], гладкая дуга  $\varphi_t$  называется *устойчивой*, если она является внутренней точкой класса эквивалентности относительно следующего отношения: дуги  $\varphi_t, \varphi'_t$  называются *сопряженными*, если существуют гомотоморфизмы  $h : [0, 1] \rightarrow [0, 1], H_t : M \rightarrow M$  такие, что  $H_t \varphi_t = \varphi'_{h(t)} H_t, t \in [0, 1]$ , и  $H_t$  непрерывно зависит от  $t$ .

Обозначим через  $\mathcal{Q}$  множество гладких дуг  $\varphi_t, t \in [0, 1]$  такое, что каждая дуга из этого множества начинается и заканчивается в диффеоморфизмах Морса-Смейла и любой диффеоморфизм  $\varphi_t$  имеет конечное предельное множество.

В работе [1] также установлено, что дуга  $\varphi_t \in \mathcal{Q}$ , где  $t \in [0, 1]$  является устойчивой тогда и только тогда, когда все ее точки являются структурно устойчивыми диффеоморфизмами за исключением конечного числа бифуркационных точек  $\varphi_{b_i}, i = 1, \dots, q$ , таких, что:

- 1) предельное множество диффеоморфизма  $\varphi_{b_i}$  содержит единственную негиперболическую периодическую орбиту, которая является седло-узлом или флипсом;
- 2) диффеоморфизм  $\varphi_{b_i}$  не имеет циклов;

3) инвариантные многообразия всех периодических точек диффеоморфизма  $\varphi_{b_i}$  пересекаются трансверсально;

4)  $\varphi_{b_i}$  имеет одну негиперболическую периодическую орбиту, которая является орбитой не критического седло-узла или флипа и бифурцирует общим образом<sup>1</sup>.

**Утверждение 3** ([2]). Пусть  $f : M^2 \rightarrow M^2$  – градиентно-подобный диффеоморфизм и  $A$  – аттрактор диффеоморфизма  $f$ , имеющий захватывающую окрестность  $U_A$ , состоящую из  $t \in \mathbb{N}$  двумерных дисков. Тогда существует устойчивая дуга, соединяющая  $f$  с диффеоморфизмом  $f_1$ , совпадающим с диффеоморфизмом  $f$  вне окрестности  $U_A$  и таким, что множество  $\Omega_{f_1} \cap U_A$  состоит из  $t$  стоков.

## 2 Исчезновение периодических точек

Напомним, что через  $G$  мы обозначили множество градиентно-подобных диффеоморфизмов 2-тора, индуцирующих изоморфизм фундаментальной группы, определяемый матрицей  $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ . Согласно следствию 1, неблуждающее множество любого диффеоморфизма  $g \in G$  содержит в точности четыре неподвижные точки. Обозначим через  $G_0$  подмножество диффеоморфизмов класса  $G$ , неблуждающее множество которых состоит в точности из четырех неподвижных точек.

Основным результатом настоящего раздела является доказательство следующего факта.

**Лемма 1.** Любой диффеоморфизм  $g \in G$  соединяется устойчивой дугой с диффеоморфизмом  $f_g \in G_0$ .

*Доказательство.* В силу следствия 1 неблуждающее множество  $\Omega_g$  диффеоморфизма  $g \in G$  содержит в точности четыре неподвижные точки, а все остальные точки имеют период 2. Построим устойчивую дугу, соединяющую диффеоморфизм  $g$  с некоторым диффеоморфизмом  $f_g \in G_0$  отдельно для каждого из следующих случаев: множество неподвижных точек диффеоморфизма  $g$  содержит

1. Не менее двух неподвижных стоков (или источников);
2. Не более одного стока и не более одного источника.

В случае 1, для определенности положим, что неблуждающее множество диффеоморфизма  $g$  содержит два неподвижных стока  $\omega_1, \omega_2$  (для источников рассуждения аналогичны). Рассмотрим дуальную пару аттрактор и репеллер такие, что  $A_g = \Omega_g^0 \cup W_{\Omega_1^u}$  и  $R_g = \Omega_g^2$ . В этом случае репеллер имеет размерность ноль, и, в силу работы [7], аттрактор  $A_g$  является

<sup>1</sup>Для точных определений всех упомянутых объектов см., например, [3].

связным. Следовательно существует седловая орбита точки  $\sigma$  такая, что  $\text{cl } W_\sigma^u \setminus W_\sigma^u = \omega_1 \cup \omega_2$ . Согласно следствию 1, точка  $\sigma$  имеет период 2. Тогда аттрактор  $\hat{A} = \omega_1 \cup \omega_2 \cup W_\sigma^u \cup W_{g(\sigma)}^u$  является замкнутой кривой на  $\mathbb{T}^2$  с захватывающей окрестностью  $U_-$ , гомеоморфной двумерному кольцу. Покажем, что  $\hat{A}$  – существенная кривая на торе  $\mathbb{T}^2$ .

Предположим противное: кривая  $\hat{A}$  ограничивает 2-диск  $d \subset \mathbb{T}^2$ . Поскольку  $g(\hat{A}) = \hat{A}$ , гомеоморфизм  $g|_{\hat{A}}$  меняет ориентацию, а диффеоморфизм  $g$  сохраняет ориентацию, то  $g(d) = \mathbb{T}^2 \setminus d$ . Получили противоречие с тем, что множество  $\mathbb{T}^2 \setminus d$  не гомеоморфно 2-диску.

Таким образом,  $\hat{A}$  – существенный узел на торе  $\mathbb{T}^2$  и, следовательно,  $U_+ = \mathbb{T}^2 \setminus g(U_-)$  – двумерное кольцо.

Диффеоморфизм  $g|_{U_-}$  продолжается до сохраняющего ориентацию диффеоморфизма  $\hat{g}_- : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$  такого, что множество  $\Omega_{\hat{g}_-|_{\mathbb{S}^2 \setminus U_-}}$  состоит из двух гиперболических источников  $\{\hat{\alpha}, \hat{g}_-(\hat{\alpha})\}$  (см. Рис 1). Согласно [2, Theorem 1.1], существует устойчивая дуга  $\hat{g}_{-,t}$ , соединяющая диффеоморфизм  $\hat{g}_{-,0} = \hat{g}_-$  с диффеоморфизмом  $\hat{g}_{-,1}$  таким, что множество  $\Omega_{\hat{g}_{-,1}} \cap U_-$  состоит двух неподвижных точек  $\{\omega, \sigma_1\}$  – гиперболического стока и седла, соответственно, и  $\hat{g}_{-,t}|_{\mathbb{S}^2 \setminus g(U_-)} = \hat{g}_-$  для любого  $t \in [0, 1]$ . Тогда дуга  $\hat{g}_{-,t}|_{U_-}$  продолжается диффеоморфизмом  $g$  до дуги  $g_{-,t} : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ .

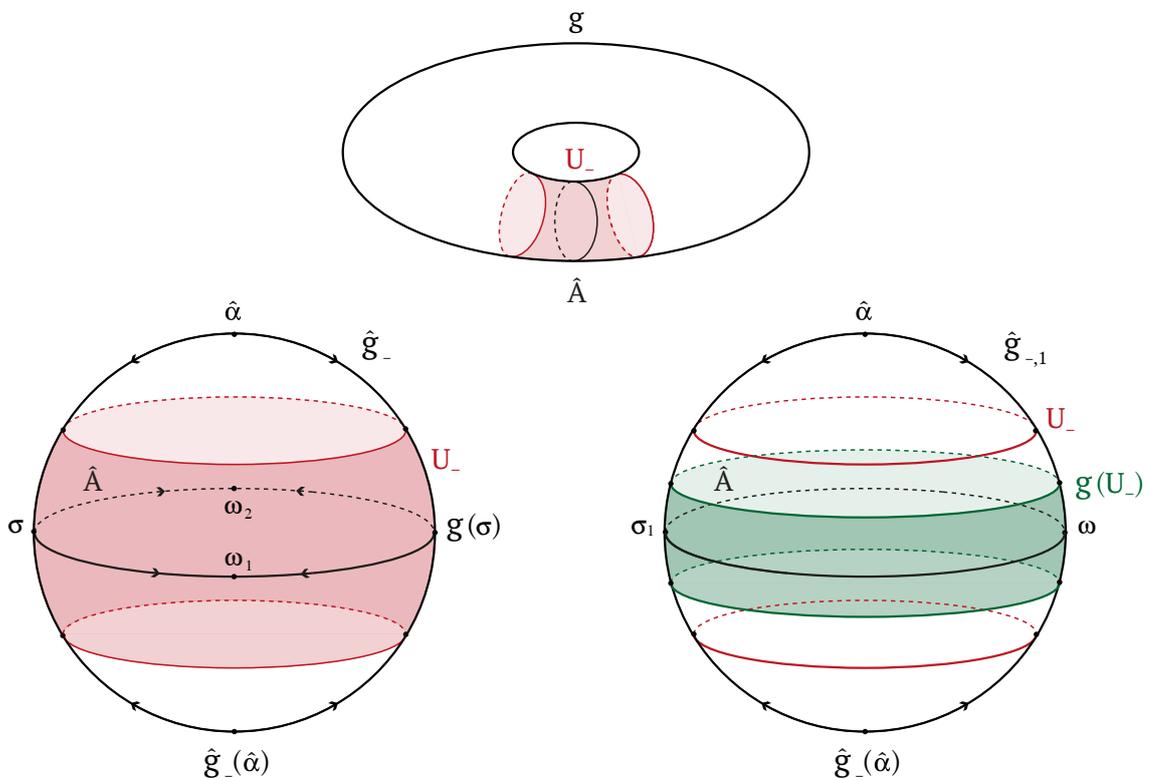


Рис. 1.

Аналогичным образом, диффеоморфизм  $g_{-,1}|_{U_+}$  продолжается до со-

храняющего ориентацию диффеоморфизма  $\hat{g}_+ : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ , такого, что множество  $\Omega_{\hat{g}_+}|_{\mathbb{S}^2 \setminus U_+}$  состоит из двух гиперболических стоков  $\{\hat{\omega}, \hat{g}_+(\hat{\omega})\}$  (см. Рис 2). Существует устойчивая дуга  $\hat{g}_{+,t}$ , соединяющая диффеоморфизм  $\hat{g}_{+,0} = \hat{g}_+$  с диффеоморфизмом  $\hat{g}_{+,1}$  таким, что множество  $\Omega_{\hat{g}_{+,1}} \cap U_+$  состоит из двух неподвижных точек  $\{\alpha, \sigma_2\}$  – гиперболического источника и седла, соответственно, и  $\hat{g}_{+,t}|_{\mathbb{S}^2 \setminus g^{-1}(U_+)} = \hat{g}_+$  для любого  $t \in [0, 1]$ . Тогда дуга  $\hat{g}_{+,t}|_{U_+}$  продолжается диффеоморфизмом  $g_{-,1}$  до дуги  $g_{+,t} : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ .

Тогда дуга  $g_t = g_{-,t} * g_{+,t}$  соединяет диффеоморфизм  $g$  с диффеоморфизмом  $g_{+,1}$ , неблуждающее множество которого состоит в точности из четырех неподвижных точек  $\Omega_{g_{+,1}} = \{\omega, \sigma_1, \sigma_2, \alpha\}$ . Таким образом  $f_g = g_{+,1}$  – искомый диффеоморфизм.

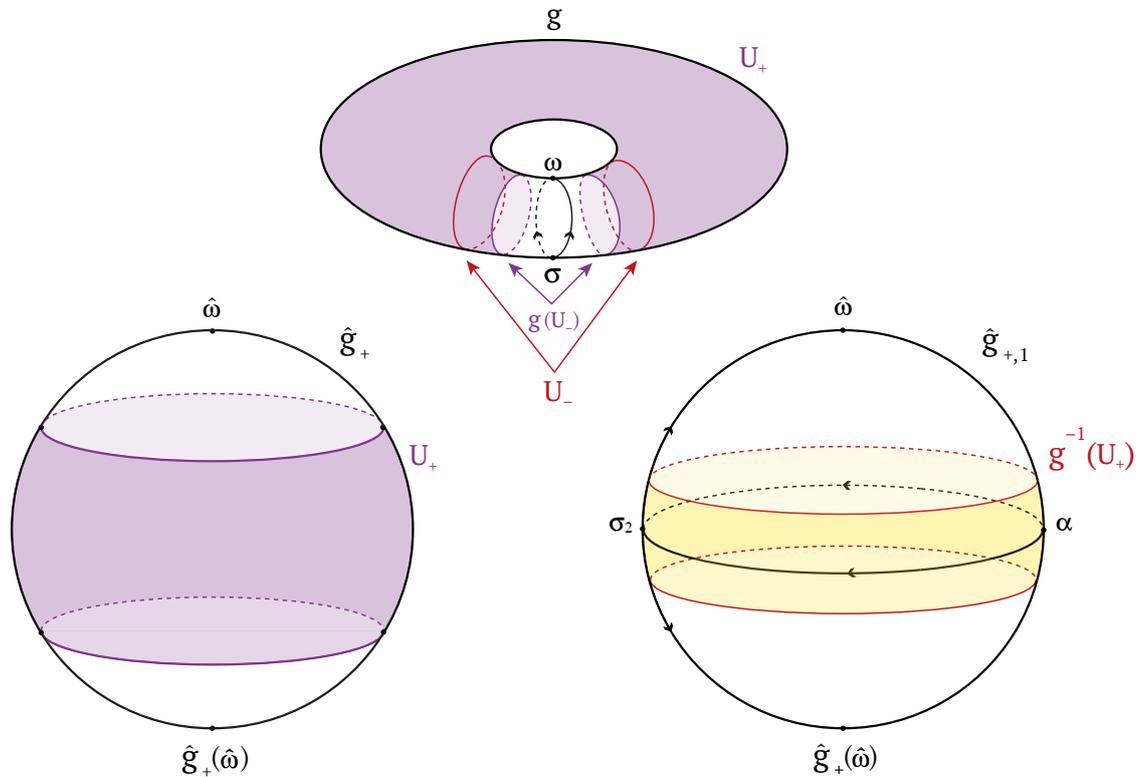


Рис. 2.

В случае 2, неблуждающее множество диффеоморфизма  $g$  содержит не менее двух неподвижных седел. Согласно следствию 1, неустойчивые сепаратрисы седел имеют период 2. Если среди неподвижных седел есть седло  $\sigma$ , неустойчивые сепаратрисы которого содержат один неподвижный сток  $\omega$  в своем замыкании, то, аналогично случаю 1, можно доказать, что аттрактор  $\omega \cup W_\sigma^u$  – нетривиальная замкнутая кривая на торе  $\mathbb{T}^2$  и диффеоморфизм  $g$  соединяется устойчивой дугой с искомым диффеоморфизмом  $f_g$ .

В противном случае в неблуждающем множестве диффеоморфизма  $g$

существуют два неподвижных седла  $\sigma_1, \sigma_2$  такие, что неустойчивые сепаратрисы седла  $\sigma_i, i = 1, 2$  содержат два стока  $\omega_i, g(\omega_i)$  в своем замыкании. Если  $\omega_1 = \omega_2$ , то аттрактор  $\bigcup_{i=1,2} (\omega_i \cup W_{\sigma_i}^u \cup g(\omega_i))$  – нетривиальная замкнутая

кривая на торе  $\mathbb{T}^2$  и, аналогично случаю 1, диффеоморфизм  $g$  соединяется устойчивой дугой с искомым диффеоморфизмом  $f_g$ .

Если  $\omega_1 \neq \omega_2$ , то аттрактор  $A_i = \omega_i \cup g(\omega_i) \cup W_{\sigma_i}^u$  имеет захватывающую окрестность  $U_i$ , гомеоморфную 2-диску. Согласно предложению 3 существует устойчивая дуга, соединяющая диффеоморфизм  $g$  с диффеоморфизмом  $g_1$ , таким, что  $g_1|_{\mathbb{T}^2 \setminus (U_1 \cup U_2)} = g$  и  $\Omega_{g_1} \cap U_i = \omega$  – неподвижный гиперболический сток. Таким образом, множество неподвижных точек диффеоморфизма  $g_1$  содержит два стока и дальнейшие построения делаются аналогично случаю 1.

□

### 3 Построение модельного диффеоморфизма в классе $G_0$

Построим диффеоморфизм источник-сток на окружности. Для этого рассмотрим функцию  $\bar{F}_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  (см. Рис. 4), заданную формулой:

$$\bar{F}_0(x) = -x - \frac{1}{4\pi} \sin 2\pi x + 1.$$

По построению  $x = 0$  и  $x = \frac{1}{2}$  – неподвижные точки отображения  $\bar{F}_0$  на отрезке  $[0, 1]$ . Рассмотрим проекцию  $\pi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$  заданную формулой  $\pi(x) = e^{2\pi i x}$ . В силу того, что функция  $\bar{F}_0$  является строго монотонно убывающей и удовлетворяет условию  $\bar{F}_0(x + 1) = \bar{F}_0(x) - 1$ , она допускает проекцию на окружность в виде диффеоморфизма

$$F_0 = \pi \bar{F}_0 \pi^{-1} : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1.$$

По построению диффеоморфизм  $F_0$  имеет неподвижный гиперболический источник в точке  $S = \pi(0)$  и неподвижный гиперболический сток в точке  $N = \pi(\frac{1}{2})$ .

Определим диффеоморфизм  $f_0 : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  формулой (см. Рис.5)

$$f_0(z, w) = (F_0(z), F_0(w)), z, w \in \mathbb{S}^1.$$

Зафиксируем систему образующих фундаментальной группы тора  $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ :

$$a = \mathbb{S}^1 \times \{0\} = \langle 1, 0 \rangle; b = \{0\} \times \mathbb{S}^1 = \langle 0, 1 \rangle.$$

По построению диффеоморфизм  $f_0$  имеет неподвижный гиперболический источник в точке  $\alpha = (S, S)$ , гиперболический сток  $\omega = (N, N)$  и

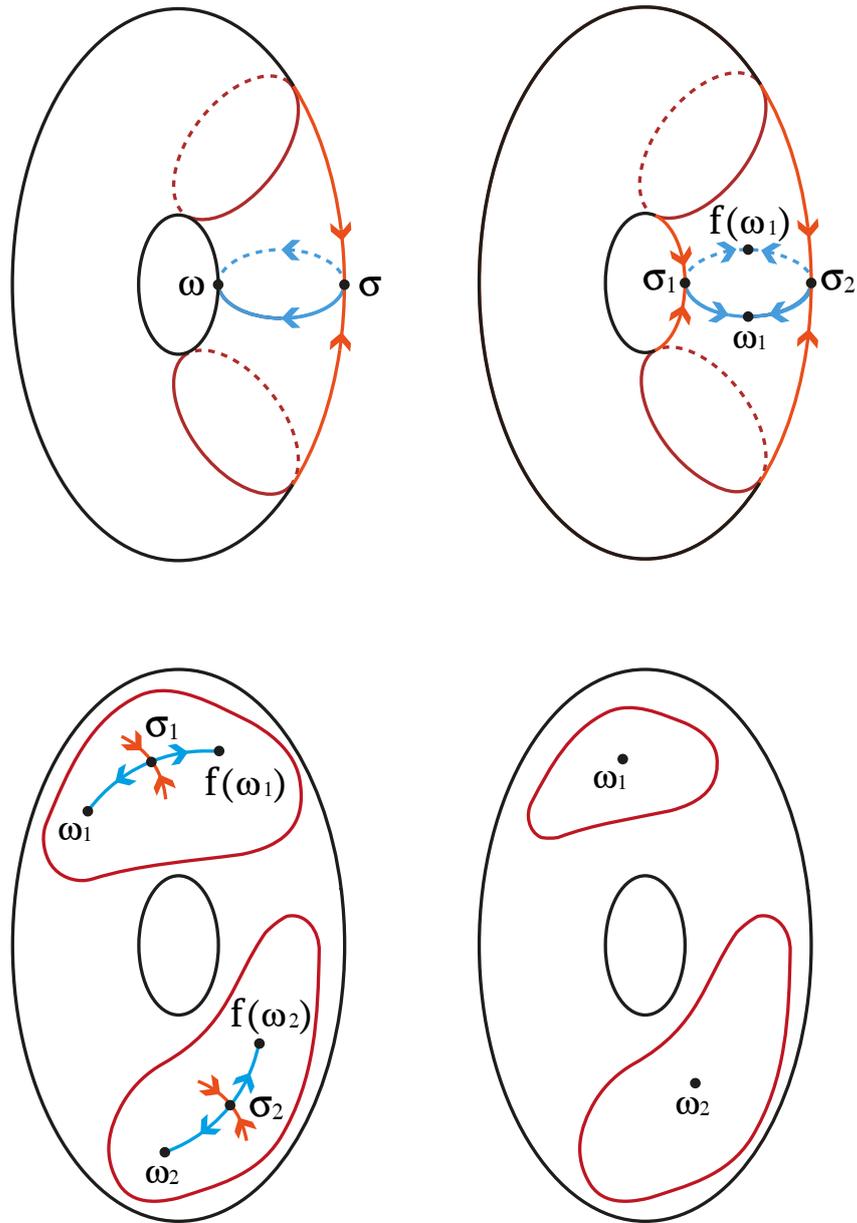


Рис. 3.

имеет две седловые точки  $\sigma_1 = (N, S), \sigma_2 = (S, N)$  (см. Рис. 5). При этом, замыкания инвариантных многообразий каждой из них лежат в классе образующих тора, именно,

$$cl W_{\sigma_1}^s = \mathbb{S}^1 \times \{S\}, cl W_{\sigma_1}^u = \{N\} \times \mathbb{S}^1,$$

$$cl W_{\sigma_2}^s = \{S\} \times \mathbb{S}^1, cl W_{\sigma_2}^u = \mathbb{S}^1 \times \{N\}.$$

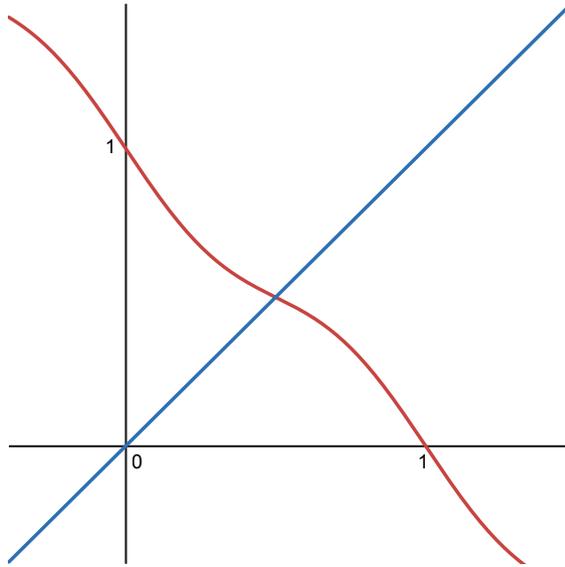


Рис. 4. График отображения  $\bar{F}_0$

## 4 Устойчивая изотопическая классификация диффеоморфизмов множества $G_0$

Напомним, что неблуждающее множество диффеоморфизма  $f \in G_0$  состоит в точности из четырех неподвижных гиперболических точек: стока  $\omega$ , источника  $\alpha$  и седел  $\sigma_1, \sigma_2$ , замыкания инвариантных многообразий которых являются замкнутыми кривыми:

$$c^{s1} = cl W_{\sigma_1}^s = W_{\sigma_1}^s \cup \alpha, \quad c^{u1} = cl W_{\sigma_1}^u = W_{\sigma_1}^u \cup \omega,$$

$$c^{s2} = cl W_{\sigma_2}^s = W_{\sigma_2}^s \cup \alpha, \quad c^{u2} = cl W_{\sigma_2}^u = W_{\sigma_2}^u \cup \omega.$$

Существует единственный выбор нумерации седловых точек  $\sigma_1, \sigma_2$  и ориентации замыканий их инвариантных многообразий такой, что кривые  $c^{s1}, c^{u2}$  имеют гомотопический тип  $\langle \mu^1, \nu^1 \rangle$  и кривые  $c^{s2}, c^{u1}$  имеют гомотопический тип  $\langle \mu^2, \nu^2 \rangle$  в базисе  $a, b$ , при этом  $J_f = \begin{pmatrix} \mu^1 & \mu^2 \\ \nu^1 & \nu^2 \end{pmatrix}$  является унимодулярной матрицей со следующими свойствами:

- а)  $\mu^1 \geq \mu^2 \geq 0$ ,
- б)  $\nu^1 > \nu^2$ , если  $\mu^1 = \mu^2$ ,
- в)  $\nu^2 = 1$ , если  $\mu^2 = 0$ .

Для любой матрицы  $J = J_f$  построим *модельный* диффеоморфизм  $f_J \in G_J \subset G_0$  следующим образом  $f_J = \hat{J} f_0 \hat{J}^{-1}$ . Заметим, что по построению  $f_E = f_0$ , где  $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

В данном разделе докажем следующий факт.

**Лемма 2.** *Любой диффеоморфизм  $f \in G_0$  соединяется устойчивой дугой с диффеоморфизмом  $f_0$ .*

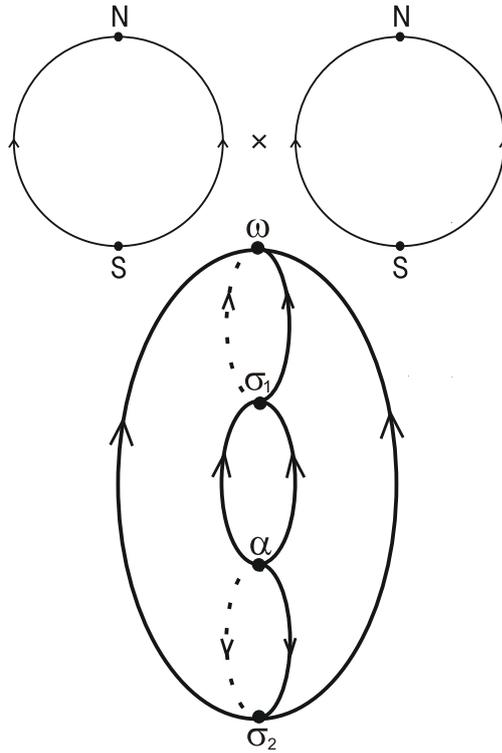


Рис. 5. Декартов квадрат диффеоморфизма  $F_0$ , диффеоморфизм  $f_0$

*Доказательство.* Аналогично [14, Лемма 6.1] доказывается, что каждый диффеоморфизм  $f \in G_0$  соединяется с модельным диффеоморфизмом  $f_J \in G_J$  дугой без бифуркаций  $H_{f,t}$ .

Покажем, что диффеоморфизм  $f_J$  соединяется дугой  $H_{J,t}$  с конечным числом типично проходящих бифуркаций удвоения периода с диффеоморфизмом  $f_0$ . Тогда искомая дуга имеет вид  $H_{f,t} * H_{J,t}$ .

Поскольку любая матрица  $J$  представляется в виде композиций вращений Дэна (см., например, [5]), то для построения дуги  $H_{J,t}$  достаточно (см. применение аналогичного алгоритма в [14, Лемма 8.2]) построить устойчивую дугу  $H_{E_1,t}$  с двумя бифуркациями удвоения периода, соединяющую диффеоморфизм  $f_0$  с диффеоморфизмом  $f_1$ , где  $J_{f_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

Везде далее в этом доказательстве отображения без черты являются проекциями на  $\mathbb{S}^1$  посредством  $\pi$  отображения с чертой, заданного на прямой  $\mathbb{R}$ .

*Шаг 1. Первая бифуркация удвоения периода.*

Напомним, что диффеоморфизм  $f_0 : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ , определен формулой:

$$f_0(z, w) = (F_0(z), F_0(w)), \quad z, w \in \mathbb{S}^1.$$

Определим функцию  $\bar{F}_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  (см. Рис. 6), формулой:

$$\bar{F}_1(x) = -x - \frac{1}{8\pi} \sin 4\pi x + 1.$$

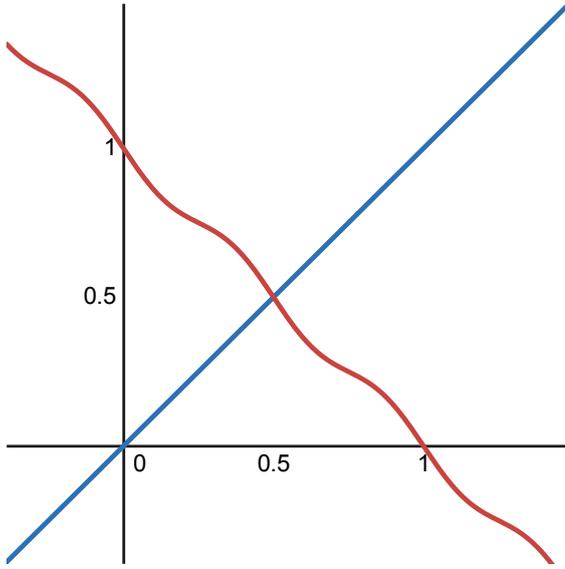


Рис. 6. График отображения  $\bar{F}_1$

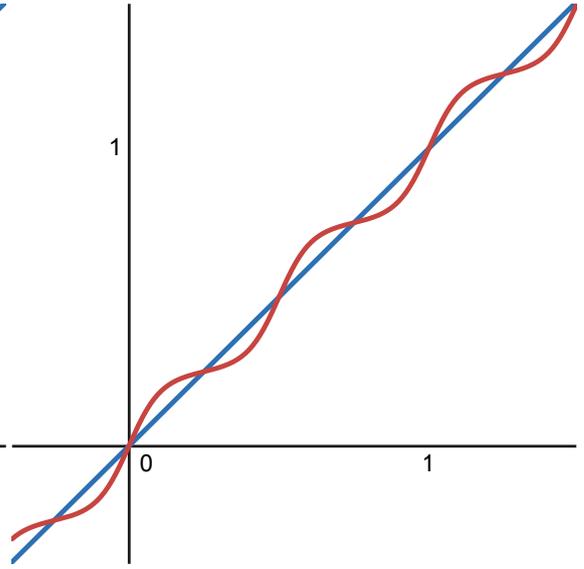


Рис. 7. График отображения  $\bar{F}_1^2$

Положим

$$\bar{\eta}_t^1(x) = (1 - t)\bar{F}_0(x) + t\bar{F}_1(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \in [0, 1]$$

и

$$\bar{\eta}_{t,\tau}^1(x) = (1 - \tau)\bar{\eta}_t^1(x) + \tau\bar{F}_0(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \in [0, 1], \quad \tau \in [0, 1].$$

Определим гладкую дугу  $H_t^1 : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ ,  $t \in [0, 1]$  формулой:

$$H_t^1(w, z) = \begin{cases} (F_0(\pi(x)), \eta_{t,|8x-4|}^1(z)), & x \in [\frac{3}{8}, \frac{5}{8}], \quad z \in \mathbb{S}^1, \\ f_0(\pi(x), z), & x \in [\frac{5}{8}, \frac{11}{8}], \quad z \in \mathbb{S}^1 \end{cases}.$$

*Шаг 2. Вторая бифуркация удвоения периода.*

Определим функцию  $\bar{F}_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  (см. Рис. 10), формулой:

$$\bar{F}_2(x) = -x + \frac{1}{4\pi} \sin 2\pi x + 1.$$

Положим

$$\bar{\eta}_t^2(x) = (1 - t)\bar{F}_1(x) + t\bar{F}_2(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \in [0, 1],$$

$$\bar{\eta}_{t,\tau}^2(x) = (1 - \tau)\bar{\eta}_t^2(x) + \tau\bar{F}_0(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \in [0, 1], \quad \tau \in [0, 1].$$

Определим гладкую дугу  $H_t^2 : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ ,  $t \in [0, 1]$  формулой:

$$H_t^2(w, z) = \begin{cases} (F_0(\pi(x)), \eta_{t,|8x-4|}^2(z)), & x \in [\frac{3}{8}, \frac{5}{8}], \quad z \in \mathbb{S}^1, \\ f_0(\pi(x), z), & x \in [\frac{5}{8}, \frac{11}{8}], \quad z \in \mathbb{S}^1 \end{cases}.$$

□

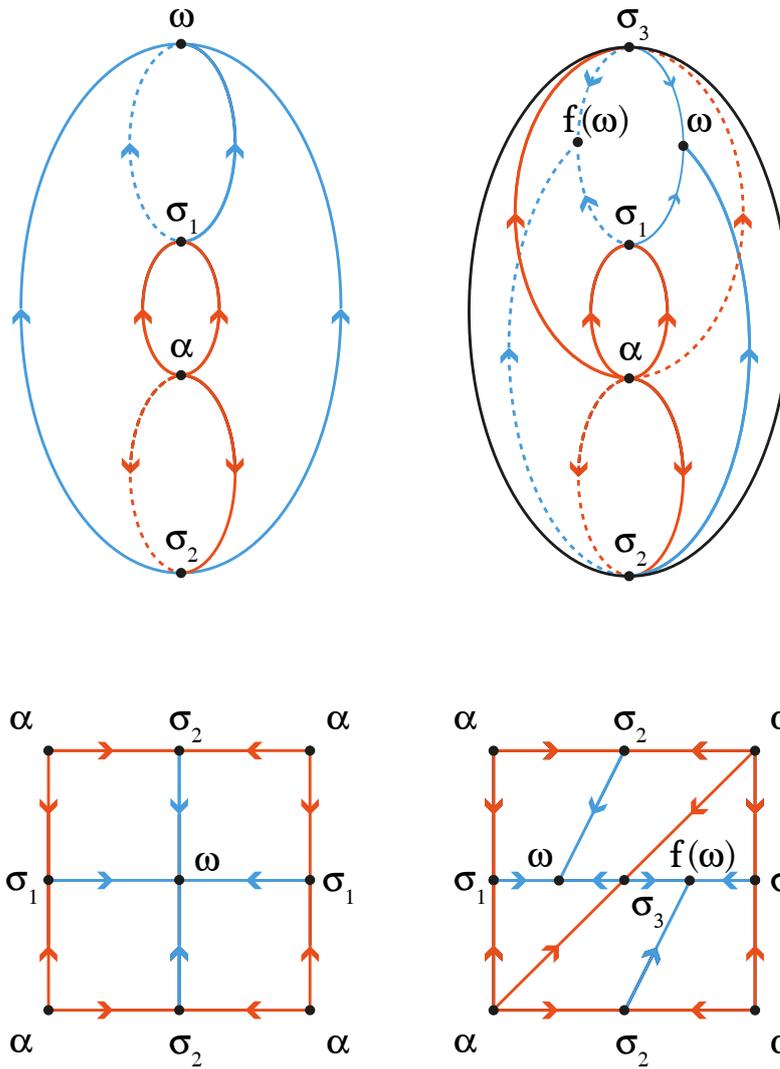


Рис. 8. Изотопия  $H_1^t$  на торе

## Заключение

В ходе исследования был рассмотрен класс  $G$  градиентно-подобных диффеоморфизмов 2-тора, индуцирующих изоморфизм фундаментальной группы, определяемый матрицей  $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ .

Было доказано, что любой диффеоморфизм  $g \in G$  соединяется устойчивой дугой с диффеоморфизмом  $f_g \in G_0$ . А также, что любой диффеоморфизм  $f \in G_0$  соединяется устойчивой дугой с диффеоморфизмом  $f_0$ . Таким образом, доказана теорема о том, что для любых диффеоморфизмов класса  $G$  существует соединяющая их устойчивая дуга.

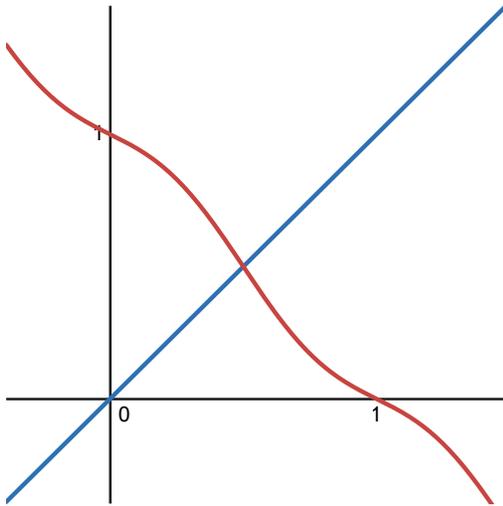


Рис. 9. График отображения  $\bar{F}_2$

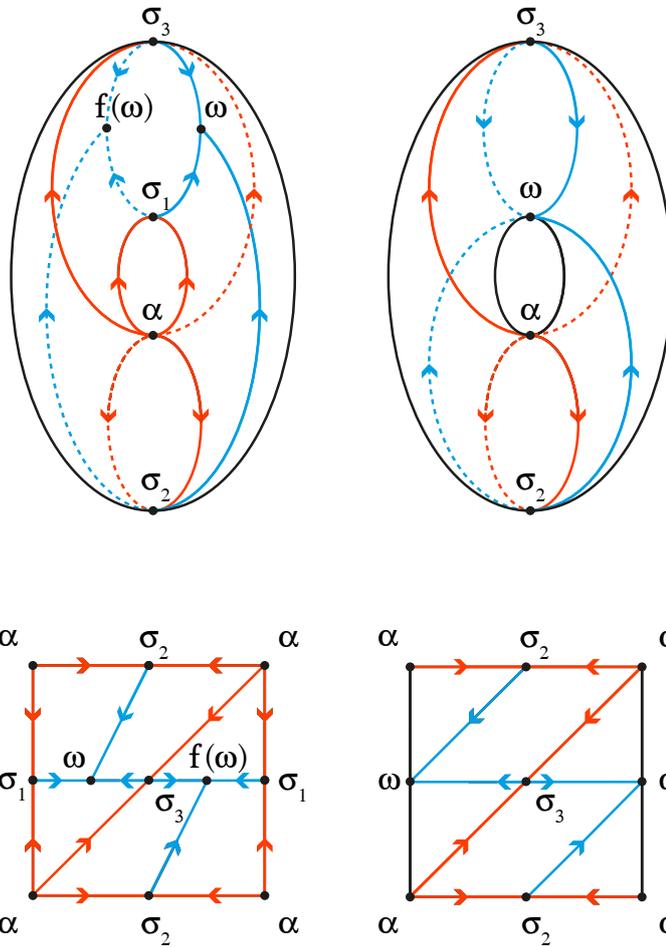


Рис. 10. Изотопия  $H_2^t$  на торе

## Список литературы

- [1] S. Newhouse, J. Palis, F. Takens, *Bifurcations and stability of families of diffeomorphisms*, Publications mathematiques de l' I.H.E.S, 57 (1983), 5–71.
- [2] E. Nozdrinova, O. Pochinka, *Solution of the 33rd Palis-Pugh problem for gradient-like diffeomorphisms of a two-dimensional sphere*, Discrete and Continuous Dynamical Systems, 41:3 (2021), 1101–1131.
- [3] Medvedev T. V., Nozdrinova E., Pochinka O. Components of Stable Isotopy Connectedness of Morse – Smale Diffeomorphisms // Regular and Chaotic Dynamics. 2022. Vol. 27. No. 1. P. 77-97.
- [4] P. R. Blanchard, *Invariants of the NPT isotopy classes of Morse-Smale diffeomorphisms of surfaces*, Duke Mathematical Journal, 47:1 (1980), 33–46.
- [5] D. Rolfsen, *Knots and links*, Bull. Amer. Math. Soc., 83:5 (1977), 931–935.
- [6] Баранов Д. А., Ноздринова Е. В., Починка О. В. Сценарий устойчивого перехода от изотопного тождественному диффеоморфизма тора к косому произведению грубых преобразований окружности. // Уфимский математический журнал. 2024. Т. 16. № 1. С. 11-23.
- [7] В. З. Гринес, Е. В. Жужома, В. С. Медведев, О. В. Починка, *Глобальные аттрактор и репеллер диффеоморфизмов Морса–Смейла*, Тр. МИАН 271 (2010), 111–133;
- [8] Nielsen Jakob, *Die Struktur periodischer Transformationen von Flächen*, Levin & Munksgaard, 15:1 (1937)
- [9] Баранов Д. А., Починка О. В. Классификация периодических преобразований ориентируемой поверхности рода два // Труды Средневолжского математического общества. 2021. Т. 23. № 2. С. 147-158.
- [10] V. Grines, T. Medvedev, O. Pochinka, *Dynamical Systems on 2- and 3-Manifolds*, Switzerland, Springer International Publishing. 303, (2016).
- [11] Безденежных А. Н., Гринес В. З. Реализация градиентноподобных диффеоморфизмов двумерных многообразий // Дифференциальные и интегральные уравнения / НФ Отроков. Горький: ГГУ. — 1985. - С. 33–37.

- [12] Гринес В. З., Капкаева С.Х., Починка О. В. Трехцветный граф как полный топологический инвариант для градиентно-подобных диффеоморфизмов поверхностей // Математический сборник. 2014. Т. 205. № 10. С. 19-46.
- [13] D. A. Baranov, V. Z. Grines, O. V. Pochinka, E. E. Chilina. On a Classification of Periodic Maps on the 2-Torus // Russian Journal of Nonlinear Dynamics. 2023. Vol. 19. No. 1. P. 91-110.
- [14] Ноздринова Е. В., Починка О. В. О бифуркациях, меняющих гомотопический тип замыкания инвариантного седлового многообразия диффеоморфизма поверхности // Математический сборник. 2022. Т. 213. № 3. С. 81-110.

Приложение  
В Оргкомитет Смотра дипломных работ математиков России  
от Драгуновой Ксении Александровны

Заявление о новизне

Сообщаю, что новыми в моей представленной на Смотр выпускной квалификационной работе (далее - работа) под названием «Rate of convergence of Chernoff approximations to solutions of the Heat Equation: numerical experiment» являются: построение примеров, иллюстрирующих скорость сходимости черновских аппроксимаций к решению задачи Коши для уравнения теплопроводности. Численно показано, что для достаточно гладких начальных условий порядок аппроксимации равен порядку касания по Чернову используемой функции Чернова.

Также сообщаю, что для проверки новизны мною было проделано следующее: *выступления на семинарах, конференциях, консультации с коллегами*

Подтверждаю, что являюсь автором предоставляемой на Смотр работы и прошу принять её для участия в Смотре. Принимаю на себя обязательство соблюдать правила Смотра. Также (в соответствии с п. 4 Положения о Смотре) принимаю на себя обязательство оценить 5 работ участников Смотра, выданных мне Оргкомитетом в результате жеребьёвки и сверх того оценить 2-5 работ других участников Смотра на мой выбор. Я понимаю правила оценки работ, приведённые в п. 4.3 Положения о Смотре. Даю согласие на публикацию адреса моей электронной почты.

Защита работы состоялась 14 июня 2023 года. На Смотр представлен окончательный текст работы.

Подпись

Драгунова Ксения  
Александровна



17.06.2024  
Нижний Новгород, Россия

FEDERAL STATE AUTONOMOUS INSTITUTION  
OF HIGHER EDUCATION  
NATIONAL RESEARCH UNIVERSITY  
HIGHER SCHOOL OF ECONOMICS

Department of Computer Science, Mathematics and Computer Science

Bachelor's degree program in the direction of  
01.03.01 Mathematics

*Ksenia Alexandrovna Dragunova*

**FINAL QUALIFICATION WORK**

Rate of convergence of Chernoff approximations to solutions of the Heat Equation: numerical  
experiment

Reviewer  
Ph.D. in Physics and Mathematics,  
Associate Professor

---

B. O. Volkov

Scientific adviser  
Ph.D. in Physics and Mathematics,  
Associate Professor

---

I.D. Remizov

Nizhny Novgorod, 2023.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ»

**Факультет информатики, математики и компьютерных наук**

**Программа подготовки бакалавров по направлению  
01.03.01 Математика**

*Драгунова Ксения Александровна*

**ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА**

Скорость сходимости черновских аппроксимаций к решению уравнения  
теплопроводности: численный эксперимент

Рецензент  
к. физ.-мат. наук, доцент

---

Б. О. Волков

Руководитель работы  
к. физ.-мат. наук, доцент

---

И.Д. Ремизов

Нижний Новгород, 2023 г.

# Contents

<b>1</b>	<b>Abstract, Keywords, MSC2020</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Introduction</b>	<b>2</b>
<b>3</b>	<b>Preliminaries</b>	<b>3</b>
<b>4</b>	<b>Numerical simulation results</b>	<b>5</b>
4.1	Problem setting . . . . .	5
4.2	Approximations for initial condition $u_0(x) = \sin(x)$ . . . . .	7
4.3	Approximations for initial condition $u_0(x) =  \sin(x) ^{3/2}$ . . . . .	9
4.4	Approximations for initial condition $u_0(x) = e^{- x }$ . . . . .	10
4.5	Approximations for initial condition $u_0(x) =  \sin(x) ^{5/2}$ . . . . .	11
4.6	Approximations for initial condition $u_0(x) =  \sin(x) ^{7/2}$ . . . . .	12
4.7	Approximations for initial condition $u_0(x) =  \sin(x) ^{9/2}$ . . . . .	13
<b>5</b>	<b>Discussion</b>	<b>13</b>
	<b>Appendix: Python 3 code and full list of pictures</b>	<b>16</b>
	<b>References</b>	<b>16</b>

# 1 Abstract, Keywords, MSC2020

**MSC2020:** 65M12, 47D06, 35K05, 35E15, 35C99

**Keywords:** heat equation, initial value problem, operator semigroups, Chernoff approximations, rate of convergence.

**Abstract.** Chernoff approximations are a flexible and powerful tool of functional analysis, which can be used, in particular, to find numerically approximate solutions of some differential equations with variable coefficients. For many classes of equations such approximations have already been constructed since pioneering papers of Prof. O.G.Somlyanov in 2000, however, the speed of their convergence to the exact solution has not been properly studied. We select the heat equation (because its exact solutions are already known) as a simple yet informative model example for the study of the rate of convergence of Chernoff approximations. Examples illustrating the rate of convergence of Chernoff approximations to the solution of the Cauchy problem for the heat equation are constructed in the paper. Numerically we show that for initial conditions that are smooth enough the order of approximation is equal to the order of Chernoff tangency of the Chernoff function used. We also consider not smooth enough initial conditions and show how Hölder class of initial condition is related to the rate of convergence. This method of study in the future can be applied to general second order parabolic equation with variable coefficients by a slight modification of our Python 3 code, the full text of it is provided in the appendix to the paper.

## 2 Introduction

Chernoff approximations are a flexible and powerful tool of functional analysis [2, 4, 5], which can be used, in particular, to find numerically approximate solutions of some differential equations with variable coefficients. See [1, 12] for an introduction to this topic, [14, 15] for examples, see also Preliminaries section of the paper, and one of the pioneering papers by Professor O.G.Smolyanov [17]. For given linear evolution equation the method of Chernoff approximation generates a sequence of functions  $u_n(t, x)$  that converge to the exact solution  $u(t, x)$  of the equation studied. For arbitrary fixed moment of time  $t$  functions  $x \mapsto u(t, x)$  and  $x \mapsto u_n(t, x)$  are elements of some Banach space, and Chernoff's theorem guarantees that  $\|u(t, \cdot) - u_n(t, \cdot)\| \rightarrow 0$  as  $n \rightarrow \infty$ .

To our current knowledge all contributions to a very young “theory of rates of convergence in Chernoff's theorem” can be found in [8, 18, 19, 7, 6] and references therein. These papers provide estimates for the rate of convergence under some conditions but if these conditions are not satisfied then one can say nothing about the quality of Chernoff approximations. There are also very few “practical” research papers [9, 16] that measure the speed of convergence in particular cases obtained via numerical simulations. In our research we continue contributions to this field of study.

We consider initial value problem for the heat equation

$$\begin{cases} u'_t(t, x) = u''_{xx}(t, x) \text{ for } t > 0, x \in \mathbb{R}^1 \\ u(0, x) = u_0(x) \text{ for } x \in \mathbb{R}^1 \end{cases} \quad (1)$$

which is a good model example because its bounded solution  $u(t, x)$  is already known and given by the formula

$$u(t, x) = \int_{\mathbb{R}} \Phi(x - y, t) u_0(y) dy, \text{ where } \Phi(x, t) = (2\sqrt{\pi t})^{-1} \exp\left(\frac{-x^2}{4t}\right).$$

Then we obtain Chernoff approximations  $u_n(t, x)$  to the exact solution  $u(t, x)$  for  $n = 1, 2, \dots, 11$  and fixed time  $t = 1/2$ , and via numerical simulation and linear regression (ordinary least squares method) discover that

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |u(t, x) - u_n(t, x)| \approx \left(\frac{1}{n}\right)^\beta \cdot \text{const}$$

with a reasonable accuracy ( $R^2 > 0.98$ ). Coefficient  $\beta > 0$  depends on the smoothness of initial condition  $u_0$  and of the way of constructing the Chernoff approximations.

P.S.Prudnikov in 2020 studied [16] this question in a similar setting, but his approach does not allow a direct generalization. Meanwhile the simulation method that we use allows to study not only heat equation, but also equations with variable coefficients. Also we consider more initial conditions than were studied in [16].

Now let us provide necessary background on the topic to explain the notion of Chernoff tangency and Chernoff operator-valued function that are important to understand how we obtain Chernoff approximations  $u_n(t, x)$ .

### 3 Preliminaries

Let  $\mathcal{F}$  be a Banach space. Let  $\mathcal{L}(\mathcal{F})$  be a set of all bounded linear operators in  $\mathcal{F}$ . Suppose we have a mapping  $V: [0, +\infty) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{F})$ , i.e.  $V(t)$  is a bounded linear operator  $V(t): \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$  for each  $t \geq 0$ . The mapping  $V$  is called [5] a  $C_0$ -semigroup, or a *strongly continuous one-parameter semigroup of operators* iff it satisfies the following conditions:

- 1)  $V(0)$  is the identity operator  $I$ , i.e.  $\forall \varphi \in \mathcal{F} : V(0)\varphi = \varphi$ ;
- 2)  $V$  maps the addition of numbers in  $[0, +\infty)$  into the composition of operators in  $\mathcal{L}(\mathcal{F})$ , i.e.  $\forall t \geq 0, \forall s \geq 0 : V(t + s) = V(t) \circ V(s)$ , where for each  $\varphi \in \mathcal{F}$  the notation  $(A \circ B)(\varphi) = A(B(\varphi)) = AB\varphi$  is used;
- 3)  $V$  is continuous with respect to the strong operator topology in  $\mathcal{L}(\mathcal{F})$ , i.e.  $\forall \varphi \in \mathcal{F}$  function  $t \mapsto V(t)\varphi$  is continuous as a mapping  $[0, +\infty) \rightarrow \mathcal{F}$ .

The definition of a  $C_0$ -group is obtained by the substitution of  $[0, +\infty)$  by  $\mathbb{R}$  in the paragraph above.

It is known [5] that if  $(V(t))_{t \geq 0}$  is a  $C_0$ -semigroup in Banach space  $\mathcal{F}$ , then the set

$$\left\{ \varphi \in \mathcal{F} : \exists \lim_{t \rightarrow +0} \frac{V(t)\varphi - \varphi}{t} \right\} \stackrel{\text{denote}}{=} \text{Dom}(L)$$

is a dense linear subspace in  $\mathcal{F}$ . The operator  $L$  defined on the domain  $\text{Dom}(L)$  by the equality

$$L\varphi = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{V(t)\varphi - \varphi}{t}$$

is called *an infinitesimal generator* (or just *generator* to make it shorter) of the  $C_0$ -semigroup  $(V(t))_{t \geq 0}$ , and notation  $V(t) = e^{tL}$  is widely used.

One of the reasons for the study of  $C_0$ -semigroups is their connection with differential equations. If  $Q$  is a set, then the function  $u: [0, +\infty) \times Q \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $u: (t, x) \mapsto u(t, x)$  of two variables  $(t, x)$  can be considered as a function  $u: t \mapsto [x \mapsto u(t, x)]$  of one variable  $t$  with values in the space of functions of the variable  $x$ . If  $u(t, \cdot) \in \mathcal{F}$  then one can define  $Lu(t, x) = (Lu(t, \cdot))(x)$ . If there exists a  $C_0$ -semigroup  $(e^{tL})_{t \geq 0}$  then the Cauchy problem for a linear evolution equation

$$\begin{cases} u'_t(t, x) = Lu(t, x) \text{ for } t > 0, x \in Q \\ u(0, x) = u_0(x) \text{ for } x \in Q \end{cases} \quad (2)$$

has a unique (in sense of  $\mathcal{F}$ , where  $u(t, \cdot) \in \mathcal{F}$  for every  $t \geq 0$ ) solution

$$u(t, x) = (e^{tL}u_0)(x)$$

depending on  $u_0$  continuously. Compare also different meanings of the solution [5], including mild solution which solves the corresponding integral equation. Note that if there exists a strongly continuous group  $(e^{tL})_{t \in \mathbb{R}}$  then in the Cauchy problem the equation  $u'_t(t, x) = Lu(t, x)$  can be considered not only for  $t > 0$ , but for  $t \in \mathbb{R}$ , and the solution is provided by the same formula  $u(t, x) = (e^{tL}u_0)(x)$ .

**Definition 1** (*Introduced in [11]*). Let us say that  $C$  is *Chernoff-tangent* to  $L$  iff the following conditions of Chernoff tangency (CT) hold:

(CT0). Let  $\mathcal{F}$  be a Banach space, and  $\mathcal{L}(\mathcal{F})$  be a space of all linear bounded operators in  $\mathcal{F}$ . Suppose that we have an operator-valued function  $C: [0, +\infty) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{F})$ , or, using other words, we have a family  $(C(t))_{t \geq 0}$  of linear bounded operators in  $\mathcal{F}$ . Closed linear operator  $L: \text{Dom}(L) \rightarrow \mathcal{F}$  is defined on the linear subspace  $\text{Dom}(L) \subset \mathcal{F}$  which is dense in  $\mathcal{F}$ .

(CT1) Function  $t \mapsto C(t)f \in \mathcal{F}$  is continuous for each  $f \in \mathcal{F}$ .

(CT2)  $C(0) = I$ , i.e.  $C(0)f = f$  for each  $f \in \mathcal{F}$ .

(CT3) There exists such a dense subspace  $\mathcal{D} \subset \mathcal{F}$  that for each  $f \in \mathcal{D}$  there exists a limit

$$C'(0)f = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{C(t)f - f}{t}.$$

(CT4) The closure of the operator  $(C'(0), \mathcal{D})$  is equal to  $(L, \text{Dom}(L))$ .

**Remark 1.** Let us consider one-dimensional example  $\mathcal{F} = \mathcal{L}(\mathcal{F}) = \mathbb{R}$ . Then  $g: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  is Chernoff-tangent to  $l \in \mathbb{R}$  iff  $g(t) = 1 + tl + o(t)$  as  $t \rightarrow +0$ .

**Theorem 1** (P. R. CHERNOFF (1968), see [5, 2]). Let  $\mathcal{F}$  and  $\mathcal{L}(\mathcal{F})$  be as above. Suppose that the operator  $L: \mathcal{F} \supset \text{Dom}(L) \rightarrow \mathcal{F}$  is linear and closed, and function  $C$  takes values in  $\mathcal{L}(\mathcal{F})$ . Suppose that these assumptions are fulfilled:

(E) There exists a  $C_0$ -semigroup  $(e^{tL})_{t \geq 0}$  with the infinitesimal generator  $(L, \text{Dom}(L))$ .

(CT)  $C$  is Chernoff-tangent to  $(L, \text{Dom}(L))$ .

(N) There exists such a number  $\omega \in \mathbb{R}$ , that  $\|C(t)\| \leq e^{\omega t}$  for all  $t \geq 0$ .

Then for each  $f \in \mathcal{F}$  we have  $(C(t/n))^n f \rightarrow e^{tL} f$  as  $n \rightarrow \infty$  with respect to norm in  $\mathcal{F}$  uniformly with respect to  $t \in [0, T]$  for each  $T > 0$ , i.e.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in [0, T]} \|e^{tL} f - (C(t/n))^n f\| = 0.$$

**Remark 2.** In the one-dimensional example ( $\mathcal{F} = \mathcal{L}(\mathcal{F}) = \mathbb{R}$ ) the Chernoff theorem says that  $e^{tl} = \lim_{n \rightarrow \infty} g(t/n)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + tl/n + o(t/n))^n$ , which is a simple fact of calculus.

**Definition 2.** Let  $\mathcal{F}, \mathcal{L}(\mathcal{F}), L$  be as above. If  $C$  is Chernoff-tangent to  $L$  and the equation  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in [0, T]} \|e^{tL} f - (C(t/n))^n f\| = 0$  holds, then  $C$  is called a *Chernoff function* for the operator  $L$ , and the  $(C(t/n))^n f$  is called a *Chernoff approximation expression* to  $e^{tL} f$ .

**Remark 3.** If  $L$  is a linear bounded operator in  $\mathcal{F}$ , then  $e^{tL} = \sum_{k=0}^{+\infty} (tL)^k / k!$  where the series converges in the usual operator norm topology in  $\mathcal{L}(\mathcal{F})$ . When  $L$  is not bounded (such as Laplacian and many other differential operators), expressing  $(e^{tL})_{t \geq 0}$  in terms of  $L$  is not an easy problem that is equivalent to the problem of finding (for each  $u_0 \in \mathcal{F}$ ) the  $\mathcal{F}$ -valued function  $U$  that solves the Cauchy problem  $U'(t) = LU(t); U(0) = u_0$ . If one finds this solution, then  $e^{tL}$  is obtained for each  $u_0 \in \mathcal{F}$  and each  $t \geq 0$  in the form  $e^{tL} u_0 = U(t)$ .

**Remark 4.** In the definition of the Chernoff tangency the family  $(C(t))_{t \geq 0}$  usually does not have a semigroup composition property, i.e.  $C(t_1 + t_2) \neq C(t_1)C(t_2)$ , while  $(e^{tL})_{t \geq 0}$  has it:  $e^{t_1 L} e^{t_2 L} = e^{(t_1 + t_2)L}$ . However, each  $C_0$ -semigroup  $(e^{tL})_{t \geq 0}$  is Chernoff-tangent to its generator  $L$  and appears to be its Chernoff function. When coefficients of the operator  $L$  are variable, usually there is no simple formula for  $e^{tL}$  due to the remark 3. On the other hand, even in this case one can find rather simple formula to construct Chernoff function  $C$  for the operator  $L$ , because there is no need to worry about the composition property, and then obtain  $e^{tL}$  in the form  $e^{tL} = \lim_{n \rightarrow \infty} C(t/n)^n$  via the Chernoff theorem.

## 4 Numerical simulation results

### 4.1 Problem setting

**Definition 3.** We say that operator-valued function  $C$  is *Chernoff-tangent of order  $k$*  to operator  $L$  iff  $C$  is Chernoff-tangent to  $L$  in the sense of definition 1 and the following condition (CT3-k) holds:

There exists such a dense subspace  $\mathcal{D} \subset \mathcal{F}$  that for each  $f \in \mathcal{D}$  we have

$$C(t)f = \left( I + tL + \frac{1}{2}t^2L^2 + \dots + \frac{1}{k!}t^kL^k \right) f + o(t^k) \text{ as } t \rightarrow 0. \quad (CT3 - k)$$

**Remark 5.** It is clear that for  $k = 1$  condition (CT3-k) becomes just (CT3). For the semigroup  $C(t) = e^{tL}$  condition (CT3-k) holds for all  $k = 1, 2, 3, \dots$ . So one can expect that the bigger  $k$  is the better rate of convergence  $C(t/n)^n f \rightarrow e^{tL}f$  as  $n \rightarrow \infty$  will be, if  $f$  belongs to the space  $D$ . This idea was proposed in [10], where two conjectures about the convergence speed were formulated explicitly, and one of them were recently proved in [7, 6]. For initial conditions that are good enough and  $t$  fixed, Chernoff function with Chernoff tangency of order  $k$  by conjecture should provide  $\|u(t, \cdot) - u_n(t, \cdot)\| = O(1/n^k)$  as  $n \rightarrow \infty$ . However, if  $f \notin D$  then nothing is known on the rate of convergence. In the present paper we are starting to fill this gap for operator  $L$  given by  $(Lf)(x) = f''(x)$  for all  $x \in \mathbb{R}$  and all bounded, infinitely smooth functions  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , and  $k = 1, 2$ .

**Problem setting.** In the initial value problem (2) consider  $Q = \mathbb{R}$ , and Banach space  $\mathcal{F} = UC_b(\mathbb{R})$  of all bounded, uniformly continuous functions  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  endowed with the uniform norm  $\|f\| = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$ . Consider operator  $L$  given by  $(Lf)(x) = f''(x)$  for all  $x \in \mathbb{R}$  and all  $f \in D = C_b^\infty(\mathbb{R})$  of all infinitely smooth functions  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  that are bounded with all the derivatives. Then (2) reads as (1). Cauchy problem (1) is a constant (one, zero, zero) coefficients particular case of the Cauchy problem considered in [13], and the corresponding Chernoff function was found in [13]. The particular case of this Chernoff function reads as

$$(G(t)f)(x) = \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{4}f(x + 2\sqrt{t}) + \frac{1}{4}f(x - 2\sqrt{t})$$

where we write  $G(t)$  instead of  $C(t)$  in order to show that  $C(t)$  is a general abstract Chernoff function for some operator  $L$ , meanwhile  $G(t)$  is this particular above-given Chernoff function for operator  $d^2/dx^2$ . It was proved in [13] that  $G(t)$  is first order Chernoff-tangent to  $d^2/dx^2$ .

A.Vedenin (see [18]) proposed another Chernoff function for operator  $L$  considered in [13], and the constant coefficient particular case of this operator is  $d^2/dx^2$ . The particular case of the Chernoff function obtained by A.Vedenin reads as

$$(S(t)f)(x) = \frac{2}{3}f(x) + \frac{1}{6}f(x + \sqrt{6t}) + \frac{1}{6}f(x - \sqrt{6t}),$$

and it was proved by A.Vedenin that  $S(t)$  is second order Chernoff-tangent to  $d^2/dx^2$ .

In the paper we study how  $\sup_{x \in \mathbb{R}} |u(t, x) - u_n(t, x)|$  depends on  $n$  while  $t = 1/2$  is fixed and  $u_n(t, x)$  is given by

$$u_n(t, x) = (C(t/n)^n u_0)(x)$$

where  $C \in \{G, S\}$ ,  $C(t/n)$  is obtained by substitution of  $t$  by  $t/n$  in the formula that defines  $C(t)$ , and  $C(t/n)^n = C(t/n)C(t/n) \dots C(t/n)$  is a composition of  $n$  copies of linear bounded operator  $C(t/n)$ . We consider several initial conditions  $u_0$  that are all Hölder continuous (hence

all belong to the  $UC_b(\mathbb{R})$  space) but have different Hölder exponents. Then we remark how the rate of tending of  $\sup_{x \in \mathbb{R}} |u(t, x) - u_n(t, x)|$  to zero depends on these Hölder exponents and the order of Chernoff tangency (which is 1 for  $G(t)$ , and 2 for  $S(t)$ ).

**Comments on computational techniques.** Calculations were performed in the Python 3 environment using a program we wrote and which is available in the Appendix. All measurements, for the sake of reducing computational complexity, for each value of  $n$  (varying from 1 to 11) were carried out for 1000 points uniformly dividing the segment  $[a, b] = [-\pi, \pi]$  for trigonometric initial conditions and segment  $[a, b] = [-10, 10]$  for exponential initial condition. Initial conditions of the form  $u_0(x) = |\sin x|^\alpha$  for various  $\alpha \in \{9/2, 7/2, 5/2, 3/2, 1, 3/4, 1/2, 1/4\}$ , like any of Chernoff approximations based on them, are periodic functions. So, the standard norm in  $UC_b(\mathbb{R})$ , namely

$$\|u_n(t, \cdot) - u(t, \cdot)\| = \sup_{x \in \mathbb{R}} |u_n(t, x) - u(t, x)| = \sup_{x \in [a, b]} |u_n(t, x) - u(t, x)|,$$

where  $u$  is the exact solution of (1) and  $u_n$  is the Chernoff approximation, is reached at the interval  $[a, b]$  corresponding to the period. So we have

$$d = \max_{k=1, \dots, 1000} \left| u_n \left( t, a + \frac{k}{1000}(b-a) \right) - u \left( t, a + \frac{k}{1000}(b-a) \right) \right| \approx \sup_{x \in [a, b]} |u_n(t, x) - u(t, x)|$$

and this value  $d$  is what we measure numerically. We use the value  $t = 1/2$ .

The program code was written with the possibility to set any operator and any initial condition, i.e. without simplifying Chernoff functions and using binomial coefficients, in contrast to the work [16] published earlier. Moreover, the initial condition does not necessarily have to be a smooth function. The number of iterations is not limited to 11, the value  $n$  can be changed, both upward and downward. We have chosen the optimal value  $n$  since the program is rather time consuming: via Jupyter Notebook 6.1.4 Anaconda 3 Python 3.8.3 set on personal computer with Windows 10, CPU Intel Core i5-1035G1, 1.0-3.6 GHz, 8 Gb RAM it takes about 20 minutes to complete the program for all initial conditions with construction of graphs for them. At the research stage of the new method (Chernoff approximations) this is acceptable, but in the future, of course, the code will be optimized for a better speed, since this is important in practice. After reasonable research in this direction in the future it will be possible to write a library that allows to solve partial derivative equations in this way.

## 4.2 Approximations for initial condition $u_0(x) = \sin(x)$

Let us first analyze the approximations for the initial condition  $u_0(x) = \sin x$ .

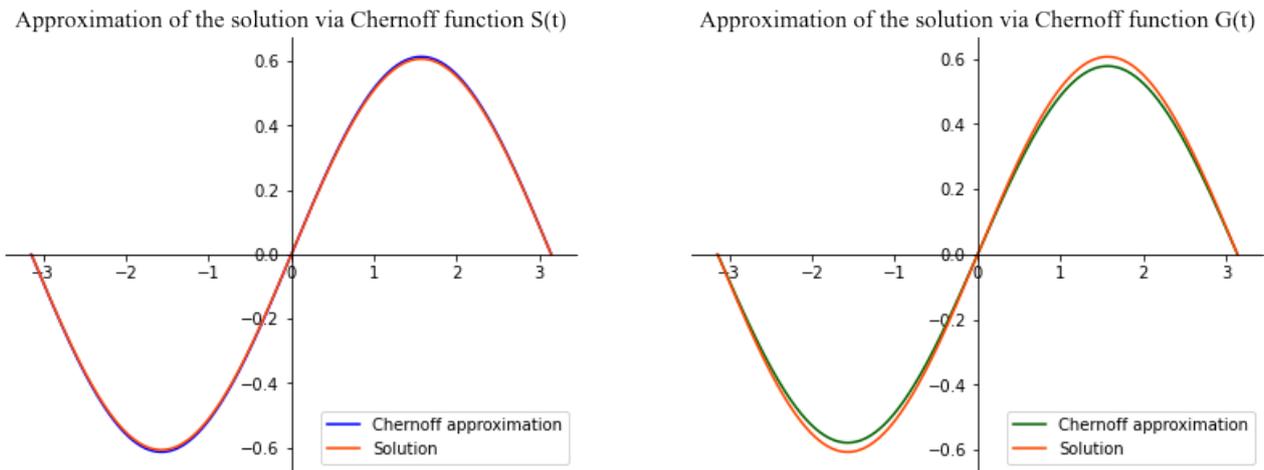


fig. 1.1,  $n = 1$ ,  $u_0(x) = \sin x$ ,  $t = \frac{1}{2}$

Figure 1.1 shows the exact solution, which coincides with the graph of the function  $y = e^{-1/2} \sin x$ , and approximate solutions for the functions  $S(t)$  (left) and  $G(t)$  (right) at  $n = 1$ . The initial condition  $u_0 = \sin x$  is very good, since its derivatives of any order exist, have no discontinuities and are bounded. And already at  $n = 1$  the function  $S(t)$  gives a good approximation. For  $n = 2$  quality of approximation is so good that visually it is impossible to distinguish the approximation and exact solution, so we do not present a plot. However, anyway it is possible to measure the distance between exact solution and approximation, because the picture is just an illustration and is not used for measuring the quality of approximation.

Figure 1.2 below shows plots of the decreasing error of Chernoff approximations as a function of  $n$ , where  $1 \leq n \leq 11$ . On the left are plots of decreasing error for Chernoff functions  $S(t)$  (in blue) and  $G(t)$  (in green) in regular scale, and on the right – the same plots in logarithmic scale. The graph in the logarithmic scale allows us to estimate how much the convergence rate for the function  $G(t)$  is less than the convergence rate for the function  $S(t)$ .

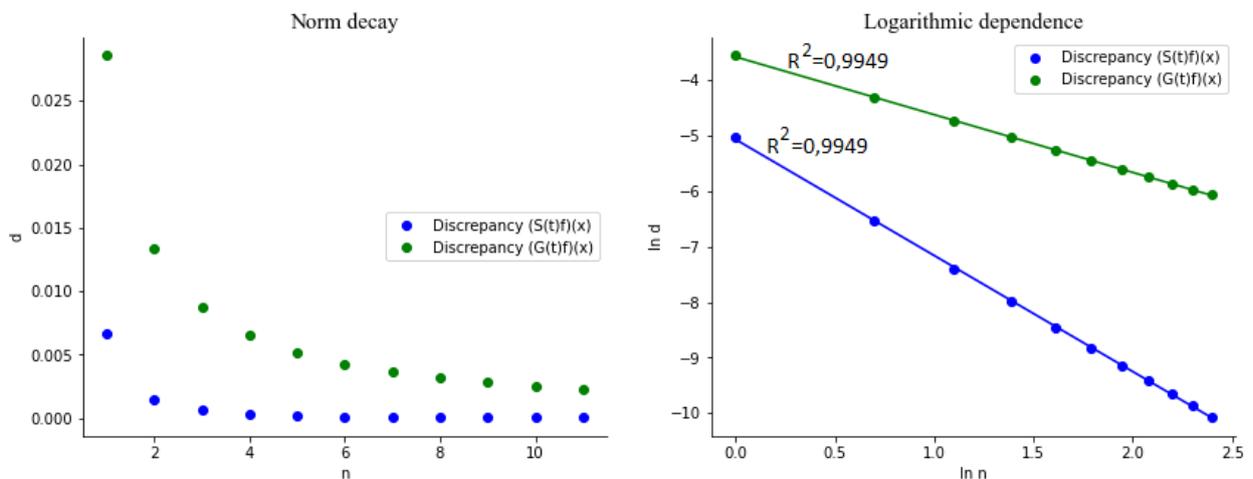


fig. 1.2,  $1 \leq n \leq 11$ ,  $u_0(x) = \sin x$ ,  $t = \frac{1}{2}$

You can see that the points on the right graph lie on the straight lines with good accuracy. Using the method of least squares (in Excel) we found the equations of these lines. Rounding

off the coefficients, we see that for the blue line the equation is as follows:

$$\ln(d) = -2.092 \ln(n) - 5.0671, \text{ i.e. } d = n^{-2.092} e^{-5.0671} = \frac{0.0063}{n^{2.092}}.$$

Similarly, for the green line, the equation  $\ln(d) = -1.0416 \ln(n) - 3.5796$ , i.e.

$$d = n^{-1.0416} e^{-3.5796} = \frac{0.0279}{n^{1.0416}}.$$

Using the same approach, we study the behavior of the error for other initial conditions.

### 4.3 Approximations for initial condition $u_0(x) = |\sin(x)|^{3/2}$

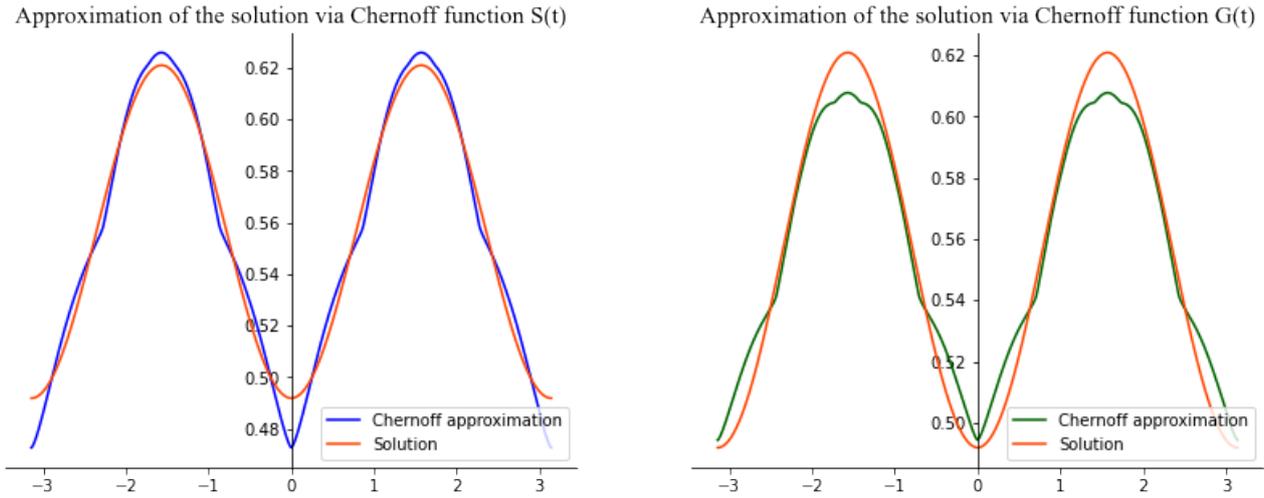


fig. 5.1,  $n = 4$ ,  $u_0(x) = |\sin(x)|^{3/2}$ ,  $t = \frac{1}{2}$

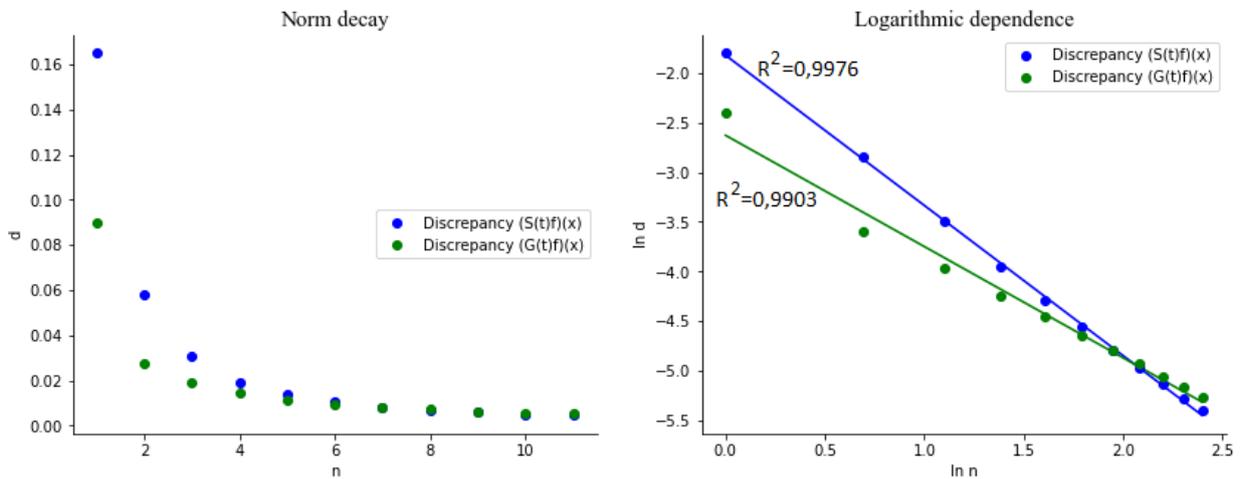


fig. 5.2,  $1 \leq n \leq 11$ ,  $u_0(x) = |\sin(x)|^{3/2}$ ,  $t = \frac{1}{2}$

The line (green) corresponding to the decreasing error of the function  $G(t)$  in the logarithmic scale was constructed without taking into account  $n = 1$ .

For the green line (see Fig. 5.2, right) the equation  $\ln(d) = -0.9785 \ln(n) - 2.8973$ , i.e.

$$d = n^{-0.9785} e^{-2.8973} = \frac{0.0552}{n^{0.9785}}.$$

Similarly, for the blue line (see Figure 5.2), the equation is as follows:  $\ln(d) = -1.5109 \ln(n) -$

$$1.8234, \text{ i.e. } d = n^{-1.5109} e^{-1.8234} = \frac{0.1615}{n^{1.5109}}.$$

As can be seen from Figure 5.2, the difference between the error decay rates using Chernoff functions  $S(t)$  and  $G(t)$  for  $u_0(x) = |\sin(x)|^{3/2}$  is larger than for  $u_0(x) = |\sin x|$ . This is due to the greater smoothness of  $u_0(x) = |\sin(x)|^{3/2}$ .

#### 4.4 Approximations for initial condition $u_0(x) = e^{-|x|}$

Let us consider a non-smooth and non-periodic function  $e^{-|x|}$  as an initial condition.

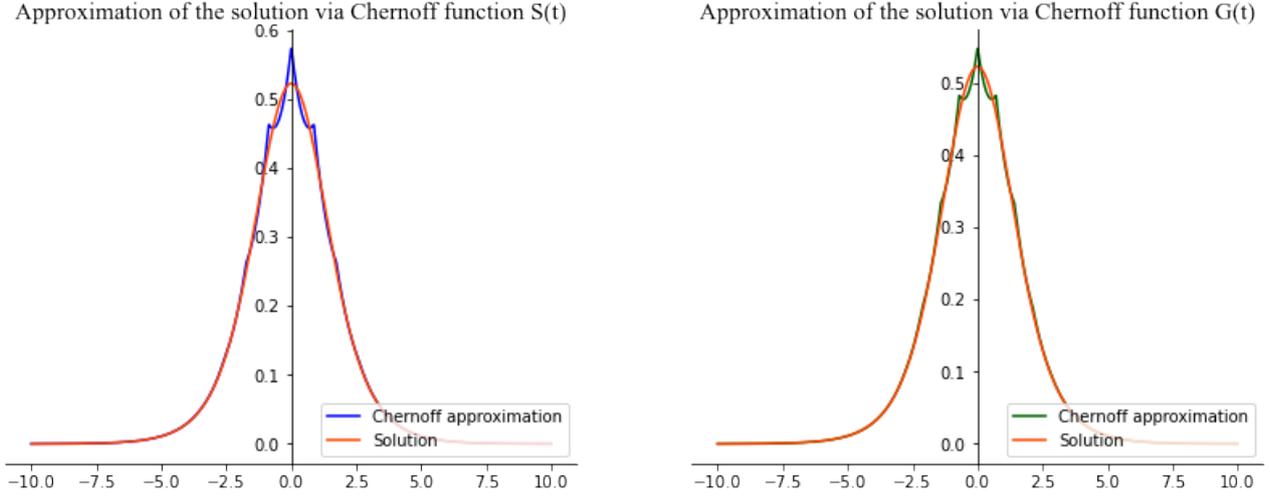


fig. 6.1,  $n = 4$ ,  $u_0(x) = e^{-|x|}$ ,  $t = \frac{1}{2}$

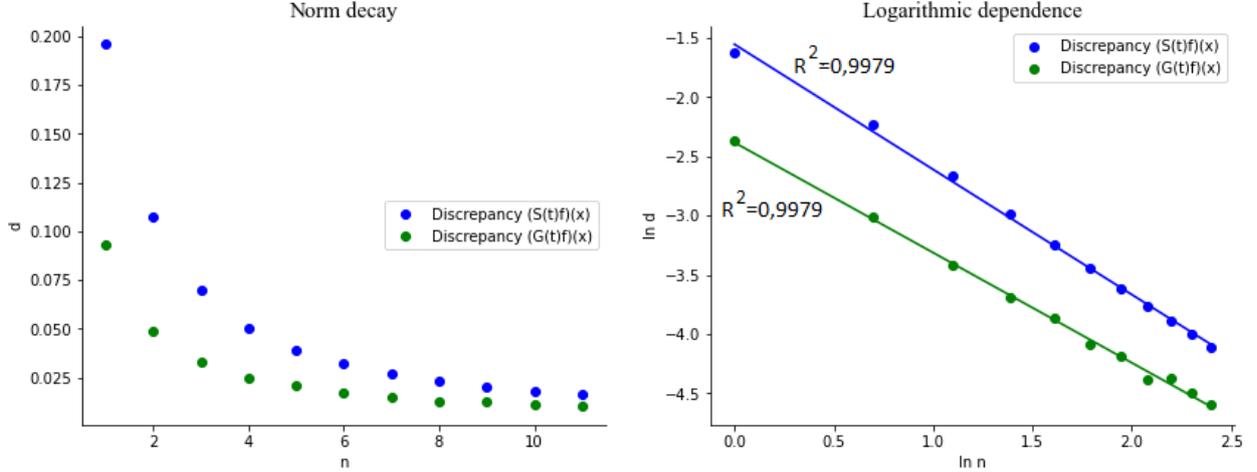


fig. 6.2,  $1 \leq n \leq 11$ ,  $u_0(x) = e^{-|x|}$ ,  $t = \frac{1}{2}$

Figures 6.1 and 6.2 show plots of the exact solution, approximations to the solution, and rates of convergence of the error to zero. As can be seen, the result is similar: the convergence rate of the function  $S(t)$  is higher than that of  $G(t)$ , but the order of convergence is approximately the same, as can be seen from the fact that the lines are almost parallel.

For the green line (see Fig. 6.2, right), the equation is as follows:  $\ln(d) = -0.9294 \ln(n) - 2.3832$ , i.e.  $d = n^{-0.9294} e^{-2.3832} = \frac{0.0923}{n^{0.9294}}$ .

Similarly, for the blue line (see Figure 6.2) the equation is as follows:  $\ln(d) = -1.056 \ln(n) - 1.5543$ , i.e.  $d = n^{-1.056} e^{-1.5543} = \frac{0.2113}{n^{1.056}}$ .

## 4.5 Approximations for initial condition $u_0(x) = |\sin(x)|^{5/2}$

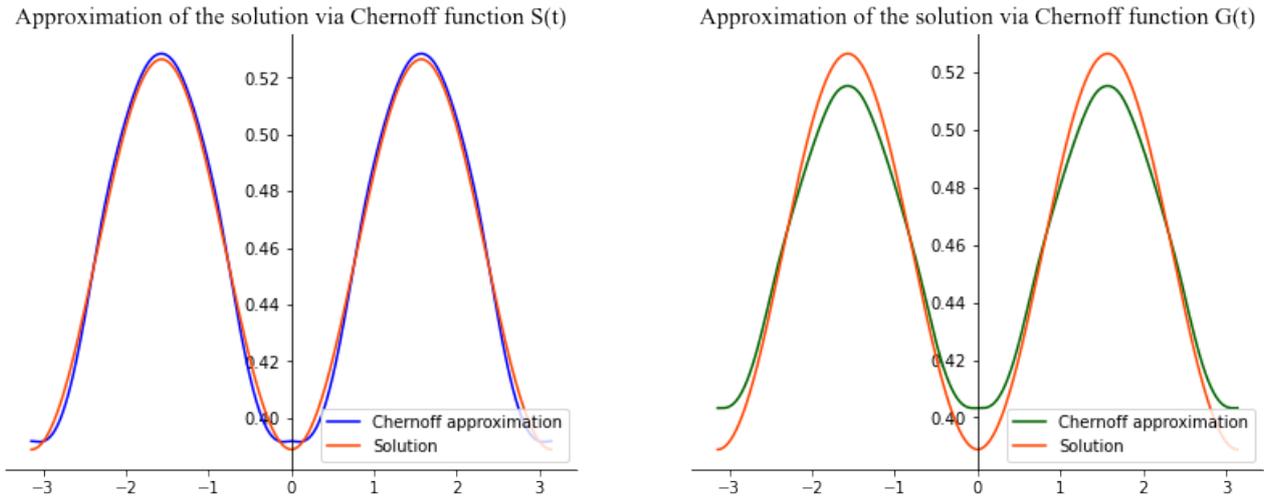


fig. 7.1,  $n = 4$ ,  $u_0(x) = |\sin(x)|^{5/2}$ ,  $t = \frac{1}{2}$

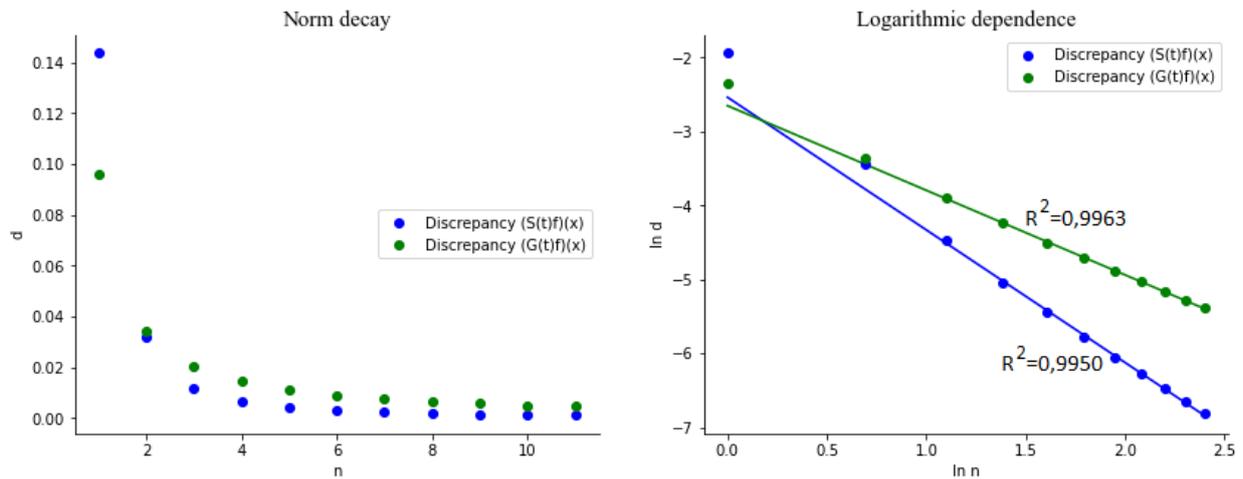


fig. 7.2,  $1 \leq n \leq 11$ ,  $u_0(x) = |\sin(x)|^{5/2}$ ,  $t = \frac{1}{2}$

The lines (green and blue) corresponding to the decreasing error of the functions  $G(t)$  and  $S(t)$  in the logarithmic scale was constructed without taking into account  $n = 1$  and  $n = 2$ .

## 4.6 Approximations for initial condition $u_0(x) = |\sin(x)|^{7/2}$

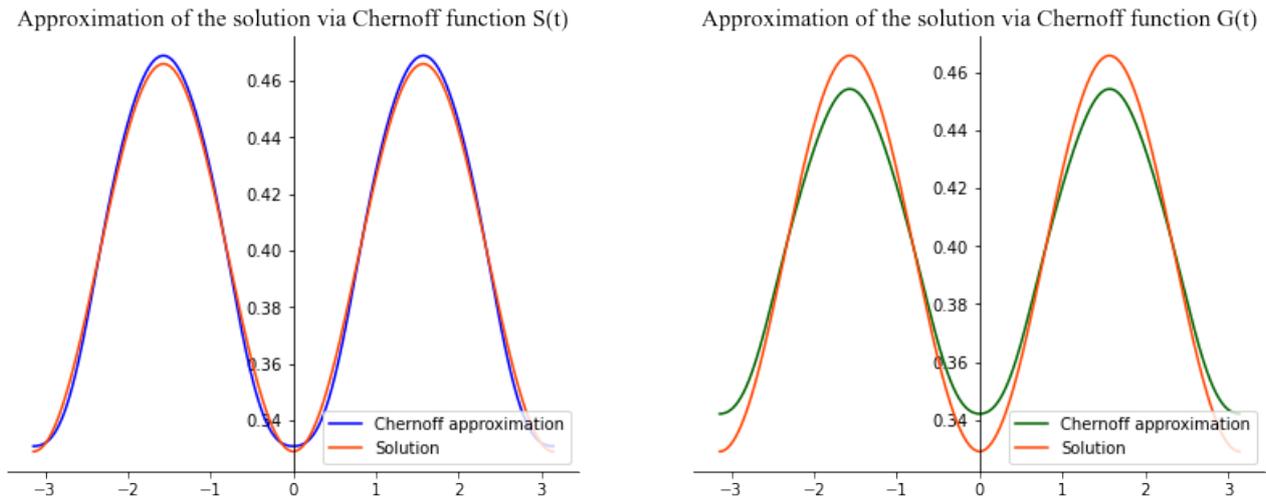


fig. 8.1,  $n = 4$ ,  $u_0(x) = |\sin(x)|^{7/2}$ ,  $t = \frac{1}{2}$

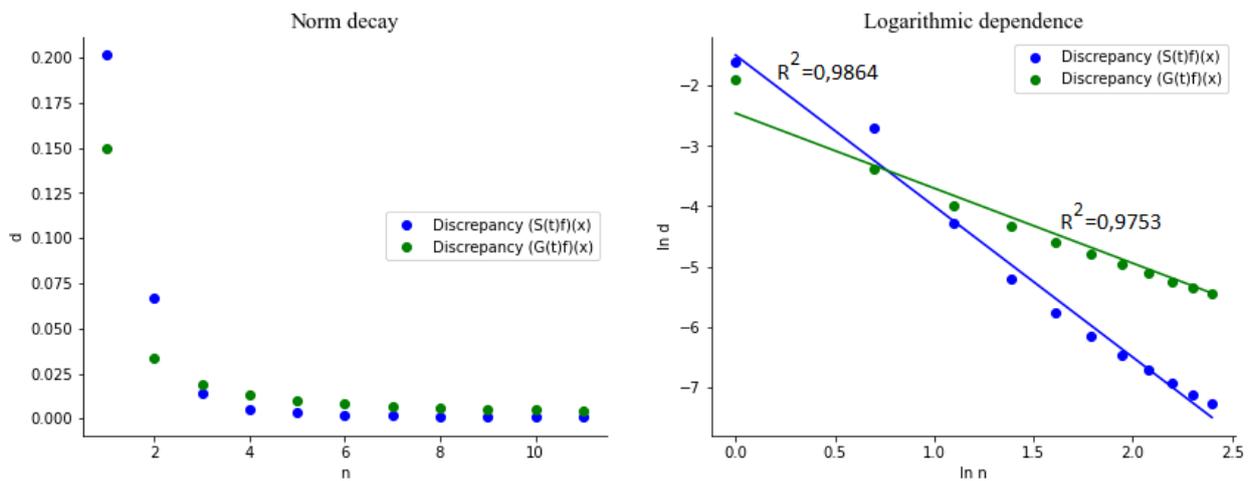


fig. 8.2,  $1 \leq n \leq 11$ ,  $u_0(x) = |\sin(x)|^{7/2}$ ,  $t = \frac{1}{2}$

The line (green) corresponding to the decreasing error of the function  $G(t)$  in the logarithmic scale was constructed without taking into account  $n = 1$  and  $n = 2$ .

## 4.7 Approximations for initial condition $u_0(x) = |\sin(x)|^{9/2}$

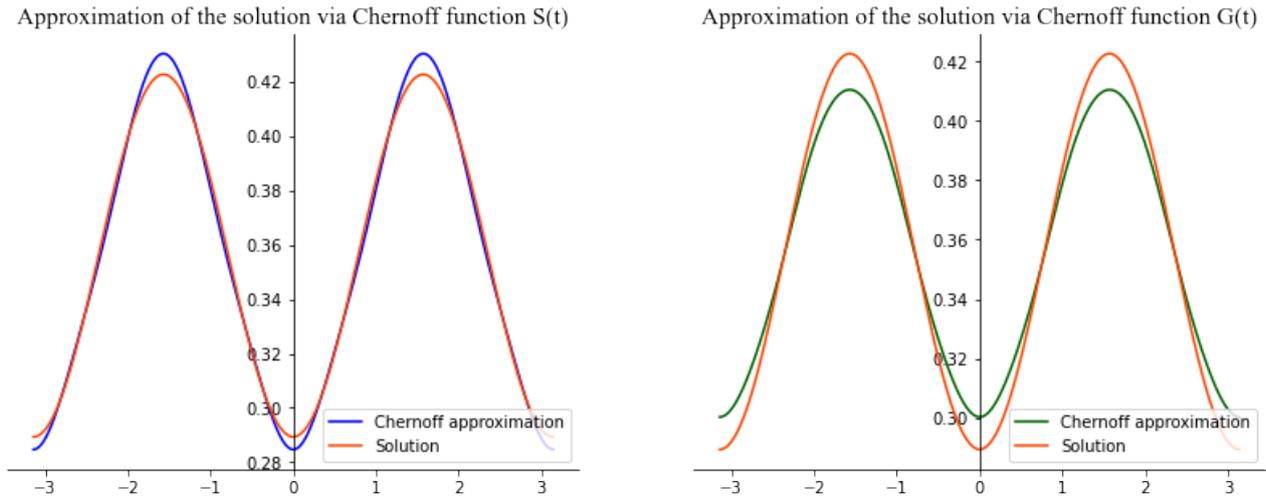


fig. 9.1,  $n = 4$ ,  $u_0(x) = |\sin(x)|^{9/2}$ ,  $t = \frac{1}{2}$

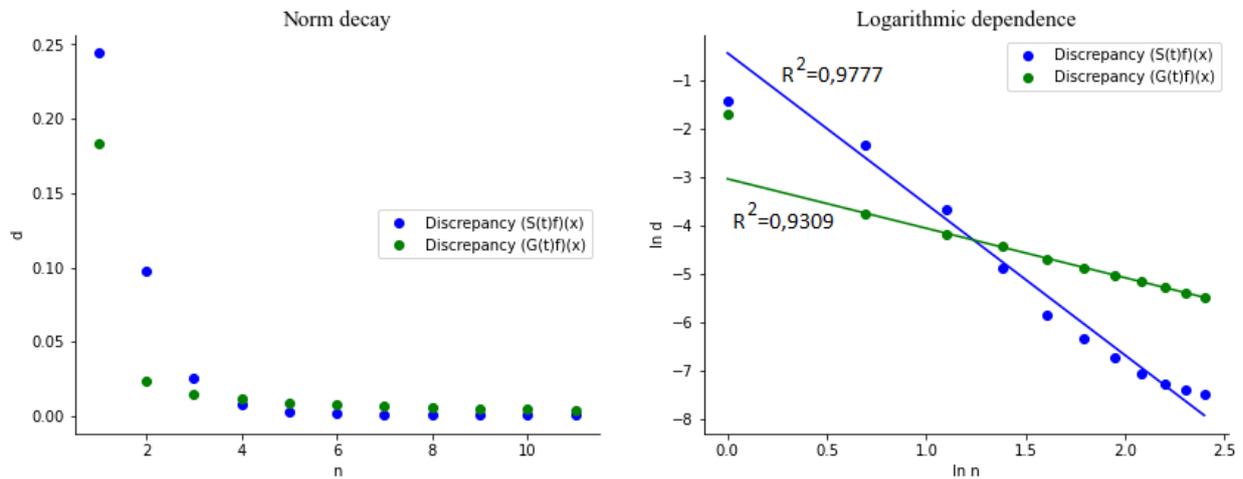


fig. 9.2,  $1 \leq n \leq 11$ ,  $u_0(x) = |\sin(x)|^{9/2}$ ,  $t = \frac{1}{2}$

The line (green) corresponding to the decreasing error of the function  $G(t)$  in the logarithmic scale was constructed without taking into account  $n = 1$  and  $n = 2$ .

## 5 Discussion

The table below shows experimentally (using simulation in Python 3) the orders of decreasing of error depending on the smoothness class of the initial condition and the Chernoff function.

<b>The smoothness class of the initial condition <math>u_0</math></b>	<b>Order of decreasing error on the Chernoff function <math>G(t)</math>, which has the 1st order of the Chernoff tangent to the operator <math>L = \frac{d^2}{dx^2}</math></b>	<b>Order of decreasing error on the Chernoff function <math>S(t)</math>, which has the 2nd order of tangency by Chernoff to the operator <math>L = \frac{d^2}{dx^2}</math></b>
$C^\infty$ , i.e. all derivatives exist and are bounded, $u_0(x) = \sin(x)$	-1.0416	-2.092
$C^{4\frac{1}{2}}$ , the first, second, third, and fourth derivatives exist and are bounded, and the fourth is Hölder with a Hölder exponent $1/2$ , $u_0(x) =  \sin(x) ^{9/2}$	-1.0212, the regression was done without $n = 1, n = 2$	-3.1219, but the points do not fit well on a straight line, so the number is uninformative
$C^{3\frac{1}{2}}$ , the first, second, and third derivatives exist and are bounded, and the third is Hölder with Hölder exponent $1/2$ , $u_0(x) =  \sin(x) ^{7/2}$	-1.4013, regression was done without considering $n = 1, n = 2$ , but the points do not lie well on the line, so the number is uninformative	-2.5045, but the points do not lie well on the line, so the number is uninformative
$C^{2\frac{1}{2}}$ , the first and second derivative exist and are bounded, while the second derivative is Hölder continuous with Hölder exponent $1/2$ , $u_0(x) =  \sin(x) ^{5/2}$	-1.1433, regression was done without considering $n = 1, n = 2$	-1.7923, regression was done without considering $n = 1, n = 2$
$C^{1\frac{1}{2}}$ , the first derivative: exists, is bounded and Hölder continuous with Hölder exponent $1/2$ , $u_0(x) =  \sin(x) ^{3/2}$	-0.9785, the regression was done without considering $n = 1$	-1.5109
$H^1$ , the Hölder with the Hölder exponent 1, $u_0(x) =  \sin(x) $	-1.0508	-1.0948
$H^1$ , the Hölder with the Hölder exponent 1, $u_0(x) = e^{- x }$	-0.9294	-1.056
$H^{3/4}$ , the Hölder with the Hölder exponent $3/4$ , $u_0(x) =  \sin(x) ^{3/4}$	-0.815	-0.9262
$H^{1/2}$ , the Hölder with the Hölder exponent $1/2$ , $u_0(x) =  \sin(x) ^{1/2}$	-0.6905	-0.7723
$H^{1/4}$ , the Hölder with the Hölder exponent $1/4$ , $u_0(x) =  \sin(x) ^{1/4}$	-0.6138	-0.6653

We see that on the initial condition with high smoothness (first line in the table), the first order of Chernoff tangency corresponds to a decreasing error rate of about  $1/n$ , and the second order – a decreasing rate of about  $1/n^2$ . This is in accordance with the conjecture from [10] and theorem from [6].

As the smoothness is lost (second line in the table and below), theory from [6] stops working, and the experimental evidence is the following: the convergence speed gradually decreases and the advantages of the Chernoff function with the second order of Chernoff tangency gradually vanish. Let us present the results from the table graphically:

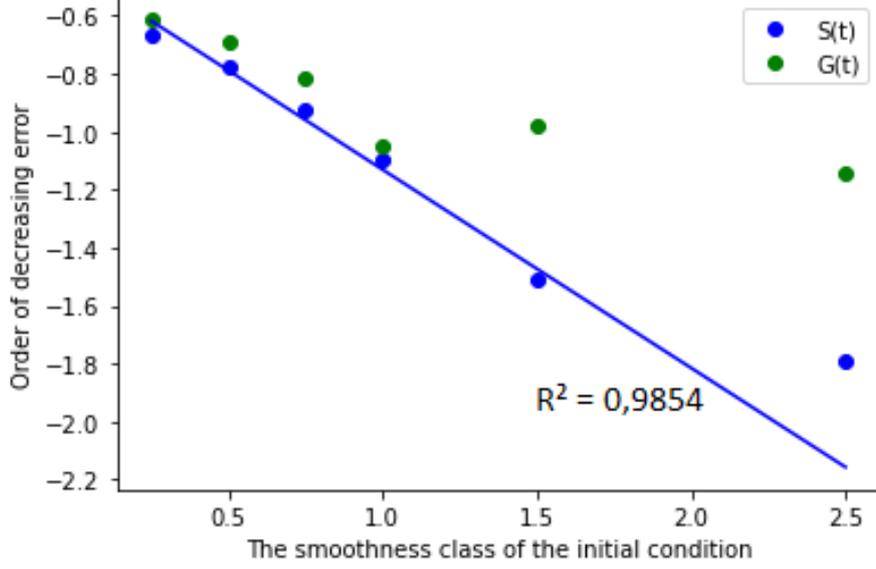


fig. 10

We see that first several blue points visually lie on a straight line, so we used linear regression (ordinary least square method) to find the equation of this line. The regression was carried out without taking into account the point last point with coordinates (2.5; -1.7923). The equation of the approximating line:  $y = -0.684x - 0.4467$ . This may be interpreted as follows: when the smoothness class  $\alpha$  of the initial condition  $u_0$  is not greater than the order of Chernoff tangency then

$$d = \|u_n(t, \cdot) - u(t, \cdot)\| = \sup_{x \in \mathbb{R}} |u_n(t, x) - u(t, x)| \approx \text{const} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^{0.68\alpha + 0.45}.$$

Meanwhile when the smoothness class  $\alpha$  of the initial condition  $u_0$  is greater than the order of Chernoff tangency then there is no such easy-to-state dependence but still Chernoff function  $S(t)$  with the second order Chernoff tangency provides better approximations than Chernoff function  $G(t)$  with the first order Chernoff tangency.

**Conclusion.** The results of the numerical simulation confirm the conjecture form [10] and are in agreement with the theory arising from it [6, 7, 18]. However, there are some of the points that do not lie on straight lines in the logarithmic scale exactly. This deserve closer attention:  $n = 11$  for some initial conditions is not sufficient to derive conclusions about the asymptotic behavior of the calculation error. There are no known theoretical bounds on the rate of convergence for not smooth initial conditions; we we studied this numerically, so the results that we found are the only evidence known for the moment. In the future, of course, the most interesting case of variable coefficients should be considered, understanding them as parameters analogously with  $u_0$ . So the research in this direction is far from ending.

**Acknowledgements.** Authors are partially supported by Laboratory of Dynamical Systems and Applications NRU HSE, grant of the Ministry of science and higher education of the RF, ag. No 075-15-2022-1101. Authors are thankful to Prof. O.E.Galkin for discussions of the results presented in the paper.

**Conflict of interest.** Authors declare that they have no conflict of interest.

## Appendix: Python 3 code and full list of pictures

All the pictures that are presented in the paper are generated by the Python 3 program that we wrote for this purpose. The source code of this program is available in the arXiv [3]. Also, there are pictures for more values of  $n$  for Chernoff approximations. We do not include them all to the journal paper, but they are available online, see [3].

## References

- [1] Butko Ya.A. The method of Chernoff approximation. Springer Proceedings in Mathematics and Statistics. Volume 325. — Springer, Cham, 2020. Pp. 19–46.
- [2] Chernoff P.R. Note on product formulas for operator semigroups.// J. Functional Analysis 2:2 (1968), 238-242.
- [3] Dragunova K.A., Garashenkova A.A., Nikbakht N., Remizov I.D. Numerical Study of the Rate of Convergence of Chernoff Approximations to Solutions of the Heat Equation with full list of illustrations and Python source code// arXiv:2301.05284 [math.NA] (2023)
- [4] Engel K.-J., Nagel R. A. Short Course on Operator Semigroups. — N.Y. Springer Science, Business Media, 2006.
- [5] Engel K.-J., Nagel R. One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations. — Springer, 2000.
- [6] Galkin O.E., Remizov I.D. Rate of Convergence of Chernoff Approximations of operator  $C_0$ -semigroups.// Mathematical Notes, 111:2, 305–307 (2022)
- [7] Galkin O. E., Remizov I. D. Upper and lower estimates for rate of convergence in Chernoff's product formula for semigroups of operators // <https://arxiv.org/abs/2104.01249>, 2021
- [8] Gomilko A., Kosowicz S., Tomilov Yu. A general approach to approximation theory of operator semigroups. // Journal de Mathématiques Pures et Appliquées. 127 (2019), 216–267.
- [9] Orlov Yu.N., Sakbaev V.Zh., Smolyanov O.G. Rate of convergence of Feynman approximations of semigroups generated by the oscillator Hamiltonian. // Theoret. and Math. Phys. 172:1 (2012), 987–1000.
- [10] Remizov I.D. On estimation of error in approximations provided by Chernoff's product formula.// International Conference "ShilnikovWorkshop-2018" dedicated to the memory of outstanding Russian mathematician Leonid Pavlovich Shilnikov (1934-2011), Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, December 17-18, 2018 Book of abstracts, pp.38-41

- [11] Remizov I.D. Quasi-Feynman formulas – a method of obtaining the evolution operator for the Schrödinger equation.// J. Funct. Anal. 270:12, (2016), 4540-4557.
- [12] Remizov I.D. Feynman and Quasi-Feynman Formulas for Evolution Equations// Doklady Mathematics, 96:2 (2017), 433-437
- [13] Remizov I. D. Approximations to the solution of Cauchy problem for a linear evolution equation via the space shift operator (second-order equation example)// Applied Mathematics and Computation, 328, 243-246, 2018
- [14] Remizov I. D. Solution-giving formula to Cauchy problem for multidimensional parabolic equation with variable coefficients// Journal of Mathematical Physics, 60:7 (2019), 071505
- [15] Remizov I. D. Chernoff approximations as a way of finding the resolvent operator with applications to finding the solution of linear ODE with variable coefficients// arXiv:2301.06765 [math.FA] 2023
- [16] Prudnikov P.S. Speed of convergence of Chernoff approximations for two model examples: heat equation and transport equation// arXiv:2012.09615 [math.FA] (2020).
- [17] Smolyanov O.G., Tokarev A.G., Truman A. Hamiltonian Feynman path integrals via the Chernoff formula.// J. Math. Phys. 43. 10 (2002), 5161-5171.
- [18] Vedenin A.V., Voevodkin V.S., Galkin V.D., Karatetskaya E.Yu., Remizov I.D. . Speed of Convergence of Chernoff Approximations to Solutions of Evolution Equations. // Math. Notes, 108:3 (2020), 451–456.
- [19] Zagrebnov V.A. Notes on the Chernoff product formula. // J. Funct. Anal. 279:7 (2020), 108696

В Оргкомитет Смотра дипломных работ математиков России  
от Зайчикова Кирилла Сергеевича  
Заявление о новизне

Сообщаю, что новыми в моей представленной на Смотри выпускной квалификационной работе под названием «Конструкции, связанные с продолжением интеграла Петтиса» являются: примеры новых псевдогиперболических дискретных аттракторов Лоренца, с численным подтверждением их свойств, в частности был приведен пример настоящего дискретного аттрактора Лоренца.

Также сообщаю, что для проверки новизны было проделано следующее:

- В период с 01 января по 15 февраля 2021 г. мною был произведён поиск в следующих поисковых системах: Яндекс, Google, Google Scholar, Web of Science, arXiv.org по следующим ключевым словам: дискретный аттрактор Лоренца, discrete Lorenz attractor, в выдаче поисковиков было исследовано 8 статей, 1 диссертация (список см. в Приложении 1 к выпускной квалификационной работе) и все они не содержали материала, заявляемого автором выпускной квалификационной работы в качестве нового. При поиске не было встречено работ или упоминаний работ, позволяющих усомниться в новизне материала. При этом в работе [1] было выдвинуто предположение о существовании настоящего дискретного аттрактора Лоренца и даже приведена его гомоклиническая структура, однако примера найдено не.

- Проведена серия консультаций с моим научным руководителем Казаковым Алексеем Олеговичем, доцентом кафедры фундаментальной математики факультета информатики, математики и компьютерных наук НИУ ВШЭ НН.

- Проведена переписка с доктором физико-математических наук Гонченко Сергеем Владимировичем.

Таким образом, по результатам поиска в сети Интернет и тематических научных базах, а также обсуждений с указанными выше специалистами следует, что, по-видимому, представленный в моей выпускной квалификационной работе указанный выше математический материал действительно является новым.

Подтверждаю, что являюсь автором предоставляемой на Смотри работы и прошу принять её для участия в Смотре. Принимаю на себя обязательство соблюдать правила Смотра. Также (в соответствии с п. 4 Положения о Смотре) принимаю на себя обязательство оценить 5 работ участников Смотра, выданных мне Оргкомитетом в результате жеребьёвки и сверх того оценить 2-5 работ других участников Смотра на мой выбор. Я понимаю правила оценки работ, приведённые в п. 4.3 Положения о Смотре. Даю согласие на публикацию адреса моей электронной почты.

Защита работы состоялась 11.06.2024. На Смотри представлен проект текста работы.

Подпись



Зайчиков Кирилл Сергеевич

17 июня 2024 г. Нижний Новгород, Россия

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ  
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ  
“ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ”  
НИЖЕГОРОДСКИЙ ФИЛИАЛ  
*Факультет информатики, математики и компьютерных наук*

ДИПЛОМНАЯ РАБОТА

на тему:

**Аттракторы лоренцевского типа в  
трехмерных отображениях**

Выполнил:  
Студент 4 курса группы 20ФМ

Зайчиков Кирилл Сергеевич

Научный руководитель:  
доктор физико-математических наук  
Казаков Алексей Олегович

Нижний Новгород  
2024 г.

## Содержание

1. Введение	1
2. Основные определения	4
3. Исследование отображения Гонченко	5
3.1. Анализ показателей Ляпунова . . . . .	9
3.2. Сценарии рождения аттрактора Лоренца и Ровеллы в отображении Гонченко. . . . .	9
3.3. Проверка псевдогиперболичности аттракторов в отображении Гонченко	12
4. Анализ дискретизованного Лоренца	17
4.1. Анализ показателей Ляпунова . . . . .	18
4.2. Проверка псевдогиперболичности . . . . .	19
5. Выводы	22
Список литературы	23

## 1. Введение

Аттрактор Лоренца - один из наиболее известных и хорошо изученных странных аттракторов. Впервые аттрактор Лоренца был найден в системе трех дифференциальных уравнений (3) Лоренцом при попытке описать конвекцию морской воды в плоском слое [1]. Позже этот аттрактор наблюдался также в других гидродинамических [13] и оптических [14] системах, нормальных формах для некоторых локальных бифуркаций [15]. Его дискретный аналог был найден в неголономных системах [7], системах конвекции [16], а также в нормальных формах некоторых гомоклинических бифуркаций [5].

Существует несколько не эквивалентных определений аттрактора Лоренца. Большая часть из них основана на геометрических идеях. Классические определения были предложены в работах Афраймовича-Быкова-Шильникова [2, 3]. В этих работах строится геометрическая модель аттрактора путем построения отображения первого возвращения вблизи пары гомоклинических петель (петли-бабочки) к седлу с одномерным неустойчивым многообразием. В этой работе будет использоваться определение аттрактора Лоренца основанное на псевдогиперболичности. Определения псевдогиперболичности и аттрактора Лоренца смотри в разделе 2.

Теория псевдогиперболических аттракторов была заложена в [4]. Основная идея заключается в том, что у таких аттракторов в каждой точке касательное пространство раскладывается на прямую сумму линейных подпространств  $E^{cu}$  и  $E^{ss}$ . В подпространстве  $E^{cu}$  растягиваются  $k$ -мерные объемы, когда в  $E^{ss}$  сжимаются  $n - k$ -мерные объемы. В случае гиперболических аттракторов  $E^{cu}$  берется как неустойчивое многообразие, когда в случае псевдогиперболических пространство  $E^{cu}$  может

сжимать некоторые направления. Растяжение объемов в пространстве гарантирует, что каждая траектория на аттракторе будет неутойчивой. Также требуется, чтобы любое возможное сжатие в  $E^{cu}$  было равномерно слабее любого сжатия в  $E^{ss}$ , это свойство гарантирует сохранение хаотичности каждой траектории при малых возмущениях системы.

В данной работе будет изучаться дискретный аналог аттрактора Лоренца. Определение дискретного аттрактора Лоренца будет дано в разделе 2. Дискретный аттрактор Лоренца также является псевдогиперболическим. Впервые подобный аттрактор был найден в отображении Эно [5]:

$$\begin{cases} \bar{x} = y, \\ \bar{y} = z, \\ \bar{z} = M_1 + Bx + M_2z - z^2. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь  $x, y, z$  – фазовые переменные, а  $M_1, M_2, B$  – параметры. Пример набора параметров при которых в фазовом пространстве существует аттрактор Лоренца –  $(-0.02, 0.85, 0.7)$ , см. рис.1а. Существование в этом отображении аттрактора Лоренца известный факт. Аттрактор рождается через бифуркацию коразмерности 3, когда неподвижная точка имеет мультипликаторы:  $(-1, -1, 1)$ .

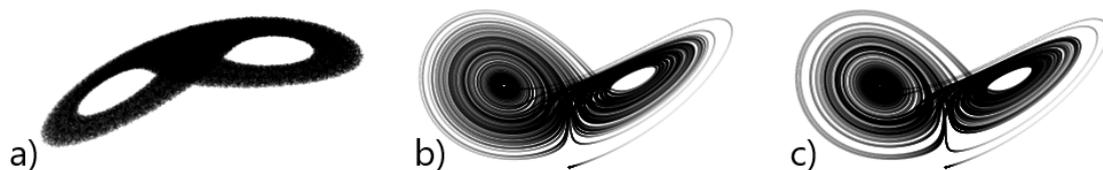


Рис. 1. Фазовые портреты аттракторов. На рисунке (а) изображен дискретный аттрактор Лоренца в отображении (1) при параметрах  $B = 0.7, M_1 = -0.02, M_2 = 0.85$ . На рисунке (б) изображен потоковый аттрактор системы Лоренца (3) при параметрах  $\beta = 8/3, \sigma = 10, \rho = 30$ . На рисунке (с) изображен аттрактор отображения (4) при параметрах  $\beta = 8/3, \sigma = 10, \rho = 30, \delta = 0.0001$ . Можно заметить, что фазовый портрет дискретизованного потока очень схож с потоковым случаем, а значит действительно при малых  $\delta$  отображение хорошо аппроксимирует поток.

Позже дискретные аттракторы Лоренца были также найдены в моделях кельтского камня и волчка Чаплыгина [6, 7]. Однако данные аттракторы обладали особенностью: они имели близкий к нулю показатель Ляпунова, что в каком то смысле делает их близкими к потоковым случаям.

В настоящей работе приводятся примеры различных дискретных аттракторов Лоренца. Среди которых присутствуют также и настоящие дискретные аттракторы, которые не обладают нулевым показателем Ляпунова, а значит подобные притягивающие множества невозможно встретить в системах дифференциальных уравнений. Кроме того, стоит заметить, что ранее не было найдено ни то что настоящих дис-

кратных аттракторов Лоренца, но и вообще никаких настоящих дискретных псевдогиперболических аттракторов.

В данной работе проведены исследования двух отображений. Первое отображение было предложено Сергеем Владимировичем Гонченко:

$$\begin{cases} \bar{x} = y \\ \bar{y} = \nu_1 x + \nu_2 y + Ayz \\ \bar{z} = \nu_3 z + By^2 \end{cases} \quad (2)$$

Здесь  $\nu_1, \nu_2, \nu_3, A$  и  $B$  – параметры отображения, а  $x, y$  и  $z$  – динамические переменные. Данное отображение обладает «лоренцевской» симметрией  $(x, y, z) \rightarrow (-x, -y, z)$ . Что означает, что если одновременно сменить знаки переменных  $x$  и  $y$ , то отображение не изменится. Определитель матрицы линеаризации отображения:  $J = -\nu_1 \nu_3$ .

Второе отображение получается следующим образом. Систему Лоренца (3) сведем к дискретной путем интегрирования неявным методом Эйлера:

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x), \\ \dot{y} = x(\rho - z) - y, \\ \dot{z} = xy - \beta z, \end{cases} \quad (3)$$

Здесь  $x, y, z$  – фазовые переменные,  $\sigma, \rho, \beta$  – параметры. Зафиксируем  $\beta = 8/3$ . Пример аттрактора можно посмотреть на рисунке 1b при параметрах  $\sigma = 10, \rho = 30$ .

После того как мы зафиксировали шаг интегрирования получаем следующее отображение:

$$\begin{cases} \bar{x} = x + \delta(\sigma(y - x)), \\ \bar{y} = y + \delta(\bar{x}(\rho - z) - y), \\ \bar{z} = z + \delta(\bar{x}y - \beta z). \end{cases} \quad (4)$$

Оно обладает теми же параметрами, и кроме этого добавляется шаг интегрирования  $\delta$ . Очевидно что если  $\delta$  устремить к нулю, то получится исходная система, потому ожидается, что при малых  $\delta$  отображение будет «близко» к исходному. Пример аттрактора можно посмотреть при параметрах  $\sigma = 10, \rho = 30, \delta = 0.0001$  на рисунке 1в. Можно отметить что фазовые портреты потоковой системы и дискретизованной очень схожи.

В первую очередь, для определения динамики системы, необходимо изучить основные бифуркации неподвижных точек, а также построить карты показателей Ляпунова. В случае отображения (4) этап изучения основных бифуркаций пропустим, так как в случаях «близких» к системе Лоренца бифуркации будут почти в точности такими же. Интересным результатом является то, что для отображения (4) хаотическая динамика сохраняется для довольно больших параметров  $\delta$ .

Для проверки псевдогиперболичности будем использовать так называемый метод углов, предложенный в [17]. В случае отображения Гонченко (2) были найдены две

области с псевдогиперболическими аттракторами. Подобное устройство напоминает известную систему Шимицу-Мориока. В одной из областей наблюдается классический аттрактор Лоренца, в маленькой области неориентируемый аттрактор. Неориентируемость была проверена построением облаков непрерывности подпространств  $E^{cu}$  и  $E^{ss}$ . В отображении дискретизованного Лоренца (4) при увеличении параметра  $\delta$  область с аттрактором Лоренца также разбилась на похожие области, однако помимо них были обнаружены еще две области одна из которых оказалась примечательна тем, что в ней аттрактор Лоренца имеет второй показатель Ляпунова явно отделенный от нуля, что говорит о том, что этот аттрактор является «истинно» дискретным. Позже также было проверено, что аттрактор в этой области неориентируемый. Существование подобного дискретного аттрактора Лоренца уже было предсказано в работе [11]

## 2. Основные определения

Пусть  $\mathcal{F}$  динамическая система определенная на многообразии  $\mathbb{R}^n$  система зависит от времени- $t$ . Если для потоковых систем  $t$ -непрерывно, то для дискретных систем необходимо положить диффеоморфизм  $f$  в котором  $t \in \mathbb{Z}$ . Аттрактором определим минимальное множество которое притягивает некоторое множество начальных условий. Хаотическим аттрактором будем называть аттрактор который чувствителен к начальным условиям.

Определим что такое псевдогиперболичность.

**Определение 1.** Аттрактор  $\mathcal{A}$  называется псевдогиперболическим, если следующие свойства выполняются для всех  $t \geq 0$  и всех  $x \in \mathcal{A}$ :

- (a) Существует два линейных подпространства,  $E_1(x)$  у которого  $\dim E_1 = k$  и  $E_2(x)$  с  $\dim E_2 = n - k$ , непрерывно зависящих от  $x$ , которые определены инвариантно в касательном пространстве, то есть  $T_x M = E_1(x) \oplus E_2(x)$  с  $DF_t E_i(x) = E_i(F_t(x))$ ,  $i = 1, 2$ .
- (b) Разбиение на  $E_1$  и  $E_2$  доминантно, то есть существует константа  $C_1 > 0$  и  $\beta > 0$  такие что <sup>1</sup>

$$\|DF_t(x)|_{E_2}\| \cdot \|(DF_t(x)|_{E_1})^{-1}\| \leq C_1 e^{-\beta t}$$

- (c) Дифференциал  $DF$  экспоненциально растягивает  $k$ -мерные объемы, то есть существует константа  $C_2 > 0$  и  $\sigma > 0$  при которых

$$\det(DF_t(x)|_{E_1}) \geq C_2 e^{\sigma t}$$

---

<sup>1</sup>Это условие означает, что любое возможное сжатие в  $E_1(x)$  равномерно слабее любого сжатия в  $E_2(x)$ , и любое возможное растяжение в  $E_1(x)$  равномерно сильнее любого возможного растяжения в  $E_2(x)$ . Можно заметить, что это свойство гарантирует сохранение инвариантных линейных подпространств для  $C^1$  возмущений системы.

Мы определяем,

**Определение 2.** (Потоковый) Аттрактор Лоренца это псевдогиперболический аттрактор геометрической модели Аффраймовича-Быкова-Шильникова [2, 3].

**Определение 3.** [8]. Дискретный аттрактор Лоренца  $A$  это псевдогиперболический аттрактор удовлетворяющий следующим свойствам:

- (i) Аттрактор содержит седловую периодическую точку  $O$  с мультипликаторами  $\gamma, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}$  для которых выполняется  $|\gamma| > 1, 0 < |\lambda_{n-1}| \leq \dots \leq |\lambda_2| < \lambda_1 < 1, |\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{n-1} \gamma| < 1$  and  $\sigma \equiv |\lambda_1 \gamma| > 1$ ;
- (ii) Поглощающая область аттрактора представляет собой форму кренделя;
- (iii) Аттрактор содержит в себе неустойчивые сепаратрисы  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ ;
- (iv)  $\Gamma_1$  покидает  $O$  и проходит по одной ручке кренделя  $D$ ,  $\Gamma_2$  проходит по другой ручке;
- (v) все гомоклинические точки в пересечении  $\Gamma_1 \cap W_{loc}^s(O)$  и  $\Gamma_2 \cap W_{loc}^s(O)$  принадлежат одной половине  $W_{loc}^s(O) \setminus W^{ss}(O)$ .

### 3. Исследование отображения Гонченко

В отображении (2) зафиксируем  $A = 1, B = -1, J = 0.5$ , тогда параметр  $\nu_1 = -\frac{0.5}{\nu_3}$ .

Первый шаг в изучении динамики отображения это поиск неподвижных точек и проверка их устойчивости:

$$(0, 0, 0) \quad (O_1)$$

$$(x^*, y^*, z^*) = \left( \sqrt{\frac{(1-v_3)(1-v_1-v_2)}{AB}}, \sqrt{\frac{(1-v_3)(1-v_1-v_2)}{AB}}, \frac{1-v_1-v_2}{A} \right), \quad (O_2)$$

$$(-x^*, -y^*, z^*) = \left( -\sqrt{\frac{(1-v_3)(1-v_1-v_2)}{AB}}, -\sqrt{\frac{(1-v_3)(1-v_1-v_2)}{AB}}, \frac{1-v_1-v_2}{A} \right) \quad (O_3)$$

Для поиска кривых бифуркаций точки  $O_1$  найдем характеристический многочлен матрицы линеаризации для отображения (2) и подставим координаты неподвижной точки.

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ v_1 & v_2 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & v_3 - \lambda \end{vmatrix}_{(0,0,0)} = (v_3 - \lambda)(\lambda^2 - v_2\lambda - v_1) = \\ & = -\lambda^3 + (v_2 + v_3)\lambda^2 - (v_2v_3 - v_1)\lambda - v_1v_3 \end{aligned}$$

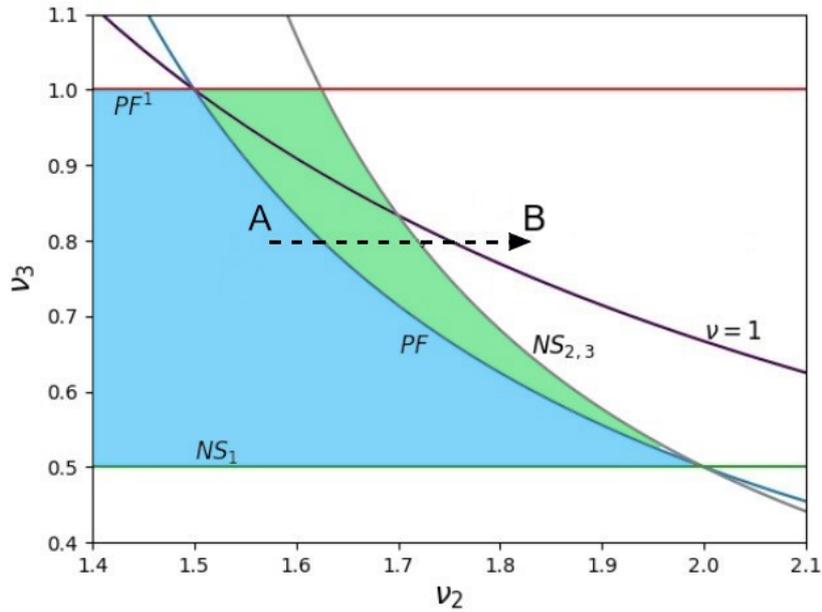


Рис. 2. Графики основных бифуркаций неподвижных точек отображения (2) на плоскости параметров  $(\nu_2, \nu_3)$ . Голубой - область устойчивости точки  $O_1$ . Зеленый - область устойчивости точек  $O_2$  и  $O_3$ .  $PF$  и  $PF^1$  – бифуркации вилка точки  $O_1$ ,  $NS_1$  – бифуркация Неймарка-Сакера точки  $O_1$ ,  $NS_{2,3}$  – бифуркация Неймарка-Сакера точек  $O_2$  и  $O_3$ ,  $\nu = 1$  – кривая нейтрального седла ( $\nu = \gamma\lambda$ , где  $\gamma$  – неустойчивый мультипликатор, а  $\lambda$  – устойчивый действительный мультипликатор ближайший к единичной окружности).  $AB$  – маршрут при котором наблюдается сценарий рождения аттрактора Лоренца.

Отсюда находим мультипликаторы неподвижной точки  $O_1$ :  $\lambda_1 = \nu_3$ ,  $\lambda_{2,3} = \frac{\nu_2 \pm \sqrt{\nu_2^2 + 4\nu_1}}{2}$ . Точка становится неустойчивой, когда ее мультипликаторы становятся по модулю больше 1. Пользуясь этим фактом найдем следующие кривые:

а) Подставляя  $\lambda = 1$  в характеристическое уравнение и выражая  $\nu_2$  через  $\nu_3$ , получим кривые в которых происходит бифуркация pitchfork:

$$PF : \nu_2 = \frac{J}{\nu_3} + 1$$

$$PF^1 : \nu_3 = 1$$

б) Подставляя  $\lambda = -1$  получим кривые отвечающие бифуркации удвоения периода:

$$PD_1 : \nu_2 = -\frac{J}{\nu_3} - 1$$

$$PD_1^1 : \nu_3 = -1$$

в) Подставляя  $\lambda = e^{\pm i\varphi}$  в характеристическое уравнение получим условие бифуркации Неймарка-Сакера ( $NS_1$ ):

$$NS_1 : v_3 = J$$

$$NS_1^1 : v_2 = -\frac{1}{v_3} + J$$

Далее найдем условия бифуркаций, в которых теряется устойчивость (то есть один из мультипликаторов становится по модулю больше 1) для точек  $O_2$  и  $O_3$  аналогично точке  $O_1$ . Найдем характеристический многочлен:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ v_1 & v_2 + Az^* - \lambda & Ay^* \\ 0 & 2By^* & v_3 - \lambda \end{vmatrix}_{(\pm x^*, \pm y^*, z^*)} =$$

$$= -\lambda^3 + \lambda^2(v_2 + Az^* + v_3) + \lambda(-v_2v_3 - v_3Az^* + v_1 + 2ABy^{*2}) - v_1v_3$$

Заметим, что при подстановке  $(\pm x^*, \pm y^*, z)$  характеристическое уравнение будет одинаковым в обоих случаях (что очевидно из свойства симметрии отображения (2)), поэтому точки  $O_2$  и  $O_3$  исследуются одновременно, так как они будут претерпевать бифуркации одновременно.

Аналогично анализу точки  $O_1$  получим следующие кривые бифуркаций точек  $O_2$  и  $O_3$ :

а) Бифуркация  $\lambda = 1$ :

$$PF : v_2 = \frac{J}{v_3} + 1$$

$$PF^1 : v_3 = 1$$

б) Бифуркация  $\lambda = -1$ :

$$PD_{2,3} : v_2 = \frac{-2v_3 - 2J}{1 - v_3}$$

в) Бифуркация Неймарка-Сакера:

$$NS_{2,3} : v_2 = 1,5 - \frac{J}{2} + \frac{J^2 + J}{2v_3}$$

При анализе устойчивости неподвижных точек был обнаружен маршрут АВ см. рис. 2 на котором, пересекая кривые  $PF$ ,  $NS_{2,3}$  и нейтрального седла, рождается ( $\nu = \gamma\lambda$ , где  $\gamma$  – неустойчивый мультипликатор, а  $\lambda$  – устойчивый действительный мультипликатор ближайший к единичной окружности), псевдогиперболический дискретный аттрактор лоренцевского типа.

Рассмотрим бифуркации происходящие вдоль маршрута АВ. Вместо обычных траекторий будем рассматривать сепаратрисы седловой точки  $O_1$ . Сепаратриса это неустойчивое одномерное многообразие неподвижной точки, состоящее из множества траекторий выходящих из седла в направлении неустойчивого собственного

вектора. Так как отображение (2) обладает «лоренцевской» симметрией, то очевидно, что имеется две симметричные сепаратрисы.

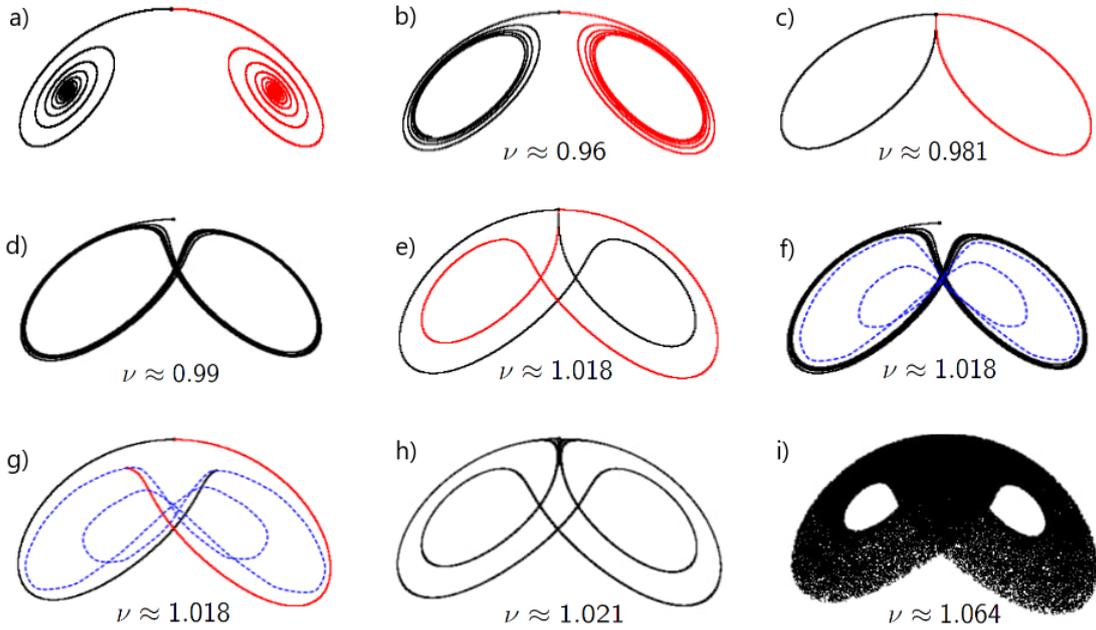


Рис. 3. Бифуркационный сценарий на маршруте АВ на плоскости параметров  $(\nu_2, \nu_3)$ . В конце маршрута рождается аттрактор Лоренца. Вдоль маршрута зафиксирован параметр  $\nu_3 = 0.8$ , а параметр  $\nu_2$  варьируется в диапазоне  $[1.7, 1.8]$ . а)  $\nu_2 = 1.7$ , б)  $\nu_2 = 1.72$ , в)  $\nu_2 \approx 1.7362695821346$ , д)  $\nu_2 = 1.74$ , е)  $\nu_2 \approx 1.7654729685$ , ф)  $\nu_2 \approx 1.765475$ , г)  $\nu_2 \approx 1.765478$ , г)  $\nu_2 = 1.767$ , и)  $\nu_2 = 1.8$ .

В начале маршрута аттрактором отображения является неподвижная точка  $O_1$ . После точка теряет устойчивость претерпевая бифуркацию pitchfork, в результате бифуркации рождаются два несимметричных устойчивых фокуса  $O_2$  и  $O_3$ , теперь они являются аттракторами рис. 3а. При дальнейшем движении по маршруту фокусы претерпевают бифуркацию Неймарка-Сакера, в результате точки становятся седлами с двумерным неустойчивым и одномерным устойчивым многообразиями, а вокруг точек рождаются устойчивые инвариантные кривые, к которым теперь и стремятся сепаратрисы седла  $O_1$  рис. 3б. Далее возникает гомоклиническая структура (восьмерка-бабочка) точки  $O_1$  - неустойчивое многообразие точки пересекается с устойчивым рис. 3в. После расщепления многообразий, так как седловой индекс меньше 1, то рождается устойчивая инвариантная кривая обходности 2 и мы наблюдаем сценарий аналогичный сценарию рождения аттрактора Ровеллы [13]. Таким образом, в отображении возникает мультистабильность: в фазовом пространстве существуют две несимметричные инвариантные кривые и двухобходная инвариантная кривая. Сепаратриса седла при это стремится к двухобходной инвариантной кривой рис. 3д. При дальнейшем движении вдоль параметра  $\nu_2$  индекс седла  $O_1$  становит-

ся больше 1. Поэтому при следующей гомоклинической бифуркации, двухобходной «восьмерки-бабочки» 3e, наружу рождается пара двухобходных седловых инвариантных кривых, аттрактором также является двухобходная инвариантная кривая 3f. При очень маленьком увеличении параметра  $\nu_2$ , почти сразу, возникает гетероклиническая бифуркация: сепаратрисы седла  $O_1$  ложатся на седловые двухобходные инвариантные кривые 3g. Сразу после расщепления многообразий рождается аттрактор Лоренца, сосуществующий с устойчивой двухобходной инвариантной кривой и двумя седловыми двухобходными инвариантными кривыми, которые лежат в так называемой «лакуне» рис. 3h. При дальнейшем увеличении параметра две седловые инвариантные кривые влипают в устойчивую и в результате бифуркации pitchfork для инвариантных кривых остается одна седловая инвариантная кривая, которая при дальнейшем движении по параметру влипает в аттрактор Лоренца и становится его частью рис. 3i.

### 3.1. Анализ показателей Ляпунова

С помощью показателей Ляпунова мы можем определить характер аттрактора. Находить мы их будем численно, так как аналитически во многих случаях это сделать тяжело.

Для подсчета всего спектра показателей Ляпунова используется известный алгоритм Беннетина[9]: отбрасывается переходный процесс, при помощи линеаризованного отображения итерируем линейно независимые вектора  $x_1, x_2, x_3$ , после итерации полученные вектора  $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3$  нормируются и ортогонализуются. Произведем достаточно большое количество итераций, одновременно с этим будем вести подсчет сумм, которые и будут показателями Ляпунова:  $\Lambda_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln |\tilde{x}_1|$ ,  $\Lambda_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln |\tilde{x}_2|$ ,

$$\Lambda_3 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln |\tilde{x}_3|.$$

Пронумеруем показатели Ляпунова в порядке убывания,  $\Lambda_1 > \Lambda_2 > \Lambda_3$ , тогда в случае  $\Lambda_1 < -\varepsilon$ -устойчивая неподвижная точка, где  $\varepsilon$  приближение нуля, мы берем  $\varepsilon = 0.001$ , если  $|\Lambda_1| < \varepsilon$  и  $\Lambda_2 < -\varepsilon$ , то устойчивая инвариантная кривая, если  $|\Lambda_1| < \varepsilon$ ,  $|\Lambda_2| < \varepsilon$  и  $\Lambda_3 < \varepsilon$ , то это бифуркационный момент, если  $\Lambda_1 > \varepsilon$ ,  $|\Lambda_2| < \varepsilon$  и  $\Lambda_3 < \varepsilon$  - хаос, подобный потоковому, если  $\Lambda_1 > \varepsilon$  и  $\Lambda_2 > \varepsilon$  то это гиперхаос, это явление в трехмерном случае возможно только в отображениях.

Разобьем плоскость параметров на точки и в каждой точке посчитаем показатели Ляпунова, таким образом получим диаграмму рис. 4.

С помощью этой диаграммы были найдены маршруты CD и EF. Вдоль первого рождается аттрактор Лоренца, вдоль второго аттрактор Ровеллы.

### 3.2. Сценарии рождения аттрактора Лоренца и Ровеллы в отображении Гонченко.

Маршрут АВ был разобран. Теперь разберемся что происходит вдоль маршрута CD. На данном маршруте сценарий проходит подобный тому, что происходит в потоковой системе Лоренца (см. рис. 3.2).

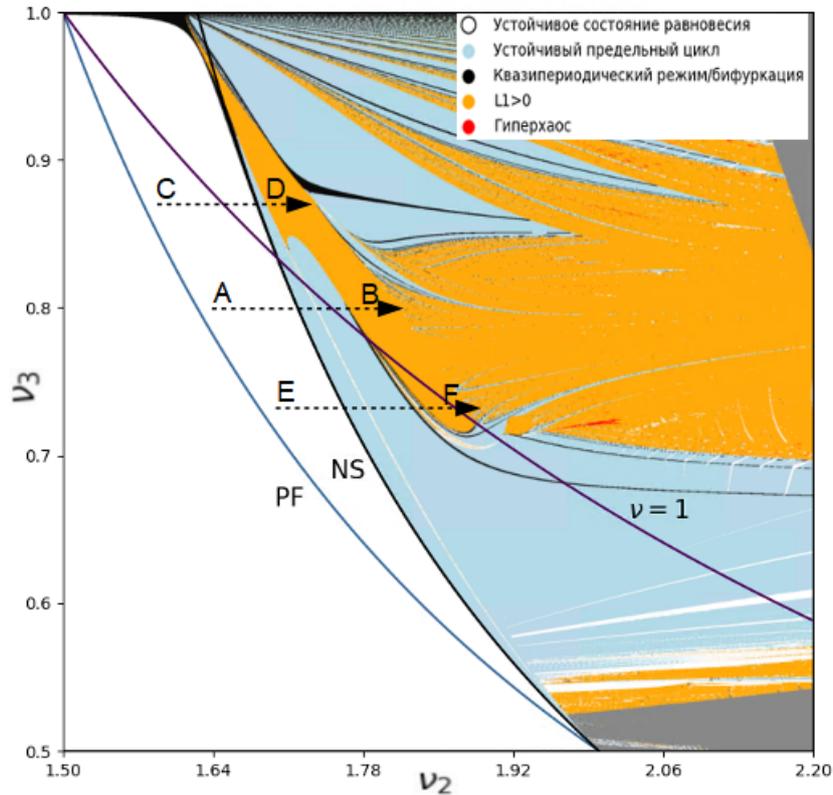


Рис. 4. Диаграмма показателей Ляпунова на плоскости параметров  $(\nu_2, \nu_3)$  с бифуркационными кривыми неподвижных точек, кривой нейтрального седла. Также на карте отмечены маршруты: АВ, CD - вдоль которых рождаются аттракторы Лоренца и EF вдоль которого рождается аттрактор Ровеллы. Расшифровка цветов изображена на рисунке.

Сценарий происходит при индексе седла больше единицы.

Сначала неустойчивые многообразия седла  $O_1$  накручиваются на устойчивые фокусы  $O_2$  и  $O_3$  рис. 3.2а. При увеличении параметра  $\nu_2$  происходит субкритическая бифуркация Неймарка-Сакера: точки  $O_2$  и  $O_3$  становятся седлами с двумерным неустойчивым и одномерным устойчивым многообразиями, а вокруг каждой из них рождаются устойчивые инвариантные кривые. Траектории теперь притягиваются к устойчивым инвариантным кривым рис. 3.2b. Далее возникает гомоклиническая траектория седла  $O_1$  рис. 3.2с. Индекс седла больше 1, тогда после расщепления многообразий из петли-бабочки рождается пара симметричных седловых инвариантных кривых рис. 3.2d, аттракторами в отображении также являются устойчивые инвариантные кривые, но теперь сепаратрисы седла  $O_1$  стремятся к противоположным кривым. После чего происходит гетероклиническая бифуркация: пересекаются неустойчивые многообразия седла  $O_1$  с устойчивым многообразием седловых ин-

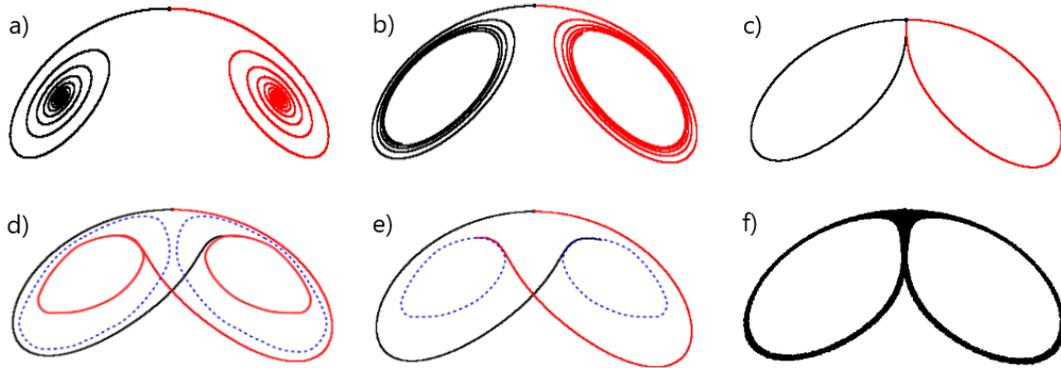


Рис. 5. Сценарий рождения аттрактора Лоренца на маршруте CD. Зафиксируем параметр  $\nu_3 = 0.875$ , параметр  $\nu_2$  будем изменять в диапазоне  $[1.65, 1.687]$ . a)  $\nu_2 = 1.65$ , b)  $\nu_2 = 1.68$ , c)  $\nu_2 \approx 1.684734435$ , d)  $\nu_2 = 1.685$ , e)  $\nu_2 \approx 1.6858611055$ , f)  $\nu_2 = 1.687$ .

вариантных кривых, в результате этой бифуркации рождается аттрактор лоренца фазовый портрет которого изображен на 3.2f. При дальнейшем движении вдоль маршрута EF седловые циклы сливаются с устойчивыми и исчезают в результате бифуркации седло-узел для инвариантных кривых.

Теперь рассмотрим бифуркации на маршруте EF (см. рис. 6). Заметим, что вдоль всего рассматриваемого нами маршрута седловой индекс остается меньше 1. Аналогично прошлым сценариям, в фазовом пространстве аттракторами являются устойчивые фокусы  $O_2$  и  $O_3$  рис. 6a. Потом происходит полностью аналогичная прошлым сценариям бифуркация Неймарка-Сакера и вокруг каждого фокуса рождаются устойчивые инвариантные кривые, на которые и накручиваются сепаратрисы седловой точки  $O_1$  (рис. 6b). Далее образуется гомоклиническая структура рис. 6c, индекс седла при этом меньше единицы, а значит что после расщепления многообразий образуется устойчивая инвариантная кривая рис. 6d. Далее только родившаяся инвариантная кривая претерпевает бифуркацию pitchfork, в результате которой рождаются две симметричные инвариантные кривые и между ними остается одна седловая инвариантная кривая рис. 6e. После циклы влипают в гомоклиническую структуру 6f: двухобходная восьмерка-бабочка, после расщепления которой рождается четырехобходная инвариантная кривая рис. 6g. Эта кривая также претерпевает бифуркацию pitchfork (рис. 6h), после аналогично происходит гомоклиническая бифуркация в данном случае четырехобходная, процесс также продолжается счетное число раз в результате чего аттрактор Содержит счетное число седловых инвариантных кривых, из-за чего появляется хаотическая динамика и рождается аттрактор Ровеллы численное моделирование которого можно посмотреть в конце рисунка 6.

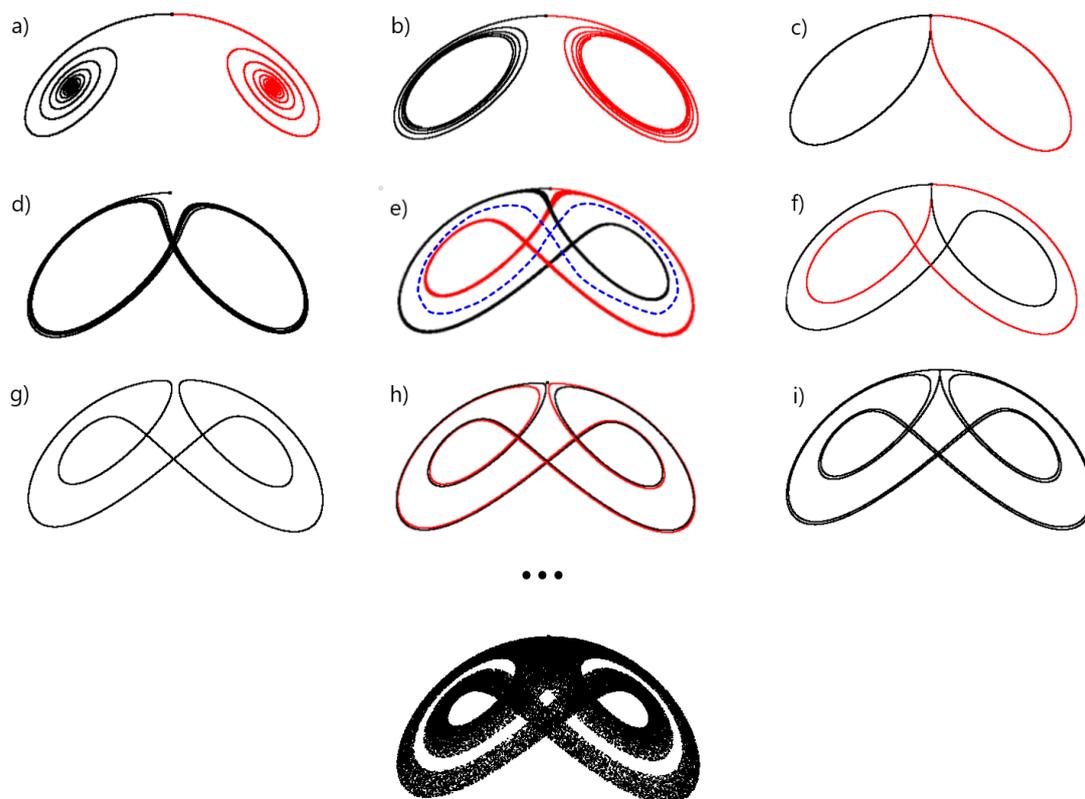


Рис. 6. Сценарий рождения аттрактора Ровеллы на маршруте EF. Зафиксируем параметр  $\nu_3 = 0.735$ . Параметр  $\nu_2$  меняется на отрезке  $[1.76, 1.85]$ . а)  $\nu_2 = 1.76$ , б)  $\nu_2 = 1.77$ , в)  $\nu_2 \approx 1.781385225$ , д)  $\nu_2 = 1.782$ , е)  $\nu_2 = 1.825$ , ф)  $\nu_2 \approx 1.8272167$ , г)  $\nu_2 = 1.83$ , г)  $\nu_2 = 1.8319$ , и)  $\nu_2 = 1.832$ . В конце приведен пример фазового портрета аттрактора Ровеллы при параметрах  $(\nu_2, \nu_3) = (1.85, 0.735)$ .

### 3.3. Проверка псевдогиперболичности аттракторов в отображении Гонченко

В работе [10] было выдвинуто предложение о том, что аттракторы можно разделить на два непересекающихся класса: псевдогиперболические [4] (определение было дано в разделе 2) и квазиаттракторы. Каждая траектория на псевдогиперболическом аттракторе неустойчива (имеет положительный показатель Ляпунова) и это свойства сохраняется при малых возмущениях системы. Это свойство называется робастностью аттрактора. На плоскости параметров области с такими аттракторами не содержат окон устойчивости. Квазиаттракторы могут в себе содержать устойчивые инвариантные кривые, однако эти кривые очень высокого периода или являются кривыми высокого количества обходов, таким образом, при численных экспериментах нельзя быть уверенным, что мы наблюдаем именно хаос, а не переходный процесс

некоторой устойчивой инвариантной кривой.

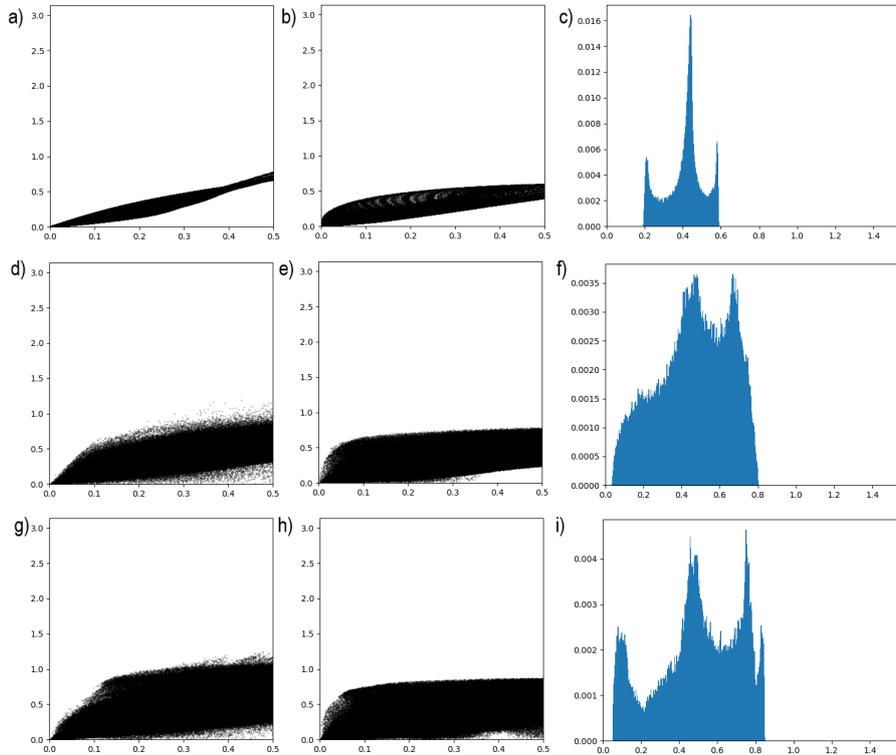


Рис. 7. Облака непрерывности углов подпространств  $E^{cu}$  и  $E^{ss}$  в разных точках аттрактора, а также гистограммы углов между подпространствами  $E^{cu}$  и  $E^{ss}$  в одной точке. Диаграммы были посчитаны для полученных нами аттракторов на ранее рассмотренных маршрутах. В первой строке диаграммы для аттрактора Лоренца на маршруте  $CD$ . Во второй строке для аттрактора полученного на маршруте  $AB$ , на третьей строке располагаются диаграммы для аттрактора полученного вдоль маршрута  $EF$ . По этим диаграммам можно сделать вывод, что численная проверка условия непрерывности подпространств дает положительный результат для всех трех аттракторов.

На данный момент известны два способа численной проверки непрерывности линейных подпространств. Первый проверяет в лоб непрерывную зависимость точки на аттракторе, посчитаем углы между базисными векторами одного линейного пространства в разных точках, по горизонтальной оси будем откладывать расстояние между точками, по вертикальной – угол между векторами. Если диаграммы плавно касаются оси  $y = 0$  только в точке  $(0, 0)$ , то подпространства считаются непрерывными, этот метод называется построением облаков непрерывности. Второй способ основывается на результатах работ [17], [11], где были получены результаты, что проверка непрерывности подпространств эквивалентна проверке касания меж-

ду этими подпространствами. Таким образом, мы будем в каждой точке вычислять базисные вектора для линейных подпространств и считать между ними угол. Посчитаем гистограмму распределения углов, если на ней будут видны нулевые углы, то подпространства касаются, а значит аттрактор не псевдогиперболический. Можно заметить, что все эти методы направлены на проверку только 1 условия в определении псевдогиперболичности, но для проверки остальных условий нам достаточно спектра показателей Ляпунова: необходимо, чтобы сумма двух старших показателей Ляпунова была больше 0 (растяжение двумерных объемов условие 1.3), а также чтобы второй показатель Ляпунова был строго больше третьего показателя (доминантность разложения условие 1.2). Из карты показателей Ляпунова уже было проверено что эти условия выполняются.

Посчитаем облака непрерывности и гистограммы углов для аттракторов полученных при продвижении вдоль рассмотренных нами маршрутов. Результаты вычислений можно увидеть на рисунке 7а. На картинках с облаками непрерывности по горизонтали отмеряется расстояние между точками на аттракторе, на вертикальной оси – величина угла в этой точке между базисными векторами одного подпространства. На гистограммах на горизонтальной оси отмечена величина угла, а по вертикали частота встречи угла.

По посчитанным диаграммам мы можем заключить, что непрерывность линейных подпространств от точки на аттракторе выполняется, так как облака непрерывности касаются вертикальной оси только точки  $(0, 0)$ , а гистограмма углов между подпространствами не влипает в ноль.

Подобный метод проверки не подходит для точного определения, так как проверяются человеком по общему виду. Предлагается использовать метод посчета угла между подпространствами вдоль достаточно длинной траектории, но теперь просто запоминать минимальный угол. Если угол окажется близким к нулю, то аттрактор уже не является псевдогиперболическим. В результате была посчитана диаграмма на рисунке 8.

Карта подтверждает наши выводы сделанные по диаграммам непрерывности и гистограммам (так как угол между подпространствами отделен от нуля).

Как уже было сказано вдоль маршрута  $EF$  рождается аттрактор Ровеллы, однако, как известно, такой аттрактор псевдогиперболическим не является, в то же время наши вычисления говорят об обратном. Дело в том, что делая подобные численные проверки мы упускаем одну из траекторий которая также принадлежит аттрактору, но в численных расчетах не участвует – седло  $O_1$ . Посчитав седловой индекс этой точки, становится понятно, что в области с аттрактором Ровеллы седло не растягивающее, что нарушает требование растяжения двумерных объемов, из-за чего аттрактор не псевдогиперболический. Кроме того и на карте показателей Ляпунова можно заметить, что в области с аттрактором Ровеллы имеются окна устойчивости.

Так как аттрактор Лоренца по определению должен являться псевдогиперболическим, то теперь мы можем сделать вывод что полученные нами аттракторы, кроме полученного на маршруте  $EF$ , являются аттракторами Лоренца.

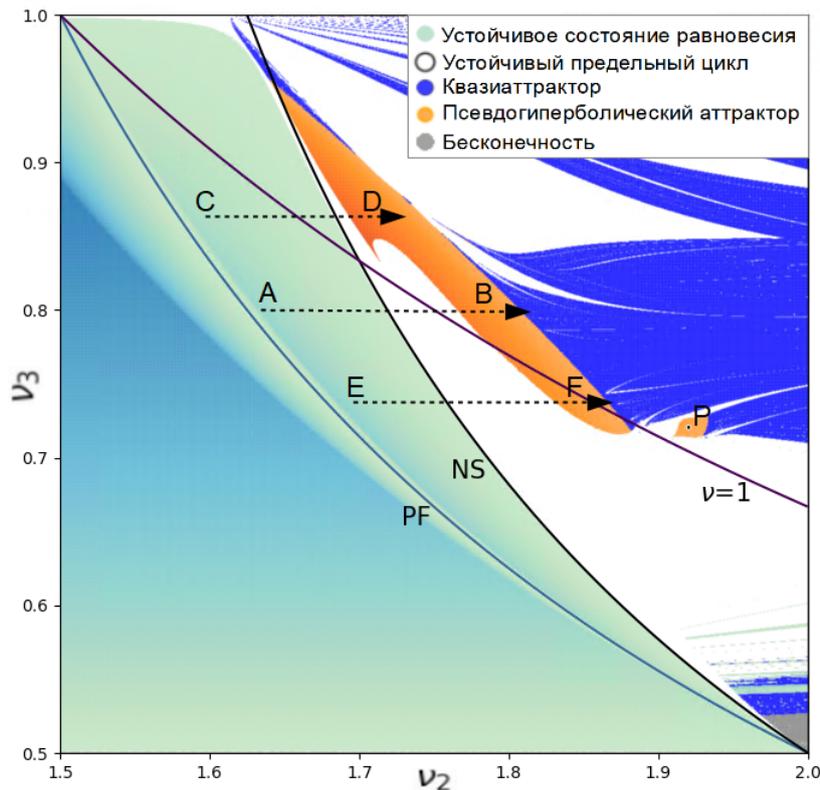


Рис. 8. Карта показателей Ляпунова с наложением минимального угла между подпространствами на плоскости  $(\nu_2, \nu_3)$  между подпространствами  $E^{ss}$  и  $E^{cu}$ . Области с хаосом помечаются оранжевым цветом если угол между подпространствами отделен от нуля в каждой точке аттрактора, если угол нулевой, то точка помечается синим. Вдоль исследуемых нами маршрутов рождаются псевдогиперболические аттракторы.

Приведем примеры квазиаттракторов. Получим их продвигаясь дальше по маршрутам  $AB$  и  $EF$ . Построим также диаграммы непрерывности и гистограммы распределения углов. Вдоль маршрута  $CD$  хаотическая динамика сменяется устойчивой инвариантной кривой, а не квазиаттрактором.

Полученные результаты изображены на рисунке 9, что при дальнейшем движении по маршрутам  $AB$  и  $EF$  рождаются квазиаттракторы. Диаграммы непрерывности теперь касаются вертикальной оси в нескольких точках, а не только в нулевой. Гистограммы распределения угла влипли в ноль, что отвечает касанию между линейными подпространствами. Фазовые портреты квазиаттракторов также изображены на рисунке.

На карте минимального угла была обнаружена область которая раньше не была нам известна из аналитического исследования. Она вызвала особый интерес,

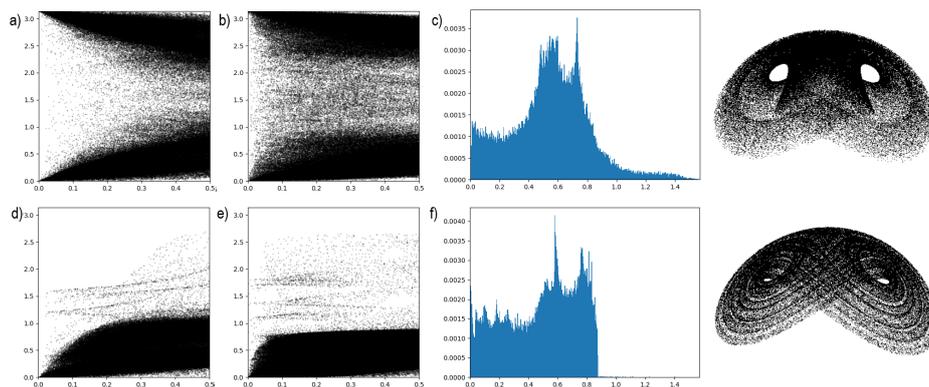


Рис. 9. Диаграммы непрерывности и функции распределения углов при дальнейшем продвижении по маршрутам до мест рождения квазиаттракторов (синих областей на карте псевдогиперболичности) с фазовыми портретами в этих точках. Первая строка – маршрут АВ, вторая – маршрут ЕF. Из рисунка можно сделать вывод, что аттракторы псевдогиперболическими не являются. На маршруте CD псевдогиперболичность сохраняется, до рождения устойчивого предельного цикла.

так как напомнила структуру областей с хаосом в потоковой системе Шимицу-Мориока. Проведем в этой области дополнительные исследования. Отметим точку Р (1.92, 0.72), в которой будем проводить исследование. Посчитаем увеличенный фрагмент картыв минимального угла.

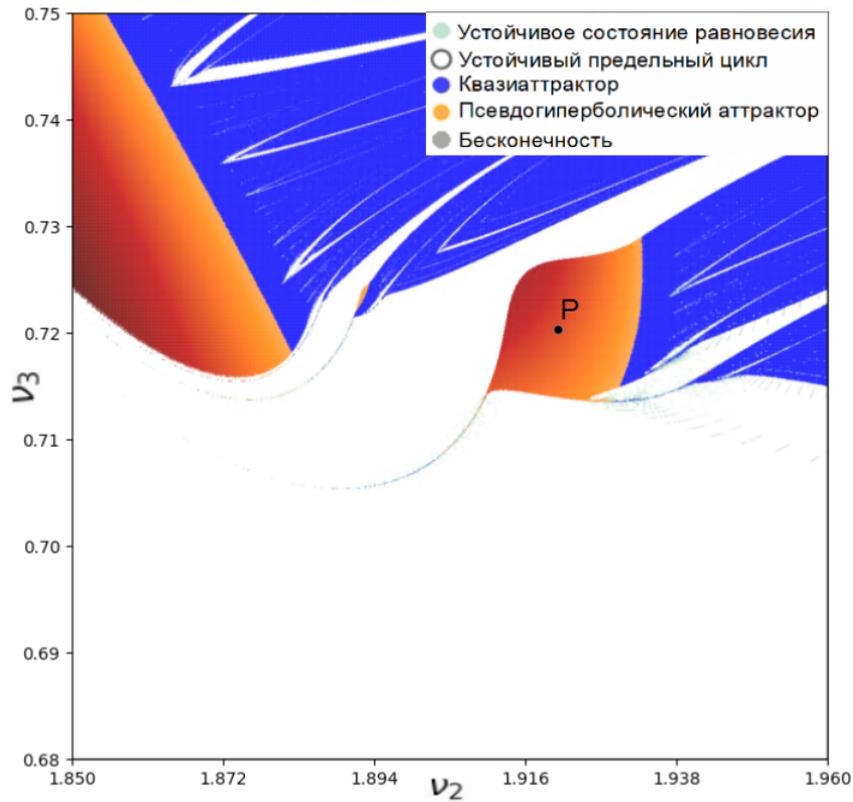


Рис. 10. Увеличенный фрагмент карты минимального угла в обнаруженной области. Цветовая кодировка изображена на рисунке. Буквой Р отмечена точка в которой мы будем считать облака непрерывности и гистограммы.

Заметим, что на увеличенном фрагменте обнаруживаются еще оранжевые области. Их структура и причина появления будут изучены в последующих работах.

Теперь в отмеченной точке Р (см. рис. 10). Построим диаграммы непрерывности подпространств  $E^{ss}$  и  $E^{cu}$  и гистограмму распределения углов между подпространствами. Также приведем фазовые портреты аттракторов в этих точках.

На диаграммах непрерывности можно увидеть, что облака касаются прямой нулевого расстояния в двух точках  $(0, 0)$  и  $(0, \pi)$ . Так происходит, когда аттрактор является псевдогиперболическим, но неориентируемым. Гистограмма распределения угла также говорит о том, что подпространства не касаются.

#### 4. Анализ дискретизованного Лоренца

Как уже было сказано, ожидается, что при малых  $\delta$  отображение (4) будет мало отличаться от потоковой модели Лоренца, в которой бифуркации приводящие к рождению и разрушению аттрактора Лоренца уже довольно хорошо изучены, по-

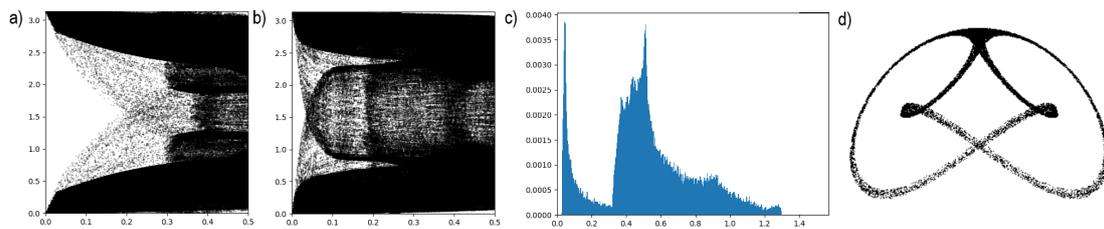


Рис. 11. Диаграммы непрерывности подпространств  $E^{ss}$  и  $E^{cu}$ , отображения (2), под буквами а и б соответственно, (с) гистограмма распределения угла и фазовый портрет аттрактора (d) в точке P с координатами (1.92, 0.72). Из рисунка можно сделать вывод, что аттрактор является псевдогиперболическим, хотя он и не является ориентируемым.

этому имеет смысл начать изучение сразу с поиска показателей Ляпунова.

#### 4.1. Анализ показателей Ляпунова

Возьмем дискретизацию на плоскости параметров  $(\sigma, \rho)$  и в каждой точке просчитаем спектр показателей Ляпунова по уже упомянутому алгоритму Беннетина [9]. Однако в этом случае мы несколько расширим нашу цветовую кодировку, так как здесь псевдогиперболичность может ломаться из-за того, что не выполняется условия растяжения объемов. Кроме того, добавим на нашу карту настоящие дискретные аттракторы.

- $\langle -, -, - \rangle$  – устойчивая неподвижная точка (голубой).
  - $\langle 0, -, - \rangle$  – устойчивая инвариантная кривая (белый).
  - $\langle +, 0, - \rangle$  – хаос, аттрактор является близким к потоковому потоковому (оранжевый).
  - $\langle +, -, - \rangle$  – хаос, аттрактор является настоящим дискретным (зеленый).
- Смотри рисунок 12.

По рисунку 12 мы можем сделать следующие выводы, во-первых, действительно карты 12а и 12б мало отличаются, значит переход к дискретизованной системе оправдывает себя, кроме того на плоскости параметров даже не появилось настоящих дискретных аттракторов, динамика очень близка к потоковой. На картинках 12с и 12д появляются желтые и зеленые области, каждая из этих областей отвечают настоящим дискретным аттракторам, отличие в том, что в желтых областях не могут наблюдаться псевдогиперболические аттракторы, так как не выполняется растяжение двумерных объемов. Кроме того, можно увидеть, что 12с и 12д очень сильно отличаются от 12а и 12б, так что можно сказать, что это уже довольно сильное возмущение системы, однако области с хаосом все равно сохраняются, что естественно для робастных аттракторов. Области же с квазиаттракторами с увеличением шага интегрирования перестают быть притягивающими множествами.

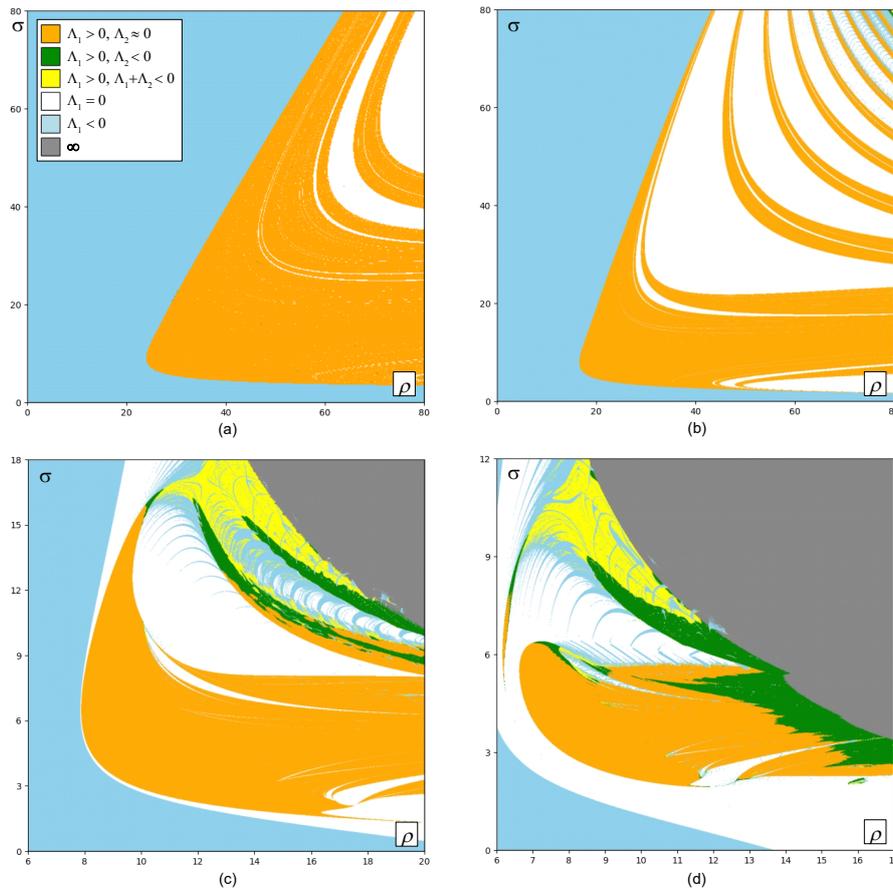


Рис. 12. Диаграммы показателей Ляпунова на плоскости параметров  $(\rho, \sigma)$  для (а) Системы Лоренца (3); (b)–(d) отображения (4) с (b)  $\delta = 0.01$ , (c)  $\delta = 0.06$ , (d)  $\delta = 0.1$ . Оранжевые области отвечают аттракторам подобным потоковым, когда  $|\Lambda_2| < 0.001$ ; в белых областях аттрактор имеет  $|\Lambda_1| < 0.0001$ ; для параметров в серой зоне,  $W^u(O)$  (неустойчивое многообразие неподвижной точки) неограничено, за более подробной кодировкой смотри легенду на рисунке а.

#### 4.2. Проверка псевдогиперболичности

По сравнению с исследованием отображения Гонченко, имеется некоторая особенность, псевдогиперболичность может ломаться не только из-за того, что ломается непрерывность подпространств, но также из-за того, что подпространства не обладают должным растяжением или сжатием, а именно когда  $\Lambda_1 + \Lambda_2 < 0$ , такие точки мы окрасим в желтый цвет, при этом заметим, что в нашем случае в этих точках метод Купцова по проверке минимального угла показывает положительный результат, то есть подпространства не касаются. Результат работы алгоритма был наложен на карту показателей Ляпунова, таким образом была получена карта на рисунке 13.

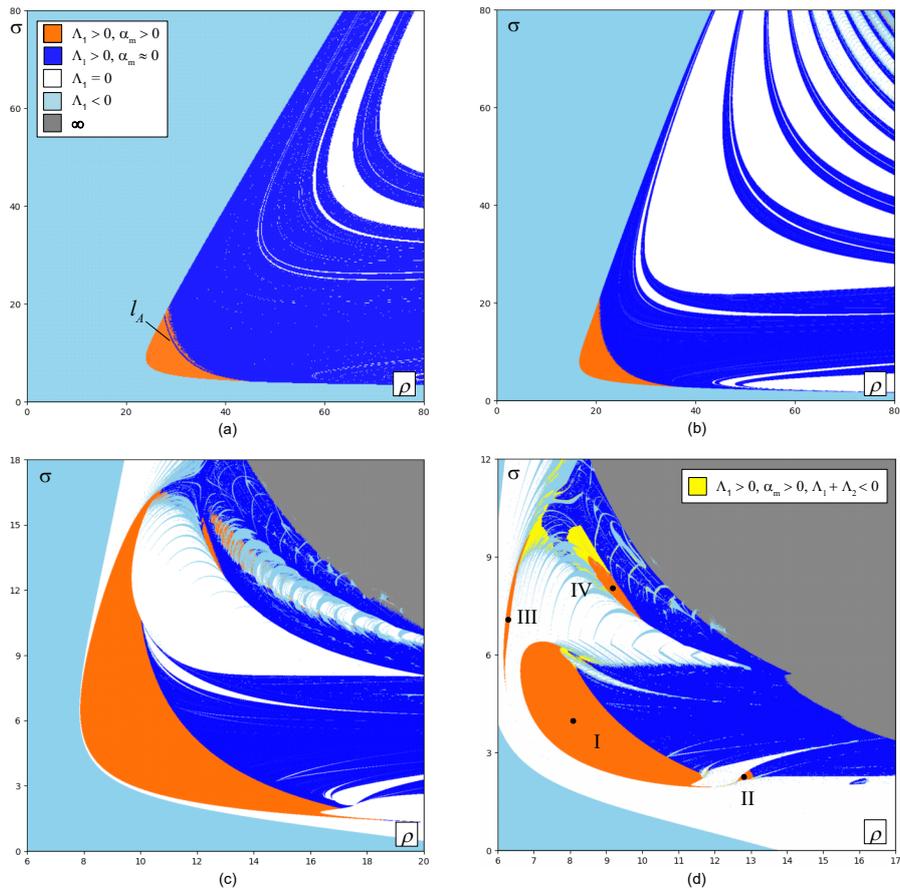


Рис. 13. Диаграмма минимального угла на плоскости параметров  $(\rho, \sigma)$  для (a) Системы Лоренца (3); (b)–(d) отображения (4) с (b)  $\delta = 0.01$ , (c)  $\delta = 0.06$ , (d)  $\delta = 0.1$ . В синих областях  $|\alpha_m| < 0.001$ . Также на рисунке (d) были обнаружены параметры при которых аттрактор обладает следующим свойством  $\Lambda_1 + \Lambda_2 < 0$ , такие области окрашены в желтый цвет, эти области соответствуют квазиаттракторам. На рисунке (a) также изображена кривая  $l_A$  где псевдогиперболичность аттрактора Лоренца ломается.

Интересным результатом проверки псевдогиперболичности является то, что области с аттрактором Лоренца разделились на 4 части, разделение на I и II область очень похоже на известное в потоковом случае разделение на ориентируемый и неориентируемый аттрактор как в системе Шимицу-Мориока. Область IV соответствует настоящему дискретному аттрактору. Также заметим что на картинке 3a отмечена отдельно кривая  $l_A$ , согласно теории именно при переходе через эту кривую происходит касание между подпространствами, однако как видим справа от этой кривой есть оранжевые точки, которые соответствуют псевдогиперболическому аттрактору, это объясняется тем, что касание происходит на самом краю аттрактора

и чтобы итерируя поток попасть в эту область – необходимо брать очень длинные траектории, из-за чего картинка считалась бы очень долго.

В качестве дополнительной проверки, аналогично исследованию отображения Гонченко, построим гистограммы распределения минимального угла, а также облака непрерывности. Для проверки непрерывности проведем подсчет углов между базисными векторами одного из подпространств в разных точках. Очевидно, что если в близких точках угол близок к нулю, то есть вектора близки, то разбиение непрерывно. Однако бывает также такое, что в близких точках угол между векторами отличается на 180 градусов, что отвечает тому, что аттрактор неориентируемый. Результат проверки можно увидеть на рисунке 14.

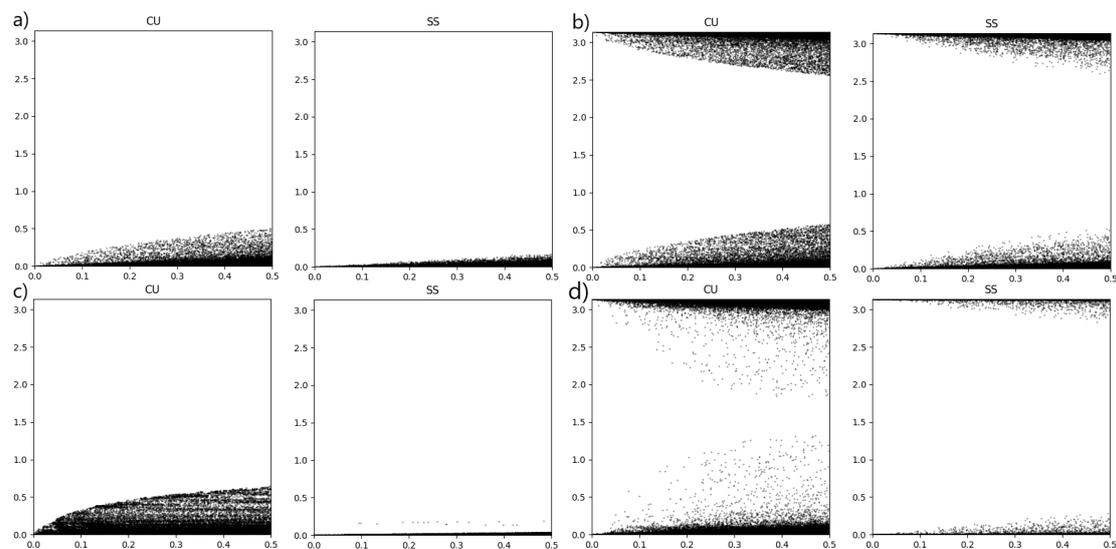


Рис. 14. Облака непрерывности подпространств  $E^{ss}$  and  $E^{cu}$  для аттракторов в: (а) область I,  $(\rho, \sigma) = (12.9, 2.3)$ ; (б) область II,  $(\rho, \sigma) = (12.9, 2.3)$ ; (с) область III,  $(\rho, \sigma) = (6.25, 7)$ ; (д) область IV,  $(\rho, \sigma) = (9.2, 8)$ . Из диаграмм можно сделать вывод что аттракторы в областях II и IV неориентируемые.

Также построим гистограммы распределения угла между разными подпространствами в разных точках, тогда псевдогиперболичности соответствует случай когда диаграмма не «влипает» в ноль.

Стоит заметить, что аттрактор из области IV является настоящим дискретным псевдогиперболическим аттрактором Лоренца. Таким образом, это первый пример дискретного псевдогиперболического аттрактора без нулевого показателя. Кроме того, стоит заметить, что аттрактор является неориентируемым. Подобная структура аттрактора уже была предсказана в работе [12].

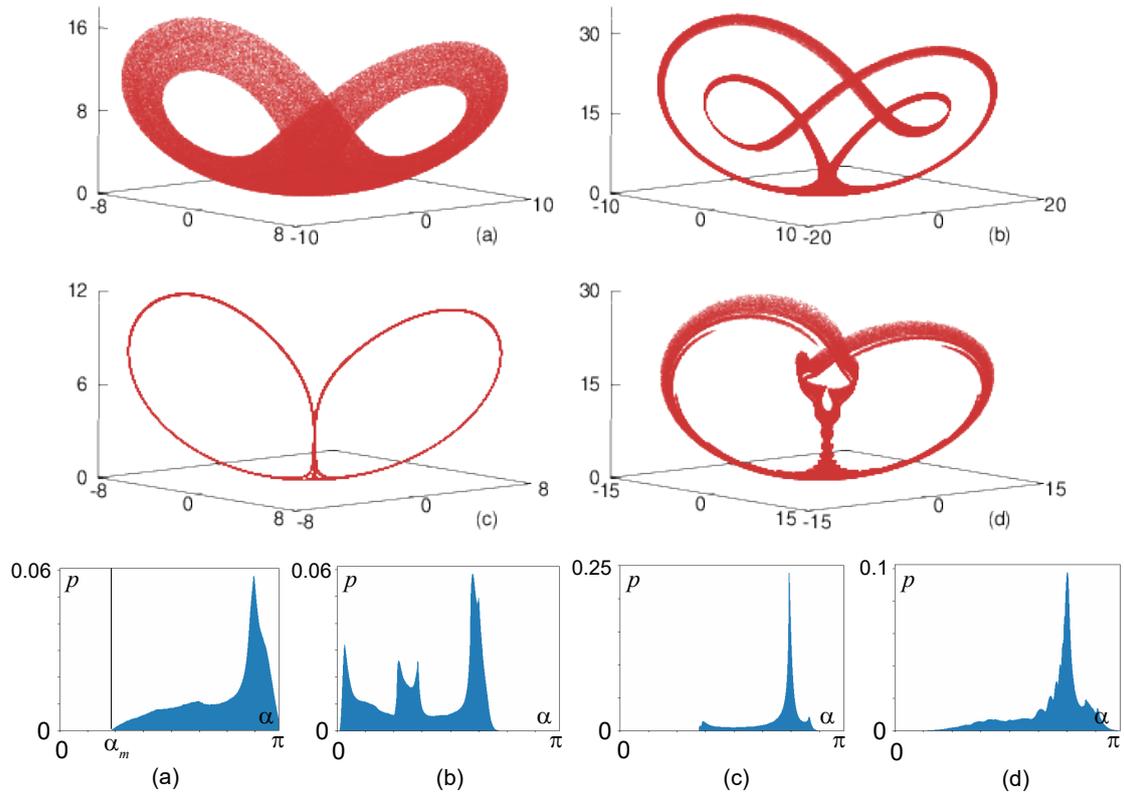


Рис. 15. Псевдогиперболические аттракторы для отображения (1) для  $\delta = 0.1$  найденные в: (a) области I,  $(\rho, \sigma) = (8, 4)$ ,  $\Lambda_1 = 0.02272$ ,  $\Lambda_2 = 0$ ,  $\Lambda_3 = -0.7692$ ,  $\alpha_m = 0.39651$ ; (b) области II,  $(\rho, \sigma) = (12.9, 2.3)$ ,  $\Lambda_1 = 0.02265$ ,  $\Lambda_2 = -0.00133$ ,  $\Lambda_3 = -0.4613$ ,  $\alpha_m = 0.017$ ; (c) области III,  $(\rho, \sigma) = (6.25, 7)$ ,  $\Lambda_1 = 0.01438$ ,  $\Lambda_2 = -0.00624$ ,  $\Lambda_3 = -1.54353$ ,  $\alpha_m = 0.56488$ ; (d) области IV,  $(\rho, \sigma) = (9.2, 8)$ ,  $\Lambda_1 = 0.11218$ ,  $\Lambda_2 = -0.08998$ ,  $\Lambda_3 = -1.86316$ ,  $\alpha_m = 0.1808$ . Внизу строка гистограмм распределения углов между  $E^{ss}$  и  $E^{cu}$ , эти диаграммы показывают псевдогиперболичность этих аттракторов.

## 5. Выводы

В данной работе было проведено исследование двух отображений. Отображение 4 имеет прямую связь с потоковой системой Лоренца, второе же, отображение Гонченко, близко к некоторой нормальной форме потока.

Для каждого из этих отображений были проведены численные исследования. Была проведена оценка спектра показателей Ляпунова, а также проведена проверка псевдогиперболичности методом построения диаграмм непрерывности, функции распределения минимального угла, а также построения карты минимального угла.

В отображении Гонченко была замечена некоторая схожесть с потоковой системой Шимицу-Мориока, а именно области с дискретными аттракторами Лоренца разделены на две непересекающиеся областями. В одной из которых аттрактор является схожим с обычным потоковым аттрактором Лоренца в системе Лоренца, во

второй же области фазовый портрет аттрактора отличается, а проверка базисных векторов линейных подпространств  $E^{cu}$  и  $E^{ss}$  говорит о том, что аттрактор является неориентируемым, при этом аттрактор остается псевдогиперболическим.

В дискретизованном Лоренце при увеличении шага интегрирования область с обычным аттрактором Лоренца разделяется уже на 4 области, и если первые две области аналогичны тем, что наблюдаются в системе Шимицу-Мориока и отображении Гонченко, то другие две области являются нетипичными. Более того в одной из областей был найден настоящий дискретный неориентируемый аттрактор Лоренца. Предположение о существовании подобных аттракторов Лоренца было уже высказано в работе [12].

В дальнейшем планируется провести дополнительные исследования, чтобы убедиться в структуре полученных аттракторов, а также изучить бифуркации, которые способны приводить к рождению подобных аттракторов.

## Список литературы

- [1] Lorenz E.N. Deterministic nonperiodic flow // J. of the Atmospheric Sciences, 1963, v. 20. P. 130-141 [Перевод на русский язык: Лоренц Эдвард Н. Детерминированное непериодическое течение – в кн. Странные аттракторы. М.: Мир, 1981. С. 88-116]
- [2] Afraimovich V. S., Bykov V. V., Shilnikov L. P. On the origin and structure of the Lorenz attractor // Akademiia Nauk SSSR Doklady. – 1977. – Т. 234. – С. 336-339.
- [3] Afraimovich V. S., Bykov V. V., Shilnikov L. P. Attractive nonrough limit sets of Lorenz-attractor type // Trudy Moskovskoe Matematicheskoe Obshchestvo. – 1982. – Т. 44. – С. 150-212.
- [4] Turaev D. V., Shil'nikov L. P. An example of a wild strange attractor // Sbornik: Mathematics. – 1998. – Т. 189. – №. 2. – С. 291.
- [5] Gonchenko S. V., Ovsyannikov I. I, Simo C., Turaev D. Three-dimensional Hénon-like maps and wild Lorenz-like attractors // International Journal of Bifurcation and Chaos. – 2005. – Т. 15. – №. 11. – С. 3493-3508.
- [6] Gonchenko A. S., Gonchenko S. V., Kazakov A. O. Richness of chaotic dynamics in nonholonomic models of a Celtic stone // Regular and Chaotic Dynamics. – 2013. – Т. 18. – С. 521-538.
- [7] Gonchenko A. S., Samylyna E. A. On the region of existence of a discrete Lorenz attractor in the nonholonomic model of a Celtic stone // Radiophysics and Quantum Electronics. – 2019. – Т. 62. – С. 369-384.
- [8] Gonchenko S. et al. On discrete Lorenz-like attractors // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. – 2021. – Т. 31. – №. 2.

- [9] Bennetin G. et al. All Lyapunov exponents are effectively computable //Physical Review A. – 1976. – Т. 14. – С. 2238.
- [10] Gonchenko S., Kazakov A., Turaev D. Wild pseudohyperbolic attractor in a four-dimensional Lorenz system //Nonlinearity. – 2021. – Т. 34. – №. 4. – С. 2018.
- [11] Гонченко С. В. и др. О методах проверки псевдогиперболичности странных аттракторов //Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. – 2021. – Т. 29. – №. 1. – С. 160-185.
- [12] Gonchenko S., Gonchenko A. On discrete Lorenz-like attractors in three-dimensional maps with axial symmetry //Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. – 2023. – Т. 33. – №. 12.
- [13] Lyubimov D. V., Zaks M. A. Two mechanisms of the transition to chaos in finite-dimensional models of convection //Physica D: Nonlinear Phenomena. – 1983. – Т. 9. – №. 1-2. – С. 52-64.
- [14] Pusuluri K., Meijer H. G. E., Shilnikov A. L. Homoclinic puzzles and chaos in a nonlinear laser model //Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. – 2021. – Т. 93. – С. 105503.
- [15] Gonchenko S. et al. Conjoined Lorenz twins—a new pseudohyperbolic attractor in three-dimensional maps and flows //Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. – 2022. – Т. 32. – №. 12.
- [16] Eilertsen J., Magnan J. On the chaotic dynamics associated with the center manifold equations of double-diffusive convection near a codimension-four bifurcation point at moderate thermal Rayleigh number //International Journal of Bifurcation and Chaos. – 2018. – Т. 28. – №. 08. – С. 1850094.
- [17] Kuptsov P. V., Kuznetsov S. P. Lyapunov analysis of strange pseudohyperbolic attractors: angles between tangent subspaces, local volume expansion and contraction //Regular and Chaotic Dynamics. – 2018. – Т. 23. – С. 908-932.

Заявление о новизне

Сообщаю, что новыми в моей представленной на Смотри выпускной квалификационной работе (далее - работа) под названием «О произведении подстановок множества целых чисел» являются:

Также сообщаю, что для проверки новизны мною было проделано следующее:

- 1) В период с 01 марта по 20 марта 2024 г. мною был произведён поиск в следующих поисковых системах: Яндекс, Google, Google Scholar, Web of Science, arXiv.org по следующим ключевым словам: транспозиции классов целых чисел, группа  $ST(Z)$ , порядки произведения подстановок счетного множества, в выдаче поисковиков было исследовано 3 статьи, 1 препринт и все они не содержали материала, заявляемого автором выпускной квалификационной работы в качестве нового. При поиске не было встречено работ или упоминаний работ, позволяющих усомниться в новизне материала.
- 2) Проведена серия консультаций с моим научным руководителем Валерием Георгиевичем Бардаковым, профессором кафедры алгебры и математической логики механико-математического факультета Новосибирского государственного университета.
- 3) Проведено выступление на Международной научной студенческой конференции (МНСК-2024) в секции «Алгебра и математическая логика» (г. Новосибирск, 2024 г.)
- 4) Проведено выступление на научном семинаре «Эварист Галуа» кафедры алгебры и математической логики Новосибирского государственного университета (руководитель семинара Валерий Георгиевич Бардаков)

Таким образом, по результатам поиска в сети Интернет и тематических научных базах, а также обсуждений с указанными выше специалистами следует, что, по-видимому, представленный в моей выпускной квалификационной работе указанный выше математический материал действительно является новым.

Подтверждаю, что являюсь автором предоставляемой на Смотри работы и прошу принять её для участия в Смотре. Принимаю на себя обязательство соблюдать правила Смотра. Также (в соответствии с п. 4 Положения о Смотре) принимаю на себя обязательство оценить 5 работ участников Смотра, выданных мне Оргкомитетом в результате жеребьёвки и сверх того оценить 2-5 работ других участников Смотра на мой выбор. Я понимаю правила оценки работ, приведенные в п. 4.3 Положения о Смотре. Даю согласие на публикацию адреса моей электронной почты.

Защита работы состоится 19.06.2024. На Смотри представлен окончательный текст работы.

Подпись



Искра Алекс Львович  
28 мая 2024 г. Новосибирск, Россия

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«НОВОСИБИРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
УНИВЕРСИТЕТ» (НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ, НГУ)

Факультет Механико математический факультет

Кафедра алгебры и математической логики

Направление подготовки: 01.03.01 МАТЕМАТИКА

**ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА БАКАЛАВРА**

Искра Алекс Львович

(Фамилия, Имя, Отчество автора)

Тема работы О ПРОИЗВЕДЕНИИ ПОДСТАНОВОК МНОЖЕСТВА ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ

**«К защите допущена»**

И.о. заведующего кафедрой,

д.ф.-м.н., профессор

Колесников П.С./  
.....  
(фамилия, И. О.) / (подпись МП)

«.....» ..... 2024г.

**Научный руководитель**

д.ф.-м.н., профессор

г.н.с., ИМ СО РАН

Бардаков В.Г./  
.....  
(фамилия, И. О.) / (подпись МП)

«.....» ..... 2024г.

Дата защиты: «.....» ..... 2024г.

Новосибирск, 2024г.

## РЕФЕРАТ

Объем работы: 14 страниц

Количество иллюстраций: 0

Количество таблиц: 0

Количество литературных источников: 4

Количество приложений: 0

Объект исследования: группа  $CT(\mathbb{Z})$ , транспозиции классов.

Предмет исследования: порядки произведений транспозиций классов, коммутаторные свойства группы  $CT(\mathbb{Z})$ .

Цель исследования: частичное или полное решение задачи об установлении существования конечного множества целых чисел, которые являются порядками произведения двух транспозиций классов и описания элементов группы  $CT(\mathbb{Z})$ , которые являются коммутаторами элементов группы  $CT(\mathbb{Z})$ .

Задачи исследования: показать, что существует лишь конечное множество целых чисел, которые являются порядками произведений двух горизонтальных транспозиций классов.

Показать, что существует лишь конечное, независимое от выбора чисел  $r, m, r_1, m_1, r_2, m_2$ , множество целых чисел, которые являются порядками произведения двух транспозиций классов  $\tau_{r(m), r_1(m_1)}$  и  $\tau_{r(m), r_2(m_2)}$ . Показать, что любая транспозиция классов является коммутатором элементов группы  $CT(\mathbb{Z})$ . Показать, что любой элемент группы  $CT_\infty$  является коммутатором элементов группы  $CT_\infty$ .

Ключевые слова: группа  $CT(\mathbb{Z})$ , транспозиции классов целых чисел, коммутатор, порядки элементов группы.

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>Введение</b>	<b>4</b>
<b>1 Теоретическая часть</b>	<b>5</b>
<b>2 Коммутаторные свойства группы <math>CT(\mathbb{Z})</math></b>	<b>7</b>
<b>3 Порядки произведений транспозиций классов</b>	<b>9</b>
<b>Заключение</b>	<b>13</b>
<b>Список использованных источников и литературы</b>	<b>14</b>

## ВВЕДЕНИЕ

Задача описания групп подстановок счетного множества – одна из центральных проблем теории групп. Подобно тому как всякая конечная группа может быть вложена в некоторую подгруппу группы подстановок конечного множества, всякую счетную группу можно вложить в группу подстановок некоторого счетного множества. В частности, в группу подстановок множества целых чисел. Трудность работы с множеством подстановок целых чисел состоит в том, что эта группа несчетная. Поэтому рассматриваются некоторые ее подгруппы, которые являются счетными. Одной из таких групп является группа, введенная С. Колем, который записал в Коуровскую тетрадь [4] проблему описания порядков подстановок, являющихся произведением двух транспозиций классов целых чисел. Им же было написано несколько статей, в одной из которых [2] установлена связь группы  $CT(\mathbb{Z})$  со знаменитой гипотезой Коллатца.

Объектом исследования являются группа  $CT(\mathbb{Z})$  и транспозиции классов целых чисел, которые порождают эту группу. Предметом исследования являются порядки произведений двух транспозиций классов целых чисел и коммутаторные свойства группы  $CT(\mathbb{Z})$ .

Целью исследования является частичное или полное решение задачи об установлении существования конечного множества целых чисел, которые являются порядками произведений двух транспозиций классов и описание элементов группы  $CT(\mathbb{Z})$ , которые являются коммутаторами элементов группы  $CT(\mathbb{Z})$ . Задачей исследования является установление существования лишь конечного множества целых чисел, которые являются порядками произведений горизонтальных транспозиций классов. Установление существования лишь конечного, независимого от выбора натуральных чисел  $r, m, r_1, m_1, r_2, m_2$ , множества целых чисел, которые являются порядками произведения двух транспозиций классов  $\tau_{r(m), r_1(m_1)}$  и  $\tau_{r(m), r_2(m_2)}$ . Также задачей является показать существование представления любой транспозиции классов как коммутатора элементов группы  $CT(\mathbb{Z})$  и представление любого элемента группы  $CT_\infty$  как коммутатора элементов группы  $CT_\infty$ .

При исследовании порядков произведений транспозиций классов целых чисел были использованы конечные и бесконечные системы линейных диофантовых уравнений, результаты С. Коля, а также классические результаты теории групп.

Результаты работы докладывались на семинаре "Эварист Галуа" (г. Новосибирск, 2024 г.), а также на Международной научной студенческой конференции (МНСК-2024) в секции "Алгебра и математическая логика" (г. Новосибирск, 2024 г.).

## § 1. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Следующее определение можно найти в работе С. Коля [1].

**Определение 1.** Пусть дано натуральное число  $m > 1$ . Тогда для всякого натурального числа  $r$ , удовлетворяющего неравенствам  $0 \leq r < m$ , положим

$$r(m) = r + m\mathbb{Z} = \{r + km \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

При  $r_1(m_1) \cap r_2(m_2) = \emptyset$  определим транспозицию классов  $\tau_{r_1(m_1), r_2(m_2)}$  как инволюцию, переставляющую  $r_1 + km_1$  и  $r_2 + km_2$  для каждого целого  $k$  и оставляющую остальные элементы неподвижными. Символ  $CT(\mathbb{Z})$  обозначает группу, порожденную транспозициями классов.

Таким образом,  $r(m)$  состоит из целых чисел, дающих остаток  $r$  при делении на  $m$ . Для всякого  $m = 1, 2, \dots$  обозначим

$$R(m) = \prod_{r=0}^{m-1} r(m)$$

независимое объединение классов остатков по модулю  $m$ . Очевидно, что как множество, каждое  $R(m)$  совпадает с множеством целых чисел.

Будем записывать транспозицию классов  $\tau_{r_1(m_1), r_2(m_2)}$  следующим образом

$$\tau_{r_1(m_1), r_2(m_2)} = \prod_{k \in \mathbb{Z}} (r_1 + m_1 k, r_2 + m_2 k).$$

Как установил С. Коль [1], группа  $CT(\mathbb{Z})$  является простой, а потому совпадает со своим коммутантом, т.е. всякий элемент является произведением некоторого числа коммутаторов.

**Вопрос.** Верно ли, что всякий элемент группы  $CT(\mathbb{Z})$  является коммутатором?

Следующий вопрос можно найти в Коуровской тетради [4].

**Вопрос 18.48 (С. Коль).** Верно ли, что имеется только конечное число целых чисел, которые являются порядками произведений двух транспозиций классов?

Обозначим  $CT_n$  подгруппу  $CT(\mathbb{Z})$  порожденную транспозициями классов  $\tau_{r_1(n), r_2(n)}$ ,  $0 \leq r_1 \neq r_2 < n$ . Очевидно, что  $\tau_{r_1(n), r_2(n)}$  переставляет классы из  $R(n)$ , а потому  $CT_n$  изоморфна группе подстановок  $S_n$ .

**Лемма 1** ([1]). Даны две транспозиции классов  $\tau_{r_1(m_1), r_2(m_2)}$  и  $\tau_{r_3(m_3), r_4(m_4)}$ , отличные от  $\tau = \tau_{0(2), 1(2)}$ . Тогда существует  $\pi$ , являющаяся произведением 6 транспозиций классов такая, что

$$\pi^{-1} \tau_{r_1(m_1), r_2(m_2)} \pi = \tau_{r_3(m_3), r_4(m_4)}.$$

Следующие две теоремы показывают связь группы  $CT(\mathbb{Z})$  с гипотезой Коллатца.

**Теорема 1** ([2]). Группа  $G_C := \langle \tau_{1(2), 4(6)}, \tau_{1(3), 2(6)}, \tau_{2(3), 4(6)} \rangle$  действует транзитивно на  $\mathbb{N} \setminus 0(6)$  тогда и только тогда, когда гипотеза Коллатца верна.

**Теорема 2** ([2]). *Группа  $G_T := \langle \tau_{0(2),1(2)}, \tau_{1(2),2(4)}, \tau_{1(4),2(6)} \rangle$  действует транзитивно на  $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$  тогда и только тогда, когда гипотеза Коллатца верна.*

В 1951 году в работе [3] О. Оре была доказана

**Теорема 3.** *Любой элемент знакопеременной группы  $A_n$  является коммутатором элементов симметрической группы  $S_n$ .*

## § 2. КОММУТАТОРНЫЕ СВОЙСТВА ГРУППЫ $CT(\mathbb{Z})$

**Утверждение 1.** Если  $\tau_{r_1(m_1), r_2(m_2)}$  – транспозиция классов, то  $\tau_{km_1+r_1(nm_1), km_2+r_2(nm_2)}$  – транспозиция классов для любых натуральных  $k$  и  $n$  таких, что  $1 \leq n$  и  $k \leq n-1$ .

**Лемма 2.** Для любого натурального  $n \geq 1$

$$\tau_{r_1(m_1), r_2(m_2)} = \prod_{k=0}^{n-1} \tau_{km_1+r_1(nm_1), km_2+r_2(nm_2)}$$

**Доказательство.** Верна следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned} \tau_{r_1(m_1), r_2(m_2)} &= \prod_{c \in \mathbb{Z}} (r_1 + m_1 c, r_2 + m_2 c) \\ &= \prod_{c \in n\mathbb{Z}} \prod_{k=0}^{n-1} (r_1 + m_1(s+k), r_2 + m_2(s+k)) \\ &= \prod_{l \in \mathbb{Z}} \prod_{k=0}^{n-1} (r_1 + m_1(nl+k), r_2 + m_2(nl+k)) \\ &= \prod_{k=0}^{n-1} \prod_{l \in \mathbb{Z}} (r_1 + m_1 k + m_1 nl, r_2 + m_2 k + m_2 nl) \\ &= \prod_{k=0}^{n-1} \tau_{km_1+r_1(nm_1), km_2+r_2(nm_2)} \end{aligned}$$

■

**Утверждение 2.** Любая транспозиция классов является коммутатором.

**Доказательство.** Для любой транспозиции классов  $\tau_{r_1(m_1), r_2(m_2)}$  по лемме 2 имеет место разложение этой транспозиции на произведение  $\tau_{r_1(2m_1), r_2(2m_2)} \cdot \tau_{r_1+m_1(2m_1), r_2+m_2(2m_2)}$ . Учитывая то, что любая транспозиция классов обратна самой себе и по лемме 1 получаем

$$\tau_{r_1(m_1), r_2(m_2)} = \tau_{r_1(2m_1), r_2(2m_2)} \cdot \pi^{-1} \cdot \tau_{r_1(2m_1), r_2(2m_2)} \cdot \pi = [\tau_{r_1(2m_1), r_2(2m_2)}, \pi]$$

■

Транспозицию классов вида  $\tau_{r_1(m), r_2(m)}$  будем называть горизонтальной. Символом  $CT_\infty$  будем обозначать группу порожденную всеми горизонтальными транспозициями классов.

**Теорема 4.** Любой элемент группы  $CT_\infty$  является коммутатором элементов группы  $CT_\infty$ .

**Доказательство.** Пусть даны  $m$  горизонтальных транспозиций классов  $\tau_{r_i(n_i), \bar{r}_i(n_i)}$ , где  $i = 1, 2, \dots, m$ . Положим  $N = lcm(n_1, \dots, n_m)$ ,  $p_i = \frac{N}{n_i}$ . В силу леммы 2

$$\tau_{r_i(n_i), \bar{r}_i(n_i)} = \prod_{k=0}^{p_i-1} \tau_{n_i k + r_i(N), n_i k + \bar{r}_i(N)},$$

$$\tau_{r_i(n_i), \tilde{r}_i(n_i)} = \prod_{k=0}^{p_i-1} \prod_{s=0}^2 \tau_{Ns+n_i k+r_i(2N), Ns+n_i k+\tilde{r}_i(2N)}.$$

Тогда

$$\prod_{i=1}^m \tau_{r_i(n_i), \tilde{r}_i(n_i)} = \prod_{i=1}^m \prod_{k=0}^{p_i-1} \prod_{s=0}^2 \tau_{Ns+n_i k+r_i(2N), Ns+n_i k+\tilde{r}_i(2N)}.$$

Заметим, что  $\prod_{i=1}^m \tau_{r_i(n_i), \tilde{r}_i(n_i)} \in CT_{2N}$  и то, что в произведении участвует четное количество транспозиций классов. Так как группа  $CT_{2N}$  изоморфна группе подстановок  $S_{2N}$ , то под действием изоморфизма

$$\tau_{u_1(2N), u_2(2N)} \longrightarrow (u_1 + 1, u_2 + 1)$$

элемент  $\prod_{i=1}^m \tau_{r_i(n_i), \tilde{r}_i(n_i)} \in CT_{2N}$  перейдет в произведение четного числа транспозиций группы  $S_{2N}$ . По теореме 3 любой элемент знакопеременной группы  $A_{2N}$  является коммутатором. ■

### § 3. ПОРЯДКИ ПРОИЗВЕДЕНИЙ ТРАНСПОЗИЦИЙ КЛАССОВ

**Утверждение 3.** Пусть даны  $m$  горизонтальных транспозиций классов  $\tau_{r_i(n_i), \tilde{r}_i(n_i)}$ , где  $i = 1, \dots, m$ . Тогда

$$\left| \prod_{i=1}^m \tau_{r_i(n_i), \tilde{r}_i(n_i)} \right| = \left| \prod_{i=1}^m \prod_{k=0}^{p_i-1} (n_i k + r_i + 1, n_i k + \tilde{r}_i + 1) \right|,$$

где  $p_i = \frac{lcm(n_1, \dots, n_m)}{n_i}$ .

**Доказательство.** В силу доказательства теоремы 4

$$\prod_{i=1}^m \tau_{r_i(n_i), \tilde{r}_i(n_i)} = \prod_{i=1}^m \prod_{k=0}^{p_i-1} \tau_{n_i k + r_i(N), n_i k + \tilde{r}_i(N)}.$$

Так как группа  $CT_N$  изоморфна группе перестановок  $S_N$ , утверждение доказано. ■

**Пример.** Рассмотрим транспозиции классов  $\tau_{0(3), 1(3)}$  и  $\tau_{2(4), 3(4)}$ . Тогда в силу утверждения

$$\begin{aligned} |\tau_{0(3), 1(3)} \cdot \tau_{2(4), 3(4)}| &= |(1, 2)(4, 5)(7, 8)(10, 11)(3, 5)(7, 8)(11, 12)| \\ &= |(1, 2)(4, 5)(10, 11)(3, 4)(11, 12)| \\ &= |(1, 2)(3, 4, 5)(10, 12, 11)| \\ &= 6. \end{aligned}$$

Рассмотрим горизонтальную транспозицию классов  $\tau_{r_1(n), r_2(n)}$ . Можно считать, что  $r_1 < r_2$ . Заметим, что для любых целых чисел  $k$  и  $s$  верны неравенства  $r_1 + nk < r_2 + nk$  и  $r_2 + ns < r_1 + n(s + 1)$ .

Далее рассмотрим пару горизонтальных транспозиций классов  $\sigma = \tau_{r_1(n), r_2(n)}$  и  $\eta = \tau_{r_3(m), r_4(m)}$ . Можно считать, что  $r_1 < r_2$  и  $r_3 < r_4$ . Скажем, что  $a_k = r_1 + nk$ ,  $b_k = r_2 + nk$ ,  $c_k = r_3 + mk$ ,  $d_k = r_4 + mk$ . Тогда по определению имеем

$$\sigma = \prod_{k \in \mathbb{Z}} (a_k, b_k),$$

$$\eta = \prod_{k \in \mathbb{Z}} (c_k, d_k).$$

Пусть  $a_{k_1} = c_{k_2}$  для некоторых целых чисел  $k_1$  и  $k_2$ . Тогда

$$b_{k_1} \xrightarrow{\sigma} a_{k_1} \xrightarrow{\eta} d_{k_2}.$$

Если  $d_{k_2} = b_{k_3}$  для некоторого целого  $k_3$ , то  $k_3$  обязательно больше чем  $k_1$ , так как иначе  $b_{k_3} = d_{k_2} > c_{k_2} = a_{k_1} > b_{k_3}$ . Тогда  $a_{k_3} \notin \text{Supp}(\eta)$ . В самом деле, если бы  $a_{k_3} \in \text{Supp}(\eta)$ , то существовало бы целое число  $k_4$  такое, что  $a_{k_3} = c_{k_4}$  или  $a_{k_3} = d_{k_4}$ . Пусть существует

такое целое число  $k_4$ , что  $a_{k_3} = c_{k_4}$ , значит оно либо больше  $k_2$ , либо меньше  $k_2$ . Если оно больше, то  $c_{k_4} = a_{k_3} < b_{k_3} = d_{k_2} < c_{k_4}$ , что неверно. Предположение, что  $k_4 < k_2$  также приводит к противоречию. Аналогично доказывается, что не существует такого целого числа  $k_4$ , что  $a_{k_3} = d_{k_4}$  и что  $b_{k_1} \notin \text{Supp}(\eta)$ . Значит

$$d_{k_2} \xrightarrow{\sigma} a_{k_3} \xrightarrow{\eta} a_{k_3}.$$

Значит цикл начинающийся с числа  $b_{k_1}$  будет конечной длины вида

$$(b_{k_1}, d_{k_2}, a_{k_3}, c_{k_2}).$$

Если  $d_{k_2} = a_{k_3}$  для некоторого  $k_3$ , то  $k_3$  также обязательно больше чем  $k_1$  и цикл будет не обязательно конечный вида

$$(\dots, b_{k_3}, a_{k_1}, b_{k_1}, d_{k_2}, \dots)$$

Если  $b_{k_3} = d_{k_4}$ , то  $c_{k_4} \notin \text{Supp}(\sigma)$ , значит цикл будет конечной длины вида

$$(b_{k_1}, d_{k_2}, c_{k_4}, d_{k_4}, c_{k_2}).$$

Аналогичные рассуждения применимы к случаю  $a_{k_1} = d_{k_2}$ . Видно, что длина цикла может увеличиваться только за счет равенств  $d_{k_s} = a_{k_l}$  и  $b_{k_p} = c_{k_q}$  пока не появится равенство вида  $b_{k_i} = d_{k_j}$ . Не умаляя общности можно сказать, что на длины циклов влияет только существование решений систем диофантовых уравнений вида

$$\begin{cases} r_2 + nx_1 = r_3 + mx_2, \\ r_4 + mx_2 = r_1 + nx_3, \\ r_2 + nx_3 = r_3 + mx_4, \\ \dots \end{cases}$$

**Теорема 5.** *Существует лишь конечное множество целых чисел, которые являются порядками произведений двух горизонтальных транспозиций классов.*

**Доказательство** Пусть  $\tau_{r_1(n), r_2(n)}, \tau_{r_3(m), r_4(m)}$  – две горизонтальные транспозиции классов. Пусть  $x_1^0, x_2^0, x_3^0, x_4^0$  – решение следующей системы диофантовых уравнений:

$$\begin{cases} r_2 + nx_1 = r_3 + mx_2, \\ r_4 + mx_2 = r_1 + nx_3, \\ r_2 + nx_3 = r_3 + mx_4. \end{cases}$$

Легко получить, что  $nx_1^0 + r_2 - r_3$  делится на  $m$ , а  $r_4 - r_1 + r_2 - r_3$  делится на  $n$  и на  $m$ . Добавим в систему уравнение вида

$$r_4 + mx_4 = r_1 + nx_5.$$

Тогда  $x_4 = x_4^0, x_5 = x_5^0 = x_1^0 + 2\frac{r_4-r_1+r_2-r_3}{n}$  – решение уравнения согласованное с системой.

Добавим уравнение вида

$$r_2 + nx_5 = r_3 + mx_6.$$

Получим решение  $x_5 = x_5^0, x_6^0 = \frac{nx_1^0+r_2-r_3}{m} + 2\frac{r_4-r_1+r_2-r_3}{m}$ . Продолжая этот процесс, получим следующую бесконечную систему диофантовых уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} r_2 + nx_1 = r_3 + mx_2, \\ r_4 + mx_2 = r_1 + nx_3, \\ r_2 + nx_3 = r_3 + mx_4, \\ r_4 + mx_4 = r_1 + nx_5, \\ r_2 + nx_5 = r_3 + mx_6, \\ r_4 + mx_6 = r_1 + nx_7, \\ \dots \end{array} \right.$$

С помощью индукции легко показать, что получившаяся система имеет решение.

Заметим, что

$$\begin{aligned} r_1 + nx_1^0 &\xrightarrow{\tau_{r_1(n),r_2(n)}} r_2 + nx_1^0 \xrightarrow{\tau_{r_3(m),r_4(m)}} r_4 + mx_2^0, \\ r_4 + mx_2^0 &\xrightarrow{\tau_{r_1(n),r_2(n)}} r_2 + nx_3^0 \xrightarrow{\tau_{r_3(m),r_4(m)}} r_4 + mx_4^0, \\ r_4 + mx_4^0 &\xrightarrow{\tau_{r_1(n),r_2(n)}} r_2 + nx_5^0 \xrightarrow{\tau_{r_3(m),r_4(m)}} r_4 + mx_6^0 \end{aligned}$$

и т.д. Получим, что произведение транспозиций  $\tau_{r_1(n),r_2(n)}, \tau_{r_3(m),r_4(m)}$  будет содержать бесконечный цикл вида

$$(\dots, r_1 + nx_1^0, r_4 + mx_2^0, r_4 + mx_4^0, r_4 + mx_6^0, \dots).$$

Но в силу утверждения 3, порядок произведения конечен, пришли к противоречию. ■

**Теорема 6.** *Существует лишь конечное, независимое от выбора натуральных чисел  $r, m, r_1, m_1, r_2, m_2$ , множество целых чисел, которые являются порядками произведений двух транспозиций классов  $\tau_{r(m),r_1(m_1)}$  и  $\tau_{r(m),r_2(m_2)}$ . Причем произведение имеет бесконечный порядок тогда и только тогда, когда  $r_1(m_1) \cap r_2(m_2) \neq \emptyset$  и  $r_1(m_1) \neq r_2(m_2)$*

**Доказательство.** Если  $m_1 = m_2$ , то уравнение

$$r_1 + m_1x = r_2 + m_1y$$

имеет решение, значит  $m_1$  делит  $r_2 - r_1$ , но  $0 \leq r_1 < m_1$  и  $0 \leq r_2 < m_1$ , значит  $r_1(m_1) = r_2(m_2)$ .



## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе было доказано, что существует лишь конечное множество целых чисел, которые являются порядками произведений горизонтальных транспозиций классов, что существует лишь конечное, независимое от выбора чисел  $r, m, r_1, m_1, r_2, m_2$ , множество целых чисел, которые являются порядками произведения двух транспозиций классов  $\mathcal{T}_{r(m),r_1(m_1)}$  и  $\mathcal{T}_{r(m),r_2(m_2)}$ , а также, что любая транспозиция классов является коммутатором элементов группы  $CT(\mathbb{Z})$  и любой элемент группы  $CT_\infty$  является коммутатором элементов группы  $CT_\infty$ . В дальнейшем можно продолжить изучение порядков произведений транспозиций классов вида  $\mathcal{T}_{r_1(n),r_2(m)}$  и  $\mathcal{T}_{r_3(n),r_4(m)}$ .

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ И ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] S. Kohl, *A simple group generated by involutions interchanging residue classes of the integers*, Math. Z., 264, no. 4 (2010) 927–938.
- [2] S. Kohl, *The Collatz conjecture in a group theoretic context*, J. Group Theory, 20, no. 5 (2017) 1025–1030.
- [3] O. Ore, *Some remarks on commutators*, Proc. Amer. Math. Soc. no. 2 (1951), 307–314.
- [4] *Коуровская тетрадь: Нерешенные вопросы теории групп*, Новосибирск, 2022.

Заявление о новизне

Сообщаю, что новыми в моей представленной на Смотр выпускной квалификационной работе под названием «Построение периодических решений функциональных уравнений с помощью дифференциальных уравнений» являются: Утверждения 2 – 8, определение итерационного процесса построения дифференциальных уравнений различных порядков, определение преобразования функционального уравнение в дифференциальное уравнение третьего порядка, численные исследования условий существования периодических решений дифференциальных уравнений.

Также сообщаю, что для проверки новизны мною было проделано следующее:

- В период с 01 мая по 15 июня 2024 г. мною был произведён поиск в следующих поисковых системах: Яндекс, Google, Google Scholar, Web of Science, arxiv.org по следующим ключевым словам: функциональное уравнение, линейное дифференциальное уравнение второго порядка, уравнение Ван дер Поля, уравнение Рэля, линейное дифференциальное уравнение третьего порядка, периодическое решение функционального уравнения, периодическое решение дифференциального уравнения, итерационный процесс построения дифференциальных уравнений, итерация. При поиске была найдена одна работа [1], в которой были встречены конструкции, похожие на излагаемые в настоящей выпускной квалификационной работе, однако отличие их ясно видно и наличие таких работ лишь подтверждает актуальность тематики исследования.
- Проведена серия консультаций с моим научным руководителем доктором физико-математических наук, профессором Ярославского государственного университета Кащенко Сергеем Александровичем.
- Проведена беседа с доктором физико-математических наук, заведующим кафедры математического моделирования Ярославского государственного университета Кащенко Ильей Сергеевичем.

Подтверждаю, что являюсь автором предоставляемой на Смотр работы и прошу принять её для участия в Смотре. Принимаю на себя обязательство соблюдать правила Смотра. Также (в соответствии с п. 4 Положения о Смотре) принимаю на себя обязательство оценить 5 работ участников Смотра, выданных мне Оргкомитетом в результате жеребьёвки и сверх того оценить 2-5 работ других участников Смотра на мой выбор. Я понимаю правила оценки работ, приведённые в п. 4.3 Положения о Смотре. Даю согласие на публикацию адреса моей электронной почты.

Защита работы состоится 17 июня 2024. На Смотр представлен окончательный текст работы.



Куракин Павел Александрович  
17.06.2024, Ярославль, Россия

**Приложения:**

[1] Э.В. Гайдук, Периодические решения одного класса функциональных уравнений, *Современные проблемы математики и информатики* (2019).

## Реферат

Объем 27 с., 8 гл., 18 рис., 3 источника

**Функциональное уравнение, линейное дифференциальное уравнение второго порядка, уравнение Ван дер Поля, уравнение Рэля, линейное дифференциальное уравнение третьего порядка, периодическое решение, итерационный процесс, итерация.**

**Объектом исследования** является функциональное уравнение.

**Предметом исследования** являются дифференциальные уравнения различных порядков, решения которых соответствуют решениям функционального уравнения.

**Цель работы:** исследовать условия существования периодических решений дифференциальных уравнений различных порядков, решения которых соответствуют решениям функционального уравнения.

В **результате** работы был предъявлен алгоритм преобразования функционального уравнения в дифференциальное уравнение различных порядков, определен итерационный процесс построения дифференциальных уравнений различных порядков, исследованы условия существования периодических решений для полученных дифференциальных уравнений.

# Содержание

<b>Введение</b>	<b>4</b>
<b>1 Подготовительные наблюдения</b>	<b>5</b>
<b>2 Преобразование функционального уравнения в дифференциальное уравнение второго порядка</b>	<b>6</b>
<b>3 Линейное дифференциальное уравнение второго порядка</b>	<b>7</b>
3.1 Преобразование функционального уравнения в дифференциальное уравнение . . . . .	7
3.2 Итерационный процесс построения дифференциальных уравнений . . . . .	8
3.3 Исследование условий существования периодических решений . . . . .	9
<b>4 Итерационный процесс построения дифференциальных уравнений второго порядка</b>	<b>12</b>
<b>5 Уравнение Ван дер Поля</b>	<b>13</b>
5.1 Преобразование функционального уравнения в дифференциальное уравнение . . . . .	13
5.2 Модифицированное уравнение Ван дер Поля . . . . .	15
5.3 Итерационный процесс построения дифференциальных уравнений . . . . .	17
<b>6 Уравнение Рэлея</b>	<b>19</b>
6.1 Итерационный процесс построения дифференциальных уравнений . . . . .	19
<b>7 Преобразование функционального уравнения в дифференциальное уравнение третьего порядка</b>	<b>21</b>
<b>8 Линейное дифференциальное уравнение третьего порядка</b>	<b>22</b>
8.1 Итерационный процесс построения дифференциальных уравнений . . . . .	22
8.2 Зависимость начальных условий на $n$ -ой итерации от начальных условий линейного дифференциального уравнения третьего порядка . . . . .	23
8.3 Визуализация периодических решений на разных итерациях . . . . .	24
<b>Заключение</b>	<b>26</b>
<b>Список литературы</b>	<b>27</b>

## Введение

Будем рассматривать функциональное уравнение:

$$f(t) = g(t + f(t)), \quad (1)$$

где в основе задачи лежит утверждение о том, что функция  $g$  представляет собой  $T$  - периодическое решение дифференциального уравнения различных порядков.

Основные цели и задачи исследования включают:

- 1) Определение алгоритма построения дифференциальных уравнений различных порядков, решения которых соответствуют решениям функционального уравнения (1).
- 2) Определение итерационного алгоритма для построения дифференциальных уравнений различных порядков.
- 3) Нахождение периодических решений функционального уравнения, используя построенные дифференциальные уравнения, методами численного анализа, а также исследование условий их существования.

В рамках данного исследования будут рассмотрены следующие дифференциальные уравнения:

- линейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$g''(\tau) + g(\tau) = 0,$$

- уравнение Ван дер Поля

$$g''(\tau) - (a - g^2(\tau))g'(\tau) + g(\tau) = 0,$$

- уравнение Рэля

$$g''(\tau) - (a - [g'(\tau)]^2)g'(\tau) + g(\tau) = 0,$$

- линейное дифференциальное уравнение третьего порядка

$$g'''(\tau) + g'(\tau) = 0.$$

# 1 Подготовительные наблюдения

**Утверждение 1.** Пусть  $f$  — ограниченная и непрерывная функция. Тогда  $f(t) + t$  принимает любое значение  $x_0 \in \mathbb{R}$ .

*Доказательство.*  $f$  ограничена, так как  $f$  периодическая функция.

$$A < f(t) < B, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Возьмем произвольную точку  $x_0 \in \mathbb{R}$  и определим функцию  $F(t) = f(t) + t$ . Поскольку  $l(t) = t$  - неограничена, то

$$\exists t_a : F(t_a) = f(t_a) + t_a > A + t_a > x_0$$

$$\exists t_b : F(t_b) = f(t_b) + t_b < B + t_b < x_0$$

$F(t)$  - непрерывна, как сумма двух непрерывных функций. Тогда по теореме Больцано-Коши  $\exists t_0 : F(t_0) = x_0$ . □

**Утверждение 2.** Пусть  $f$  — непрерывная и периодическая функция, и  $T_f$  — период функции  $f$ . Тогда  $T_f$  является периодом функции  $g$ .

*Доказательство.*

$$g(\tau) = f(t) = f(t + T_f) = g(t + T_f + f(t + T_f)) = g(t + T_f + f(t)) = g(\tau + T_f), \quad \tau(t) = t + f(t)$$

Заметим, что  $f$  ограничена, так как  $f$  периодическая функция. Тогда из **утверждения 1** следует, что  $\tau(t)$  принимает любые значения из  $\mathbb{R}$ . Откуда в результате получаем требуемый результат:

$$g(t + T_f) = g(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

□

**Утверждение 3.** Пусть  $f$  — ограниченная и непрерывная функция. Тогда  $f(0) = 0$  тогда и только тогда, когда  $g(0) = 0$ .

*Доказательство.* 1.  $f(0) = 0 \implies g(0) = 0$ :

$$0 = f(0) = g(f(0)) = g(0) \implies g(0) = 0$$

2.  $g(0) = 0 \implies f(0) = 0$ :

Из **утверждения 1** получаем, что  $\exists t_0 : f(t_0) + t_0 = 0$

$$-t_0 = f(t_0) = g(t_0 + f(t_0)) = g(0) = 0 \implies t_0 = 0$$

Откуда получаем

$$f(0) = 0.$$

□

Далее в некоторых примерах будут разобраны случаи с начальными условиями:

$$g(0) = 0.$$

## 2 Преобразование функционального уравнения в дифференциальное уравнение второго порядка

Для наглядности сделаем замену  $\tau = t + f(t)$ . Тогда исходное функциональное уравнение примет вид

$$f(t) = g(\tau), \quad \tau = t + f(t).$$

Далее определим

$$g'(\tau) = \frac{dg}{d\tau}(\tau), \quad g''(\tau) = \frac{d^2g}{d\tau^2}(\tau).$$

Вычислим первую производную по  $t$ :

$$\dot{f}(t) = \frac{d}{dt}(g(\tau)),$$

$$\dot{f}(t) = g'(\tau)(1 + \dot{f}(t)). \quad (2)$$

Посчитаем вторую производную по  $t$ :

$$\ddot{f}(t) = g''(\tau)(1 + \dot{f}(t))^2 + \dot{f}(t)g'(\tau). \quad (3)$$

Выразим  $g'(\tau)$  из (2)

$$g'(\tau) = \frac{\dot{f}(t)}{1 + \dot{f}(t)} \quad (4)$$

и  $\dot{f}(t)$  из (3)

$$\dot{f}(t) = g''(\tau) \frac{(1 + \dot{f}(t))^2}{1 - g'(\tau)}. \quad (5)$$

Подставив  $g'(\tau)$  в (5), получим искомое дифференциальное уравнение:

$$\dot{f}(t) = g''(\tau)(1 + \dot{f}(t))^3. \quad (6)$$

Для того, чтобы все преобразования были корректными необходимо выполнение теоремы о неявной функции, значит, знаменатели уравнений (4), (5) не должны обращаться в 0:

$$\dot{f}(t) \neq -1, \quad g'(\tau) \neq 1. \quad (7)$$

### 3 Линейное дифференциальное уравнение второго порядка

#### 3.1 Преобразование функционального уравнения в дифференциальное уравнение

Сначала проанализируем поведение решений дифференциального уравнения, полученного с помощью преобразования, описанного в предыдущей главе, где в качестве функции  $g(\tau)$  взята функция, которая является решением следующего уравнения:

$$g''(\tau) + g(\tau) = 0. \quad (8)$$

Это уравнение является обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами, известное как гармонический осциллятор. Его общее решение имеет вид:

$$g(\tau) = a \sin \tau + b \cos \tau, \quad a, b \in \mathbb{R}. \quad (9)$$

Теперь подставим (8) в (5), чтобы получить:

$$\ddot{f}(t) = -g(\tau)(1 + \dot{f}(t))^3,$$

и, зная вид  $g(\tau)$  из (1), мы получаем:

$$\ddot{f}(t) = -f(t)(1 + \dot{f}(t))^3. \quad (10)$$

Для дальнейшего анализа перейдем к системе уравнений:

$$\begin{cases} \dot{f}(t) = h(t) \\ \dot{h}(t) = -f(t)(1 + h(t))^3 \end{cases} \quad (11)$$

**Утверждение 4.** Решения (10) с начальными условиями  $f(0) = 0$  и  $\dot{f}(0) = h_0$  будут периодическими, если  $h_0 > -\frac{1}{2}$ .

Это утверждение можно проиллюстрировать графически, что мы и делаем ниже.

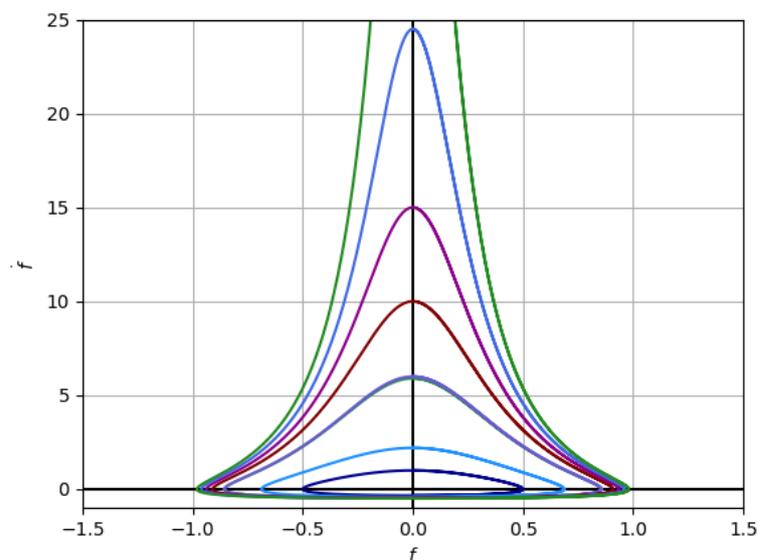


Рис. 1: Периодические траектории уравнения (10) на фазовой плоскости.

На графике представлены фазовые траектории системы (11), демонстрирующие периодическое поведение решений при различных начальных условиях.

### 3.2 Итерационный процесс построения дифференциальных уравнений

В качестве примера рассмотрим итерационный процесс построения дифференциальных уравнений для линейного дифференциального уравнения (8):

$$g_0''(\tau) + g_0(\tau) = 0. \quad (12)$$

Таким образом, используем уравнение (12) в качестве нулевой итерации или базового шага итерационного процесса.

Уравнение (10), полученное ранее, назовём первой итерацией и перепишем в следующей форме:

$$g_1''(\tau) = -g_1(\tau)(1 + g_1'(\tau))^3. \quad (13)$$

Заметим, что уравнение (13) - дифференциальное уравнение второго порядка, которое, как было показано выше, имеет периодические решения, поэтому мы можем воспользоваться этим уравнением для определения новой функции  $f(t)$ .

Подставим  $g_1''(\tau)$  в (6), далее воспользуемся (4):

$$\ddot{f}(t) = -g_1(\tau)(1 + g_1'(\tau))^3(1 + \dot{f}(t))^3 = -f(t)\left(1 + \frac{\dot{f}(t)}{1 + \dot{f}(t)}\right)^3(1 + \dot{f}(t))^3.$$

Сделаем простые алгебраические преобразования:

$$\ddot{f}(t) = -f(t)(1 + 2\dot{f}(t))^3.$$

Откуда получаем, что вторая итерация имеет следующий вид:

$$g_2''(\tau) = -g_2(\tau)(1 + 2g_2'(\tau))^3.$$

Выполняя эту операцию  $n$  раз, в результате получим уравнение для  $f(t)$ :

$$g_n''(\tau) = -g_n(\tau)(1 + ng_n'(\tau))^3. \quad (14)$$

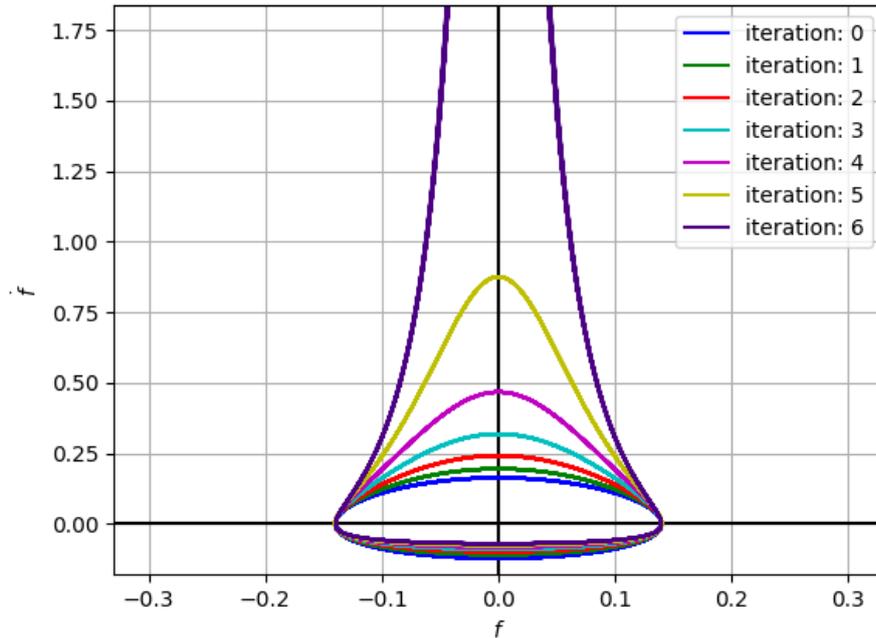


Рис. 2: Периодические решения первых 6 итераций уравнения (12), изображенных на фазовой плоскости.

### 3.3 Исследование условий существования периодических решений

Первым шагом выясним, как начальные условия на каждой итерации связаны с начальным условием уравнения (12). Затем определим, какие условия необходимы для существования периодических решений на каждой итерации, изменяя параметр  $c$  в следующем выражении:

$$\begin{cases} g_0(0) = 0 \\ g'_0(0) = c \end{cases} \quad c > 0. \quad (15)$$

Решением уравнения (12) с начальными условиями (15) является:

$$g_0(\tau) = c \sin \tau.$$

Обратим внимание на условие (7), которое говорит о том, что должно быть выполнено условие  $g'_0(\tau) \neq 1$ . Следовательно, условие  $c < 1$  является необходимым для существования периодического решения дифференциального уравнения на первой итерации:

$$g''_1(\tau) = -g_1(\tau)(1 + g'_1(\tau))^3,$$

с начальными условиями:

$$\begin{cases} g_1(0) = g_0(0) = 0 \\ g'_1(0) = \frac{g'_0(0)}{1 - g'_0(0)} = \frac{c}{1 - c} \end{cases} \quad 0 < c < 1.$$

Уравнение, соответствующее второй итерации:

$$g''_2(\tau) = -g_2(\tau)(1 + 2g'_2(\tau))^3$$

$$\begin{cases} g_2(0) = g_1(0) = 0 \\ g'_2(0) = \frac{g'_1(0)}{1 - g'_1(0)} = \frac{\frac{c}{1-c}}{1 - \frac{c}{1-c}} = \frac{c}{1-2c} \end{cases}$$

Повторяя те же рассуждения, получим начальные условия для дифференциального уравнения, относящегося к  $n$ -ой итерации:

$$g''_n(\tau) = -g_n(\tau)(1 + ng'_n(\tau))^3$$

$$\begin{cases} g_n(0) = \dots = g_1(0) = g_0(0) = 0 \\ g'_n(0) = \frac{g'_{n-1}(0)}{1 - g'_{n-1}(0)} = \frac{c}{1 - nc} \end{cases} \quad (16)$$

**Утверждение 5.** Пусть  $g_n(\tau)$  - периодическое решение. Тогда выполнено следующее неравенство:

$$g'_n(\tau) \leq \frac{c}{1 - nc}.$$

*Доказательство.* Проведем доказательство по индукции:

1.  $n = 0$ :

$$g_0(\tau) = c \sin(\tau) \implies g'_0(\tau) \leq c.$$

2. Пусть выполнено для  $n = k - 1$ :

$$g'_{k-1}(\tau) \leq \frac{c}{1 - (k-1)c}.$$

3. Покажем, что неравенство будет выполнено при  $n = k$ :

Функция  $g_k(\tau)$  является периодической, следовательно, она была получена из предыдущей функции  $g_{k-1}(\tau)$ , которая также является периодической.

Отметим, что существует  $k$ -ая периодическая итерация. Тогда выполнено условие  $g_{k-1}(\tau) \neq 1 \forall \tau$ . Откуда следует:

$$g'_{k-1}(\tau) \leq \frac{c}{1 - (k-1)c} < 1, \quad g'_{k-1}(0) = \frac{c}{1 - (k-1)c}$$

$$g'_k(t) = \frac{g'_{k-1}(\tau)}{1 - g'_{k-1}(\tau)} \leq \frac{\frac{c}{1 - (k-1)c}}{1 - \frac{c}{1 - (k-1)c}} = \frac{c}{1 - kc}.$$

□

Найдем условия существования периодического решения дифференциального уравнения (14) с начальными условиями (16). Для этого потребуем выполнение условия:

$$g'_{n-1}(\tau) \leq \frac{c}{1 - (n-1)c} < 1.$$

Откуда

$$\frac{c}{1 - (n-1)c} < 1 \iff \frac{nc - 1}{1 - (n-1)c} < 0 \iff$$

$$\iff \left[ \begin{array}{l} c > \frac{1}{n-1} \\ c > \frac{1}{n} \\ c < \frac{1}{n-1} \\ c < \frac{1}{n} \end{array} \right] \iff \left[ \begin{array}{l} c > \frac{1}{n-1} \\ c < \frac{1}{n} \end{array} \right] \quad (17)$$

На предыдущей итерации должно быть выполнено условие:

$$\left[ \begin{array}{l} c > \frac{1}{n-2} \\ c < \frac{1}{n-1} \end{array} \right] \quad (18)$$

на второй:

$$\left[ \begin{array}{l} c > 1 \\ c < \frac{1}{2} \end{array} \right]$$

и на первой:

$$c < 1.$$

Поэтому будет верно следующее утверждение:

**Утверждение 6.** Для существования периодического решения на  $n$ -ой итерации, соответствующего начальным значениям (16), необходимо условие:

$$c < \frac{1}{n}. \quad (19)$$

**Следствие.** Для уравнения (12) с начальными условиями (15) существует лишь конечное число итераций с периодическими решениями.

Изобразим периодические решения при  $c = 0.12$ :

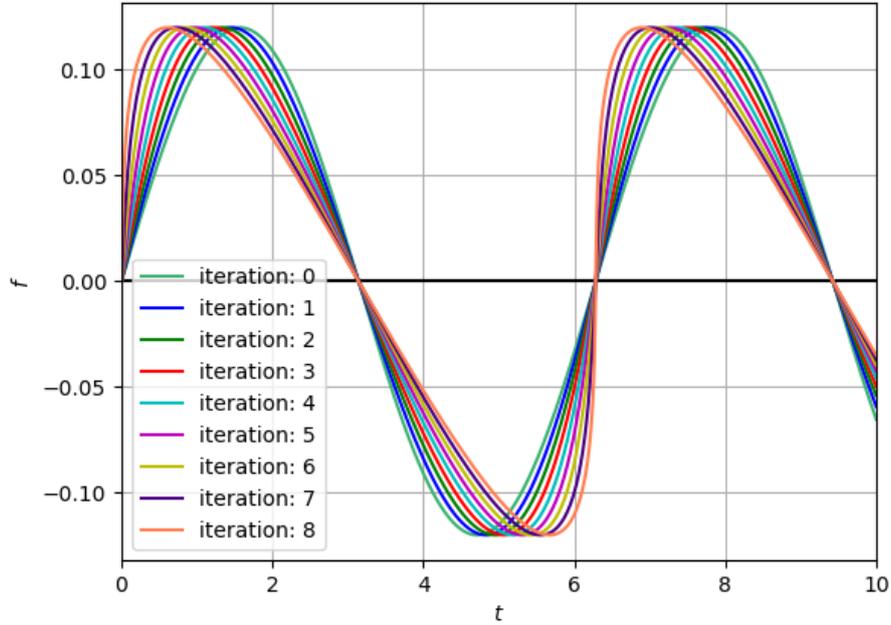


Рис. 3: Периодические решения всех возможных итераций уравнения (12) при  $c = 0.12$ .

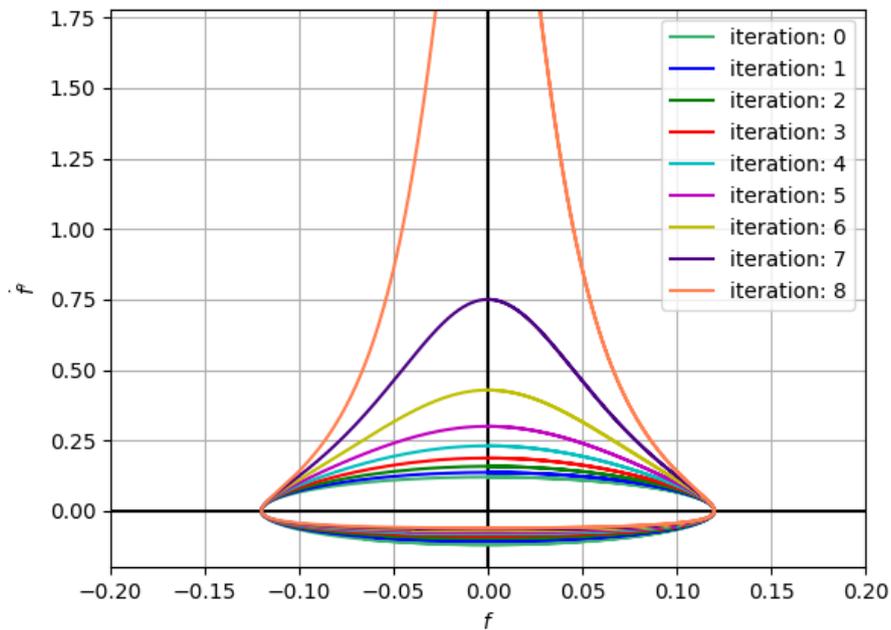


Рис. 4: Периодические решения всех возможных итераций уравнения (12) на фазовой плоскости при  $c = 0.12$ .

## 4 Итерационный процесс построения дифференциальных уравнений второго порядка

Рассмотрим теперь общий случай, где  $g$  имеет следующий вид:

$$g'' = G(g', g),$$

Тогда из (6), воспользовавшись равенствами (1) и (4), имеем:

$$\begin{aligned} \dot{f}(t) &= G(g', g)(1 + \dot{f}(t))^3 = G\left(\frac{\dot{f}(t)}{1 + \dot{f}(t)}, f(t)\right)(1 + \dot{f}(t))^3 \\ \ddot{f}(t) &= G\left(\frac{\dot{f}(t)}{1 + \dot{f}(t)}, f(t)\right)(1 + \dot{f}(t))^3. \end{aligned} \quad (20)$$

Первая итерация — это и есть результат преобразования функционального уравнения в дифференциальное, описанный в главе 2, где произведена замена  $f(t)$  на  $g_1(\tau)$ :

$$g_1''(\tau) = G\left(\frac{g_1'(\tau)}{1 + g_1'(\tau)}, g_1(\tau)\right)(1 + g_1'(\tau))^3 \quad (21)$$

Теперь наша цель — определить форму второй итерации. Отметим, что уравнение (21) является дифференциальным уравнением второго порядка с периодическим решением, по предположению, что позволяет использовать его для определения новой итерации.

Подставим  $g_1''(\tau)$  в (6), затем воспользуемся равенствами (1) и (4):

$$\dot{f}(t) = G\left(\frac{g_1'(\tau)}{1 + g_1'(\tau)}, g_1(\tau)\right)(1 + g_1'(\tau))^3(1 + \dot{f}(t))^3 = G\left(\frac{\frac{\dot{f}(t)}{1 + \dot{f}(t)}}{1 + \frac{\dot{f}(t)}{1 + \dot{f}(t)}}, f\right)\left(1 + \frac{\dot{f}(t)}{1 + \dot{f}(t)}\right)^3(1 + \dot{f}(t))^3.$$

Упростим выражение

$$\ddot{f}(t) = G\left(\frac{\dot{f}(t)}{1 + 2\dot{f}(t)}, f\right)(1 + 2\dot{f}(t))^3.$$

Тем самым получаем уравнение для второй итерации:

$$g_2''(\tau) = G\left(\frac{g_2'(\tau)}{1 + 2g_2'(\tau)}, g_2\right)(1 + 2g_2'(\tau))^3. \quad (22)$$

Повторим этот алгоритм  $n$  раз и, наконец, получим общий вид для  $n$ -ой итерации:

$$g_n''(\tau) = G\left(\frac{g_n'(\tau)}{1 + ng_n'(\tau)}, g_n\right)(1 + ng_n'(\tau))^3. \quad (23)$$

## 5 Уравнение Ван дер Поля

### 5.1 Преобразование функционального уравнения в дифференциальное уравнение

Рассмотрим другое уравнение, которое имеет периодическое решение:

$$g''(\tau) - a(1 - g^2(\tau))g'(\tau) + g(\tau) = 0. \quad (24)$$

Мы можем представить его в виде системы уравнений:

$$\begin{cases} g'(\tau) = p(\tau) \\ p'(\tau) = a(1 - g^2(\tau))p(\tau) - g(\tau) \end{cases} \quad (25)$$

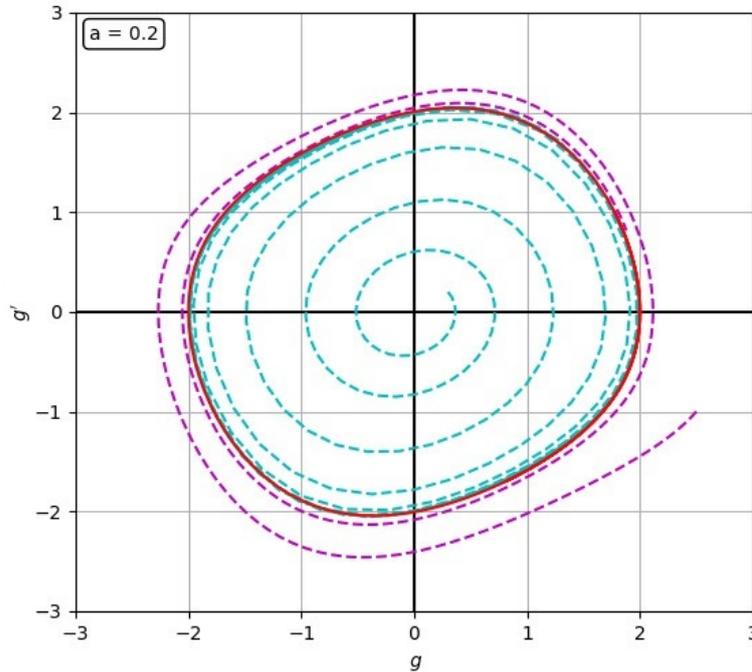


Рис. 5: Предельный цикл системы уравнений (25) при  $a = 0.2$ .

Используя (24), получим следующее уравнение для функции  $f$ :

$$\begin{aligned} \ddot{f}(t) &= [a(1 - g^2(\tau))g'(\tau)](1 + \dot{f}(t))^3 \\ \dot{f}(t) &= -(1 + \dot{f}(t))^2[f(t) - a\dot{f}(t) + f(t)\dot{f}(t) + af^2(t)\dot{f}(t)] \end{aligned} \quad (26)$$

Обратим внимание на то, что уравнение Ван дер Поля имеет периодическое решение, амплитуда которого  $\rho = 2$ . Следовательно, существует значение  $\tau_0$ , для которого выполняется условие  $g'(\tau_0) = 1$ . Это означает, что условие (7) не выполнено. Поэтому ожидаемый результат заключается в том, что уравнение (26) не будет иметь периодических решений.

Перейдем к системе уравнений:

$$\begin{cases} \dot{f}(t) = h(t) \\ \dot{h}(t) = -(1 + h(t))^2[f(t) - ah(t) + f(t)h(t) + af^2(t)h(t)] \end{cases} \quad (27)$$

**Утверждение 7.** Уравнение (26) не имеет периодических решений.

Для лучшего наглядного представления нарисуем решение системы уравнений (27) с параметром  $a = 0.23$  на фазовой плоскости:

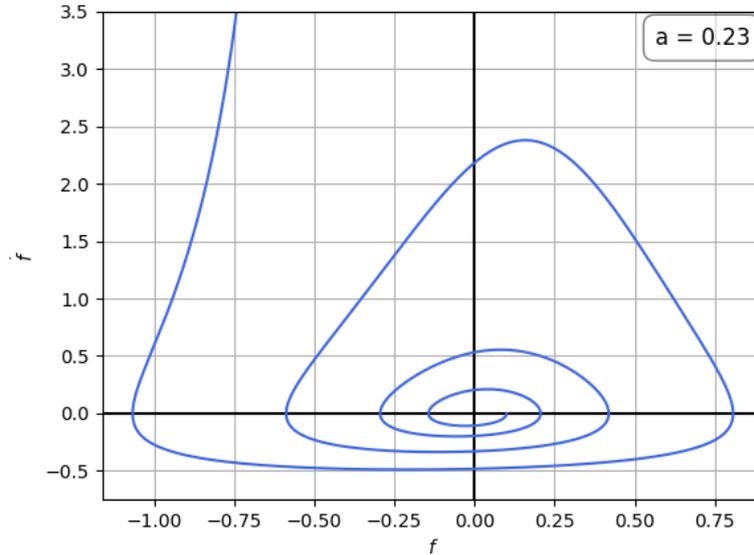


Рис. 6: Решение уравнения (26), изображенное на фазовой плоскости, при  $a = 0.23$ .

Начиная с определенного момента, решение начинает резко возрастать по  $h(t)$ . В процессе вычисления решения значение  $h(t)$  достигло значения, превышающего  $10^7$ . Это наглядно демонстрирует, что уравнение не имеет периодических решений.

## 5.2 Модифицированное уравнение Ван дер Поля

Изменим положение параметра  $a$  в уравнении Ван дер Поля (24) так, чтобы предельный цикл имел непостоянную амплитуду при изменении этого параметра.

$$g''(\tau) - (a - g^2(\tau))g'(\tau) + g(\tau) = 0. \quad (28)$$

Преобразуем исходное уравнение в систему уравнений:

$$\begin{cases} g'(\tau) = p(\tau) \\ p'(\tau) = (a - g^2(\tau))p(\tau) - g(\tau) \end{cases} \quad (29)$$

Пусть  $g(\tau)$  - периодическое решение (28). Было проведено численное исследование, которое позволило установить, что при значениях параметра  $a \in (0, 0.235]$  выполнено  $g'(\tau) < 1, \forall \tau \in \mathbb{R}$ .

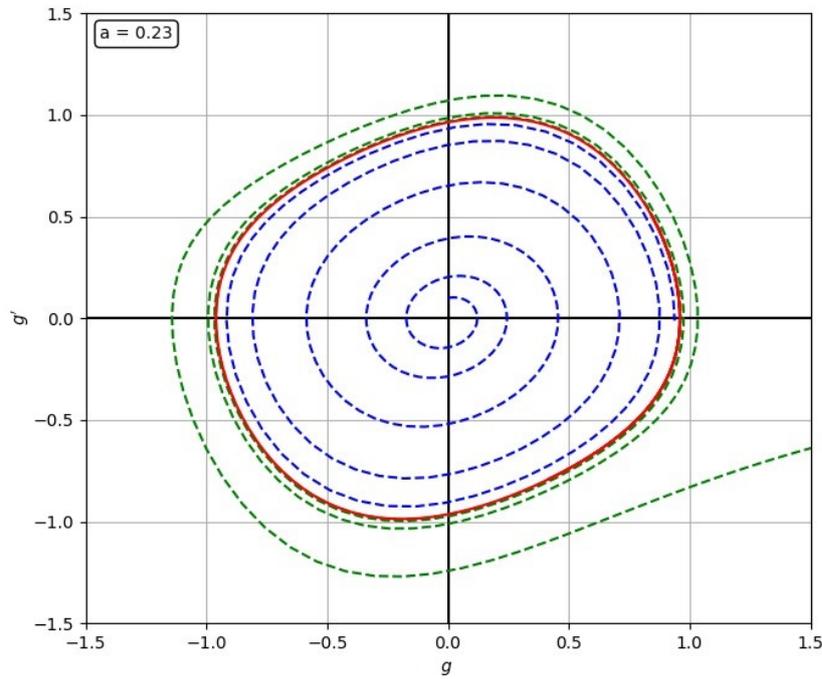


Рис. 7: Предельный цикл системы уравнений (29) при  $a = 0.23$ .

Используя выражение (28), получим следующее уравнение для функции  $f$ :

$$\begin{aligned} \ddot{f}(t) &= [(a - g^2(\tau))g'(\tau)](1 + \dot{f}(t))^3 \\ \ddot{f}(t) &= -(1 + \dot{f}(t))^2[f(t) - a\dot{f}(t) + f(t)\dot{f}(t) + f^2(t)\dot{f}(t)] \end{aligned} \quad (30)$$

Перейдем к системе уравнений:

$$\begin{cases} \dot{f}(t) = h(t) \\ \dot{h}(t) = -(1 + h(t))^2[f(t) - ah(t) + f(t)h(t) + f^2(t)h(t)] \end{cases} \quad (31)$$

**Утверждение 8.** Уравнение (30) имеет периодическое решение при  $a \in (0, 0.235]$ .

Нарисуем при  $a = 0.2$  предельный цикл системы (31) и несколько других решений.

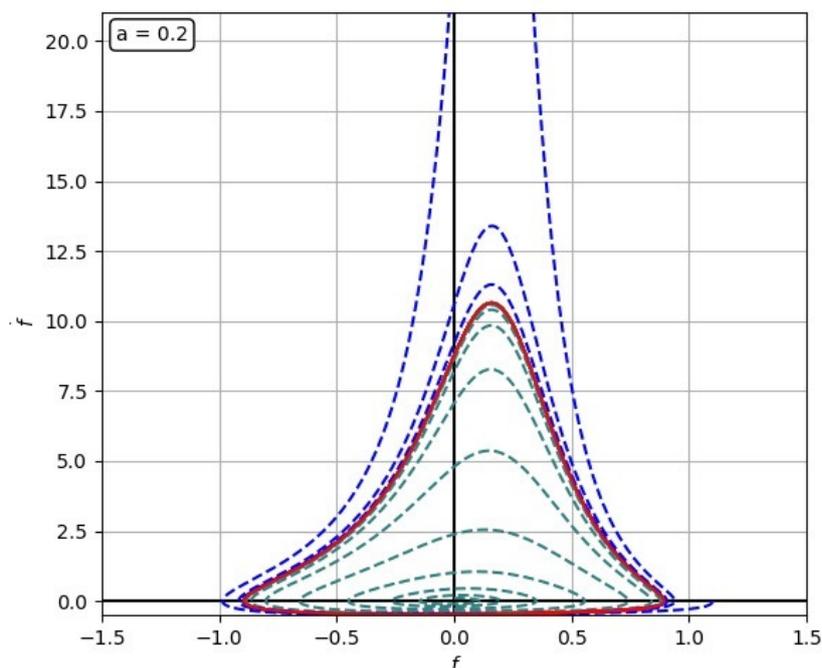


Рис. 8: Предельный цикл системы уравнений (31) при  $a = 0.2$ .

При  $a \geq 0.236$   $\exists \tau$  такое, что  $g'(\tau) = 1$ , поэтому наблюдается такое же поведение решения (31), как и в случае с обычным уравнением Ван дер Поля, например, при  $a = 0.3$ :

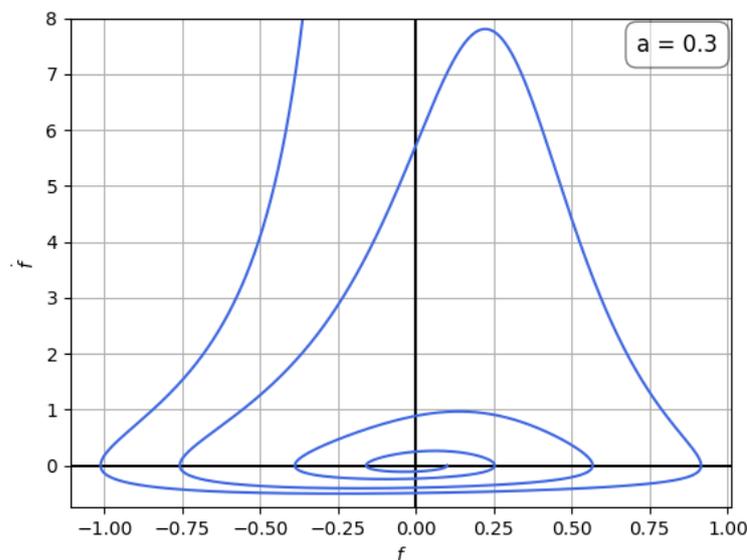


Рис. 9: Траектория решения системы уравнений (31) при  $a = 0.3$ .

С определенного момента, решение начинает резко увеличиваться по  $h(t)$ , где значение  $h(t)$  превысило отметку  $10^7$ .

### 5.3 Итерационный процесс построения дифференциальных уравнений

Для простоты будем называть измененное уравнение Ван дер Поля просто "уравнением Ван дер Поля":

$$g''(\tau) - (a - g^2(\tau))g'(\tau) + g(\tau) = 0, \quad a > 0.$$

Заметим, что уравнение (28) имеет периодическое решение, амплитуда которого равна  $2\sqrt{a}$ .

$$G(g', g) = (a - g^2)g' - g.$$

Подставим  $G(g', g)$  в (23) и получим вид  $n$ -ой итерации данного уравнения:

$$g_n'' = [(a - g_n^2) \frac{1}{1 + ng_n'} - g_n](1 + ng_n')^3.$$

Выполним алгебраические преобразования:

$$g_n''(\tau) - [a - g_n^2(\tau) - g_n(\tau)(1 + ng_n'(\tau))] (1 + ng_n'(\tau))^2 = 0. \quad (32)$$

Были проведены численные исследования, которые позволили найти значения параметра  $a$ , при которых существует  $n$ -ая итерация уравнения (23) с периодическим решением.

n	a
1	$\leq 0.235$
2	$\leq 0.061$
3	$\leq 0.027$
4	$\leq 0.015$
5	$\leq 0.01$
6	$\leq 0.0069$
7	$\leq 0.005$
8	$\leq 0.00385$
9	$\leq 0.00308$
10	$\leq 0.00248$

На следующем рисунке приведены все девять возможных периодических траекторий, соответствующие параметру  $a = 0.003$ :

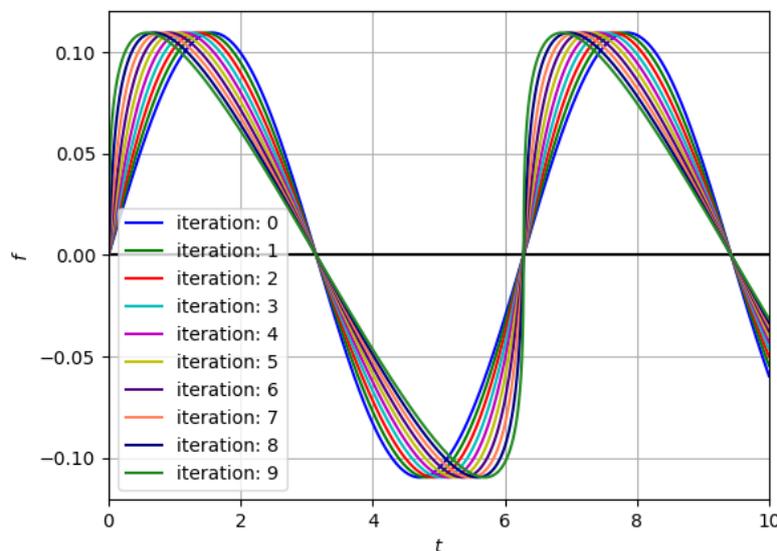


Рис. 10: Периодические решения девяти итераций уравнения (23) при  $a = 0.003$ .

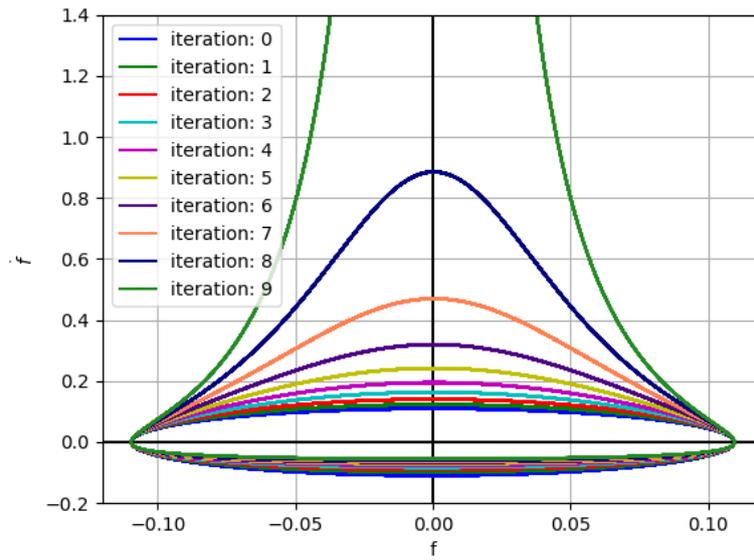


Рис. 11: Предельные циклы девяти итераций уравнения (23) на фазовой плоскости при  $a = 0.003$ .

## 6 Уравнение Рэля

### 6.1 Итерационный процесс построения дифференциальных уравнений

Рассмотрим похожее уравнение и выясним, при каких значениях параметра  $a$  существуют периодические решения для различных итераций следующего уравнения:

$$g''(\tau) - (a - (g')^2(\tau))g'(\tau) + g(\tau) = 0, \quad a > 0. \quad (33)$$

Снова явно выразим  $G(g', g)$ , чтобы выяснить вид  $n$ -ой итерации, воспользовавшись равенством (23):

$$G(g', g) = [a - (g')^2]g' - g.$$

Отсюда получим требуемое дифференциальное уравнение:

$$g_n'' = G\left(\frac{g_n'}{1 + ng_n'}, g_n\right)(1 + ng_n')^3 = \left[\left(a - \left(\frac{g_n'}{1 + ng_n'}\right)^2\right)\frac{g_n'}{1 + ng_n'} - g_n\right](1 + ng_n')^3.$$

Проделаем алгебраические преобразования:

$$g_n''(\tau) - ag_n'(\tau)(1 + ng_n'(\tau))^2 + (g_n'(\tau))^3 + g_n(\tau)(1 + ng_n'(\tau))^3 = 0. \quad (34)$$

Аналогично предыдущему случаю, проведены численные исследования, в результате которых были определены значения параметра  $a$ , при которых уравнение (33) имеет периодическое решение на  $n$ -ной итерации.

n	a
1	≤0.74
2	≤0.18
3	≤0.083
4	≤0.046
5	≤0.029
6	≤0.0207
7	≤0.0153
8	≤0.0117
9	≤0.0092
10	≤0.0075

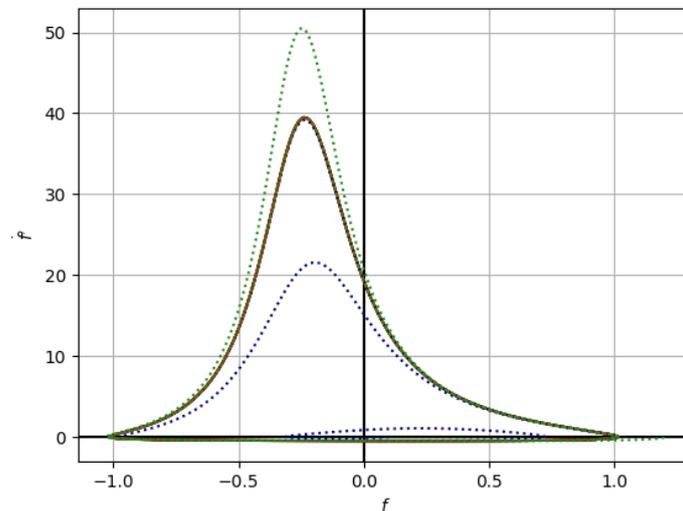


Рис. 12: Предельный цикл уравнения (34) при  $n = 1$ ,  $a = 0.71$ .

Обратим внимание на интересное обстоятельство: для каждой последующей итерации уравнения Рэля требуется значение параметра  $a$ , примерно в три раза большее, чем необходимое для существования периодического решения в уравнении Ван-дер-Поля.

Изобразим при  $a = 0.011$  восемь периодических решений каждой из итерации уравнения Рэля:

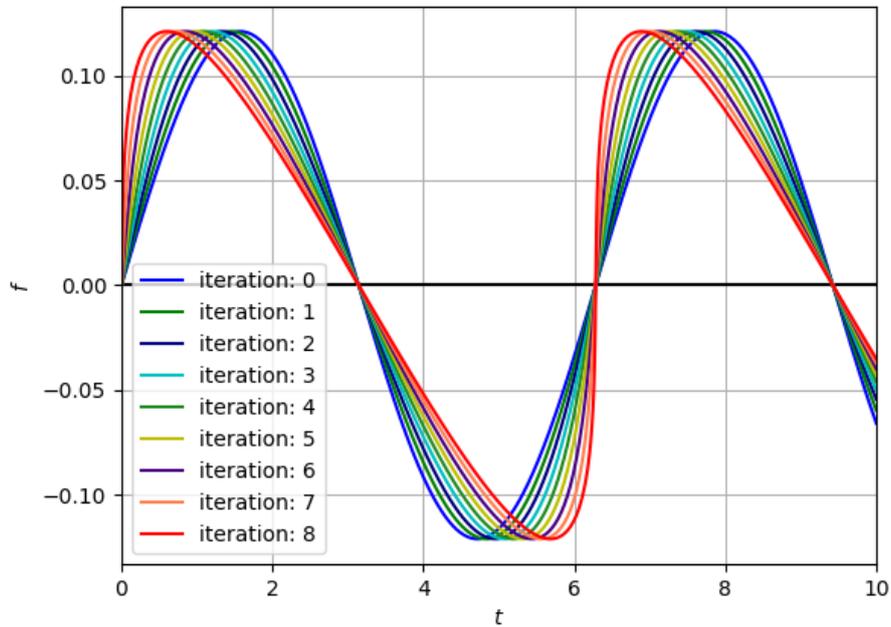


Рис. 13: Периодические решения девяти итераций уравнения (33) при  $a = 0.011$ .

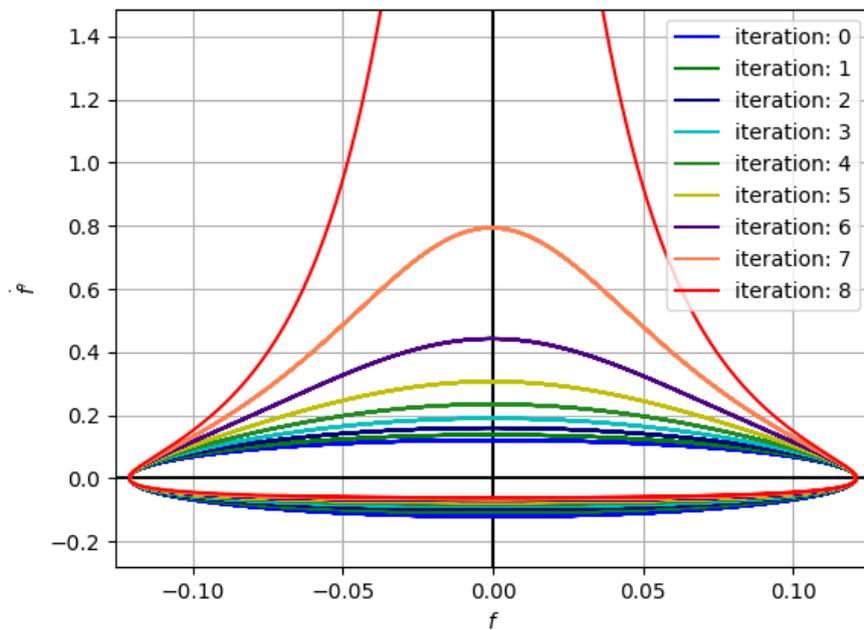


Рис. 14: Предельные циклы восьми итераций уравнения (33) на фазовой плоскости при  $a = 0.011$ .

## 7 Преобразование функционального уравнения в дифференциальное уравнение третьего порядка

Отметим, что не обязательно ограничиваться уравнением второго порядка для определения функции  $f$ :

$$\ddot{f}(t) = g''(\tau)(1 + \dot{f}(t))^3.$$

В свою очередь, рассмотрим функцию  $g = g(\tau)$ , заданную дифференциальным уравнением третьего порядка, которое имеет хотя бы одно периодическое решение:

$$g'''(\tau) = G(g'', g', g).$$

Приведём уравнение (1) к уравнению третьего порядка. Для этого вычислим третью производную уравнения (1), продифференцировав уравнение (6):

$$\ddot{\dot{f}}(t) = g'''(\tau)(1 + \dot{f}(t))^4 + 3g''(\tau)(1 + \dot{f}(t))^2 \dot{f}(t). \quad (35)$$

Воспользуемся следующим преобразованием уравнения (6):

$$\frac{\dot{\dot{f}}(t)}{1 + \dot{f}(t)} = g''(\tau)(1 + \dot{f}(t))^2.$$

Тогда уравнение (44) примет вид:

$$\ddot{\dot{f}}(t) = g'''(1 + \dot{f}(t))^4 + 3 \frac{(\dot{\dot{f}}(t))^2}{1 + \dot{f}(t)}.$$

Приведем к общему виду и получим желаемое уравнение:

$$\ddot{\dot{f}}(t) = G(g'', g', g)(1 + \dot{f}(t))^4 + 3 \frac{(\dot{\dot{f}}(t))^2}{1 + \dot{f}(t)}, \quad (36)$$

где

$$g(\tau) = f(t), \quad g'(\tau) = \frac{\dot{f}(t)}{1 + \dot{f}(t)}, \quad g''(\tau) = \frac{\dot{\dot{f}}(t)}{(1 + \dot{f}(t))^3}. \quad (37)$$

Также отметим, что остаются в силе те же ограничения, что и для уравнения второго порядка: для корректности всех преобразований необходимо выполнение теоремы о неявной функции, а, значит, знаменатели уравнений (7), (37) не должны обращаться в ноль:

$$\dot{f}(t) \neq -1, \quad g'(\tau) \neq 1.$$

Выполним подстановку равенств (37) в уравнение (36). Тогда уравнение (36) примем следующий вид:

$$\ddot{\dot{f}}(t) = G\left(\frac{\dot{\dot{f}}(t)}{(1 + \dot{f}(t))^3}, \frac{\dot{f}(t)}{1 + \dot{f}(t)}, f(t)\right)(1 + \dot{f}(t))^4 + 3 \frac{(\dot{\dot{f}}(t))^2}{1 + \dot{f}(t)}, \quad (38)$$

## 8 Линейное дифференциальное уравнение третьего порядка

### 8.1 Итерационный процесс построения дифференциальных уравнений

Будем изучать линейное дифференциальное уравнение третьего порядка, имеющее периодическое решение:

$$g_0'''(\tau) + g_0'(\tau) = 0. \quad (39)$$

Проведем итерационный процесс для уравнения (39):

$$\ddot{f}(t) = g_0'''(\tau)(1 + \dot{f}(t))^4 + 3 \frac{(\dot{f}(t))^2}{1 + \dot{f}(t)} = -g_0'(\tau)(1 + \dot{f}(t))^4 + 3 \frac{(\dot{f}(t))^2}{1 + \dot{f}(t)}.$$

Воспользуемся равенством (4):

$$\ddot{f}(t) = -\frac{\dot{f}(t)}{1 + \dot{f}(t)}(1 + \dot{f}(t))^4 + 3 \frac{(\dot{f}(t))^2}{1 + \dot{f}(t)} = -\dot{f}(t)(1 + \dot{f}(t))^3 + 3 \frac{(\dot{f}(t))^2}{1 + \dot{f}(t)}.$$

Получим явный вид первой итерации:

$$g_1'''(\tau) = -g_1'(\tau)(1 + g_1'(\tau))^3 + 3 \frac{(g_1''(\tau))^2}{1 + g_1'(\tau)}. \quad (40)$$

Уравнение (40) является дифференциальным уравнением третьего порядка с периодическим решением, поэтому его можно использовать для нахождения следующей итерации.

$$\ddot{f}(t) = g_1'''(\tau)(1 + \dot{f}(t))^4 + 3 \frac{(\dot{f}(t))^2}{1 + \dot{f}(t)} = -\left[ g_1'(\tau)(1 + g_1'(\tau))^3 + 3 \frac{(g_1''(\tau))^2}{1 + g_1'(\tau)} \right] (1 + \dot{f}(t))^4 + 3 \frac{(\dot{f}(t))^2}{1 + \dot{f}(t)}.$$

Используем равенство (37):

$$\ddot{f}(t) = -\left[ \frac{\dot{f}(t)}{1 + \dot{f}(t)}(1 + \frac{\dot{f}(t)}{1 + \dot{f}(t)})^3 + 3 \frac{\left( \frac{\dot{f}(t)}{(1 + \dot{f}(t))^3} \right)^2}{1 + \frac{\dot{f}(t)}{1 + \dot{f}(t)}} \right] (1 + \dot{f}(t))^4 + 3 \frac{(\dot{f}(t))^2}{1 + \dot{f}(t)}.$$

Упростим выражение:

$$\ddot{f}(t) = -\dot{f}(t)(1 + 2\dot{f}(t))^3 + 6 \frac{(\dot{f}(t))^2}{1 + 2\dot{f}(t)}.$$

Аналогично получим вид третьей итерации:

$$\ddot{f}(t) = -\dot{f}(t)(1 + 3\dot{f}(t))^3 + 9 \frac{(\dot{f}(t))^2}{1 + 3\dot{f}(t)}.$$

И, наконец, проделав этот алгоритм  $n$  раз, определим вид  $n$ -ой итерации:

$$g_n'''(\tau) = -g_n'(\tau)(1 + ng_n'(\tau))^3 + 3n \frac{(g_n''(\tau))^2}{1 + ng_n'(\tau)}. \quad (41)$$

## 8.2 Зависимость начальных условий на $n$ -ой итерации от начальных условий линейного дифференциального уравнения третьего порядка

Выясним зависимость  $g_n''(\tau)$  от  $g_0''(\tau)$  и  $g_0'(\tau)$ , воспользовавшись равенствами (4), (37):

$$g_0''(\tau) = \frac{g_1''(t)}{(1+g_1'(t))^3} \implies g_1''(t) = g_0''(\tau)(1+g_1'(t))^3 = g_0''(\tau) \left(1 + \frac{g_0'(\tau)}{1-g_0'(\tau)}\right)^3.$$

Из этого следует явная зависимость  $g_1''(\tau)$  от  $g_0''(\tau)$  и  $g_0'(\tau)$ :

$$g_1''(t) = \frac{g_0''(\tau)}{(1-g_0'(\tau))^3}. \quad (42)$$

Из равенства (42) и условия  $g_0(0) = 0$  следует:

$$g_1''(0) = \frac{g_0''(0)}{(1-g_0'(0))^3}.$$

Выполним аналогичные преобразования для  $g_2''(\tau)$ ,  $g_3''(\tau)$ :

$$g_2''(0) = \frac{g_1''(0)}{(1-g_1'(0))^3} = \frac{\frac{g_0''(0)}{(1-g_0'(0))^3}}{\left(1 - \frac{g_0'(0)}{1-g_0'(0)}\right)^3} = \frac{g_0''(0)}{(1-2g_0'(0))^3},$$

Таким образом, выводим необходимую зависимость:

$$g_n''(0) = \frac{g_0''(0)}{(1-ng_0'(0))^3}. \quad (43)$$

Равенство (43) позволяет установить связь между начальными условиями уравнения (41) и начальными условиями уравнения (39):

$$\begin{cases} g_n(0) = \dots = g_0(0) = 0 \\ g_n'(0) = \frac{g_0'(0)}{1-ng_0'(0)} \\ g_n''(0) = \frac{g_0''(0)}{(1-ng_0'(0))^3} \end{cases} \quad (44)$$

### 8.3 Визуализация периодических решений на разных итерациях

Визуализируем периодическое решение дифференциального уравнения, соответствующего первой итерации с начальными условиями:

$$\begin{cases} g_1(0) = g_0(0) = 0 \\ g_1'(0) = \frac{g_0'(0)}{1 - g_0'(0)} = \frac{0.89}{1 - 0.89} = \frac{89}{11} \\ g_1''(0) = \frac{g_0''(0)}{(1 - g_0'(0))^3} = \frac{0.42}{(1 - 0.89)^3} = \frac{42 \cdot 10^4}{11^3} \end{cases} \quad (45)$$

где  $g_0(0) = 0$ ,  $g_0'(0) = 0.89$ ,  $g_0''(0) = 0.42$ :

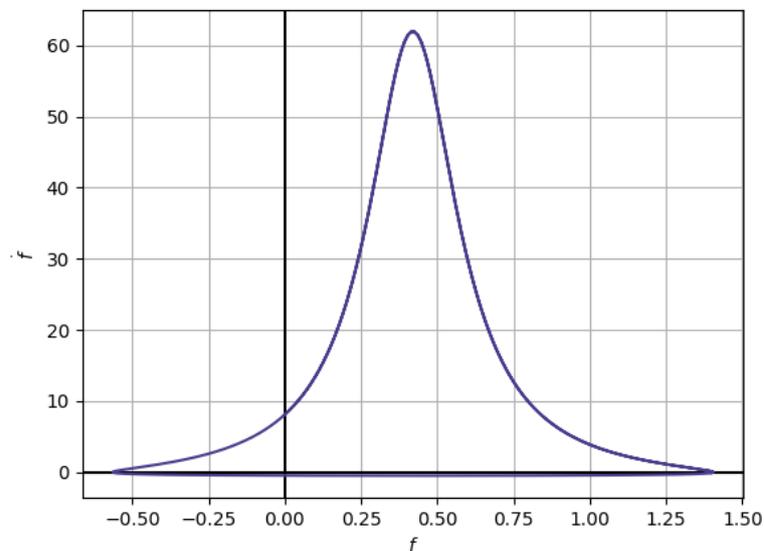


Рис. 15: Периодическое решение, изображенные на проекции  $f, \dot{f}$ , уравнения (41) с начальными условиями (45) при  $n = 1$ .

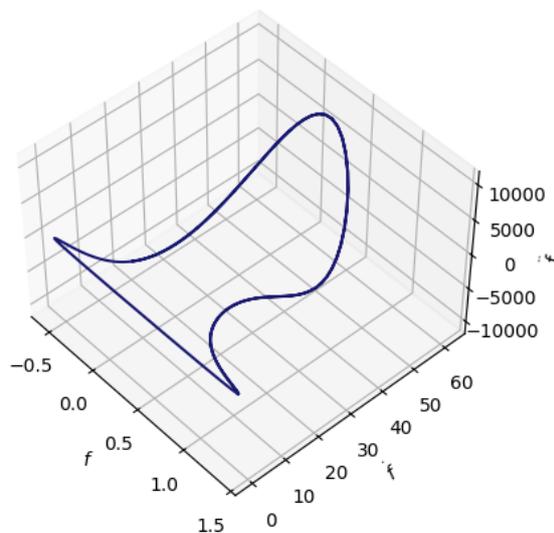


Рис. 16: Периодическое решение в фазовом пространстве уравнения (41) с начальными условиями (45) при  $n = 1$ .

Представим графически периодические решения дифференциальных уравнений на каждой из итераций с начальными условиями, которые соответствуют:

$$\begin{cases} g_0(0) = 0 \\ g'_0(0) = 0.11 \\ g''_0(0) = 0.1 \end{cases} \quad (46)$$

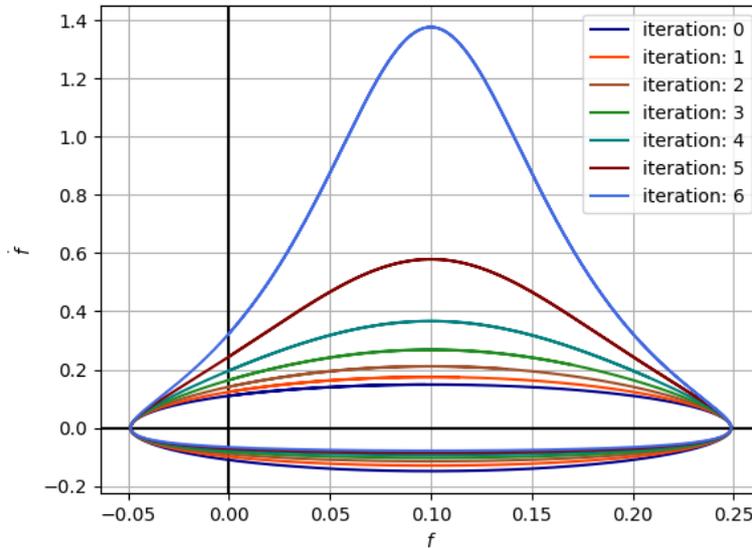


Рис. 17: Периодические решения, изображенные на проекции  $f, \dot{f}$ , уравнения (41) с начальными условиями (46).

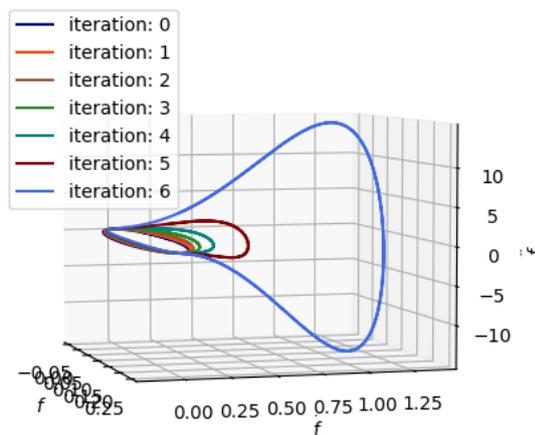


Рис. 18: Периодические решения в фазовом пространстве уравнения (41) с начальными условиями (46).

## Заключение

В данном исследовании рассмотрено функциональное уравнение:

$$f(t) = g(t + f(t)),$$

где  $g$  является  $T$  - периодической функцией, представляющей собой решение дифференциального уравнения различных порядков. Основная цель заключалась в определении алгоритмов построения дифференциальных уравнений и нахождении периодических решений этих уравнений, которые являются решениями функционального уравнения.

В ходе работы были достигнуты следующие результаты:

1. Разработаны алгоритмы построения дифференциальных уравнений различных порядков, решения которых соответствуют решениям функционального уравнения.
2. Определен итерационный алгоритм для построения дифференциальных уравнений.
3. Найдены и исследованы периодические решения построенных уравнений методами численного анализа, а также изучены условия их существования.

Были подробно рассмотрены линейные дифференциальные уравнения второго и третьего порядка, а также нелинейные уравнения Ван дер Поля и Рэля. Для каждого уравнения был выполнен итерационный процесс, в результате которого получены новые уравнения. Проведенный анализ подтвердил возможность существования периодических решений и определил условия их существования.

Ожидается, что результаты работы могут быть применены в различных областях науки и техники, где важны периодические процессы и их стабильность. Используемые методы численного анализа также могут быть полезны для дальнейших исследований в данной области.

## Список литературы

- [1] В.Н. Матвеев, *Методы вычислений* (2007).
- [2] Н.С.Бахвалов, Н.П.Жидков, Г.М.Кобельков, *Численные методы* (1987).
- [3] Н.Н.Баутин, Е.А.Леонтович, *Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости* (1990).

В Оргкомитет Смотра дипломных работ математиков России  
от Кутузовой Алины Андреевны  
Заявление о новизне

Сообщаю, что новыми в моей представленной на Смотр выпускной квалификационной работе под названием «Некоммутативные отображения  $n$ -симплексов» являются результаты глав 2, 3 и 4:

- Доказательство того, что некоммутативное отображение типа Буссинеска является решением уравнения Янга-Бакстера. Отображение построено через задачу матричной рефакторизации типа Буссинеска, в случае, когда ее элементы принадлежат некоммутативному телу;
- Доказательство того, что некоммутативное отображение типа Нелинейного уравнения Шредингера (НУШ) является решением уравнения тетраэдров Замолодчикова. Отображение построено через постановку матрицы Дарбу с элементами из некоммутативного тела в локальное уравнение Янга-Бакстера.
- Построение некоммутативного отображения типа производного НУШ и доказательство того, что оно является решением уравнения тетраэдров Замолодчикова.

Также сообщаю, что для проверки новизны было проделано следующее:

- В период с 01 января по 15 февраля 2024 г. мною был произведён поиск в следующих поисковых системах: Яндекс, Google, Google Scholar, Web of Science, arxiv.org по следующим ключевым словам: Boussinesq type Yang-Baxter maps, noncommutative NLS tetrahedron maps, tetrahedron maps on division rings, noncommutative derivative NLS tetrahedron maps, в выдаче поисковиков было исследовано 34 статьи, 3 препринта и все они не содержали материала, заявляемого автором выпускной квалификационной работы в качестве нового. При поиске не было встречено работ или упоминаний работ, позволяющих усомниться в новизне материала.
- Проведена серия консультаций с моим научным руководителем Константином-Ризосом Сотирисом, доцентом кафедры нелинейной динамики Ярославского государственного университета им. П.Г. Демидова.
- Проведена серия консультаций с экспертами по интегрируемым системам из математического факультета Ярославского государственного университета им. П.Г. Демидова, а также с сотрудниками МГУ.
- Выполнен доклад на 9-ой международной летней школе-конференции по геометрическим методам математической физики, МГУ им. М. В. Ломоносова. (2022 г.)

Таким образом, по результатам поиска в сети Интернет и тематических научных базах, а также обсуждений с указанными выше специалистами следует, что, по-видимому, представленный в моей выпускной квалификационной работе указанный выше математический материал действительно является новым.

Подтверждаю, что являюсь автором предоставляемой на Смотр работы и прошу принять её для участия в Смотре. Принимаю на себя обязательство соблюдать правила Смотра. Также (в соответствии с п. 4 Положения о Смотре) принимаю на себя обязательство оценить 5 работ участников Смотра, выданных мне Оргкомитетом в результате жеребьёвки и сверх того оценить 2-5 работ других участников Смотра на мой выбор. Я понимаю правила оценки работ, приведённые в п. 4.3 Положения о Смотре. Даю согласие на публикацию адреса моей электронной почты.

Защита работы состоится 17.06.2024. На Смотр представлен проект текста работы.



*Подпись*

Кутузова Алина Андреевна  
16 июня 2024 г. Ярославль, Россия

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования

«Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова»

Кафедра нелинейной динамики

Сдано на кафедру

«6» июня 2024 г.

Заведующий кафедрой

Академик РАН, д.ф.-м.н., профессор

\_\_\_\_\_ Козлов В.В.

Выпускная квалификационная работа

**Некоммутативные отображения  $n$ -симплексов**

направление подготовки

01.03.02 Прикладная математика и информатика

Научный руководитель

PhD по математике (University of Leeds, UK),

Доцент

\_\_\_\_\_ С. Константину-Ризос

«6» июня 2024 г.

Студент группы ПМИ-43БО

\_\_\_\_\_ Кутузова А.А.

«6» июня 2024 г.

Ярославль 2024 г.

# Реферат

Объем 29 с., 4 гл., 0 рис., 0 табл., 13 источников, 0 прил.

**Уравнение Янга-Бакстера, уравнение тетраэдров, уравнение  $n$ -симплексов, уравнение Буссинеска, уравнение типа НУШ, уравнение типа производного НУШ.**

Объектом исследования является уравнение  $n$ -симплексов для  $n = 3, 4$ .

Цель работы – построить некоммутативные отображения типа Буссинеска, НУШ и производного НУШ, которые удовлетворяют уравнению  $n$ -симплексов.

В результате работы были построены некоммутативное отображение типа Буссинеска, являющееся отображением Янга-Бакстера, то есть удовлетворяющее уравнению  $n$ -симплексов для  $n = 3$ , и некоммутативные отображения типа НУШ и производного НУШ, являющиеся отображениями тетраэдров, то есть удовлетворяющие уравнению  $n$ -симплексов для  $n = 4$ . Во время работы над ВКР написаны две статьи в сборниках научных трудов молодых ученых, аспирантов и студентов.

# Содержание

<b>Введение</b>	4
<b>1 Предварительные условия</b>	6
1.1 Обозначения . . . . .	6
1.2 Отображение Янга–Бакстера и проблема матричной рефак- горизации . . . . .	7
1.3 Функциональное уравнение тетраэдров Замолодчикова VS локальное уравнение Янга–Бакстера . . . . .	8
1.4 Задача матричной шесть-факторизации . . . . .	10
<b>2 Некоммутативное отображение типа Буссинеска</b>	12
<b>3 Некоммутативное отображение типа НУШ</b>	16
<b>4 Некоммутативное отображение типа производного НУШ</b>	20
<b>Выводы</b>	26
<b>Литература</b>	27

## Введение

Уравнение Янга–Бакстера активно изучалось последние несколько десятилетий. Оно имеет приложения в различных областях математики и физики, от статистической и квантовой механики до топологии и теории представлений, и заслужило свое место в списке самых фундаментальных уравнений математической физики.

Уравнение тетраэдров Замолодчикова является многомерным аналогом уравнения Янга–Бакстера, и впервые было введено Замолодчиковым [6, 7]. Первые возможные решения тетраэдров были найдены самим Замолодчиковым, но только Бакстер [8] доказал, что они действительно удовлетворяют этому уравнению.

Отображения тетраэдров, являющиеся решением функционального уравнения тетраэдров Замолодчикова, имеют большое значение в теории интегрируемых систем, поскольку они строго связаны с интегрируемыми уравнениями на трехмерной решетке, которые также дискретизируют нелинейные интегрируемые дифференциальные уравнения в частных производных и в то же время обладают очень интересными алгебро-геометрическими свойствами. С другой стороны, некоммутативные версии или расширения интегрируемых систем за последние несколько десятилетий стали растущей областью, имеющей множество применений в математической физике, и изучались многими учеными. Поэтому, существует естественная необходимость в изучении некоммутативных решений уравнения тетраэдров. Недавно, в литературе появились результаты по их изучению [9, 10, 3].

Решения локального уравнения Янга–Бакстера могут быть решениями уравнения тетраэдров [13, 11], так как отображение, полученное путем подстановки квадратной матрицы в локальное уравнение Янга–Бакстера, может удовлетворять уравнению тетраэдров [13].

В этой работе мы получаем некоммутативные отображения путем подстановки матриц Дарбу, связанных с уравнением Буссинеска в задачу матричной рефакторизации, нелинейным уравнением Шредингера (НУШ) и производным нелинейным уравнением Шредингера (ПНУШ), в локальное уравнение Янга–Бакстера.

Работа организована следующим образом: в следующем разделе мы приводим всю предварительную информацию, необходимую для остальной части текста. В частности, мы фиксируем обозначения, даем определение задач матричной рефакторизации и трифакторизации, локального уравнения Янга–Бакстера и уравнения тетраэдров. В разделе 2 мы получаем отображение путем подстановки матрицы Дарбу в задачу матричной рефакторизации и доказываем, что оно удовлетворяет уравнению Янга–Бакстера. В разделах 3 и 4 мы выводим отображения, которые получаются после подстановки матрицы Дарбу в локальное уравнение Янга–Бакстера, и доказываем, что отображения удовлетворяют уравнению тетраэдров Замолодчикова.

# 1 Предварительные условия

В этом разделе мы объясняем связь между решениями задачи матричной рефакторизации и решениями уравнения Янга Бакстера. Кроме того, раскрываем связь между решениями локального уравнения Янга–Бакстера и решениями функционального уравнения тетраэдров.

## 1.1 Обозначения

Во всем тексте:

- Через  $\mathcal{X}$  мы обозначаем произвольное множество, латинскими курсивными буквами (т.е.  $x, y, u, v$  и т.д.) элементы  $\mathcal{X}$ , за исключением «спектрального параметра», который обозначается греческой буквой  $\lambda$ . Через  $\text{End}(\mathcal{X})$  мы обозначаем множество отображений  $\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ .
- Через  $\mathfrak{R}$  мы обозначаем некоммутативное кольцо с делением, а его элементы — жирными курсивными латинскими буквами (т.е.  $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{u}$  и т.д.). То есть  $\mathfrak{R}$  является ассоциативной алгеброй с умножением и единичным элементом  $1$ , где нет коммутативности относительно умножения ( $\mathbf{x}\mathbf{y} \neq \mathbf{y}\mathbf{x}$ ), и каждый ненулевой элемент  $\mathbf{x}$  имеет обратный  $\mathbf{x}^{-1}$ , т.е.  $\mathbf{x}\mathbf{x}^{-1} = \mathbf{x}^{-1}\mathbf{x} = 1$ .
- Центр кольца с делением будем обозначать  $Z(\mathfrak{R}) = \{a \in \mathfrak{R} : \forall \mathbf{x} \in \mathfrak{R}, a\mathbf{x} = \mathbf{x}a\}$ .
- Матрицы будем обозначать заглавными римскими буквами (например,  $A, B, C$  и т.д.). Кроме того, матричные операторы обозначим заглавными готическими буквами (например,  $\mathfrak{L} = D_x + U$ ).

## 1.2 Отображение Янга–Бакстера и проблема матричной рефакторизации

Рассмотрим отображение  $Y : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X} \times \mathcal{X}$ , где  $\mathcal{X}$  — произвольное пространство,

$$Y : (x, y) \mapsto (u(x, y), v(x, y)), \quad (1)$$

где  $u, v : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ .

Определим функции  $Y^{i,j} : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X} \times \mathcal{X} \times \mathcal{X}$  для  $i, j = 1, 2, 3, i \neq j$

$$Y^{12}(x, y, z) = (u(x, y), v(x, y), z), \quad (2)$$

$$Y^{13}(x, y, z) = (u(x, z), y, v(x, z)), \quad (3)$$

$$Y^{23}(x, y, z) = (x, u(y, z), v(y, z)), \quad (4)$$

где  $x, y, z \in \mathcal{X}$ . Рассмотрим уравнение Янга–Бакстера

$$Y^{12} \circ Y^{13} \circ Y^{23} = Y^{23} \circ Y^{13} \circ Y^{12}. \quad (5)$$

В [4] Веселов предложил термин “Отображение Янга–Бакстера” для теоретико-множественных решений квантового уравнения Янга–Бакстера. Отображение (1) является отображением Янга–Бакстера, если оно удовлетворяет уравнению Янга–Бакстера (5). Более того, оно называется обратимым, если композиция  $Y^{ij}$  и  $Y^{ji}$  для  $i, j = 1, 2, 3, i \neq j$  является тождественным отображением

$$Y^{ij} \circ Y^{ji} = Id. \quad (6)$$

Будем называть параметрическим отображением Янга–Бакстера отображение

$$Y : (x, y, a, b) \mapsto (u(x, y, a, b), v(x, y, a, b)), \quad (7)$$

которое связано с параметрическим уравнением Янга–Бакстера:

$$Y_{a,b}^{12} \circ Y_{a,c}^{13} \circ Y_{b,c}^{23} = Y_{b,c}^{23} \circ Y_{a,c}^{13} \circ Y_{a,b}^{12}. \quad (8)$$

Следуя примеру Веселова в [5], мы называем матрицей Лакса для параметрического отображения Янга–Бакстера матрицу  $L_c = L(x; c; \lambda)$ , зависящую от переменной  $x$ , параметра  $c$  и спектрального параметра  $\lambda$ , такую, что выполняется уравнение Лакса

$$L_a(u; a, \lambda)L_b(v; b, \lambda) = L_b(y; b, \lambda)L_a(x; a, \lambda). \quad (9)$$

Уравнение (9) также называется *задачей матричной рефакторизации*.

Определим задачу *матричной трифакторизации*

$$L_a(u; a, \lambda)L_b(v; b, \lambda)L_c(w; c, \lambda) = L_a(x; a, \lambda)L_b(y; b, \lambda)L_c(z; c, \lambda). \quad (10)$$

Основным ингредиентом построения отображения является следующая теорема [14].

**Теорема 1.** Пусть  $Y : (x, y, a, b) \mapsto (u(x, y, a, b), v(x, y, a, b))$  — отображение, удовлетворяющее уравнению Лакса (9), для некоторой матрицы  $L_a(x) = L(x; a, \lambda)$ . Тогда, если для этой матрицы Лакса  $L_a(x)$  задача матричной трифакторизации (10) имеет только тривиальное решение  $u = x$ ,  $v = y$  и  $w = z$ , тогда отображение  $Y : (x, y, a, b) \mapsto (u(x, y, a, b), v(x, y, a, b))$  является отображением Янга–Бакстера.

Следуя этой теореме, для подходящей матрицы можно построить отображение Янга–Бакстера исходя из уравнения Лакса (9). В разделе 2 приводится построение отображения для матрицы типа Буссинеска.

### 1.3 Функциональное уравнение тетраэдров Замолодчикова VS локальное уравнение Янга–Бакстера

Отображение  $T \in \text{End}(\mathcal{X}^3)$ , определяемое

$$T : (x, y, z) \mapsto (u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z)), \quad (11)$$

называется *отображением тетраэдров*, если оно удовлетворяет *функциональному уравнению тетраэдров* (или уравнению тетраэдров Замолодичева)

$$T^{123} \circ T^{145} \circ T^{246} \circ T^{356} = T^{356} \circ T^{246} \circ T^{145} \circ T^{123}. \quad (12)$$

Функции  $T^{ijk} \in \text{End}(\mathcal{X}^6)$ ,  $i, j, k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ ,  $i \neq j \neq k$  в (12) — отображения, которые действуют как  $T$  на элементах  $ijk$  декартова произведения  $\mathcal{X}^6$  и тривиально на других. Например,

$$T^{246}(x, y, z, r, s, t) = (x, u(y, r, t), z, v(y, r, t), s, w(y, r, t)).$$

Кроме того, если мы присвоим комплексные параметры  $a$ ,  $b$  и  $c$  переменным  $x$ ,  $y$  и  $z$  соответственно, мы определим отображение  $T \in \text{End}[(\mathcal{X} \times \mathbb{C})^3]$ , а именно  $T : ((x, a), (y, b), (z, c)) \mapsto ((u(x, y, z), a), (v(x, y, z), b), (w(x, y, z), c))$ , которое, для простоты, мы обозначим как

$$T_{a,b,c} : (x, y, z) \mapsto (u_{a,b,c}(x, y, z), v_{a,b,c}(x, y, z), w_{a,b,c}(x, y, z)). \quad (13)$$

Отображение (13) называется *параметрическим отображением тетраэдров*, если оно удовлетворяет уравнению

$$T_{a,b,c}^{123} \circ T_{a,d,e}^{145} \circ T_{b,d,f}^{246} \circ T_{c,e,f}^{356} = T_{c,e,f}^{356} \circ T_{b,d,f}^{246} \circ T_{a,d,e}^{145} \circ T_{a,b,c}^{123}. \quad (14)$$

Пусть  $L = L(x, k)$  — матрица, зависящая от переменной  $x \in \mathcal{X}$  и параметра  $k \in \mathbb{C}$ , вида

$$L(x, k) = \begin{pmatrix} a(x, k) & b(x, k) \\ c(x, k) & d(x, k) \end{pmatrix}, \quad (15)$$

где  $a, b, c$  и  $d$  являются скалярными функциями от  $x$  и  $k$ . Пусть  $L_{ij}^3$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ ,  $i \neq j$ , являются  $3 \times 3$  расширениями матрицы (15), определяемыми

$$L_{12}^3 = \begin{pmatrix} a(x, k) & b(x, k) & 0 \\ c(x, k) & d(x, k) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad L_{13}^3 = \begin{pmatrix} a(x, k) & 0 & b(x, k) \\ 0 & 1 & 0 \\ c(x, k) & 0 & d(x, k) \end{pmatrix}, \quad L_{23}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a(x, k) & b(x, k) \\ 0 & c(x, k) & d(x, k) \end{pmatrix}, \quad (16)$$

где  $L_{ij}^3 = L_{ij}^3(x, k)$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ .

Следующая задача матричной трифакторизации

$$L_{12}^3(u, a)L_{13}^3(v, b)L_{23}^3(w, c) = L_{23}^3(z, c)L_{13}^3(y, b)L_{12}^3(x, a), \quad (17)$$

где матрицы  $L_{ij}^3$  определены как в (16), является уравнением Майе – Нэйхоффа [12] в форме Корепанова, которое появляется в литературе как *локальное уравнение Янга–Бакстера*.

Если приведенная выше задача матричной трифакторизации определяет отображение тетраэдров, мы будем называть уравнение (17) его *представлением Лакса*. Уравнение (17) было использовано Кашаевым, Корепановым и Сергеевым для классификации решений уравнения тетраэдров Замолодчикова.

В следующем пункте рассматривается условие, при котором отображение, полученное из уравнения (17), удовлетворяет уравнению тетраэдров.

## 1.4 Задача матричной шесть-факторизации

Пусть  $L_{ij}^4$ ,  $i, j = 1, \dots, 4$ ,  $i \neq j$ , будет  $4 \times 4$  расширением матрицы  $L \equiv L(x, k) = \begin{pmatrix} a(x, k) & b(x, k) \\ c(x, k) & d(x, k) \end{pmatrix}$ , а именно

$$L_{12}^4 = \begin{pmatrix} a(x, k) & b(x, k) & 0 & 0 \\ c(x, k) & d(x, k) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad L_{13}^4 = \begin{pmatrix} a(x, k) & 0 & b(x, k) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ c(x, k) & 0 & d(x, k) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$L_{23}^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a(x, k) & b(x, k) & 0 \\ 0 & c(x, k) & d(x, k) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad L_{14}^4 = \begin{pmatrix} a(x, k) & 0 & 0 & b(x, k) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ c(x, k) & 0 & 0 & d(x, k) \end{pmatrix},$$

$$L_{24}^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a(x, k) & 0 & b(x, k) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & c(x, k) & 0 & d(x, k) \end{pmatrix}, \quad L_{34}^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a(x, k) & b(x, k) \\ 0 & 0 & c(x, k) & d(x, k) \end{pmatrix}. \quad (18)$$

Ключевой идеей построения отображения тетраэдров является следующая теорема [3].

**Теорема 2.** Пусть

$$T_{a,b} := (x, y, z) \rightarrow (u_{a,b,c}(x, y, z), v_{a,b,c}(x, y, z), w_{a,b,c}(x, y, z)) \quad (19)$$

— отображение, удовлетворяющее локальному уравнению Янга–Бакстера

$$L_{12}^3(u, a)L_{13}^3(v, b)L_{23}^3(w, c) = L_{23}^3(z, c)L_{13}^3(y, b)L_{12}^3(x, a),$$

для некоторой матрицы  $L = L(x, a)$ . Тогда, если для этой матрицы Лакса  $L$  следующая задача матричной шеть-факторизации

$$\begin{aligned} L_{34}^4(\hat{t}, a_6)L_{24}^4(\hat{s}, a_5)L_{14}^4(\hat{r}, a_4)L_{23}^4(\hat{z}, a_3)L_{13}^4(\hat{y}, a_2)L_{12}^4(\hat{x}, a_1) = \\ L_{34}^4(t, a_6)L_{24}^4(s, a_5)L_{14}^4(r, a_4)L_{23}^4(z, a_3)L_{13}^4(y, a_2)L_{12}^4(x, a_1) \end{aligned} \quad (20)$$

имеет только тривиальное решение  $\hat{t} = t, \hat{s} = s, \hat{r} = r, \hat{z} = z, \hat{y} = y$  и  $\hat{x} = x$ , тогда отображение (19) является параметрическим отображением тетраэдров.

По данной теореме для подходящей матрицы можно построить отображение тетраэдров при помощи локального уравнения Янга–Бакстера. Явные построения для матриц типа НУШ и производного НУШ приведены в разделах 3 и 4 соответственно.

## 2 Некоммутативное отображение типа Буссинеска

Уравнение Буссинеска, как в его непрерывной, так и в дискретной версии, широко изучалось в течение последних нескольких десятилетий и заняло свое место в списке фундаментальных уравнений математической физики. Своей популярностью оно обязано своей весьма интересной и к тому же простой форме, имеющей ряд приложений в гидродинамике и теории интегрируемых систем.

Дискретная версия уравнения Буссинеска выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned}(p_{01}-p_{10})(p-r_{11}+qq_{11}) &= (a-b)q, \\ (q_{01}-q_{10})(p-r_{11}+qq_{11}) &= b-a, \\ (r_{01}-r_{10})(p-r_{11}+qq_{11}) &= (b-a)q_{11}\end{aligned}\tag{21}$$

Переход от непрерывной версии к дискретной происходит с помощью преобразования Дарбу. Матрицей Дарбу для этого уравнения является матрица  $L_a(\mathbf{x})$ .

Пусть  $\mathfrak{K}$  — тело. Рассмотрим матрицу типа Буссинеска

$$L_a(\mathbf{x}) := \begin{pmatrix} -\mathbf{x}_3 & 1 & 0 \\ -\mathbf{x}_4 & 0 & 1 \\ a - \mathbf{x}_1\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_2\mathbf{x}_4 - \lambda & \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} := (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4), \tag{22}$$

где  $\mathbf{x}_i, i = 1, \dots, 4$  and  $a \in Z(\mathfrak{K})$ .

Рассмотрим задачу матричной рефакторизации

$$L_a(\mathbf{u})L_b(\mathbf{v}) = L_b(\mathbf{y})L_a(\mathbf{x}) \tag{23}$$

Тогда из (23) получим соответствие

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_1 &= \mathbf{y}_1 - (a - b)(\mathbf{y}_4 - \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\mathbf{y}_3)^{-1}\mathbf{x}_2, \\
\mathbf{u}_2 &= (a - b)(\mathbf{y}_4 - \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\mathbf{y}_3)^{-1} + \mathbf{y}_2, \\
\mathbf{u}_3 &= \mathbf{y}_3, \\
\mathbf{u}_4 &= \mathbf{v}_1 - \mathbf{x}_1 + \mathbf{y}_4, \\
\mathbf{v}_2 &= \mathbf{x}_2, \\
\mathbf{v}_3 &= (a - b)(\mathbf{y}_4 - \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\mathbf{y}_3)^{-1} + \mathbf{x}_3, \\
\mathbf{v}_4 &= (a - b)\mathbf{y}_3(\mathbf{y}_4 - \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\mathbf{y}_3)^{-1} + \mathbf{x}_4
\end{aligned} \tag{24}$$

Для того, чтобы из соответствия получить отображение, нужно выбрать условие. Пусть  $\mathbf{v}_1 = \mathbf{x}_1$ . Тогда получим, что  $\mathbf{u}_4 = \mathbf{y}_4$ .

Кроме того, нам известно, что  $\mathbf{v}_2 = \mathbf{x}_2$ ,  $\mathbf{u}_3 = \mathbf{y}_3$ .

Таким образом, получаем отображение

$$(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3, \mathbf{y}_4) \mapsto (\tilde{\mathbf{x}}_1, \tilde{\mathbf{x}}_2, \mathbf{y}_3, \mathbf{y}_4, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \tilde{\mathbf{x}}_3, \tilde{\mathbf{x}}_4) \tag{25}$$

Теперь решим задачу матричной трифакторизации для отображения (25).

Левая часть уравнения:

$$\begin{aligned}
&L_c(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3, \mathbf{z}_4)L_b(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3, \mathbf{y}_4)L_a(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4) = \\
&L_c(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3, \mathbf{z}_4)L_a(\tilde{\mathbf{x}}_1, \tilde{\mathbf{x}}_2, \mathbf{y}_3, \mathbf{y}_4)L_b(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \tilde{\mathbf{y}}_3, \tilde{\mathbf{y}}_4) = \\
&L_a(\tilde{\mathbf{x}}_1, \tilde{\mathbf{x}}_2, \mathbf{z}_3, \mathbf{z}_4)L_c(\tilde{\mathbf{x}}_1, \tilde{\mathbf{x}}_2, \tilde{\mathbf{z}}_3, \tilde{\mathbf{z}}_4)L_b(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \tilde{\mathbf{y}}_3, \tilde{\mathbf{y}}_4) = \\
&L_a(\tilde{\mathbf{x}}_1, \tilde{\mathbf{x}}_2, \mathbf{z}_3, \mathbf{z}_4)L_b(\tilde{\mathbf{x}}_1, \tilde{\mathbf{x}}_2, \tilde{\mathbf{z}}_3, \tilde{\mathbf{z}}_4)L_c(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \tilde{\mathbf{z}}_3, \tilde{\mathbf{z}}_4)
\end{aligned} \tag{26}$$

Правая часть уравнения:

$$\begin{aligned}
&L_c(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3, \mathbf{z}_4)L_b(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3, \mathbf{y}_4)L_a(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4) = \\
&L_b(\hat{\mathbf{y}}_1, \hat{\mathbf{y}}_2, \mathbf{z}_3, \mathbf{z}_4)L_c(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \hat{\mathbf{z}}_3, \hat{\mathbf{z}}_4)L_a(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4) = \\
&L_b(\hat{\mathbf{y}}_1, \hat{\mathbf{y}}_2, \mathbf{z}_3, \mathbf{z}_4)L_a(\hat{\mathbf{x}}_1, \hat{\mathbf{x}}_2, \hat{\mathbf{z}}_3, \hat{\mathbf{z}}_4)L_c(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \hat{\mathbf{z}}_3, \hat{\mathbf{z}}_4) = \\
&L_a(\hat{\mathbf{x}}_1, \hat{\mathbf{x}}_2, \mathbf{z}_3, \mathbf{z}_4)L_b(\hat{\mathbf{x}}_1, \hat{\mathbf{x}}_2, \hat{\mathbf{z}}_3, \hat{\mathbf{z}}_4)L_c(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \hat{\mathbf{z}}_3, \hat{\mathbf{z}}_4)
\end{aligned} \tag{27}$$

Должно быть выполнено

$$\begin{aligned} L_a(\tilde{\mathbf{x}}_1, \tilde{\mathbf{x}}_2, \mathbf{z}_3, \mathbf{z}_4)L_b(\tilde{\mathbf{x}}_1, \tilde{\mathbf{x}}_2, \tilde{\mathbf{z}}_3, \tilde{\mathbf{z}}_4)L_c(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \tilde{\mathbf{z}}_3, \tilde{\mathbf{z}}_4) = \\ L_a(\hat{\mathbf{x}}_1, \hat{\mathbf{x}}_2, \mathbf{z}_3, \mathbf{z}_4)L_b(\hat{\mathbf{x}}_1, \hat{\mathbf{x}}_2, \hat{\mathbf{z}}_3, \hat{\mathbf{z}}_4)L_c(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \hat{\mathbf{z}}_3, \hat{\mathbf{z}}_4) \end{aligned} \quad (28)$$

Давайте переобозначим переменные  $\tilde{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{z}_1$ ,  $\tilde{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{z}_2$ ,  $\tilde{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{y}_1$ ,  $\tilde{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{y}_2$ ,  $\tilde{\mathbf{z}}_3 = \mathbf{y}_3$ ,  $\tilde{\mathbf{z}}_4 = \mathbf{y}_4$ ,  $\tilde{\mathbf{z}}_3 = \mathbf{x}_3$ ,  $\tilde{\mathbf{z}}_4 = \mathbf{x}_4$ ,  $\hat{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{w}_1$ ,  $\hat{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{w}_2$ ,  $\hat{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{v}_1$ ,  $\hat{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{v}_2$ ,  $\hat{\mathbf{z}}_3 = \mathbf{v}_3$ ,  $\hat{\mathbf{z}}_4 = \mathbf{v}_4$ ,  $\hat{\mathbf{z}}_3 = \mathbf{u}_3$ ,  $\hat{\mathbf{z}}_4 = \mathbf{u}_4$ .

Получим,

$$\begin{aligned} L_c(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3, \mathbf{z}_4)L_b(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3, \mathbf{y}_4)L_a(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4) = \\ L_c(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{z}_3, \mathbf{z}_4)L_b(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)L_a(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4) \end{aligned} \quad (29)$$

Перемножив матрицы в уравнении (29), получим систему уравнений

$$\begin{aligned} (-z_3v_3 + v_4)u_3 + z_3(u_4 - x_4) = (-z_3y_3 + y_4)x_3 + x_1(u_3 - x_3) + \\ + x_2(u_4 - x_4) \end{aligned} \quad (30a)$$

$$z_3v_3 - v_4 = z_3y_3 - y_4 \quad (30b)$$

$$u_3 - v_2 = x_3 - y_2 \quad (30c)$$

$$\begin{aligned} (-z_4v_3 - b + v_1v_3 + v_2v_4)u_3 + v_2(a - x_1u_3 - x_2u_4) - \\ - (v_1 - z_4)u_4 = (-z_4y_3 - b + y_1y_3 + y_2y_4)x_3 - (y_1 - z_4)x_4 + \\ + y_2(a - x_1x_3 - x_2x_4) \end{aligned} \quad (30d)$$

$$z_4v_3 - v_1v_3 - v_2v_4 + v_2x_1 = z_4y_3 - y_1y_3 - y_2y_4 + y_2x_1 \quad (30e)$$

$$v_1 + v_2x_2 = y_1 + y_2x_2 \quad (30f)$$

$$\begin{aligned} -v_3u_3 + w_2u_3 + u_4 - w_1 - w_2v_2 = -y_3x_3 + z_2x_3 + x_4 - \\ - z_1 - z_2y_2 \end{aligned} \quad (30g)$$

$$\begin{aligned} (c - w_1z_3 - w_2z_4)v_3u_3 + w_1v_4u_3 - w_2(b - v_1v_3 - v_2v_4)u_3 - \\ - (c - w_1z_3 - w_2z_4 + w_2v_1)u_4 + (w_1 + w_2v_2)(a - x_1u_3 - x_2u_4) = \\ = (c - z_1z_3 - z_2z_4)y_3x_3 + z_1y_4x_3 - z_2(b - y_1y_3 - y_2y_4)x_3 - \\ (c - z_1z_3 - z_2z_4 + z_2y_1)x_4 + (z_1 + z_2y_2)(a - x_1x_3 - x_2x_4) \end{aligned} \quad (30h)$$

$$v_3 - w_2 = y_3 - z_2 \quad (30i)$$

$$\begin{aligned} & (-c + w_1 z_3 + w_2 z_4) v_3 - w_1 v_4 + w_2 (b - v_1 v_3 - v_2 v_4) + (w_1 + w_2 v_2) x_1 = \\ & = (-c + z_1 z_3 + z_2 z_4) y_3 - z_1 y_4 + z_2 (b - y_1 y_3 - y_2 y_4) + (z_1 + z_2 y_2) x_1 - \\ & - w_1 z_3 - w_2 z_4 + w_2 v_1 + (w_1 + w_2 v_2) x_2 = -z_1 z_3 - z_2 z_4 + z_2 y_1 + \\ & + (z_1 + z_2 y_2) x_2 \end{aligned} \quad (30j)$$

Из уравнений (30f), (30j) и (30i) получим  $w_2 = z_2$ . Из уравнений (30i) и (30b) —  $v_3 = y_3$  и  $v_4 = y_4$ , (30f), (30e) и (30b) —  $v_2 = y_2$ . Затем, благодаря уравнениям (30f) и (30c) получим  $v_1 = y_1$ ,  $u_3 = x_3$ , (30a) и (30b)  $u_4 = x_4$  и (30f), (30j)  $w_1 = z_1$ .

Таким образом, решая эти уравнения, мы получаем только тривиальное решение  $u_3 = x_3$ ,  $u_4 = x_4$ ,  $v_1 = y_1$ ,  $v_2 = y_2$ ,  $v_3 = y_3$ ,  $v_4 = y_4$ ,  $w_1 = z_1$ ,  $w_2 = z_2$ . Поэтому отображение (25) является отображением Янга–Бакстера.

### 3 Некоммутативное отображение типа НУШ

Нелинейное уравнение Шредингера (НУШ) является одним из наиболее фундаментальных уравнений математической физики со множеством приложений при изучении гравитационных волн малой амплитуды на поверхности глубоких невязких вод и распространения света в нелинейных оптических волокнах и многих других приложениях.

В наиболее популярной форме можно записать в виде системы

$$p_t = \frac{1}{2}p_{xx} - 4p^2q, \quad q_t = -\frac{1}{2}q_{xx} + 4pq^2, \quad (31)$$

где  $p = p(x, t)$  и  $q = q(x, t)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $t > 0$ , а индексы обозначают частные производные. С точки зрения интегрируемости система НУШ эквивалентна соотношению нулевой кривизны

$$U_t - V_x + UV - VU = 0,$$

где  $U$  и  $V$  имеют такой вид:

$$U = \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2p \\ 2q & 0 \end{pmatrix},$$

$$V = \lambda^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 & 2p \\ 2q & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2pq & p_x \\ -q_x & 2pq \end{pmatrix}.$$

Пара операторов  $(\mathcal{L}, \mathcal{A})$ , где  $\mathcal{L} = D_x - U$ ,  $\mathcal{A} = D_x - V$  называется парой Лакса.

Преобразование Дарбу — это преобразование, которое оставляет операторы  $\mathcal{L}$  и  $\mathcal{A}$  ковариантными. После преобразования  $\mathcal{L} \rightarrow \tilde{\mathcal{L}} = M\mathcal{L}M^{-1}$  и  $\mathcal{A} \rightarrow \tilde{\mathcal{A}} = M\mathcal{A}M^{-1}$ . Матрица Дарбу — это обратимая матрица  $M$  такая, что

$$M(D_x + U(U; \lambda))M^{-1} = D_x - U(U_{10}; \lambda), \quad (32)$$

$$M(D_t - V(U; \lambda))M^{-1} = D_t - V(U_{10}; \lambda). \quad (33)$$

Например, для уравнения НУШ (31) преобразование Дарбу задается следующей матрицей

$$M = \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a + p\tilde{q} & p \\ \tilde{q} & 1 \end{pmatrix}.$$

Переобозначим переменные:  $p = \mathbf{x}_1$ ,  $\tilde{q} = \mathbf{x}_2$ , тогда матрица  $M$  примет вид:

$$M(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; a) = \begin{pmatrix} a + \mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 & \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 & 1 \end{pmatrix}. \quad (34)$$

Мы предполагаем, что  $\mathbf{x}_i$ ,  $i = 1, 2$ , принадлежат телу (кольцо с делением), а параметр  $a$  - центру тела. Тогда, подставив данную матрицу в локальное уравнение Янга-Бакстера.

$$\begin{aligned} M_{12}^3(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, a)M_{13}^3(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, b)M_{23}^3(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, c) = \\ M_{23}^3(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, c)M_{13}^3(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, b)M_{12}^3(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, a), \end{aligned}$$

получим систему полиномиальных уравнений, которая разрешима для  $\mathbf{u}_i, \mathbf{v}_i, \mathbf{w}_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

$$\mathbf{x}_1 \mapsto \mathbf{u}_1 = \frac{b\mathbf{x}_1 - \mathbf{y}_1\mathbf{z}_2}{c}; \quad (35a)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_2 \mapsto \mathbf{u}_2 = ac(\mathbf{z}_1\mathbf{y}_2(a + \mathbf{x}_1\mathbf{x}_2) + (c + \mathbf{z}_1\mathbf{z}_2)\mathbf{x}_2) \cdot \\ [abc + (\mathbf{y}_1(\mathbf{z}_2\mathbf{z}_1 + c) - b\mathbf{x}_1\mathbf{z}_1)(\mathbf{y}_2(a + \mathbf{x}_1\mathbf{x}_2))]^{-1}, \end{aligned} \quad (35b)$$

$$\mathbf{y}_1 \mapsto \mathbf{v}_1 = \frac{\mathbf{y}_1(c + \mathbf{z}_2\mathbf{z}_1) - b\mathbf{x}_1\mathbf{z}_1}{ac}; \quad (35c)$$

$$\mathbf{y}_2 \mapsto \mathbf{v}_2 = \mathbf{z}_2\mathbf{x}_2 + \mathbf{y}_2(a + \mathbf{x}_1\mathbf{x}_2); \quad (35d)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_1 \mapsto \mathbf{w}_1 = (\mathbf{z}_1\mathbf{y}_2(a + \mathbf{x}_1\mathbf{x}_2) + (c + \mathbf{z}_1\mathbf{z}_2)\mathbf{x}_2) \cdot \\ [abc + (\mathbf{y}_1(\mathbf{z}_2\mathbf{z}_1 + c) - b\mathbf{x}_1\mathbf{z}_1)(\mathbf{y}_2(a + \mathbf{x}_1\mathbf{x}_2) + \mathbf{z}_2\mathbf{x}_2)]^{-1}; \end{aligned} \quad (35e)$$

$$\mathbf{z}_2 \mapsto \mathbf{w}_2 = \mathbf{y}_2\mathbf{x}_1 + \mathbf{z}_2. \quad (35f)$$

Теперь давайте определим  $4 \times 4$  расширение матрицы (34) так:

$$\begin{aligned}
 M_{12}^4 &:= \begin{pmatrix} a + \mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 & \mathbf{x}_1 & 0 & 0 \\ \mathbf{x}_2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & M_{13}^4 &:= \begin{pmatrix} a + \mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 & 0 & \mathbf{x}_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{x}_2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 M_{23}^4 &:= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a + \mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 & \mathbf{x}_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{x}_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & M_{14}^4 &:= \begin{pmatrix} a + \mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 & 0 & 0 & \mathbf{x}_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \mathbf{x}_2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 M_{24}^4 &:= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a + \mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 & 0 & \mathbf{x}_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{x}_2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & M_{34}^4 &:= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a + \mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 & \mathbf{x}_1 \\ 0 & 0 & \mathbf{x}_2 & 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Теперь у нас есть следующее отображение

$$(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2) \mapsto (\tilde{\mathbf{x}}_1, \tilde{\mathbf{x}}_2, \tilde{\mathbf{y}}_1, \tilde{\mathbf{y}}_2, \tilde{\mathbf{z}}_1, \tilde{\mathbf{z}}_2) \quad (36)$$

Запишем для него задачу матричной шесть-факторизации:

$$\begin{aligned}
 &M_{34}^4(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2; a_6)M_{24}^4(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2; a_5)M_{14}^4(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; a_4)M_{23}^4(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2; a_3) \\
 &M_{13}^4(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2; a_2)M_{12}^4(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; a_1) = M_{34}^4(\tilde{\mathbf{t}}_1, \tilde{\mathbf{t}}_2; a_6)M_{24}^4(\tilde{\mathbf{s}}_1, \tilde{\mathbf{s}}_2; a_5) \quad (37) \\
 &M_{14}^4(\tilde{\mathbf{r}}_1, \tilde{\mathbf{r}}_2; a_4)M_{23}^4(\tilde{\mathbf{z}}_1, \tilde{\mathbf{z}}_2; a_3)M_{13}^4(\tilde{\mathbf{y}}_1, \tilde{\mathbf{y}}_2; a_2)M_{12}^4(\tilde{\mathbf{x}}_1, \tilde{\mathbf{x}}_2; a_1)
 \end{aligned}$$

Перемножив матрицы в уравнении (37), мы получаем следующие уравнения:

$$\begin{aligned}
 (a_4 + \tilde{\mathbf{r}}_1\tilde{\mathbf{r}}_2)(a_2 + \tilde{\mathbf{y}}_1\tilde{\mathbf{y}}_2)(a_1 + \tilde{\mathbf{x}}_1\tilde{\mathbf{x}}_2) &= (a_4 + \mathbf{r}_1\mathbf{r}_2)(a_2 + \mathbf{y}_1\mathbf{y}_2) \cdot \\
 &\cdot (a_1 + \mathbf{x}_1\mathbf{x}_2) \quad (38a)
 \end{aligned}$$

$$(a_4 + \tilde{\mathbf{r}}_1\tilde{\mathbf{r}}_2)(a_2 + \tilde{\mathbf{y}}_1\tilde{\mathbf{y}}_2)\tilde{\mathbf{x}}_1 = (a_4 + \mathbf{r}_1\mathbf{r}_2)(a_2 + \mathbf{y}_1\mathbf{y}_2)\mathbf{x}_1 \quad (38b)$$

$$(a_4 + \mathbf{r}_1\mathbf{r}_2)\mathbf{y}_1 = (a_4 + \tilde{\mathbf{r}}_1\tilde{\mathbf{r}}_2)\tilde{\mathbf{y}}_1 \quad (38c)$$

$$\tilde{\mathbf{r}}_1 = \mathbf{r}_1 \quad (38d)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{s}}_1 \tilde{\mathbf{r}}_2 (a_2 + \tilde{\mathbf{y}}_1 \tilde{\mathbf{y}}_2) (a_1 + \tilde{\mathbf{x}}_1 \tilde{\mathbf{x}}_2) + (a_5 + \tilde{\mathbf{s}}_1 \tilde{\mathbf{s}}_2) (a_3 + \tilde{\mathbf{z}}_1 \tilde{\mathbf{z}}_2) \tilde{\mathbf{x}}_2 + (a_5 + \tilde{\mathbf{s}}_1 \tilde{\mathbf{s}}_2) \tilde{\mathbf{z}}_1 \tilde{\mathbf{y}}_2 \\ (a_1 + \tilde{\mathbf{x}}_1 \tilde{\mathbf{x}}_2) = \mathbf{s}_1 \mathbf{r}_2 (a_2 + \mathbf{y}_1 \mathbf{y}_2) (a_1 + \mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2) + (a_5 + \mathbf{s}_1 \mathbf{s}_2) (a_3 + \mathbf{z}_1 \mathbf{z}_2) \mathbf{x}_2 + \\ (a_5 + \mathbf{s}_1 \mathbf{s}_2) \mathbf{z}_1 \mathbf{y}_2 (a_1 + \mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2) \end{aligned} \quad (38e)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{s}}_1 \tilde{\mathbf{r}}_2 (a_2 + \tilde{\mathbf{y}}_1 \tilde{\mathbf{y}}_2) \tilde{\mathbf{x}}_1 + (a_5 + \tilde{\mathbf{s}}_1 \tilde{\mathbf{s}}_2) (a_3 + \tilde{\mathbf{z}}_1 \tilde{\mathbf{z}}_2) + (a_5 + \tilde{\mathbf{s}}_1 \tilde{\mathbf{s}}_2) \tilde{\mathbf{z}}_1 \tilde{\mathbf{y}}_2 \tilde{\mathbf{x}}_1 = \\ \mathbf{s}_1 \mathbf{r}_2 (a_2 + \mathbf{y}_1 \mathbf{y}_2) \mathbf{x}_1 + (a_5 + \mathbf{s}_1 \mathbf{s}_2) (a_3 + \mathbf{z}_1 \mathbf{z}_2) + (a_5 + \mathbf{s}_1 \mathbf{s}_2) \mathbf{z}_1 \mathbf{y}_2 \mathbf{x}_1 \end{aligned} \quad (38f)$$

$$\tilde{\mathbf{s}}_1 = \mathbf{s}_1 \quad (38g)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{t}}_1 \tilde{\mathbf{r}}_2 (a_2 + \tilde{\mathbf{y}}_1 \tilde{\mathbf{y}}_2) (a_1 + \tilde{\mathbf{x}}_1 \tilde{\mathbf{x}}_2) + \tilde{\mathbf{t}}_1 \tilde{\mathbf{s}}_2 (a_3 + \tilde{\mathbf{z}}_1 \tilde{\mathbf{z}}_2) \tilde{\mathbf{x}}_2 + (a_6 + \tilde{\mathbf{t}}_1 \tilde{\mathbf{t}}_2) \tilde{\mathbf{z}}_2 \tilde{\mathbf{x}}_2 + \\ + (\tilde{\mathbf{t}}_1 \tilde{\mathbf{s}}_2 \tilde{\mathbf{z}}_1 + a_6 + \tilde{\mathbf{t}}_1 \tilde{\mathbf{t}}_2) \tilde{\mathbf{y}}_2 (a_1 + \tilde{\mathbf{x}}_1 \tilde{\mathbf{x}}_2) = \mathbf{t}_1 \mathbf{r}_2 (a_2 + \mathbf{y}_1 \mathbf{y}_2) (a_1 + \mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2) + \\ + \mathbf{t}_1 \mathbf{s}_2 (a_3 + \mathbf{z}_1 \mathbf{z}_2) \mathbf{x}_2 + (\mathbf{t}_1 \mathbf{s}_2 \mathbf{z}_1 + a_6 + \mathbf{t}_1 \mathbf{t}_2) \mathbf{y}_2 (a_1 + \mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2) + \\ + (a_6 + \mathbf{t}_1 \mathbf{t}_2) \mathbf{z}_2 \mathbf{x}_2 \end{aligned} \quad (38h)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{t}}_1 \tilde{\mathbf{s}}_2 (a_3 + \tilde{\mathbf{z}}_1 \tilde{\mathbf{z}}_2) + (a_6 + \tilde{\mathbf{t}}_1 \tilde{\mathbf{t}}_2) \tilde{\mathbf{z}}_2 + (\tilde{\mathbf{t}}_1 \tilde{\mathbf{s}}_2 \tilde{\mathbf{z}}_1 + a_6 + \tilde{\mathbf{t}}_1 \tilde{\mathbf{t}}_2) \tilde{\mathbf{y}}_2 \tilde{\mathbf{x}}_1 + \\ + \tilde{\mathbf{t}}_1 \tilde{\mathbf{r}}_2 (a_2 + \tilde{\mathbf{y}}_1 \tilde{\mathbf{y}}_2) \tilde{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{t}_1 \mathbf{r}_2 (a_2 + \mathbf{y}_1 \mathbf{y}_2) \mathbf{x}_1 + \mathbf{t}_1 \mathbf{s}_2 (a_3 + \mathbf{z}_1 \mathbf{z}_2) + \\ + (a_6 + \mathbf{t}_1 \mathbf{t}_2) \mathbf{z}_2 + (\mathbf{t}_1 \mathbf{s}_2 \mathbf{z}_1 + a_6 + \mathbf{t}_1 \mathbf{t}_2) \mathbf{y}_2 \mathbf{x}_1 \end{aligned} \quad (38i)$$

$$\tilde{\mathbf{t}}_1 \tilde{\mathbf{r}}_2 \tilde{\mathbf{y}}_1 + \tilde{\mathbf{t}}_1 \tilde{\mathbf{s}}_2 \tilde{\mathbf{z}}_1 + a_6 + \tilde{\mathbf{t}}_1 \tilde{\mathbf{t}}_2 = \mathbf{t}_1 \mathbf{r}_2 \mathbf{y}_1 + \mathbf{t}_1 \mathbf{s}_2 \mathbf{z}_1 + a_6 + \mathbf{t}_1 \mathbf{t}_2 \quad (38j)$$

$$\tilde{\mathbf{t}}_1 = \mathbf{t}_1 \quad (38k)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{r}}_2 (a_2 + \tilde{\mathbf{y}}_1 \tilde{\mathbf{y}}_2) (a_1 + \tilde{\mathbf{x}}_1 \tilde{\mathbf{x}}_2) + (\tilde{\mathbf{s}}_2 \tilde{\mathbf{z}}_1 + \tilde{\mathbf{t}}_2) \tilde{\mathbf{y}}_2 (a_1 + \tilde{\mathbf{x}}_1 \tilde{\mathbf{x}}_2) + \\ + \tilde{\mathbf{s}}_2 (a_3 + \tilde{\mathbf{z}}_1 \tilde{\mathbf{z}}_2) \tilde{\mathbf{x}}_2 + \tilde{\mathbf{t}}_2 \tilde{\mathbf{z}}_2 \tilde{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{r}_2 (a_2 + \mathbf{y}_1 \mathbf{y}_2) (a_1 + \mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2) + \\ + \mathbf{s}_2 (a_3 + \mathbf{z}_1 \mathbf{z}_2) \mathbf{x}_2 + \mathbf{t}_2 \mathbf{z}_2 \mathbf{x}_2 + (\mathbf{s}_2 \mathbf{z}_1 + \mathbf{t}_2) \mathbf{y}_2 (a_1 + \mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2) \end{aligned} \quad (38l)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{r}}_2 (a_2 + \tilde{\mathbf{y}}_1 \tilde{\mathbf{y}}_2) \tilde{\mathbf{x}}_1 + \tilde{\mathbf{s}}_2 (a_3 + \tilde{\mathbf{z}}_1 \tilde{\mathbf{z}}_2) + \tilde{\mathbf{t}}_2 \tilde{\mathbf{z}}_2 + (\tilde{\mathbf{s}}_2 \tilde{\mathbf{z}}_1 + \tilde{\mathbf{t}}_2) \tilde{\mathbf{y}}_2 \tilde{\mathbf{x}}_1 \\ = \mathbf{r}_2 (a_2 + \mathbf{y}_1 \mathbf{y}_2) \mathbf{x}_1 + \mathbf{s}_2 (a_3 + \mathbf{z}_1 \mathbf{z}_2) + \mathbf{t}_2 \mathbf{z}_2 + (\mathbf{s}_2 \mathbf{z}_1 + \mathbf{t}_2) \mathbf{y}_2 \mathbf{x}_1 \end{aligned} \quad (38m)$$

Решая данную систему, мы получаем только тривиальное решение  $\tilde{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{x}_2$ ,  $\tilde{\mathbf{y}}_2 = \mathbf{y}_2$ ,  $\tilde{\mathbf{r}}_2 = \mathbf{r}_2$ ,  $\tilde{\mathbf{z}}_2 = \mathbf{z}_2$ ,  $\tilde{\mathbf{s}}_1 = \mathbf{s}_1$ ,  $\tilde{\mathbf{z}}_1 = \mathbf{z}_1$ ,  $\tilde{\mathbf{s}}_2 = \mathbf{s}_2$ ,  $\tilde{\mathbf{t}}_1 = \mathbf{t}_1$ ,  $\tilde{\mathbf{t}}_2 = \mathbf{t}_2$ . Таким образом, отображение (36) является отображением тетраэдров.

## 4 Некоммутативное отображение типа производного НУШ

В разделе [1](#) мы поняли, что локальное уравнение Янга–Бакстера, представляющее собой задачу матричной трифакторизации, генерирует отображения тетраэдров.

В этом разделе мы подставляем в задачу матричной трифакторизации матрицу Дарбу, связанную с производным НУШ. Из нее мы получаем соответствие, которое для конкретного выбора свободной переменной определяет отображение, которое удовлетворяет уравнению тетраэдров.

Рассмотрим оператор

$$\mathcal{L}_{DNLS} = D_x + \lambda^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 & 2p \\ 2q & 0 \end{pmatrix}, \quad (39)$$

который является пространственной частью производного НУШ.

Преобразование Дарбу связанное с  $\mathcal{L}_{DNLS}$  выглядит так:

$$M(p, f; a) := \lambda^2 \begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 & fp \\ \frac{a}{fp} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (40)$$

Проведем замену:  $(f, p, \lambda) \rightarrow (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, 1)$ , где  $\mathbf{x}_i \in \mathfrak{X}$ ,  $i = 1, 2$ . Тогда матрица [\(40\)](#) примет следующий вид:

$$M(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, a) := \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 \\ a\mathbf{x}_2^{-1}\mathbf{x}_1^{-1} & 0 \end{pmatrix} \quad (41)$$

где  $a \in Z(\mathfrak{X})$

Давайте определим  $3 \times 3$  расширения матрицы [\(41\)](#):

$$M_{12}^3 := \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 & 0 \\ a\mathbf{x}_2^{-1}\mathbf{x}_1^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_{13}^3 := \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 & 0 & \mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ a\mathbf{x}_2^{-1}\mathbf{x}_1^{-1} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$M_{23}^3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2 \\ 0 & a \mathbf{x}_2^{-1} \mathbf{x}_1^{-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим локальное уравнение Янга–Бакстера

$$\begin{aligned} M_{12}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, a) M_{13}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, b) M_{23}(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, c) = \\ M_{23}(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, c) M_{13}(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, b) M_{12}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, a) \end{aligned} \quad (42)$$

Оно эквивалентно следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 \mathbf{v}_1 &= \mathbf{y}_1 \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{u}_1 (\mathbf{u}_2 \mathbf{w}_1 + c \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 \mathbf{w}_2^{-1} \mathbf{w}_1^{-1}) &= \mathbf{y}_1 \mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2 \mathbf{w}_1 \mathbf{w}_2 &= \mathbf{y}_1 \mathbf{y}_2 \\ a \mathbf{u}_2^{-1} \mathbf{u}_1^{-1} \mathbf{v}_1 &= b \mathbf{z}_1 \mathbf{z}_2 \mathbf{y}_2^{-1} \mathbf{y}_1^{-1} \mathbf{x}_1 + a \mathbf{z}_1 \mathbf{x}_2^{-1} \mathbf{x}_1^{-1} \\ a c \mathbf{u}_2^{-1} \mathbf{u}_1^{-1} \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 \mathbf{w}_2^{-1} \mathbf{w}_1^{-1} &= b \mathbf{z}_1 \mathbf{z}_2 \mathbf{y}_2^{-1} \mathbf{y}_1^{-1} \mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2 \\ b \mathbf{v}_2^{-1} \mathbf{v}_1^{-1} &= a c \mathbf{z}_2^{-1} \mathbf{z}_1^{-1} \mathbf{x}_2^{-1} \mathbf{x}_1^{-1} \end{aligned} \quad (43)$$

Решив эти уравнения, мы получаем следующее соответствие:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= \mathbf{u}_1^{-1} \mathbf{y}_1 \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{u}_2 &= a \mathbf{u}_1^{-2} \mathbf{y}_1 \mathbf{x}_1 (b \mathbf{z}_1 \mathbf{z}_2 \mathbf{y}_2^{-1} \mathbf{y}_1^{-1} \mathbf{x}_1 + a \mathbf{z}_1 \mathbf{x}_2^{-1} \mathbf{x}_1^{-1})^{-1} \\ \mathbf{v}_2 &= a^{-1} b c^{-1} \mathbf{x}_1^{-1} \mathbf{y}_1^{-1} \mathbf{u}_1 \mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2 \mathbf{z}_1 \mathbf{z}_2 \\ \mathbf{w}_1 &= a \mathbf{x}_2^{-1} \mathbf{x}_1^{-1} \mathbf{y}_1 \mathbf{y}_2 \mathbf{z}_2^{-1} \mathbf{z}_1^{-1} W \mathbf{x}_1^{-1} \mathbf{y}_1^{-1} \mathbf{u}_1 \mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2 \mathbf{z}_1 \mathbf{z}_2 \mathbf{y}_2^{-1} \\ &\quad (\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2 - b \mathbf{x}_1 W^{-1} \mathbf{z}_1 \mathbf{z}_2 \mathbf{y}_2^{-1} \mathbf{y}_1^{-1} \mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2) \\ \mathbf{w}_2 &= (\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2 - b \mathbf{x}_1 W^{-1} \mathbf{z}_1 \mathbf{z}_2 \mathbf{y}_2^{-1} \mathbf{y}_1^{-1} \mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2)^{-1} \mathbf{y}_2, \text{ где} \\ W &= b \mathbf{z}_1 \mathbf{z}_2 \mathbf{y}_2^{-1} \mathbf{y}_1^{-1} \mathbf{x}_1 + a \mathbf{z}_1 \mathbf{x}_2^{-1} \mathbf{x}_1^{-1} \end{aligned} \quad (44)$$

Пусть  $\mathbf{u}_1 = \mathbf{y}_1$ . Тогда соответствие (44) превратится в отображение

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_1 &= \mathbf{x}_1 \\
\mathbf{u}_2 &= a\mathbf{y}_1^{-1}\mathbf{x}_1W^{-1} \\
\mathbf{v}_2 &= a^{-1}bc^{-1}\mathbf{x}_2\mathbf{z}_1\mathbf{z}_2 \\
\mathbf{w}_1 &= (ab\mathbf{z}_1\mathbf{z}_2\mathbf{y}_2^{-1} + a^2\mathbf{x}_2^{-1}\mathbf{x}_1^{-1}\mathbf{y}_1\mathbf{y}_2\mathbf{z}_2^{-1}\mathbf{x}_2^{-1}\mathbf{x}_1^{-1}\mathbf{x}_2\mathbf{z}_1\mathbf{z}_2\mathbf{y}_2^{-1}) \\
&\quad (\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 - b\mathbf{x}_1W^{-1}\mathbf{z}_1\mathbf{z}_2\mathbf{y}_2^{-1}\mathbf{y}_1^{-1}\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2) \\
\mathbf{w}_2 &= (\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 - b\mathbf{x}_1W^{-1}\mathbf{z}_1\mathbf{z}_2\mathbf{y}_2^{-1}\mathbf{y}_1^{-1}\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2)^{-1}\mathbf{y}_2, \text{ где} \\
W &= b\mathbf{z}_1\mathbf{z}_2\mathbf{y}_2^{-1}\mathbf{y}_1^{-1}\mathbf{x}_1 + a\mathbf{z}_1\mathbf{x}_2^{-1}\mathbf{x}_1^{-1}
\end{aligned} \tag{45}$$

Теперь давайте определим  $4 \times 4$  расширение матрицы (41) так:

$$\begin{aligned}
M_{12}^4 &:= \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 & 0 & 0 \\ a\mathbf{x}_2^{-1}\mathbf{x}_1^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & M_{13}^4 &:= \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 & 0 & \mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ a\mathbf{x}_2^{-1}\mathbf{x}_1^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
M_{23}^4 &:= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 & 0 \\ 0 & a\mathbf{x}_2^{-1}\mathbf{x}_1^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & M_{14}^4 &:= \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 & 0 & 0 & \mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ a\mathbf{x}_2^{-1}\mathbf{x}_1^{-1} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
M_{24}^4 &:= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{x}_1 & 0 & \mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & a\mathbf{x}_2^{-1}\mathbf{x}_1^{-1} & 0 & 0 \end{pmatrix}, & M_{34}^4 &:= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 \\ 0 & 0 & a\mathbf{x}_2^{-1}\mathbf{x}_1^{-1} & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Теперь у нас есть следующее отображение

$$(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2) \mapsto (\mathbf{y}_1, \tilde{\mathbf{x}}_2, \mathbf{x}_1, \tilde{\mathbf{y}}_2, \tilde{\mathbf{z}}_1, \tilde{\mathbf{z}}_2) \tag{46}$$

Левая часть уравнения:

$$\begin{aligned}
& [M_{12}^4(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; a_1)M_{13}^4(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2; a_2)M_{23}^4(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2; a_3)]M_{14}^4(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; a_4) \\
& M_{24}^4(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2; a_5)M_{34}^4(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2; a_6) = M_{23}^4(\tilde{\mathbf{z}}_1, \tilde{\mathbf{z}}_2; a_3)M_{13}^4(\mathbf{x}_1, \tilde{\mathbf{y}}_2; a_2) \\
& [M_{12}^4(\mathbf{y}_1, \tilde{\mathbf{x}}_2; a_1)M_{14}^4(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; a_4)M_{24}^4(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2; a_5)]M_{34}^4(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2; a_6) = \\
& M_{23}^4(\tilde{\mathbf{z}}_1, \tilde{\mathbf{z}}_2; a_3)M_{13}^4(\mathbf{x}_1, \tilde{\mathbf{y}}_2; a_2)M_{24}^4(\tilde{\mathbf{s}}_1, \tilde{\mathbf{s}}_2; a_5)M_{14}^4(\mathbf{y}_1, \tilde{\mathbf{r}}_2; a_4) \\
& M_{12}^4(\mathbf{r}_1, \tilde{\mathbf{x}}_2; a_1)M_{34}^4(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2; a_6) = M_{23}^4(\tilde{\mathbf{z}}_1, \tilde{\mathbf{z}}_2; a_3)M_{13}^4(\mathbf{x}_1, \tilde{\mathbf{y}}_2; a_2) \\
& M_{24}^4(\tilde{\mathbf{s}}_1, \tilde{\mathbf{s}}_2; a_5)M_{14}^4(\mathbf{y}_1, \tilde{\mathbf{r}}_2; a_4)M_{12}^4(\mathbf{r}_1, \tilde{\mathbf{x}}_2; a_1)M_{34}^4(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2; a_6) = \quad (47) \\
& M_{23}^4(\tilde{\mathbf{z}}_1, \tilde{\mathbf{z}}_2; a_3)M_{24}^4(\tilde{\mathbf{s}}_1, \tilde{\mathbf{s}}_2; a_5)[M_{13}^4(\mathbf{x}_1, \tilde{\mathbf{y}}_2; a_2)M_{14}^4(\mathbf{y}_1, \tilde{\mathbf{r}}_2; a_4) \\
& M_{34}^4(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2; a_6)]M_{12}^4(\mathbf{r}_1, \tilde{\mathbf{x}}_2; a_1) = [M_{23}^4(\tilde{\mathbf{z}}_1, \tilde{\mathbf{z}}_2; a_3)M_{24}^4(\tilde{\mathbf{s}}_1, \tilde{\mathbf{s}}_2; a_5) \\
& M_{34}^4(\tilde{\mathbf{t}}_1, \tilde{\mathbf{t}}_2; a_6)]M_{14}^4(\mathbf{x}_1, \tilde{\mathbf{r}}_2; a_4)M_{13}^4(\mathbf{y}_1, \tilde{\mathbf{y}}_2; a_2)M_{12}^4(\mathbf{r}_1, \tilde{\mathbf{x}}_2; a_1) = \\
& M_{34}^4(\tilde{\mathbf{t}}_1, \tilde{\mathbf{t}}_2; a_6)M_{24}^4(\tilde{\mathbf{z}}_1, \tilde{\mathbf{s}}_2; a_5)M_{23}^4(\tilde{\mathbf{s}}_1, \tilde{\mathbf{z}}_2; a_3)M_{14}^4(\mathbf{x}_1, \tilde{\mathbf{r}}_2; a_4) \\
& M_{13}^4(\mathbf{y}_1, \tilde{\mathbf{y}}_2; a_2)M_{12}^4(\mathbf{r}_1, \tilde{\mathbf{x}}_2; a_1)
\end{aligned}$$

Здесь мы использовали следующие равенства:

$$\begin{aligned}
M_{13}^4(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; a_2)M_{24}^4(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2; a_5) &= M_{24}^4(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2; a_5)M_{13}^4(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; a_2) \\
M_{12}^4(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; a_1)M_{34}^4(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2; a_6) &= M_{34}^4(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2; a_6)M_{12}^4(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; a_1)
\end{aligned} \quad (48)$$

Аналогично, используя правую часть уравнения тетраэдров, мы получаем:

$$\begin{aligned}
M_{12}^4(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; a_1)M_{13}^4(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2; a_2)M_{23}^4(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2; a_3)M_{14}^4(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; a_4) \\
M_{24}^4(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2; a_5)M_{34}^4(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2; a_6) &= M_{34}^4(\hat{\mathbf{t}}_1, \hat{\mathbf{t}}_2; a_6)M_{24}^4(\hat{\mathbf{z}}_1, \hat{\mathbf{s}}_2; a_5) \\
M_{23}^4(\hat{\mathbf{s}}_1, \hat{\mathbf{z}}_2; a_3)M_{14}^4(\mathbf{x}_1, \hat{\mathbf{r}}_2; a_4)M_{13}^4(\mathbf{y}_1, \hat{\mathbf{y}}_2; a_2)M_{12}^4(\mathbf{r}_1, \hat{\mathbf{x}}_2; a_1)
\end{aligned} \quad (49)$$

Значит,

$$\begin{aligned}
M_{34}^4(\tilde{\mathbf{t}}_1, \tilde{\mathbf{t}}_2; a_6)M_{24}^4(\tilde{\mathbf{z}}_1, \tilde{\mathbf{s}}_2; a_5)M_{23}^4(\tilde{\mathbf{s}}_1, \tilde{\mathbf{z}}_2; a_3)M_{14}^4(\mathbf{x}_1, \tilde{\mathbf{r}}_2; a_4) \\
M_{13}^4(\mathbf{y}_1, \tilde{\mathbf{y}}_2; a_2)M_{12}^4(\mathbf{r}_1, \tilde{\mathbf{x}}_2; a_1) &= M_{34}^4(\hat{\mathbf{t}}_1, \hat{\mathbf{t}}_2; a_6)M_{24}^4(\hat{\mathbf{z}}_1, \hat{\mathbf{s}}_2; a_5) \\
M_{23}^4(\hat{\mathbf{s}}_1, \hat{\mathbf{z}}_2; a_3)M_{14}^4(\mathbf{x}_1, \hat{\mathbf{r}}_2; a_4)M_{13}^4(\mathbf{y}_1, \hat{\mathbf{y}}_2; a_2)M_{12}^4(\mathbf{r}_1, \hat{\mathbf{x}}_2; a_1)
\end{aligned} \quad (50)$$

Переименуем переменные

$$\tilde{\mathbf{t}}_1 = \hat{\mathbf{t}}_1, \tilde{\mathbf{t}}_2 = \hat{\mathbf{t}}_2, \tilde{\mathbf{s}}_2 = \hat{\mathbf{s}}_2, \tilde{\mathbf{z}}_2 = \hat{\mathbf{z}}_2, \tilde{\mathbf{r}}_2 = \hat{\mathbf{r}}_2, \tilde{\mathbf{y}}_2 = \hat{\mathbf{y}}_2, \tilde{\mathbf{x}}_2 = \hat{\mathbf{x}}_2,$$

$\hat{t}_1 = t_1, \hat{t}_2 = t_2, \hat{z}_1 = z_1, \hat{s}_2 = s_2, \hat{s}_1 = s_1, \hat{z}_2 = z_2, \hat{r}_2 = r_2, \hat{y}_2 = y_2, \hat{x}_2 = x_2$ , Тогда,

$$\begin{aligned} & M_{34}^4(\tilde{t}_1, \tilde{t}_2; a_6) M_{24}^4(\tilde{z}_1, \tilde{s}_2; a_5) M_{23}^4(\tilde{s}_1, \tilde{z}_2; a_3) M_{14}^4(x_1, \tilde{r}_2; a_4) \\ & M_{13}^4(y_1, \tilde{y}_2; a_2) M_{12}^4(r_1, \tilde{x}_2; a_1) = M_{34}^4(t_1, t_2; a_6) M_{24}^4(z_1, s_2; a_5) \quad (51) \\ & M_{23}^4(s_1, z_2; a_3) M_{14}^4(x_1, r_2; a_4) M_{13}^4(y_1, y_2; a_2) M_{12}^4(r_1, x_2; a_1) \end{aligned}$$

Мы получаем следующие уравнения:

$$x_1 y_1 r_1 \tilde{x}_2 = x_1 y_1 r_1 x_2 \quad (52a)$$

$$x_1 y_1 \tilde{y}_2 = x_1 y_1 y_2 \quad (52b)$$

$$x_1 \tilde{r}_2 = x_1 r_2 \quad (52c)$$

$$\begin{aligned} & a_4 \tilde{z}_1 \tilde{s}_2 \tilde{r}_2^{-1} x_1^{-1} y_1 r_1 + a_1 \tilde{z}_1 \tilde{s}_1 \tilde{x}_2^{-1} r_1^{-1} + a_2 \tilde{z}_1 \tilde{s}_1 \tilde{z}_2 \tilde{y}_2^{-1} y_1^{-1} r_1 = \\ & a_4 z_1 s_2 r_2^{-1} x_1^{-1} y_1 r_1 + a_1 z_1 s_1 x_2^{-1} r_1^{-1} + a_2 z_1 s_1 z_2 y_2^{-1} y_1^{-1} r_1 \quad (52d) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & a_4 \tilde{z}_1 \tilde{s}_2 \tilde{r}_2^{-1} x_1^{-1} y_1 r_1 \tilde{x}_2 + a_2 \tilde{z}_1 \tilde{s}_1 \tilde{z}_2 \tilde{y}_2^{-1} y_1^{-1} r_1 \tilde{x}_2 = \\ & = a_4 z_1 s_2 r_2^{-1} x_1^{-1} y_1 r_1 x_2 + a_2 z_1 s_1 z_2 y_2^{-1} y_1^{-1} r_1 x_2 \quad (52e) \end{aligned}$$

$$a_4 \tilde{z}_1 \tilde{s}_2 \tilde{r}_2^{-1} x_1^{-1} y_1 \tilde{y}_2 = a_4 z_1 s_2 r_2^{-1} x_1^{-1} y_1 y_2 \quad (52f)$$

$$\begin{aligned} & (a_5 \tilde{t}_1 \tilde{t}_2 \tilde{s}_2^{-1} \tilde{z}_1^{-1} \tilde{s}_1 + a_3 \tilde{t}_1 \tilde{z}_2^{-1} \tilde{s}_1^{-1}) a_1 \tilde{x}_2^{-1} \tilde{r}_1^{-1} + \\ & + a_2 a_5 \tilde{t}_1 \tilde{t}_2 \tilde{s}_2^{-1} \tilde{z}_1^{-1} \tilde{s}_1 \tilde{z}_2 \tilde{y}_2^{-1} y_1^{-1} r_1 = \\ & (a_5 t_1 t_2 s_2^{-1} z_1^{-1} s_1 + a_3 t_1 z_2^{-1} s_1^{-1}) a_1 x_2^{-1} r_1^{-1} + \\ & + a_2 a_5 t_1 t_2 s_2^{-1} z_1^{-1} s_1 z_2 y_2^{-1} y_1^{-1} r_1 = \quad (52g) \end{aligned}$$

$$a_2 a_5 \tilde{t}_1 \tilde{t}_2 \tilde{s}_2^{-1} \tilde{z}_1^{-1} \tilde{s}_1 \tilde{z}_2 \tilde{y}_2^{-1} y_1^{-1} r_1 \tilde{x}_2 = a_2 a_5 t_1 t_2 s_2^{-1} z_1^{-1} s_1 z_2 y_2^{-1} y_1^{-1} r_1 x_2 \quad (52h)$$

$$a_1 a_6 \tilde{t}_2^{-1} \tilde{t}_1^{-1} \tilde{z}_2^{-1} \tilde{s}_1^{-1} \tilde{x}_2^{-1} r_1^{-1} = a_1 a_6 t_2^{-1} t_1^{-1} z_2^{-1} s_1^{-1} x_2^{-1} r_1^{-1} \quad (52i)$$

Из уравнений (52a), (52b) и (52c) мы получаем  $\tilde{x}_2 = x_2, \tilde{y}_2 = y_2, \tilde{r}_2 = r_2$ .

Из уравнений (52d), (52e) и (52f)  $\tilde{z}_2 = z_2, (52f), (52h) \text{ и } (52i) \tilde{s}_1 = s_1$ .

Теперь, используя новую информацию и уравнения (52a), (52b) и (52c) мы

получаем  $\tilde{z}_1 = z_1, \tilde{s}_2 = s_2$ . Из уравнений (52g) и (52i) мы получаем

$\tilde{t}_1 = t_1, \tilde{t}_2 = t_2$ .

Из задачи матричной трифакторизации мы получаем только тривиальное решение  $\tilde{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{x}_2$ ,  $\tilde{\mathbf{y}}_2 = \mathbf{y}_2$ ,  $\tilde{\mathbf{r}}_2 = \mathbf{r}_2$ ,  $\tilde{\mathbf{z}}_2 = \mathbf{z}_2$ ,  $\tilde{\mathbf{s}}_1 = \mathbf{s}_1$ ,  $\tilde{\mathbf{z}}_1 = \mathbf{z}_1$ ,  $\tilde{\mathbf{s}}_2 = \mathbf{s}_2$ ,  $\tilde{\mathbf{t}}_1 = \mathbf{t}_1$ ,  $\tilde{\mathbf{t}}_2 = \mathbf{t}_2$ . Таким образом, отображение (46) является отображением тетраэдров.

## Выводы

В этой работе мы используем преобразование Дарбу с некоммутативными переменными и с помощью локального уравнения Янга—Бакстера строим новые отображения тетраэдров, то есть теоритико—множественные решения уравнения тетраэдров Замолодчикова. В частности, мы построили отображения (36) и (46). Доказательство того, что эти отображения удовлетворяют уравнению Замолодчикова было сделано с помощью условия матричной шесть-факторизации.

Кроме того, мы построили некоммутативное отображение типа Бусинеска и доказали, что оно удовлетворяет уравнению Янга—Бакстера. Для доказательства мы использовали задачу матричной трифакторизации.

Результаты этой работы можно расширить следующим образом:

- Поскольку наши отображения тетраэдров построены с помощью некоммутативных преобразований Дарбу для конкретных уравнений типа нелинейного уравнения Шредингера, стоит исследовать связь между построенными отображениями и соответствующими дискретизациями нелинейных уравнений Шредингера.
- Применить наши методы к другим интегрируемым уравнениям математической физики.
- С помощью преобразования Дарбу построить решения уравнений  $n$ —симплексов для  $n \geq 4$ .

## Список литературы

- [1] S. Konstantinou-Rizos, On the 3D-consistency of a Grassmann extended lattice Boussinesq system *Nuclear Physics B* 951 (2020) 114878
- [2] S. Konstantinou-Rizos. Nonlinear Schrödinger type tetrahedron maps. *Nuclear Phys. B* **960** (2020), 115207.
- [3] S. Konstantinou-Rizos, Noncommutative solutions to Zamolodchikov's tetrahedron equation and matrix six-factorisation problems *Physica D* 440 (2022) 133466
- [4] A. Veselov, Yang-Baxter maps and integrable dynamics, *Phys. Lett. A* 314 (2003) 214–221.
- [5] Y. Suris and A. Veselov, Lax matrices for Yang-Baxter maps, *J. Nonlinear Math., Phys.* 10 (2003) 223–230.
- [6] A.B. Zamolodchikov. Tetrahedra equations and integrable systems in three-dimensional space, *Sov. Phys. JETP* 52 (1980) 325–336.
- [7] A.B. Zamolodchikov. Tetrahedron equations and the relativistic S matrix of straight strings in (2+1)-dimensions, *Commun. Math. Phys.* 79 (1981) 489–505.
- [8] R.J. Baxter, On Zamolodchikov's Solution of the Tetrahedron Equations, *Commun. Math. Phys.* 88 (1983) 185–205.
- [9] A. Doliwa and R.M. Kashaev, Non-commutative bi-rational maps satisfying Zamolodchikov equation equation, and Desargues lattices, *J. Math. Phys.* 61 (2020) 092704.
- [10] S. Igonin and S. Konstantinou-Rizos, Algebraic and differential-geometric constructions of set-theoretical solutions to the Zamolodchikov tetrahedron equation *J. Phys. A* 55 (2022)

- [11] R.M. Kashaev, I.G. Koperanov, and S.M. Sergeev, Functional Tetrahedron Equation, *Theor. Math. Phys.* 117 (1998) 370–384.
- [12] J.M. Maillet, F. Nijhoff, The tetrahedron equation and the four-simplex equation, *Phys. Lett. A* 134 (1989) 221–228.
- [13] J.M. Maillet, F. Nijhoff, Integrability for multidimensional lattice models, *Phys. Lett. B* 224 (1989) 389–396.
- [14] T.E. Kouloukas, V.G. Papageorgiou, Yang–Baxter maps with first-degree-polynomial  $2 \times 2$  Lax matrices, *J. Phys. A* 42 (2009) 404012.

## Приложение

В Оргкомитет Смотра дипломных работ математиков России  
от Мельникова Иоанна Евгеньевича

### Заявление о новизне

Сообщаю, что новыми в моей представленной на Смотр выпускной квалификационной работе (далее - работа) под названием: **“Уравнение Эйлера-Дарбу-Пуассона в контексте бегущих волн в сильно неоднородных средах”** являются главы 5-9 (трансформация уравнений мелкой воды к уравнению Эйлера-Дарбу-Пуассона с гиперболическим синусом, а также обобщение преобразования Кэрриера-Гринспана).

Также сообщаю, что для проверки новизны мною было проделано следующее:

- Проведена серия консультаций с моим научным руководителем, доктором физ.мат. наук, профессором Пелиновским Ефимом Наумовичем, специалистом в теории распространения волн в неоднородных средах.
- Проведены выступления на научных конференциях (математическая весна 2024, Symmetry 2024)
- Проведено выступление на научном семинаре отделения геофизических исследований

Таким образом, по результатам поиска в сети Интернет и тематических научных базах, а также обсуждений со специалистами следует, что, по-видимому, представленный в моей выпускной квалификационной работе указанный выше математический материал действительно является новым.

Подтверждаю, что являюсь автором предоставляемой на Смотр работы и прошу принять её для участия в Смотре. Принимаю на себя обязательство соблюдать правила Смотра. Также (в соответствии с п. 4 Положения о Смотре) принимаю на себя обязательство оценить 5 работ участников Смотра, выданных мне Оргкомитетом в результате жеребьёвки и сверх того оценить 2-5 работ других участников Смотра на мой выбор. Я понимаю правила оценки работ, приведённые в п. 4.3 Положения о Смотре. Даю согласие на публикацию адреса моей электронной почты.

Защита работы состоялась 11 июня 2024 года. На Смотр представлен проект окончательный текст работы.

Подпись



Мельников Иоанн Евгеньевич

13 июня 2024 г. Нижний Новгород, Россия

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ»

Факультет информатики, математики и компьютерных наук

Программа подготовки бакалавров по направлению  
01.03.01 Математика

*Мельников Иоанн Евгеньевич*

**ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА**

Уравнение Эйлера-Дарбу-Пуассона в контексте бегущих волн в сильно неоднородных  
средах

Рецензент  
доктор физ.мат. наук

---

Т. Г. Талипова  
Институт прикладной физики РАН

Руководитель работы  
доктор физ.мат. наук, профессор

---

Е. Н. Пелиновский

Нижний Новгород, 2024 г.

## Содержание

1	Введение	3
2	Подстановки Эйлера	7
3	Трансформационная техника решения волновых уравнений с переменными коэффициентами	11
4	Сведение к классическому уравнению Эйлера-Дарбу-Пуассона	12
5	Сведение к модифицированному уравнению Эйлера-Дарбу-Пуассона	14
5.1	Параметр $m$ - натуральный. . . . .	15
5.1.1	$m = 1$ . . . . .	17
5.1.2	Анализ падающей волны при $m = 1$ . . . . .	18
5.1.3	Конкретный пример эволюции волны, подходящей к берегу в случае $m = 1$ . . . . .	19
5.1.4	Отражение волны у берега ( $m = 1$ ) . . . . .	22
5.2	Параметр $m$ - целый и отрицательный . . . . .	24
5.2.1	$m = -1$ . . . . .	25
6	Обобщенное преобразование Кэрриера-Гриспана (КГ) в теории мелкой воды	28
7	Точные решения в виде бегущих волн	29
8	Классы функций $h(x)$ , допускающих точные решения: подводные горы и батиметрии с урезом	32
9	Прохождение волны над подводной горой без отражения	33
9.1	Волновое движение над горой на фиксированном примере . . . . .	35
10	Заключение	40
	Список литературы	42

## Аннотация

Представлены методы нахождения точных решений волновых уравнений с переменными коэффициентами, описывающих распространение волн в сильно неоднородных средах. Предложенные методы основаны на различных преобразованиях, приводящих исследуемые уравнения к уравнению Эйлера-Дарбу-Пуассона. В качестве модели для поиска точных решений выбраны уравнения мелкой воды переменной глубины.

Первым из подходов для поиска точных решений является представление неизвестной функции смещения водной поверхности (или скорости) в виде произведения амплитуды и новой неизвестной функции, зависящей от времени и от фазы (mapping technique). Показано, что для определенных конфигураций среды, уравнения мелкой воды сводятся к уравнению Эйлера-Дарбу-Пуассона. Благодаря чему для определенных видов профилей дна (переменных коэффициентов волнового уравнения) получены точные решения, представимые в виде двух обобщенных бегущих волн, распространяющихся в разные стороны (безотражательное распространение). Приводится детальный анализ полученного точного решения.

Также представлен другой метод трансформации линейных уравнений мелкой воды, основанный на обобщении преобразования Кэрриера-Гриспана, хорошо известного в теории наката нелинейных волн на плоский откос. Благодаря нему исходные уравнения для волн в бассейне с произвольной батиметрией сводятся к волновому уравнению, из которого можно одновременно получить и смещение свободной поверхности, и скорость течения. Получены точные решения в элементарных функциях для подводных гор определенной формы. Показано, что при движении с более пологого склона на более резкий форма волны будет интегрироваться определенное количество раз, причем максимальная амплитуда достигается не на самой вершине горы.

## 1 Введение

Изучение распространения волн в неоднородных средах неразрывно связано с развитием математического аппарата для решения уравнений в частных производных. Так, например, выдающийся математик Леонард Эйлер в своей работе [1] изучает распространение звука в трубе переменного сечения. Пренебрегая силой тяжести, для малых смещений Эйлер получает следующее уравнение

$$\frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial(Uu)}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

где  $a$  - скорость распространения,  $u$  - смещение частицы,  $x$  - координата поперечного сечения,  $t$  - время. А также

$$U = (\ln \Omega)' \quad (2)$$

где  $\Omega$  - площадь поперечного сечения. В случае, когда площадь поперечного сечения изменяется по степенному закону ( $\Omega \sim x^\alpha$ , например, при вращении параболы вокруг оси  $x$ ) уравнение (1) для функции  $s = \frac{u}{x}$  принимает вид классического уравнения Эйлера-Дарбу-Пуассона

$$\frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} - \frac{2 + \alpha}{x} \frac{\partial s}{\partial x} = 0 \quad (3)$$

решение которого для четных  $\alpha$  получил сам Леонард Эйлер [2], привнесший идею поиска решения уравнения в частных производных в виде комбинации произвольных функций и их производных. На конкретном методе решения уравнения Эйлера-Дарбу-Пуассона мы остановимся подробно в разделе 2. Дело в том, что данный подход (использование подстановок Эйлера) до сих пор дает плоды в решении волновых моделей неоднородных сред. Так, совсем недавно [3] были получены точные решения модифицированного уравнения (3), где в последнем коэффициенте (перед младшей производной) вместо  $x$  стоит  $\sinh x$  или  $\sin x$ .

В качестве математической модели неоднородной среды, точные решения которой будут представлены в данной работе, рассматриваются уравнения одномерной линейной теории мелкой воды с переменной глубиной [4], [5]

$$\frac{\partial u}{\partial t} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}[h(x)u] = 0 \quad (5)$$

где  $u$  - это скорость течения,  $\eta$  - смещение водной поверхности,  $h$  - глубина (расстояние от дна до невозмущенного уровня воды),  $g$  - ускорение свободного падения,  $x$  - пространственная координата,  $t$  - время (рисунок 1).

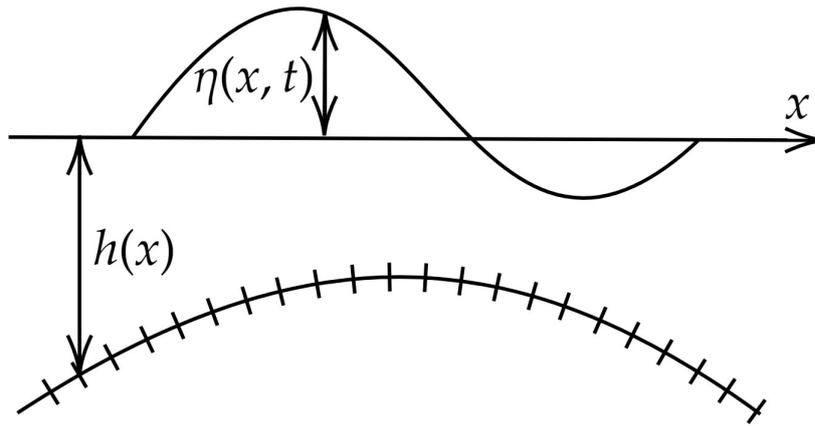


Рис. 1: Схематичное представление распространения волн над неровным дном

Список точных решений этой системы (4)-(5) до сих пор является малочисленным, несмотря на огромную важность этих уравнений в описании динамики волн на воде. Точные решения, наряду с экспериментами, ценны в апробации и валидации численных алгоритмов. Кроме того, для практических целей важно знать профили дна, распространение волн над которыми является безотражательным, поскольку при таком распространении происходит перенос энергии на большие расстояния.

При медленном изменении батиметрии особенно хороши асимптотические методы [6]- [8], которые приводят к хорошо известному закону Грина. Однако, как было показано в [9] - медленное изменение не обязательно, и безотражательное распространение может происходить и в сильно неоднородной среде, правда, для специфических профилей дна. В последнее время, в связи с поиском таких профилей, вышло большое количество работ, применяющих к линейному уравнению второго порядка на смещение (или скорость) трансформационную технику, благодаря которой оно преобразуется к уравнениям, существование решений которых в виде бегущих волн является очевидным. Подобная техника решений уравнений с переменными коэффициентами также берет свое начало еще со времен Эйлера, и продолжает развиваться [10, 11]. Преобразование к волновому уравнению с постоянными коэффициентами привело к получению двух безотражательных профилей  $h \sim x^{\frac{4}{3}}$  и  $h \sim x^4$  [9, 12] ( $h$  - глубина,  $x$  - пространственная координата). Затем этот метод применялся для сведения уравнений мелкой воды к уравнению Клейна-Гордона (полный математический анализ трансформаций, приводящих к этому уравнению изложен в [13]), рассматривался для самосогласованных каналов [14], а также для задач с переменным течением [15]. Недавно, благодаря трансформации исходного волнового уравнения с переменными коэффициентами к уравнению Эйлера-Дарбу-Пуассона (ЭДП), нами была получена уже счетная серия степенных безотражательных профилей, лежащих между  $x^{\frac{4}{3}}$  и  $x^4$ ; эти результаты представлены в дипломной работе и опубликованы в [16, 17]. Применение данного подхода не остановилось на уравнениях мелкой воды, и широко используется в других разделах физики, например, для исследования волн в атмосфере Земли и Солнца [18, 19], также в физике плазмы [20]. Однако, упомянутый метод рассматривает волновое уравнение отдельно от основной системы мелкой

воды, и для возвращения к исходной, на полученные решения необходимо дополнительно накладывать некоторые условия [9, 16, 17]. В нашей работе будет применена данная техника. При помощи нее мы сведем уравнения мелкой воды к модифицированному уравнению Эйлера-Дарбу-Пуассона, благодаря чему получим новую счетную серию безотражательных профилей дна.

Описанная выше техника, не единственная, позволяющая получать аналитические результаты. Большой шаг в развитии методов поиска точных решений уравнений мелкой воды был сделан в середине прошлого века Кэрриером и Гриспаном [21]. Подход, предложенный ими, заметно позже стал весьма популярным для описания наката нелинейных волн на берег [22–24], а также применим к каналам переменного сечения [25, 26]. Преобразование Кэрриера-Гриспана (КГ) сводит нелинейную задачу уравнений мелкой воды с наклонным дном

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial H}{\partial x} = -g\alpha, \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [Hu] = 0 \quad (6)$$

( $u$  - усредненная по глубине скорость,  $\eta$  - смещение водной поверхности,  $H = -\alpha x + \eta$  - полная глубина,  $g$  - ускорение свободного падения,  $\alpha \in \mathbf{R}$  - тангенс угла наклона дна,  $x$  - пространственная координата,  $t$  - время) к линейному уравнению Эйлера-Дарбу-Пуассона для функции  $\Phi(\sigma, \lambda)$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \lambda^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \sigma^2} - \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} = 0 \quad (7)$$

при этом все переменные выражаются в терминах функции  $\Phi$  и ее аргументов  $\sigma$  и  $\lambda$

$$u = \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma}, \quad \eta = \frac{1}{2g} \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} - u^2 \right], \quad x = \frac{1}{2\alpha g} \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} - u^2 - \frac{\sigma^2}{2} \right], \quad t = \frac{1}{\alpha g} \left[ \lambda - \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} \right] \quad (8)$$

Еще раз подчеркнем - нелинейная система свелась к единственному линейному уравнению! Замечательным фактом здесь является то, что линеаризованная версия преобразования Кэрриера-Гриспана переводит линейный вариант уравнений мелкой воды с дном постоянного уклона

$$\frac{\partial u}{\partial t} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (-\alpha x u) = 0 \quad (9)$$

при помощи введения новой неизвестной функции  $\Phi(\sigma, \lambda)$  и переменных, что

$$\eta = \frac{1}{2g} \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda}, \quad u = \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma}, \quad x = -\frac{\sigma^2}{4g\alpha}, \quad t = \frac{\lambda}{g\alpha} \quad (10)$$

в точности к такому же уравнению Эйлера-Дарбу-Пуассона

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \lambda^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \sigma^2} - \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} = 0 \quad (11)$$

Одним из главных результатов, полученных при помощи этого преобразования, является доказательство линейности связи экстремальных характеристик заплеска с амплитудой падающей волны, заданной достаточно далеко от берега. Это, в свою очередь привело к использованию линейной теории для расчета характеристик заплеска [27, 28].

Важно отметить, что приведенное выше преобразование КГ годится только для единственного наклонного профиля  $h(x) = -\alpha x$ . В настоящей работе будет предложен способ модифицирования этого преобразования для произвольного профиля дна  $h(x)$ , благодаря которому уравнения мелкой воды сводятся к волновому уравнению, из которого можно одновременно получить как скорость течения, так и смещение. При помощи этого способа будет получен достаточно обширный список безотражательных профилей дна, кардинально новыми из которых являются подводные горы.

Работа устроена следующим образом. Сначала, в разделе 2 описывается метод построения решений уравнения Эйлера-Дарбу-Пуассона и его модификаций, основанный на подстановках Эйлера, согласно [3]. Затем, в разделе 3 описывается первый метод поиска точных решений уравнений мелкой воды (трансформационная техника), а в разделах 4 и 5 осуществляется сведение к конкретным уравнениям (ЭДП и его модификации), обсуждаются полученные решения. В разделе 6 описывается обобщение преобразования Кэрриера-Гринспана в линейном случае. В главе 7 осуществляется поиск точных решений волнового уравнения, полученного при помощи обобщенного КГ преобразования. 8 и 9 разделы подробно описывают формы подводного рельефа, точные решения над которым получены в 7 главе, а также иллюстрируют сами точные решения. Основные результаты работы суммируются в заключении.

## 2 Подстановки Эйлера

В дальнейшем мы будем значительно опираться на решения уравнения Эйлера-Дарбу-Пуассона

$$\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 G}{\partial \tau^2} - \frac{2m}{\tau} \frac{\partial G}{\partial \tau} = 0 \quad (12)$$

и его модификаций

$$\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 G}{\partial \tau^2} - \frac{2m}{\sinh \tau} \frac{\partial G}{\partial \tau} = 0 \quad (13)$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 G}{\partial \tau^2} - \frac{2m}{\sin \tau} \frac{\partial G}{\partial \tau} = 0 \quad (14)$$

Решение уравнения (12) для  $m \in \mathbf{Z}$  были получены еще Эйлером ([2], задача 52). При этом решения уравнений (13) и (14) были получены совсем недавно [3], при помощи подстановок Эйлера, которые являются серьезным инструментом для нахождения решений линейных гиперболических уравнений в частных производных с переменными коэффициентами. Поэтому мы опишем здесь способ получения решений (12)-(14) согласно [3].

Для этого выясним, когда решения уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} - g(\tau) \frac{\partial u}{\partial \tau} = 0 \quad (15)$$

при помощи дифференциальной подстановки Эйлера

$$v = r(\tau)u + s(\tau) \frac{\partial u}{\partial \tau} \quad (16)$$

переходят в решения уравнения

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2} - Ag(\tau) \frac{\partial v}{\partial \tau} = 0, \quad A \in \mathbf{R} \quad (17)$$

Для этого подставим (16) в уравнение (17). Тогда мы получим

$$s \left( \frac{\partial^3 u}{\partial \tau \partial t^2} - \frac{\partial^3 u}{\partial \tau^3} \right) + r \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} \right) - (Ags + 2s') \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} - (s'' + 2r' + Ags' + Agr) \frac{\partial u}{\partial \tau} - (r'' + Agr')u = 0 \quad (18)$$

При этом заменим две первые скобки в силу того, что  $u$  - это решение (15). После чего получим уравнение

$$\left( sg - Ags - 2s' \right) \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + \left( sg' + rg - s'' - 2r' - Ags' - Agr \right) \frac{\partial u}{\partial \tau} - \left( r'' + Agr' \right) u = 0 \quad (19)$$

Поскольку  $u$  - это решение лишь уравнения (15), то равенство (19) в общем случае может достигаться при условии, что все коэффициенты перед функцией  $u$  и ее производными нулевые

$$2s' = sg(1 - A), \quad s'' = sg' - 2r' + g(r - As' - Ar), \quad r'' = -Agr' \quad (20)$$

Вообще говоря, эта система описывает все дифференциальные подстановки вида (16) между уравнениями (15) и (17), однако решить ее аналитически в общем случае не удастся. Поэтому положим, что  $r = \text{const}$  (без ограничения общности, в силу линейности уравнений положим  $r = 1$ ), тогда третье условие из (20) автоматически выполняется. Подставляя функцию  $g$  из первого условия во второе в (20) мы получаем одно уравнение на функцию  $s$

$$\frac{1}{2}(1+A)s'' - (1+A)\frac{s'^2}{s} + (1-A)\frac{s'}{s} = 0 \quad (21)$$

и после замены  $y = 1/s$  (пока считаем, что  $A \neq \pm 1$ ) уравнение преобразуется к виду

$$y'' = \frac{2(A-1)}{A+1}yy' \iff y' = \frac{(A-1)}{A+1}y^2 + c, \quad c \in \mathbb{R} \quad (22)$$

Если  $c = 0$ , то тогда легко найти функции  $s$  и  $g$ :

$$s = \frac{(1-A)\tau + c_1}{A+1}, \quad g = \frac{2}{(1-A)\tau + c_1}, \quad c_1 \in \mathbb{R} \quad (23)$$

Обозначив за  $\frac{2}{1-A} = \alpha$ , при условии, что  $c_1 = 0$  мы получаем классический результат [1, 2], что решения уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} - \frac{\alpha}{\tau} \frac{\partial u}{\partial \tau} = 0 \quad (24)$$

при помощи дифференциальной подстановки

$$v = \frac{\tau}{\alpha - 1} \frac{\partial u}{\partial \tau} + u \quad (25)$$

переходят в решения уравнения

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2} - \frac{\alpha - 2}{\tau} \frac{\partial v}{\partial \tau} = 0 \quad (26)$$

Теперь у нас достаточно средств для получения известных решений уравнения Эйлера-Дарбу-Пуассона для  $\alpha = 2m$ ,  $m \in \mathbf{Z}/\mathbf{N}$ . Понятно, что при  $m = 0$  это обыкновенное волновое уравнение, решение которого хорошо известно

$$u_0 = \varphi(\tau + t) + \theta(\tau - t) \quad (27)$$

где  $\varphi$  и  $\theta$  - произвольные функции достаточной гладкости (индексом внизу у функции  $u$  будем обозначать значение константы  $m$ , для которой годится данное решение). Далее, применив подстановку (25) мы получаем решение  $u_{-1}$  для  $m = -1$ .

$$u_{-1} = -\tau \frac{\partial u_0}{\partial \tau} + u_0 \quad (28)$$

Итеративно применяя подстановку (25) мы можем получить решение для любого целого отрицательного  $m$ . Для небольших  $m$  (по модулю) это действительно удобный способ поиска

решения уравнения ЭДП, а для больших  $m$  при помощи индукции можно получить формулу общего решения

$$u_m(\tau, t) = \sum_{k=0}^{|m|} a_k \tau^k \left( \varphi^{(k)}(\tau + t) + \theta^{(k)}(\tau - t) \right) \quad (29)$$

где производная берется по всему аргументу, коэффициенты  $a_1 = -a_0 = -1$ , а дальнейшие коэффициенты  $a_k$  вычисляются по следующей формуле

$$a_k = (-1)^k \frac{2^{k-1} A_{|m|-1}^{k-1}}{k! A_{2|m|-1}^{k-1}}, \text{ где } A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} \quad (30)$$

Для того, чтобы получить решения для натуральных  $m$  мы вспомним об исключенных из рассмотрения случаях  $A = \pm 1$ .  $A = 1$  ( $r$  все также 1) дает решение системы (20) в виде констант, а случай  $A = -1$  приводит к следующему утверждению: подстановка

$$v = s(\tau) \frac{\partial u}{\partial \tau} \quad (31)$$

переводит решения уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} - \frac{s'}{s} \frac{\partial u}{\partial \tau} = 0 \quad (32)$$

в решения уравнения

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2} + \frac{s'}{s} \frac{\partial v}{\partial \tau} = 0 \quad (33)$$

Теперь становится понятно, что для того, чтобы получить решение уравнения ЭПД с натуральным значением  $m$  необходимо просто применить подстановку (31) к решению  $u_{-m}$ . Общая формула ( $m \in \mathbf{N}$ ) при этом будет иметь вид

$$\tau^{2m-1} u_m(\tau, t) = \sum_{k=0}^{m-1} a_k \tau^k \left( \varphi^{(k)}(\tau + t) + \theta^{(k)}(\tau - t) \right) \quad (34)$$

аналогично,  $a_1 = -a_0 = -1$  и

$$a_k = (-1)^k \frac{2^{k-1} A_{m-2}^{k-1}}{k! A_{2m-3}^{k-1}}, \text{ где } A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}, m > 2 \quad (35)$$

В случае, когда в уравнении (22)  $c \neq 0$  [3] мы получим решения уравнений (13) и (14). Действительно, в зависимости от знака произведения  $\frac{A-1}{A+1}c = bc$  мы получим решения с гиперболическими и тригонометрическими функциями. В случае  $cb > 0$  имеем такое решение (22)

$$y = \sqrt{\frac{c}{b}} \tan(\sqrt{cb}\tau + c_1), c_1 \in \mathbf{R} \quad (36)$$

А в случае  $cb < 0$

$$y = \sqrt{-\frac{c}{b}} \tanh(\sqrt{|cb|}\tau + c_1), c_1 \in \mathbf{R} \quad (37)$$

Откуда легко находятся функции  $s$  и  $g$ , благодаря чему мы имеем аналогичное классическому

уравнению ЭДП утверждение: решения уравнений

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} - \frac{\alpha}{\sinh \tau} \frac{\partial u}{\partial \tau} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} - \frac{\alpha}{\sin \tau} \frac{\partial u}{\partial \tau} = 0 \quad (38)$$

при помощи дифференциальных подстановок

$$v = \frac{2 \tanh \frac{\tau}{2}}{\alpha - 1} \frac{\partial u}{\partial \tau} + u, \quad v = \frac{2 \tan \frac{\tau}{2}}{\alpha - 1} \frac{\partial u}{\partial \tau} + u \quad (39)$$

переходят в решения уравнений (соответственно)

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2} - \frac{\alpha - 2}{\sinh \tau} \frac{\partial v}{\partial \tau} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2} - \frac{\alpha - 2}{\sin \tau} \frac{\partial v}{\partial \tau} = 0 \quad (40)$$

Продельвая аналогичные рассуждения, понятно, что теперь мы знаем решения уравнений (13) и (14) для целых  $m$ . Однако общую формулу (без итеративного применения подстановки (39)), как в случае с классическим ЭДП найти пока не удалось. Приведем здесь решения для конкретных  $m$ . Например, для  $m = -1$  решением уравнения (13) является

$$u_{-1} = \varphi(\tau + t) + \theta(\tau - t) - 2 \tanh \frac{\tau}{2} \left( \varphi'(\tau + t) + \theta'(\tau - t) \right) \quad (41)$$

из этого решения можно получить решения для  $m = 1$ , при помощи подстановки (31). Для этого необходимо найти функцию  $s$ :

$$\frac{s'}{s} = -\frac{2}{\sinh \tau} \quad (42)$$

Тогда

$$u_1 = \frac{\cosh \tau + 1}{\cosh \tau - 1} \left( \frac{\partial}{\partial \tau} \left( u_0 - 2 \frac{\partial u_0}{\partial \tau} \tanh \frac{\tau}{2} \right) \right) \quad (43)$$

что можно переписать как

$$u_1 = \frac{\tanh \frac{\tau}{2} (\cosh \tau + 1)}{\cosh \tau - 1} \left( \frac{\partial u_0}{\partial \tau} \tanh \frac{\tau}{2} - 2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial \tau^2} \right) \quad (44)$$

что можно окончательно переписать в виде

$$u_1 = \varphi'(\tau + t) + \theta'(\tau - t) - 2 \coth \left( \frac{\tau_d}{2} \right) \left( \varphi''(\tau + t) + \theta''(\tau - t) \right) \quad (45)$$

понятно, что мы можем избавиться от вторых производных в силу произвольности выбора функций для решения волнового уравнения. Тогда окончательно

$$u_1 = \varphi(\tau + t) + \theta(\tau - t) - 2 \coth \left( \frac{\tau_d}{2} \right) \left( \varphi'(\tau + t) + \theta'(\tau - t) \right) \quad (46)$$

Решения уравнений (12)-(14), полученные в [3] и описанные в этой главе, будут использоваться для получения решений уравнений мелкой воды, приведенных к уравнениям типа (12)-(14) при помощи трансформационной техники, описание которой предложено в следующей главе.

### 3 Трансформационная техника решения волновых уравнений с переменными коэффициентами

Система уравнений мелкой воды (4)-(5) может быть тривиальным образом сведена к одному волновому уравнению на смещение  $\eta$  с переменной скоростью  $c(x) = \sqrt{gh}$

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left( c^2(x) \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) = 0 \quad (47)$$

В основе одного из способов поиска точных решений в неоднородных средах является переход от координат  $(x, t)$  к координатам  $(\tau(x), t)$ . Более точно, решение будет представлено в виде

$$\eta(x, t) = A(x)G[\tau(x), t] \quad (48)$$

где  $A(x)$ ,  $\tau(x)$ ,  $G(\tau, t)$  - некоторые, пока неизвестные, произвольные функции (достаточной гладкости). Произведя подстановку (48) в уравнение (47) получаем уравнение Клейна-Гордона с переменными коэффициентами

$$A \left[ \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} - c^2 \left( \frac{d\tau}{dx} \right)^2 \frac{\partial^2 G}{\partial \tau^2} \right] - \left[ \frac{d}{dx} \left( c^2 A \frac{d\tau}{dx} \right) + c^2 \frac{dA}{dx} \frac{d\tau}{dx} \right] \frac{\partial G}{\partial \tau} - \frac{d}{dx} \left[ c^2 \frac{dA}{dx} \right] G = 0 \quad (49)$$

Далее, мы вольны наложить определенные условия на функции  $A(x)$  и  $\tau(x)$  так, чтобы при их выполнении уравнение для  $G$  (49) имело наиболее простой вид (а для поиска бегущих волн - чтобы оно имело решение в виде двух обобщенных бегущих волн). Так, например, для перехода к уравнению Клейна-Гордона с постоянными коэффициентами на функцию  $G$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 G}{\partial \tau^2} - PG = 0 \quad (50)$$

необходимо потребовать

$$c^2 \left( \frac{d\tau}{dx} \right)^2 = 1 \quad (51)$$

$$\frac{d}{dx} (cA) + c \frac{dA}{dx} = 0 \quad (52)$$

$$\frac{d}{dx} \left( c^2 \frac{dA}{dx} \right) = PA, P \in \mathbb{R} \quad (53)$$

Ограничения (51)-(53) могут варьироваться, в зависимости от того, какое итоговое уравнение мы хотим получить. В главах далее описаны процессы сведения исходного уравнения (47) к обыкновенному и модифицированному уравнению ЭДП. Отметим, что сведение (51)-(53) к уравнению Клейна-Гордона (с постоянными коэффициентами; волновому уравнению, в частном случае  $P = 0$ ) уже подробно анализировалось в литературе [9, 12, 14], поэтому останавливаться на нем мы не будем.

#### 4 Сведение к классическому уравнению Эйлера-Дарбу-Пуассона

При требовании следующих условий

$$c^2 \left( \frac{d\tau}{dx} \right)^2 = 1 \quad (54)$$

$$\frac{d}{dx} (cA) + c \frac{dA}{dx} = \frac{2m}{\tau} A \quad (55)$$

$$\frac{d}{dx} \left( c^2 \frac{dA}{dx} \right) = 0 \quad (56)$$

уравнение (49) примет вид Эйлера-Дарбу-Пуассона

$$\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 G}{\partial \tau^2} - \frac{2m}{\tau} \frac{\partial G}{\partial \tau} = 0 \quad (57)$$

В свою очередь, решение системы (54)-(56) дает выражения для неизвестной функции  $\tau(x)$ , профиля дна  $h(x)$  и скорости волны  $c(x)$  (с точностью до сдвига координаты по оси  $x$ ; предполагается, что  $A = const$ , в силу того, что общее аналитическое решение уравнений (54)-(56) найти пока не удалось)

$$h(x) = h_0 \left( \frac{x}{L} \right)^{\frac{4m}{2m+1}} \quad (58)$$

$$\tau(x) = \tau_0 \left( \frac{x}{L} \right)^{\frac{1}{2m+1}} \quad (59)$$

$$c(x) = \pm \frac{1}{\tau'(x)} = \pm \frac{(2m+1)L}{\tau_0} \left( \frac{x}{L} \right)^{\frac{2m}{2m+1}} \quad (60)$$

где  $h_0 \in \mathbf{R}_+$  - это глубина водоема на расстоянии  $L$  от берега,  $\tau_0 \in \mathbf{R}_+$  - время, за которое волна от точки  $L$  уйдет на бесконечность в случае отрицательного  $m$ , и время прохождения от точки  $L$  до берега при положительном  $m$ .

Как обсуждалось выше (глава 2), при целых  $m$  решением этого уравнения является линейная комбинация произвольных функций и их производных, которые, в свою очередь, зависят от суммы и разности  $t$  и  $\tau$ . Формулы точного решения в общем случае (29) (для отрицательных  $m$ ) и (34) (для положительных  $m$ ) уже были приведены, поэтому проиллюстрируем здесь для наглядности решения в виде обобщенной бегущей волны при фиксированных  $m$ . Общее же решение для  $\eta$  содержит две обобщенные волны, распространяющиеся в противоположных направлениях, причем выражение для второй легко можно получить из первой, используя симметрию по времени уравнения (47) (если  $\eta(x, t)$  - решение уравнения (47), то  $\eta(x, -t)$  - тоже решение). При  $m = 1$  мы получаем точное решение над профилем  $h \sim x^{\frac{4}{3}}$

$$\eta(\tau(x), t) = \frac{\varphi(\tau(x) + t)}{\tau(x)} = \frac{\varphi\left(\tau_0 \left(\frac{x}{L}\right)^{\frac{1}{3}} + t\right)}{\tau_0 \left(\frac{x}{L}\right)^{\frac{1}{3}}} \quad (61)$$

Скорость течения  $u$  находится из уравнения (4), при этом она будет определена с точностью

до произвольной функции  $\xi(x)$ , которую, при исследовании бегущих волн в классе функций из гильбертова пространства  $\mathbf{L}^2$  (т. е. волн с конечной энергией), обычно полагают равной нулю

$$u(x, t) = -\frac{g}{c} \frac{\partial}{\partial \tau} \int_{-\infty}^t \frac{\varphi(t + \tau(x))}{\tau(x)} dt + \xi(x) = -\frac{g\tau_0}{3L} \left(\frac{L}{x}\right)^{\frac{2}{3}} \left[ \frac{\varphi\left(\tau_0\left(\frac{x}{L}\right)^{\frac{1}{3}} + t\right)}{\tau_0\left(\frac{x}{L}\right)^{\frac{1}{3}}} - \frac{\Phi\left(\tau_0\left(\frac{x}{L}\right)^{\frac{1}{3}} + t\right)}{\tau_0\left(\frac{x}{L}\right)^{\frac{2}{3}}} \right] + \xi(x) \quad (62)$$

где  $\Phi = \int_{-\infty}^t \varphi(p) dp$ ;  $\varphi$ , как и ранее, некоторая произвольная функция достаточной гладкости. При  $m = -1$  мы имеем следующее волновое поле

$$\eta(x, t) = \varphi(\tau(x) + t) - \tau(x)\varphi'(\tau(x) + t) = \varphi\left(\frac{\tau_0 L}{x} + t\right) - \frac{\tau_0 L}{x} \varphi'\left(\frac{\tau_0 L}{x} + t\right) \quad (63)$$

$$u(x, t) = -\frac{g\tau(x)}{c(x)} \varphi'(\tau(x) + t) + \xi(x) = -\frac{g\tau_0^2}{L} \left(\frac{L}{x}\right)^3 \varphi'\left(\frac{\tau_0 L}{x} + t\right) + \xi(x) \quad (64)$$

Основной особенностью решений над данными степенными профилями (58) является то, что волна в процессе движения изменяет свою форму, причем при приближении к урезу ( $h = 0$ ) амплитуда волны стремится к бесконечности. Если падающая волна задана вдали от берега, то для положительных  $m$  ее форма при подходе к берегу будет интегрироваться  $m - 1$  раз (скорость течения  $m$  раз), а для отрицательных  $m$  наоборот, форма волны дифференцируется  $|m|$  раз (скорость течения  $|m| - 1$  раз). Причем при отрицательном  $m$  волна уходит на бесконечность за конечное время. Результаты, полученные нами, описаны подробно в наших статьях [17] и [29]. Заметим также, что предельным профилем ( $|m| \rightarrow \infty$ ) является  $h \sim x^2$  парабола. В безразмерных величинах уравнение на смещение для динамики волн над ней запишется в виде

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left( x^2 \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) = 0 \quad (65)$$

которое после подстановки

$$\eta = \frac{1}{\sqrt{x}} G(\ln x, t) \quad (66)$$

перейдет в уравнение Клейна-Гордона с постоянными коэффициентами

$$\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + \frac{1}{2^2} G = 0 \quad (67)$$

Все точные решения, полученные в этой главе, описывали динамику волн над степенными профилями  $h(x)$ , глубина которых мала в окрестности берега ( $x = 0$ ) и бесконечно большая при  $x \rightarrow \infty$ . Приближения мелкой воды будут не работать на указанных участках, и для корректного описания волн на воде необходимо рассматривать только конечный отрезок, причем отдельным является вопрос о корректном выборе границ отрезка. В следующей главе описано преобразование, которое позволяет избавиться от одной из двух неприятностей - либо получить профиль, ограниченный на бесконечности и с урезом, либо без уреза, но неограниченный.

## 5 Сведение к модифицированному уравнению Эйлера-Дарбу-Пуассона

Модифицированное уравнение ЭДП отличается от обычного только одним коэффициентом, поэтому, изменив только условие (55) на

$$\frac{d}{dx}(cA) + c\frac{dA}{dx} = \frac{2m}{T \sinh \frac{\tau}{T}}A \quad (68)$$

где  $T$  - пока произвольный временной параметр (условия (54), (56) считаем выполненными), уравнение (49) перейдет в модифицированное уравнение Эйлера-Дарбу-Пуассона

$$\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 G}{\partial \tau^2} - \frac{2m}{T \sinh \frac{\tau}{T}} \frac{\partial G}{\partial \tau} = 0 \quad (69)$$

А значит мы снова получаем счетное семейство точных решений системы (4)-(5) над профилями, вид которых мы узнаем, решив систему условий (54), (56) и (68).

Положим  $A(x) = const$ , тогда условие (56) автоматически выполняется. Условие (54) дает связь между фазой и скоростью  $c(x)$ :

$$\tau(x) = \int_{x_0}^x \frac{d\xi}{c(\xi)} \quad (70)$$

В дальнейшем, будет удобно положить  $x_0 = 0$ , тогда на полуоси  $x \geq 0$  бегущая волна  $\varphi(t + \tau(x))$  будет идти к берегу, а  $\psi(t - \tau(x))$  от него. Остается условие (68), которое можно переписать как

$$\frac{dc}{dx} = \frac{2m}{T \sinh \frac{\tau}{T}} \quad (71)$$

воспользуемся условием (54), чтобы перейти к уравнению только с 1 неизвестной функцией  $\tau(x)$

$$-\frac{\tau''}{\tau'^2} = \frac{2m}{T \sinh \frac{\tau}{T}} \quad (72)$$

сделаем замену  $\tau' = w(\tau)$ , тогда  $\tau'' = w'w$

$$-\frac{w'}{w} = \frac{2m}{T \sinh \frac{\tau}{T}}$$

$$w = \frac{1}{\alpha \tanh^{2m} \frac{\tau}{2T}} = \frac{d\tau}{dx} \quad \alpha \in \mathbf{R} \quad (73)$$

Отсюда следует, что

$$c(x) = \alpha \tanh^{2m} \frac{\tau}{2T} \quad (74)$$

и у неопределенной константы  $\alpha$  есть определенный физический смысл - скорость волны на бесконечности. Поэтому обозначим ее за  $c_0$ . Продолжая интегрировать уравнение (73),

получаем

$$\frac{x}{c_0} + \beta = \int \tanh^{2m} \frac{\tau}{2T} d\tau \quad c_0, \beta \in \mathbf{R} \quad (75)$$

С точностью до сдвига оси  $x$  мы можем избавиться от константы  $\beta$ . Тогда

$$\frac{x}{c_0} = \tau - 2T \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\tanh^{2k+1} \frac{\tau}{2T}}{2k+1} \quad \text{при } m > 0 \quad (76)$$

$$\frac{x}{c_0} = \tau - 2T \sum_{k=0}^{|m|-1} \frac{\coth^{2k+1} \frac{\tau}{2T}}{2k+1} \quad \text{при } m < 0 \quad (77)$$

Определим теперь константу  $T$  так, что  $T = \frac{L}{c_0}$ , где  $L$  - характерный масштаб переменной глубины. И далее будем работать в безразмерных величинах  $x_d = \frac{x}{L}$  и  $\tau_d = \frac{\tau}{T}$ . Однако, лучше будет разделить наше повествование на 2 случая, как это уже делалось в [16, 17, 29], и описывать отдельно случаи положительных и отрицательных (целых)  $m$ .

### 5.1 Параметр $m$ - натуральный.

В этом случае в безразмерных величинах соотношение (76) примет вид

$$x_d = \tau_d - 2 \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\tanh^{2k+1} \frac{\tau_d}{2}}{2k+1} \quad (78)$$

При больших положительных  $x_d$  функция  $\tau_d$  ведет себя практически линейно ( $\tanh$  стремится к 1 на  $+\infty$ )

$$\tau_d \approx x_d + 2 \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{2k+1} \quad (79)$$

При малых  $x_d$  фаза ведет себя асимптотически также, как это было бы при сведении к обыкновенному уравнению Эйлера-Дарбу-Пуассона

$$\tau \sim x^{\frac{1}{2m+1}} \quad (80)$$

что неудивительно, ведь  $\sinh \tau \sim \tau$  при малых  $\tau$ . Графики фазы  $\tau$  для различных натуральных  $m$  можно увидеть на рисунке 2. В силу того, что  $c^2 = gh$ , а также учитывая связь между скоростью и фазой (70), мы получаем параметрическое задание нового семейства безотражательных профилей  $h(x)$

$$h(x) = \frac{c^2(x)}{g} = \frac{1}{g \cdot (\tau'(x))^2} = h_0 \tanh^{4m} \frac{\tau}{2T} = h_0 \tanh^{4m} \frac{\tau_d}{2} \quad (81)$$

$$\frac{x}{L} = \tau_d - 2 \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\tanh^{2k+1} \frac{\tau_d}{2}}{2k+1}$$

где  $h_0$  - это глубина водоема на бесконечности ( $h_0 = \frac{c_0^2}{g}$ ). Аналогично отметим, что в окрестности нуля профиль  $h(x) \sim x^{\frac{4m}{2m+1}}$ , как и при сведении уравнений мелкой воды к обыкновенному уравнению ЭДП [16]. Для этого счетного семейства  $h(x)$  (81) характерен выход на постоянную глубину  $h_0$  на бесконечности ( $x \rightarrow \infty$ ), что отличает его от ранее находимых множеств безотражательных донных профилей  $h(x)$ . Этот факт позволяет получать корректные физические результаты почти всюду (кроме окрестности уреза), поскольку приближения мелкой воды при больших значениях координаты  $x_d$  не ломаются, как это было ранее. Иллюстрация полученного семейства профилей представлена на рисунке 3.

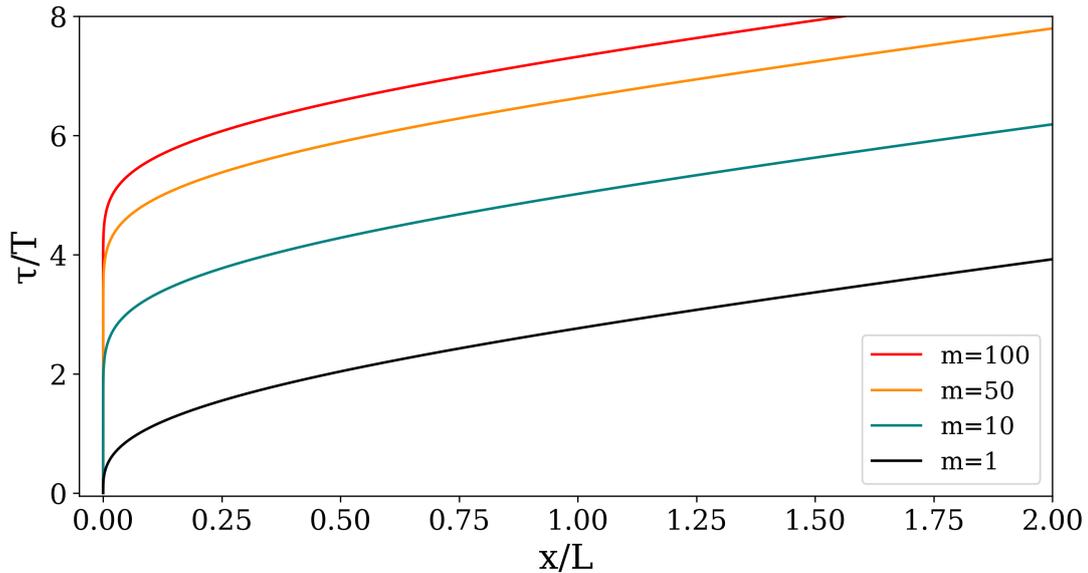


Рис. 2: График фазы  $\tau(x)$  для натуральных  $m$

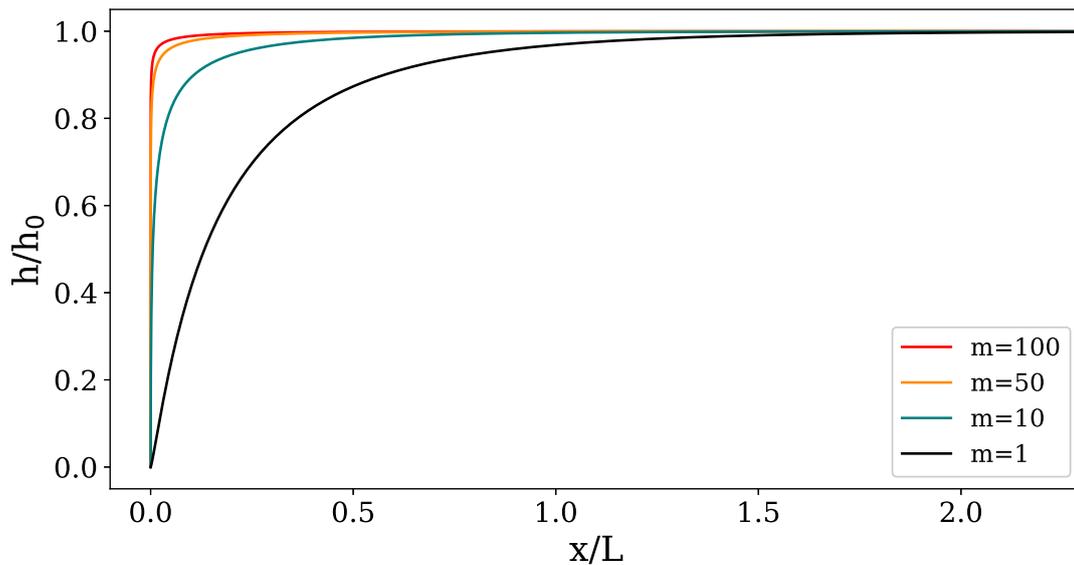


Рис. 3: Графики профилей  $h(x)$  для различных натуральных  $m$

Теперь вернемся к главному. Благодаря данным преобразованиям нам удалось получить точное решение уравнений мелкой воды, которое теперь можно записать в операторной форме

$$\eta(x, t) = G(\tau(x), t) = \coth^{2m} \frac{\tau}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial \tau} \left[ \prod_{k=0}^{m-1} \left( 1 - \frac{2}{1+2k} \tanh \frac{\tau}{2} \frac{\partial}{\partial \tau} \right) F \right] \quad (82)$$

где  $F$  - это решение обыкновенного волнового уравнения с постоянными коэффициентами ( $F = \varphi(\tau_d + t_d) + \theta(\tau_d - t_d)$ ). Причем это решение параметрическое, поскольку координата  $x$  также выражается через параметр  $\tau_d$ .

$$\frac{x}{L} = \tau_d - 2 \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\tanh^{2k+1} \frac{\tau_d}{2}}{2k+1}$$

Операторная запись в общем случае затрудняет анализ в случае произвольного натурального  $m$ . Поэтому зафиксируем  $m = 1$  и проанализируем, что будет происходить с волновым полем в данном случае.

### 5.1.1 $m = 1$

В этом случае профиль дна задается формулой

$$x_d = \tau_d - 2 \coth \frac{\tau_d}{2} \quad h(x) = h_0 \coth^4 \frac{\tau_d}{2} \quad (83)$$

Подставив в уравнение (82)  $m = 1$  мы получаем выражение для смещения

$$\eta(\tau(x), t) = G(\tau, t) = F - 2 \coth \left( \frac{\tau_d}{2} \right) \frac{\partial F}{\partial \tau_d} \quad (84)$$

и из уравнения (4) находим усредненную по глубине скорость

$$\begin{aligned} u &= -g \int \frac{\partial \eta}{\partial x} dt = -g \int \frac{\partial \eta}{\partial \tau} \tau' dt = -\frac{g}{c_0} \coth^2 \frac{\tau_d}{2} \int \frac{\partial \eta}{\partial \tau} dt = \\ &= -\frac{g}{c_0} \coth^2 \frac{\tau_d}{2} \int ((\varphi'(t_d + \tau_d) - \theta'(t_d - \tau_d)) \coth^2 \frac{\tau_d}{2} - 2(\varphi''(t_d + \tau_d) + \theta''(t_d - \tau_d)) \coth^2 \frac{\tau_d}{2}) dt \\ &= \frac{g}{c_0} \coth^3 \frac{\tau_d}{2} \left( 2(\varphi'(t_d + \tau_d) + \theta'(t_d - \tau_d)) \coth \frac{\tau_d}{2} - (\varphi(t_d + \tau_d) - \theta(t_d - \tau_d)) + \gamma(\tau_d) \right) \end{aligned} \quad (85)$$

где  $\gamma$  - произвольная функция достаточной гладкости. Итог можно переписать в виде

$$u = \frac{g}{c_0} \coth^3 \frac{\tau_d}{2} \left( 2(\varphi'(t_d + \tau_d) + \theta'(t_d - \tau_d)) \coth \frac{\tau_d}{2} - (\varphi(t_d + \tau_d) - \theta(t_d - \tau_d)) \right) + \xi(x) \quad (86)$$

где  $\xi(x)$  - произвольная функция, и при описании волн конечной энергии мы будем ее занулять, аналогично случаям выше.

### 5.1.2 Анализ падающей волны при $m = 1$

Рассмотрим класс функций смещения и скорости из гильбертова пространства  $L^2(\mathbf{R})$ , которые имеют на бесконечности (по времени) предел, равный 0. Также, индекс безразмерности  $d$ , в выражениях, не использующих одновременно размерные и безразмерные величины будем опускать, считая переменные  $t$  и  $\tau$  безразмерными.

Предположим, что падающая волна задана вдали от берега, в точке  $x_0 \rightarrow +\infty$  ( $\tau_0 = \tau(x_0)$ ), как  $\eta_0$ . Поскольку все характеристики волны выражаются через функцию  $\varphi(t)$ , то для дальнейшего исследования необходимо найти эту вспомогательную функцию из дифференциального уравнения

$$\varphi(t + \tau_0) - 2\varphi'(t + \tau_0) = \eta_0(t + \tau_0) \quad \tau_0 \rightarrow +\infty \quad (87)$$

поскольку  $\coth(\frac{\tau_0}{2}) \rightarrow 1$  при  $\tau_0 \rightarrow +\infty$ . В качестве решения уравнения (87), чтобы удовлетворить принципу причинности (нет сигнала при  $t \rightarrow -\infty$ ), необходимо выбрать

$$\varphi(t) = -\frac{e^{\frac{t}{2}}}{2} \int_{-\infty}^t \eta_0(\kappa) e^{-\frac{\kappa}{2}} d\kappa \quad (88)$$

Теперь, покажем, что если выполняется условие

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t}{2}} \eta_0(t) dt = 0 \quad (89)$$

то  $\forall \hat{\tau} > 0$  смещение в любой точке профиля  $\eta(t + \hat{\tau}) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow +\infty$ .

Поскольку при фиксации точки  $\hat{\tau}$  мы получаем, что  $\eta$  - это линейная комбинация  $\varphi$  и  $\varphi'$ , достаточно показать, что предел  $\varphi$  будет нулевым, в силу того, что

$$\varphi'(t) = \frac{1}{2}(\varphi(t) - \eta_0(t)) \quad (90)$$

и того, что  $\eta_0(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ , будет следовать, что  $\varphi' \rightarrow 0$ , а значит и  $\eta(t + \hat{\tau}) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow +\infty$ .

Предел функции  $\varphi$  действительно нулевой:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) &= \lim_{t \rightarrow +\infty} -\frac{e^{\frac{t}{2}}}{2} \int_{-\infty}^t \eta_0(\kappa) e^{-\frac{\kappa}{2}} d\kappa = \\ &= -\frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\int_{-\infty}^t \eta_0(\kappa) e^{-\frac{\kappa}{2}} d\kappa}{e^{-\frac{\kappa}{2}}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^{-\frac{t}{2}} \eta_0(t)}{e^{-\frac{t}{2}}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \eta_0(t) = 0 \end{aligned} \quad (91)$$

Тем самым, мы получили список из достаточных условий на класс начальных условий  $\eta_0(t)$ , при которых смещение в любой точке  $x$  будет ограниченным во времени

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \eta_0(t) = 0 \quad \text{and} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t}{2}} \eta_0(t) dt = 0 \quad (92)$$

Вторая компонента волнового поля для бегущей к берегу волны конечной энергии в без-

размерных величинах ( $u_d = \frac{uc_0}{gA}$ , где  $A$  - характерная амплитуда волны,  $A \ll L$ ; все индексы опущены) имеет вид (учитываем, что  $u \in L^2$  и  $u \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ )

$$u = 2\varphi'(\tau + t) \coth^3 \frac{\tau}{2} - \varphi(\tau + t) \coth^4 \frac{\tau}{2} \quad (93)$$

при этом новых ограничений на начальные условия не возникнет. На бесконечности скорость падающей волны ведет себя так же, как и в случае постоянного дна - поскольку множители, содержащие гиперболический котангенс будут стремиться к 1, легко увидеть, что (93) будет повторять форму волны  $\eta$ , только с противоположным знаком (поскольку течение направлено к берегу, то есть против направления оси  $x$ ). Далее, при приближении к берегу, форма скорости течений будет деформироваться, поскольку в сумме (93) будет начинать превалировать второе слагаемое.

Конечно, интересным для приложений вопросом является поведение волнового поля у самого берега. Полученное нами поле  $\eta$ ,  $u$  для волны, бегущей к берегу, является сингулярным вблизи уреза. При этом амплитуда волны смещения будет расти пропорционально  $h^{-\frac{1}{4}}$ , а усредненная по глубине скорость как  $h^{-1}$ . При помощи расчета расхода воды  $Q(t)$  у берега мы можем подсчитать, сколько воды выйдет на сухой берег

$$Q(t) = \lim_{x \rightarrow 0} h(x)u(x, t) = -h_0 \frac{g}{c_0} \varphi(t) = -c_0 \varphi(t) \quad (94)$$

Или, через начальную форму падающей волны расход выразится как

$$Q(t) = \frac{c_0 e^{\frac{t}{2}}}{2} \int_{-\infty}^t \eta_0(\kappa) e^{-\frac{\kappa}{2}} d\kappa \quad (95)$$

Таким образом, волновое поле становится сингулярным вблизи уреза, однако физически важная величина (расход жидкости  $Q$ ) остается конечным на урезе.

### 5.1.3 Конкретный пример эволюции волны, подходящей к берегу в случае $m = 1$

Для иллюстрации динамики волн в водоемах с таким профилем  $h(x)$  зададим на бесконечности падающую волну  $\eta_0(t)$ , идущую к берегу, и будем наблюдать за ее трансформацией. Выберем

$$\eta_0(t) = e^{-t^2} (1 + 4t) \quad (96)$$

для того, чтобы точно выполнялось требование (92) и было легко определить, что

$$\varphi(t) = \exp[-t^2] \quad (97)$$

Тогда смещение водной поверхности для этой волны в произвольной точке запишется следующим образом

$$\eta = \exp[-(t + \tau)^2] \cdot \left(1 + 4(t + \tau) \coth \frac{\tau}{2}\right) \quad (98)$$

Вдали от берега волна идет практически как в случае с постоянным дном - с очень плавно возрастающей амплитудой и скоростью, поскольку глубина изменяется мало. При этом, волна представляет собой не просто знакопеременный импульс, а волну, у которой количество воды над уровнем моря  $\eta = 0$  больше, чем под ним, в силу специфики условия (92). Затем, в решении начинает превалировать выделенная из начальных данных  $\eta_0$  функция  $\varphi'$ , и к берегу волна подходит имея именно такую форму (рисунок 4). При этом амплитуда волны вблизи берега  $\sim h^{-\frac{1}{4}}$ , то есть у берега выполняется закон Грина.

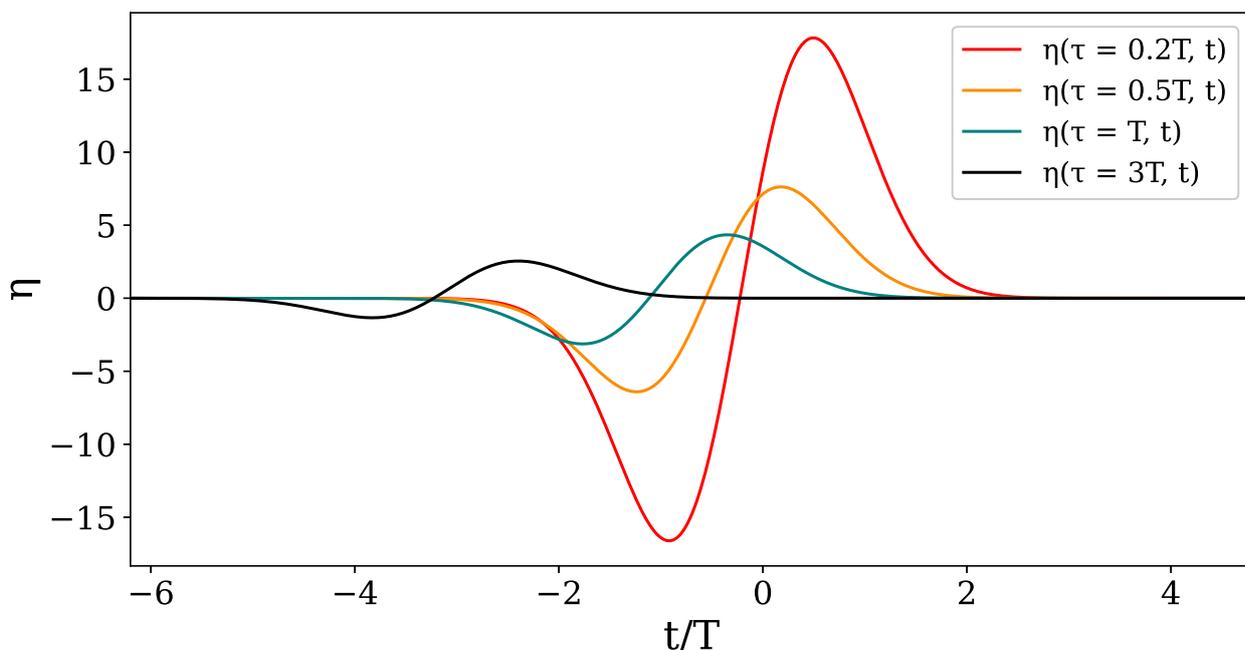


Рис. 4: Мареограммы волны, идущей к берегу

Также, пользуясь формулой (93), найдем усредненную по глубине скорость  $u$ .

$$u = -\exp[-(t + \tau)^2] \left( 4(t + \tau) \coth^3 \frac{\tau}{2} + \coth^4 \frac{\tau}{2} \right) \quad (99)$$

Графики скорости можно увидеть на рисунках 5 - 7. Поведение вдали от берега усредненной по глубине скорости аналогично поведению смещения вдали от берега, только с противоположным знаком. При приближении к берегу возникает основное отличие - превалировать начинает не  $\varphi'$ , а сама  $\varphi$ . При этом вблизи берега амплитуда  $u$  будет  $\sim h^{-1}$  и отрицательная полярность скорости означает то, что течение будет идти к берегу (рисунок 7).

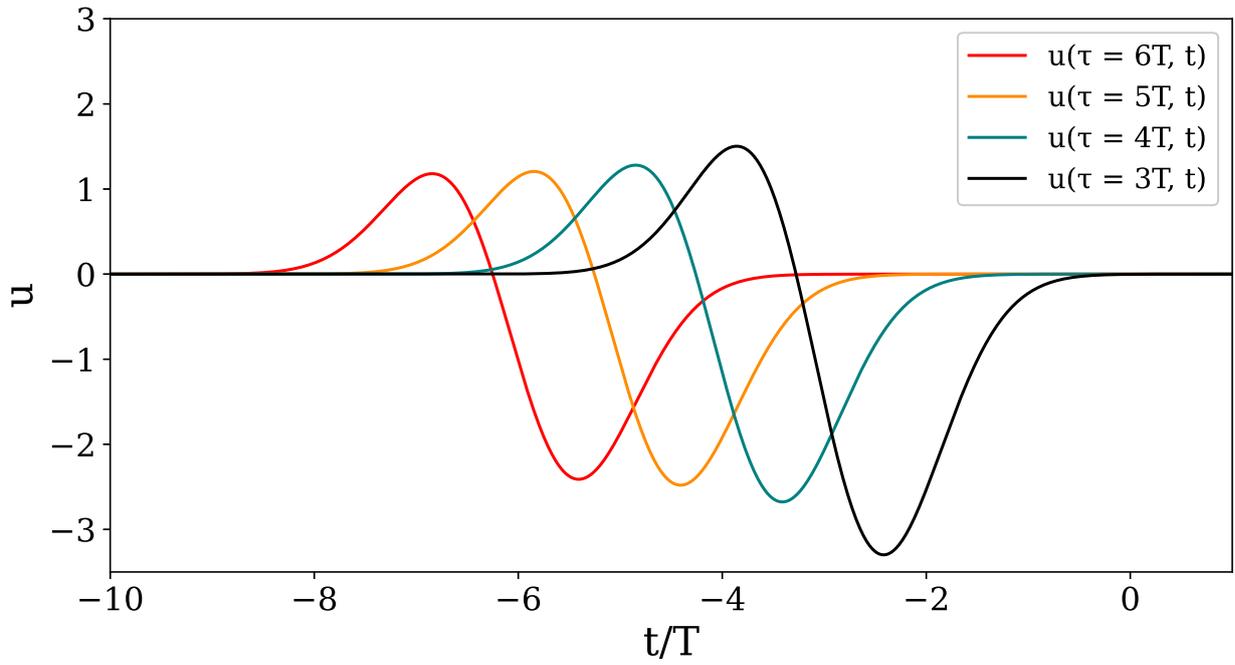


Рис. 5: Профиль скорости вдали от берега на примере (99)

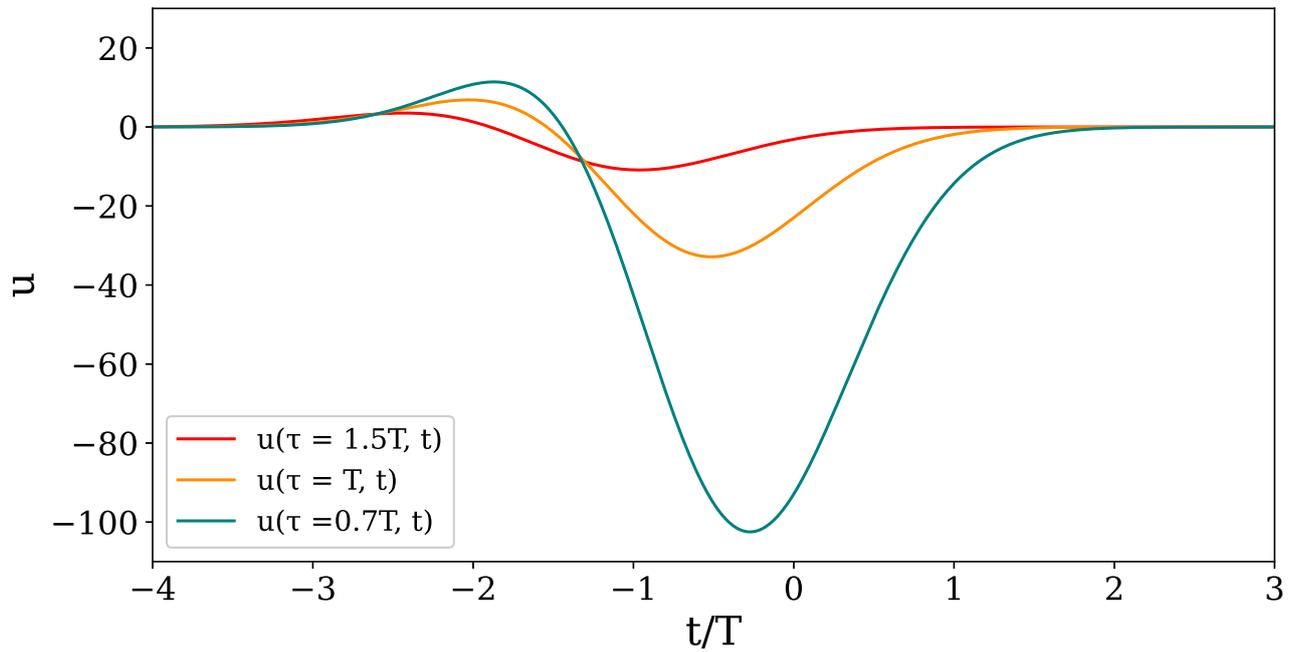


Рис. 6: Профиль скорости на промежуточных расстояниях, пример (99)

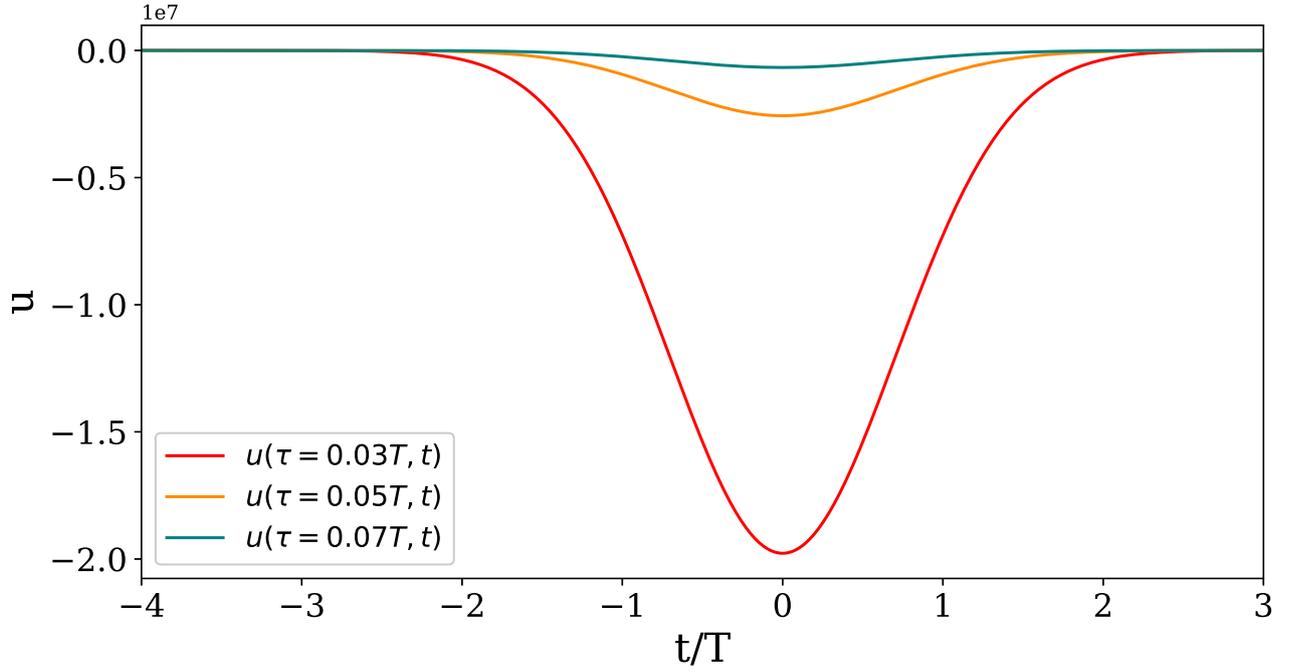


Рис. 7: Профиль скорости вблизи берега, на примере (99)

#### 5.1.4 Отражение волны у берега ( $m = 1$ )

Конечно, использование линейных приближений для описания наката волны на берег априори вызывает возражения, так как вблизи уреза высота волны существенно больше глубины. Однако, например, для линейного профиля было показано [28], что экстремальные характеристики волны в нелинейной задаче можно найти с помощью задачи линейной. Поэтому рассмотрим поведение волнового поля с предположением, что на самом урезе установлена вертикальная стенка, от которой происходит полное отражение энергии. Рассмотрим четное продолжение функции на сухой берег, то есть на  $x < 0$ , которое не несет никакой физической интерпретации, но при этом поможет нам задать отражение от стенки. Тогда к решению на смещение еще добавляется отраженная волна

$$\eta(x, t) = \varphi(t + \tau) - 2 \coth\left(\frac{\tau}{2}\right) \frac{\partial \varphi(t + \tau)}{\partial \tau} + \varphi(t - \tau) - 2 \coth\left(\frac{\tau}{2}\right) \frac{\partial \varphi(t - \tau)}{\partial \tau} \quad (100)$$

Разложив в ряд Тейлора функций  $\varphi$  и  $\varphi'$  в окрестности берега ( $\tau = x = 0$ ) мы можем получить зависимость смещения у стенки  $A_0 = \eta(x = 0, t)$  от времени

$$A_0(t) = 2(\varphi(t) - 4\varphi''(t)) \quad (101)$$

которая получается конечной. При этом усредненная по глубине скорость все равно остается неограниченной у берега, поскольку она будет эквивалентна

$$u(\tau \rightarrow 0, t) \sim \frac{32}{\tau^2} \varphi''(t) \quad (102)$$

однако, заметим, что из (102) следует, что расход воды  $Q(t)$  у берега уже будет нулевым, поскольку

$$Q(t) = \lim_{x \rightarrow 0} h(x)u(x, t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} 16h_0\tau^4 \cdot \frac{32}{\tau^2}\varphi''(t) = 0 \quad (103)$$

что совпадает с нашим граничным условием в виде вертикальной стенки

В силу ограниченности смещения, мы теперь можем легко проиллюстрировать отражение одномерной волны (98) из предыдущего раздела (рисунки 8 и 9).

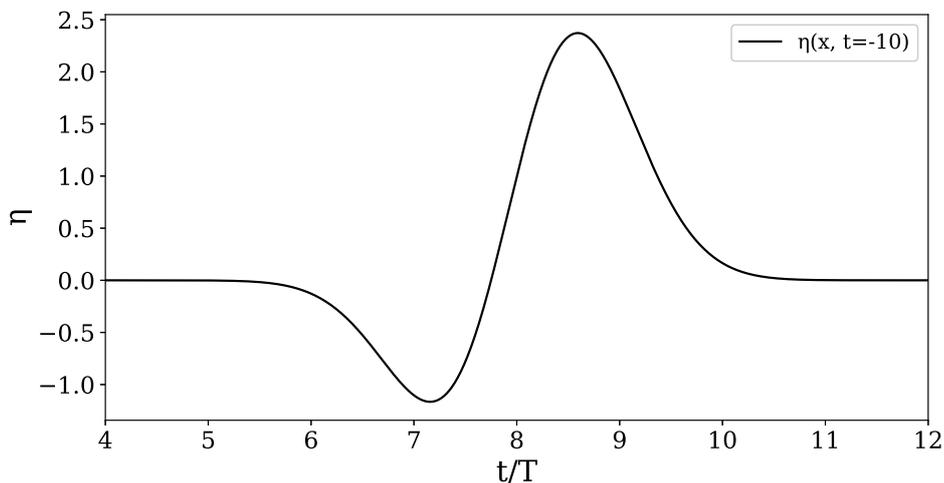


Рис. 8: Пространственная форма волны (98) в начальный момент времени ( $t = -10$ )

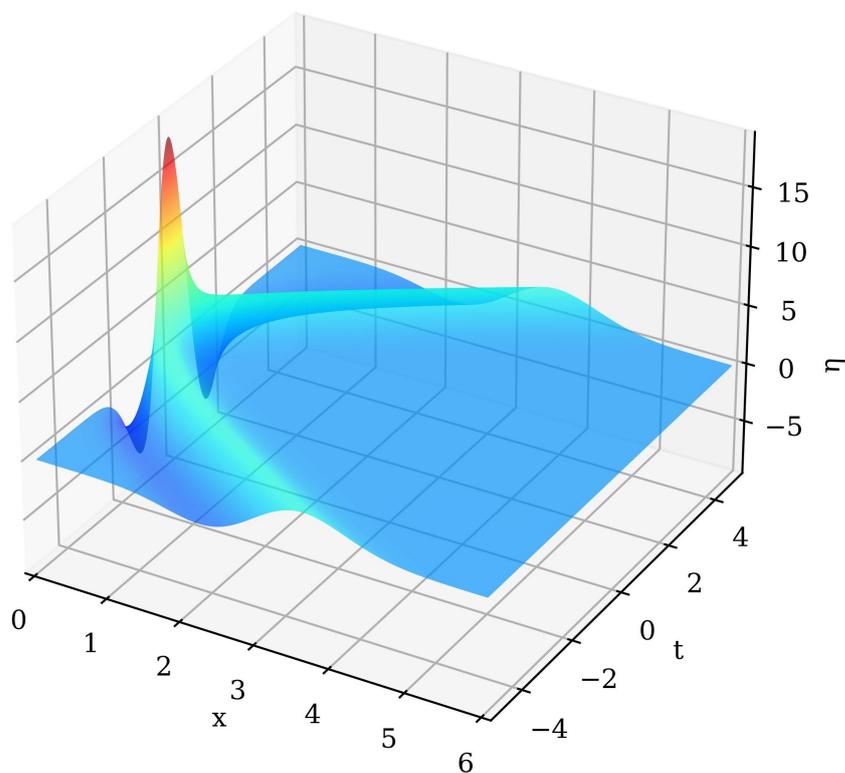


Рис. 9: Процесс отражения волны

## 5.2 Параметр $m$ - целый и отрицательный

Для удобства введем переменную  $n = |m|$ . В безразмерных величинах соотношение (77) тогда примет вид

$$x_d = \tau_d - 2 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\coth^{2k+1} \frac{\tau_d}{2}}{2k+1} \quad (104)$$

Асимптотики фазы  $\tau(x)$ , когда она мала ( $x_d \rightarrow -\infty$ ), и в случае, когда она стремится к бесконечности ( $x_d \rightarrow +\infty$ ) полностью повторяют выражения, полученные для соответствующих натуральных  $-m$  (79) и (80).

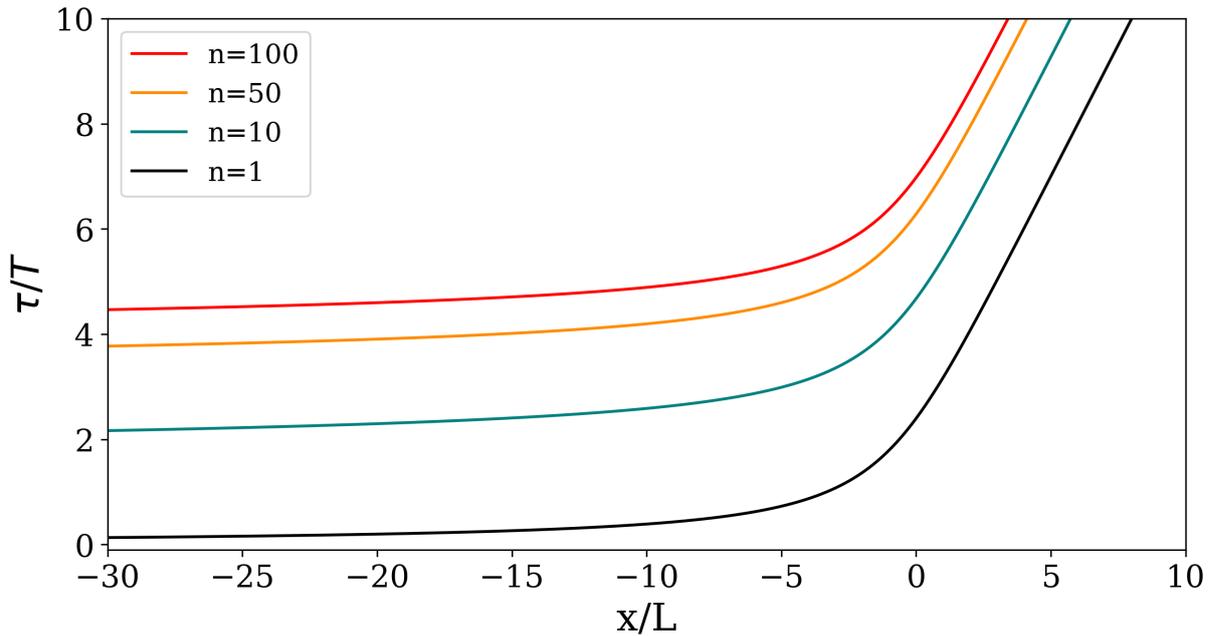


Рис. 10: График фазы  $\tau(x)$  для некоторых целых отрицательных  $m$

Однако, имеется существенное отличие, поскольку сингулярность  $\tau = 0$  теперь переходит не в урез  $x = 0$ , а в бесконечную глубину на  $-\infty$ , что следует из параметрического задания серии безотражательных профилей  $h(x)$  в данном случае

$$h(x) = \frac{c^2(x)}{g} = h_0 \tanh^{4m} \frac{\tau_d}{2} = h_0 \coth^{4n} \frac{\tau_d}{2} \quad (105)$$

$$\frac{x}{L} = \tau_d - 2 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\coth^{2k+1} \frac{\tau_d}{2}}{2k+1}$$

где  $h_0$  - это глубина водоема на плюс бесконечности ( $h_0 = \frac{c_0^2}{g}$ ). Данное семейство профилей (105) выделяется тем, что осуществляет переход от больших глубин на практически постоянную глубину  $h_0$ . Иллюстрацию полученного счетного множества профилей можно увидеть на рисунке 11.

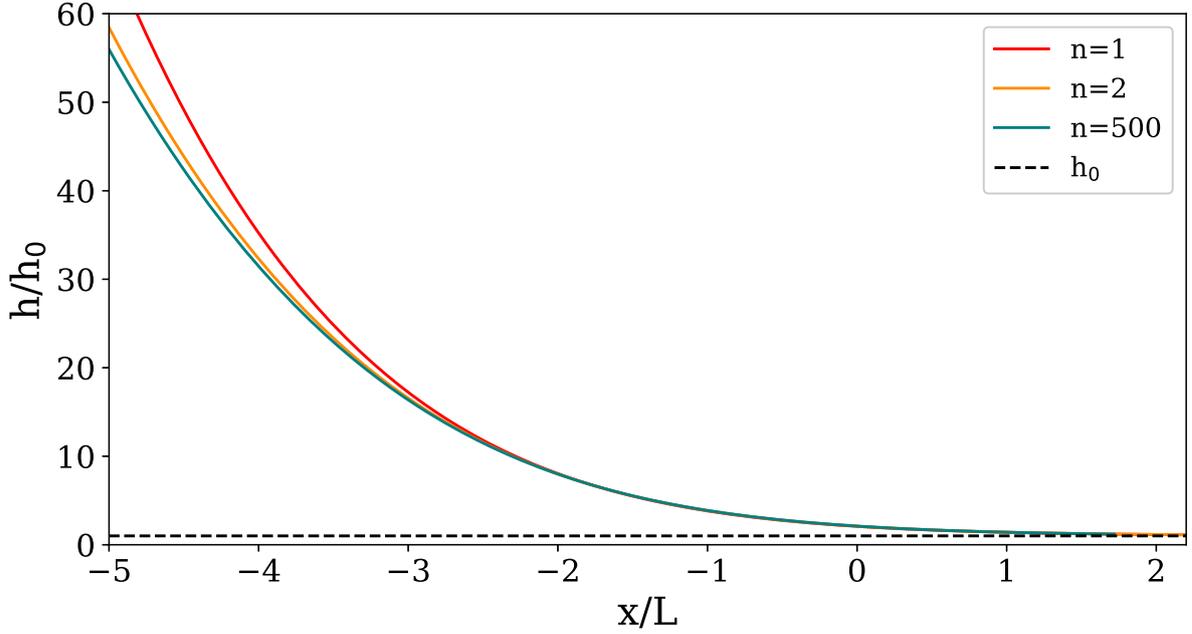


Рис. 11: Графики профилей  $h(x)$  для различных целых отрицательных  $m$

Точное решение уравнений мелкой воды в этом случае запишется даже проще, чем это было при  $m \in \mathbf{N}$ . (аналогично,  $F$  - это решение обыкновенного волнового уравнения с постоянными коэффициентами)

$$\eta(x, t) = G(\tau(x), t) = \prod_{k=0}^{n-1} \left( 1 - \frac{2}{1+2k} \tanh \frac{\tau}{2} \frac{\partial}{\partial \tau} \right) F \quad (106)$$

$$\frac{x}{L} = \tau_d - 2 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\coth^{2k+1} \frac{\tau_d}{2}}{2k+1}$$

Для иллюстрации волнового поля зафиксируем  $m = -1$ .

### 5.2.1 $m = -1$

Подставив в формулу (106)  $m = -1$  (т. е.  $n = 1$ ), для смещения водной поверхности бегущей волны, приходящей с глубины на постоянное дно, получим следующее выражение

$$\eta(\tau(x), t) = \theta(\tau - t) - 2 \tanh \left( \frac{\tau_d}{2} \right) \theta'(\tau - t) \quad (107)$$

и, пользуясь уравнением (4), найдем выражение для скорости течения

$$u = \frac{c_0}{h_0} \left( \tanh^4 \frac{\tau}{2} \theta(\tau - t) - 2 \tanh^3 \frac{\tau}{2} \theta'(\tau - t) \right) + \xi(x) \quad (108)$$

(аналогично, в дальнейшем положим  $\xi(x) = 0$ ). Зададим бегущую волну на  $-\infty$  как

$$\eta(t) = \exp \left[ -\frac{t^2}{T_0^2} \right] \quad (109)$$

где параметр  $T_0$  отвечает за длительность волны. При этом, используя (107), сразу же получаем, что  $\varphi(t) = \exp \left[ -\frac{t^2}{T_0^2} \right]$ , поскольку слагаемое, содержащее тангенс пропадает. Тогда легко найти все составляющие волнового поля, изображенного на рисунках 12 и 13.

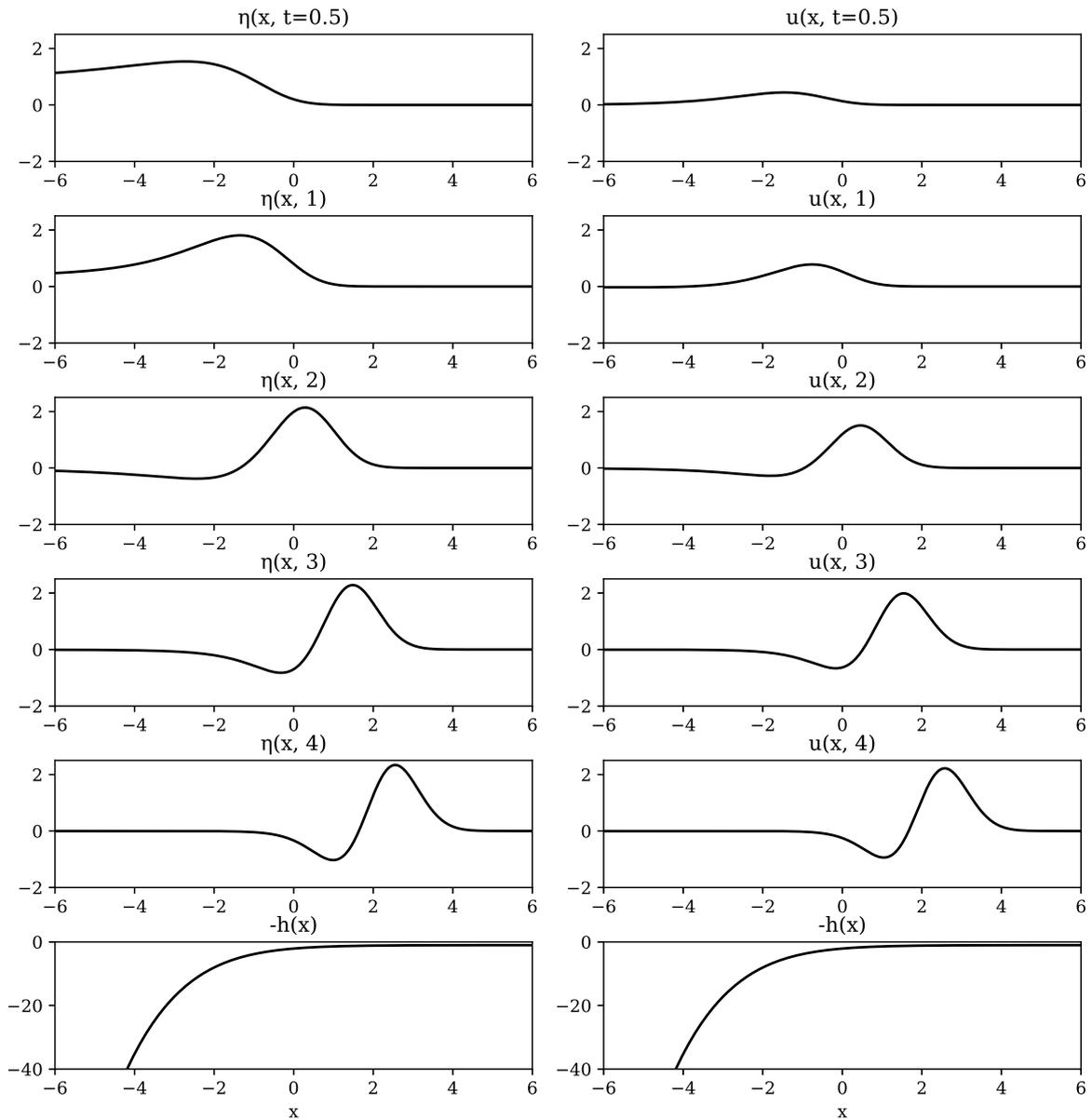


Рис. 12: Эволюция волнового поля бегущей волны (109) при  $T_0 = 1$  ( $m = -1$ ). Все величины, изображенные на рисунке безразмерные, и графики профиля дна, изображенные в нижней строке продублированы для удобства.

Отметим, что из-за большой глубины волна за конечное время с  $-\infty$  доходит до любой конечной точки (аналогично случаю с классическим ЭДП [29]). При этом, если на  $-\infty$  волна - это просто  $\varphi$ , то при движении волны к постоянному дну к  $\varphi$  начинает добавляться

производная  $\varphi'$ . И здесь начинает важную роль играть длина импульса  $T_0$ , поскольку чем короче был начальный импульс, тем больший вклад в сумму (107) дает производная  $\varphi'$ . На серии рисунков 12 и 13 хорошо заметно, как к длинной волне (рисунок 12) прибавляется небольшой «хвост» производной, а к короткой (рисунок 13) прибавка производной при выходе на постоянную глубину настолько значительна, что волна полностью меняет свою форму и становится более похожей на  $\varphi'$ .

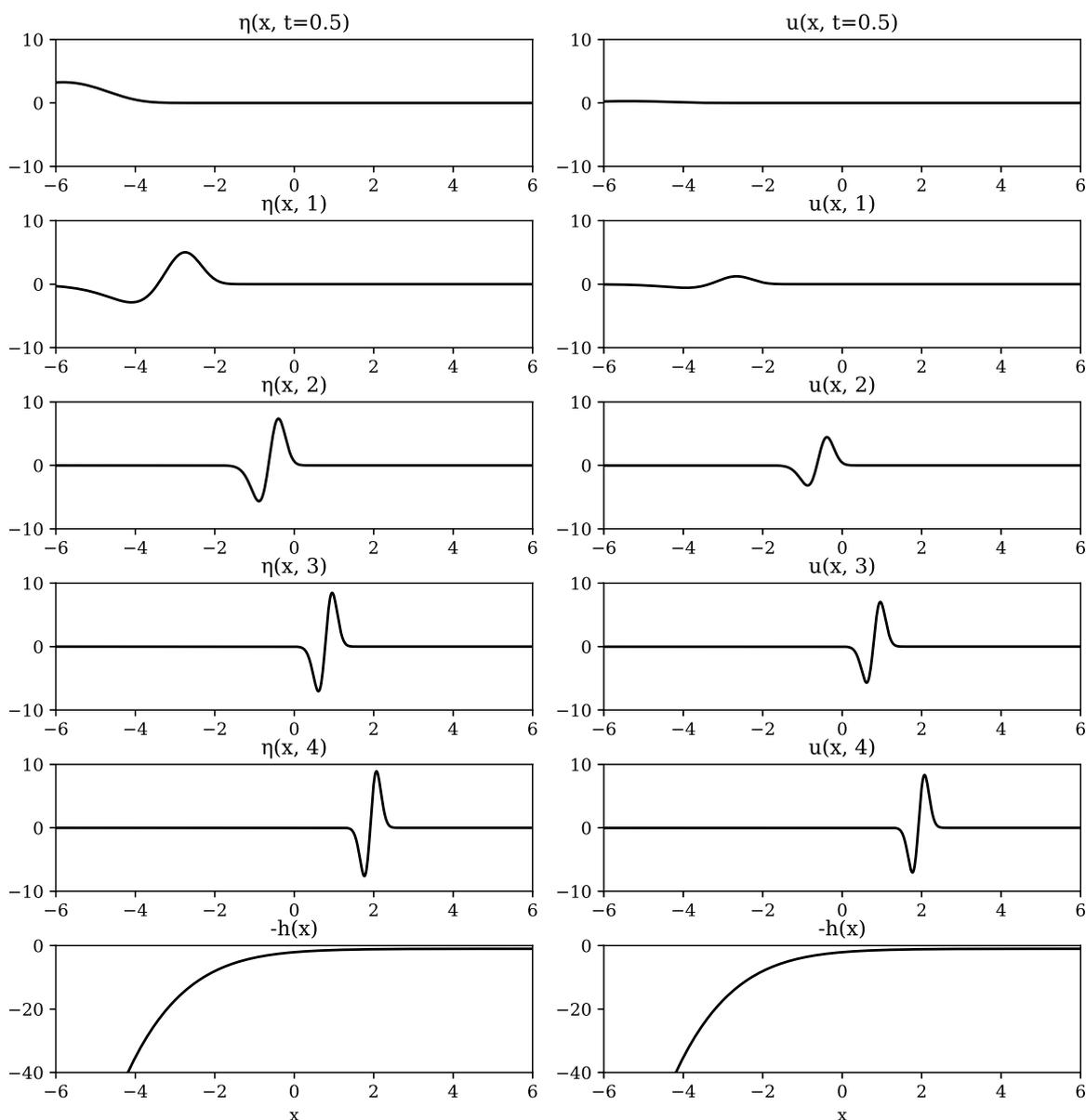


Рис. 13: Эволюция волнового поля более короткой бегущей волны (109) при  $T_0 = 0.2$  ( $m = -1$ ). Все величины, изображенные на рисунке безразмерные, и графики профиля дна, изображенные в нижней строке продублированы для удобства.

Все точные решения, описанные выше, были получены для семейств монотонных безотражательных профилей. Как оказалось, существуют не только монотонные профили, которые поддерживают безотражательное распространение. Их получение будет описано ниже.

## 6 Обобщенное преобразование Кэрриера-Гриспана (КГ) в теории мелкой воды

В случае линейного дна преобразование КГ сводило уравнения (4)-(5) к уравнению ЭДП. Обобщим линейное преобразование Кэрриера-Гриспана на случай произвольной батиметрии  $h(x)$ , так, чтобы система уравнений мелкой воды сводилась к единственному волновому уравнению. Для этого искать решение системы (4)-(5) будем в следующем виде

$$\eta = \phi(\lambda) \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda}, \quad u = \psi(\sigma) \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma}, \quad x = Lf(\sigma), \quad t = T\lambda \quad (110)$$

где  $\phi(\lambda)$ ,  $\psi(\sigma)$ ,  $f(\sigma)$  - пока произвольные, достаточно гладкие функции, которые предстоит определить,  $L$  - характерный масштаб по пространственной координате,  $T$  - характерный масштаб по времени. При таком определении размерными являются только функции  $\Phi$ , которая имеет размерность скорости  $\frac{L}{T}$ , и  $\phi$ , которая имеет размерность времени  $T$ . Тогда уравнение (4) примет вид

$$\psi(\sigma) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \sigma \partial \lambda} \lambda'_t + g\phi(\lambda) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \lambda \partial \sigma} \sigma'_x = 0 \quad (111)$$

Для выполнения (111) тождественно необходимо, чтобы коэффициент при смешанной производной равнялся 0. Учитывая, что  $\sigma'_x = \frac{1}{Lf'_\sigma}$  получаем первое условие связи неизвестных функций

$$L \frac{df}{d\sigma} \psi(\sigma) = -gT\phi(\lambda) \quad (112)$$

Видно, что в равенстве (112) левая часть зависит только от  $\sigma$ , а правая только от  $\lambda$ . Поэтому для тождественного равенства необходимо, чтобы обе части были равны одной и той же константе (которую, для простоты дальнейших выкладок, положим равной  $-L$ ). Тогда функции  $f$  и  $\psi$  связаны соотношением

$$\psi(\sigma) = -\left(\frac{df}{d\sigma}\right)^{-1} \quad (113)$$

а функция  $\phi$  становится константой

$$\phi(\lambda) = \frac{L}{Tg} \quad (114)$$

Теперь обратимся к уравнению (5). С учетом соотношения (113) оно будет иметь вид

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \lambda^2} - \psi(\sigma) \frac{\partial}{\partial \sigma} \left[ \psi(\sigma) \tilde{c}^2(\sigma) \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} \right] = 0 \quad (115)$$

где  $\tilde{c}$  - это безразмерная скорость

$$\tilde{c}(\sigma) = \sqrt{\tilde{g}\tilde{h}(f(\sigma))} \text{ с учетом, что } h = \tilde{h}L \text{ и } g = \tilde{g}\frac{L}{T^2} \quad (116)$$

Уравнение (115) можно переписать в виде

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \lambda^2} - \psi^2 \tilde{c}^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \sigma^2} - \psi \frac{d}{d\sigma} [\psi \tilde{c}^2] \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} = 0 \quad (117)$$

Путем данного преобразования мы получили единственное волновое уравнение (117), из которого сразу можно получить и смещение и скорость. Ранее мы рассматривали отдельно волновое уравнение (47) на смещение, а затем находили скорость течения из уравнения (4) (мы также могли рассматривать отдельно волновое уравнение на скорость, которое, вообще говоря, отличается от уравнения на смещение, и из уравнения (4) находить смещение). Как было показано в разделе 5.1.2, при таком подходе для того, чтобы не возникало постоянных течений при проходе волны конечной энергии, на начальные условия накладывались дополнительные требования (также было и в случаях сведения к обыкновенному ЭДП [9, 17]). Пользуясь же подходом, описанным в настоящей главе, решив уравнение (117) больше не надо проделывать подобную процедуру, необходимо лишь воспользоваться формулами (110).

## 7 Точные решения в виде бегущих волн

Теперь мы будем использовать результаты, полученные в предыдущей главе для того, чтобы получить новые точные решения системы (4)-(5). Попробуем наложить условия на коэффициенты уравнения (117) так, чтобы оно переходило в те уравнения, решения которых в классе элементарных функций мы точно знаем. Оказывается, что если сводить это уравнение к уравнению Эйлера-Дарбу-Пуассона, то есть к

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \lambda^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \sigma^2} - \frac{2m}{\sigma} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} = 0 \quad m \in \mathbf{Z} \quad (118)$$

то мы получим счетную серию степенных профилей дна  $x^{\frac{4m}{2m+1}}$ , которая была получена выше при помощи трансформационной техники (глава 4). Действительно, для перехода к уравнению Эйлера-Дарбу-Пуассона нам необходимо потребовать выполнения следующих условий

$$\tilde{c}^2 \psi^2 = 1 \quad (119)$$

$$\psi \frac{d}{d\sigma} [\psi \tilde{c}^2] = \frac{2m}{\sigma} \quad (120)$$

которые сводятся к единственному обыкновенному дифференциальному уравнению

$$-\frac{d\psi}{\psi} = \frac{2m}{\sigma} d\sigma \leftrightarrow \psi = \frac{1}{a\sigma^{2m}}, \quad a \in \mathbf{R} \setminus \{0\} \quad (121)$$

при интегрировании которого появляется произвольная константа  $a$ . Зная функцию  $\psi$ , теперь легко отыскать функции  $f$  и  $h$ :

$$\frac{df}{d\sigma} = -\frac{1}{\psi} = -a\sigma^{2m} \leftrightarrow f = -\frac{a}{(2m+1)}\sigma^{2m+1} + b = \frac{x}{L}, \quad b \in \mathbf{R} \quad (122)$$

$$h = h_0 \sigma^{4m} \sim x^{\frac{4m}{2m+1}}, \quad h_0 = \frac{a^2 L}{\tilde{g}} \quad (123)$$

В силу того, что решения над данными профилями уже были получены и хорошо исследованы (глава 4, [16, 17, 29]), останавливаться здесь на описании волнового поля не будем. Продолжим поиск трансформаций уравнения (117), приводящих его в класс уравнений, решаемых аналитически.

Предположим, что условие (119) выполняется. Тогда уравнение (117) имеет вид

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \lambda^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \sigma^2} + \frac{\psi'}{\psi} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} = 0 \quad (124)$$

Исследуем, в какое уравнение перейдет уравнение (124) при нетривиальном преобразовании ( $A \neq const$ )

$$\Phi(\lambda, \sigma) = A(\sigma)M(\lambda, \sigma) \quad (125)$$

Если подставить (125) в (124), то мы получим уравнение Клейна-Гордона с переменными коэффициентами на новую функцию  $M$

$$\frac{\partial^2 M}{\partial \lambda^2} - \frac{\partial^2 M}{\partial \sigma^2} - \left[ \frac{2A'}{A} - \frac{\psi'}{\psi} \right] \frac{\partial M}{\partial \sigma} + \left[ \frac{\psi' A'}{\psi A} - \frac{A''}{A} \right] M = 0 \quad (126)$$

Теперь потребуем следующее: занулим коэффициент перед функцией  $M$

$$\frac{\psi' A'}{\psi A} - \frac{A''}{A} = 0 \quad (127)$$

откуда

$$\psi = a_1 A', \quad a_1 \in \mathbf{R} \quad (128)$$

(и в силу линейности уравнения для  $\Phi$  можно убрать коэффициент  $a_1$ , и считать, что  $\psi = A'$ ) и наложим следующее условие на коэффициент перед производной

$$\frac{2A'}{A} - \frac{\psi'}{\psi} = \frac{2m}{\sigma} \quad (129)$$

Условие (129) с учетом (128) будет иметь вид

$$\frac{2A'}{A} - \frac{A''}{A'} = \frac{2m}{\sigma} \quad (130)$$

Тогда уравнение (126) переходит в уравнение Эйлера-Дарбу-Пуассона для функции  $M$ , решаемое (для определенности) на полуоси  $\sigma > 0$

$$\frac{\partial^2 M}{\partial \lambda^2} - \frac{\partial^2 M}{\partial \sigma^2} - \frac{2m}{\sigma} \frac{\partial M}{\partial \sigma} = 0 \quad (131)$$

Решение условия (130) имеет вид

$$A = \frac{1}{s\sigma^{1-2m} - 1} \quad s \in \mathbf{R} \setminus \{0\} \quad (132)$$

(несмотря на то, что уравнение для  $A$  второго порядка, от второй произвольной константы также можно избавиться, аналогично константе  $a_1$ ;  $s$  здесь произвольный, отличный от 0 коэффициент). Теперь, найдем выражение для координаты  $x$  при помощи (113). Имеем

$$\frac{df}{d\sigma} = -\frac{1}{A'} = \frac{(s\sigma^{1-2m} - 1)^2}{(1 - 2m)s\sigma^{-2m}} \quad (133)$$

Тогда, с точностью до сдвига оси  $x$

$$\frac{x}{L} = \frac{1}{1 - 2m} \left[ \frac{s}{3 - 2m} \sigma^{3-2m} - \sigma^2 + \frac{1}{s(2m + 1)} \sigma^{2m+1} \right] \quad (134)$$

получаем параметрическое задание профилей дна

$$h = \frac{h_0}{s^2(2m - 1)^2} \left[ s\sigma^{1-m} - \sigma^m \right]^4 \quad (135)$$

Вид волнового поля над этими профилями будет иметь следующий параметрический вид

$$\eta = \frac{M_\lambda^{[m]}}{s\sigma^{1-2m} - 1} \cdot \frac{L}{Tg} \quad (136)$$

$$u = (A')^2 M^{[m]} + AA' M_\sigma^{[m]} = \frac{(2m - 1)s}{\sigma^{2m}(s\sigma^{1-2m} - 1)^3} \left[ \frac{(2m - 1)s}{\sigma^{2m}(s\sigma^{1-2m} - 1)} M^{[m]} + M_\sigma^{[m]} \right] \quad (137)$$

где  $M^{[m]}$  - это решение уравнения Эйлера-Дарбу-Пуассона при фиксированном целом  $m$  (смотри главу 2, формулы (29) и (34)),  $\lambda$  - это безразмерное время, а зависимость координаты от параметра  $\sigma$  представлена выражением (134).

Тем самым мы получили точные решения уравнений мелкой воды, для определенных конфигураций профиля дна, которые представимы в виде конечной комбинации бегущих волн с переменными амплитудами. Следовательно, отражение при распространении над такой батиметрией отсутствует, то есть формулы (134) и (135) параметрически задают обширное семейство безотражательных профилей дна, характерный вид которых будет обсуждаться в следующей части.

## 8 Классы функций $h(x)$ , допускающих точные решения: подводные горы и батиметрии с урезом

Для упрощения классификации двухпараметрического семейства профилей  $h(x)$  (135) заметим сначала, что при следующей замене

$$m \mapsto 1 - m \quad (138)$$

$$x \mapsto -x \quad (139)$$

$$s \mapsto \frac{1}{s} \quad (140)$$

профиль дна  $h(x)$  (формулы (134) и (135)) переходит сам в себя. Поэтому мы можем и будем в дальнейшем анализировать не все целые  $m$ , а только отрицательные, поскольку для соответствующего положительного  $1 - m$  профиль будет совпадать с точностью до разворота оси  $x$  и замены произвольной константы  $s$  на  $\frac{1}{s}$ . При этом пара  $m = 0$  и  $m = 1$  выбивается от всех остальных, поскольку при всех значениях  $s$  задает (с точностью до сдвига) только профиль  $h \sim x^{\frac{4}{3}}$ , хорошо известный в литературе [9], останавливаться на котором подробно не будем. Для других пар  $(m, 1 - m)$  профиль дна качественно зависит только от знака константы  $s$ . Урез (берег) будет характерен только для профилей с положительным  $s$ , поскольку он достигается при значении параметра  $\sigma = s^{\frac{1}{2m-1}}$ . В этом случае формы дна сильно напоминают степенные профили [16, 29], поэтому останавливаться подробно на таком виде безотражательного дна также не будем.

При отрицательном  $s$  мы видим принципиально новые формы безотражательного дна, которые представляют из себя подводные горы, которые не выходят за линию  $h = 0$ . Асимптотики на  $+\infty$  и  $-\infty$  у таких гор будут степенными, и при фиксированном отрицательном  $m$  на  $-\infty$  наш профиль будет пропорционален  $x^{\frac{4(|m|+1)}{2|m|+3}}$ , а на  $+\infty$  будет вести себя как  $x^{\frac{4m}{2m+1}}$  (в случае положительного  $m$ , как уже говорилось, гора просто «развернется»). При этом предельным будет случай, когда под водой окажется гора параболической формы.

Вершина подводной горы будет находиться в точке

$$\sigma_{min} = \left(\frac{1-m}{m}s\right)^{\frac{1}{2m-1}}, \quad x_{min} = \frac{L}{1-2m} \left[ \frac{s}{3-2m} \sigma_{min}^{3-2m} - \sigma_{min}^2 + \frac{1}{s(2m+1)} \sigma_{min}^{2m+1} \right] \quad (141)$$

и значение глубины, достигаемое в ней

$$h_{min} = \frac{h_0(2m-1)^2}{s^2(1-m)^4} \cdot \sigma_{min}^{4m} \quad (142)$$

Для удобства, сдвинем ось  $x$  так, чтобы вершина находилась в начале координат, то есть

$$\hat{x} = x - x_{min} \quad (143)$$

и  $\hat{\phantom{x}}$  в дальнейшем (где не оговорено обратное) будем опускать.

Параметр  $s$  отвечает одновременно за ширину и минимальную глубину над горой. Чем больше по модулю значение  $s$ , тем более узкой будет гора, и тем ближе к водной поверхности будет донный профиль (рисунок 14). Поэтому произвол при выборе параметра  $s$  дает возможность более качественно аппроксимировать реальные подводные возвышения. Изучение волнового поля над исследуемыми подводными горами будет продолжено в следующей главе.

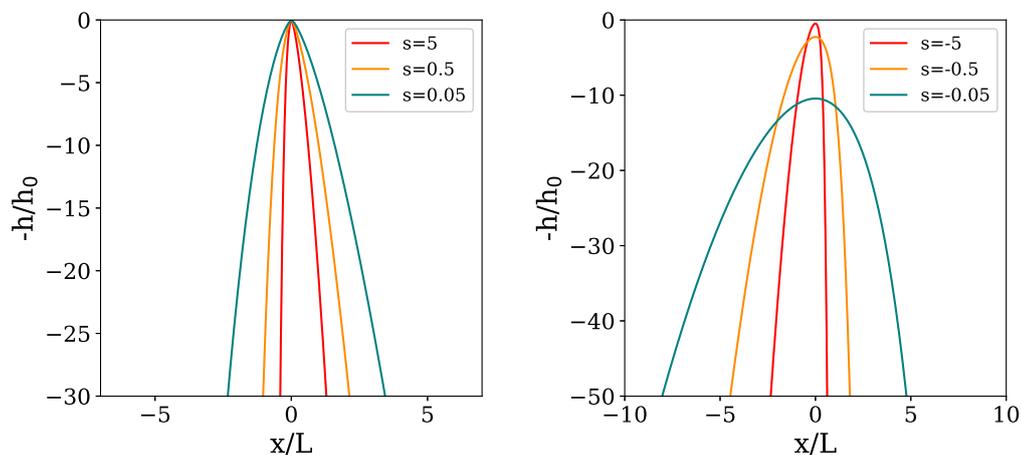


Рис. 14: Графики профилей дна  $h(x)$  для положительных (слева) и отрицательных (справа) значений  $s$ . Для построения был взят параметр  $m = -1$ . При других целых  $m$  поведение профилей качественно похожее, за исключением разворота оси  $x$  при положительных  $m$ .

## 9 Прохождение волны над подводной горой без отражения

Для дальнейшего анализа решения над подводными горами ( $s < 0$ ,  $m < 0$ ), необходимо представление о фазе  $\sigma(x)$  (формула (134)), которая присутствует в решении (формулы (136) и (137)). Очевидно, что  $\sigma \rightarrow +\infty$  при  $x \rightarrow -\infty$  и  $\sigma \rightarrow +0$  при  $x \rightarrow +\infty$ . Поскольку функция  $\sigma(x)$  строго монотонно убывающая, то произвольная бегущая волна  $f(\lambda + \sigma)$  побежит на оси  $x$  слева направо.

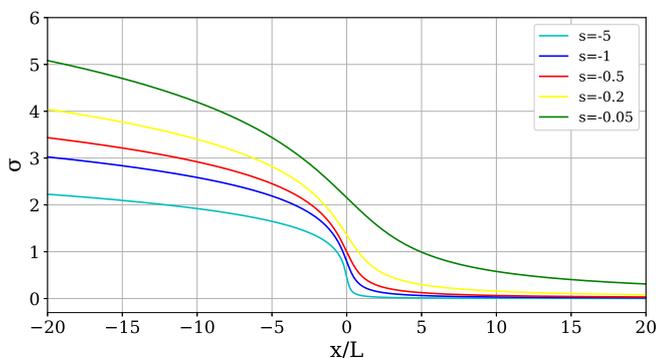


Рис. 15: Фаза  $\sigma(x)$  при различных значениях параметра  $s$ . Для построения бралось значение параметра  $m = -1$ . При других целых  $m$  поведение профилей качественно похожее, за исключением разворота оси  $x$  при положительных  $m$ .

Подставив решение уравнения Эйлера-Дарбу-Пуассона (29) в выражение для общего решения на смещение (136), имеем

$$\eta(x(\sigma), t(\lambda)) = \frac{\sum_{k=0}^{|m|} a_k \sigma^k [\varphi^{(k+1)}(\sigma + \lambda) - \theta^{(k+1)}(\sigma - \lambda)]}{s\sigma^{1-2m} - 1} \cdot \frac{L}{Tg} \quad (144)$$

сумму двух бегущих волн волн, распространяющихся в разных направлениях -  $\eta_l$  и  $\eta_r$ :

$$\eta_l = -\frac{\sum_{k=0}^{|m|} a_k \sigma^k \theta^{(k+1)}(\sigma - \lambda)}{s\sigma^{1-2m} - 1} \cdot \frac{L}{Tg}; \quad \eta_r = \frac{\sum_{k=0}^{|m|} a_k \sigma^k \varphi^{(k+1)}(\sigma + \lambda)}{s\sigma^{1-2m} - 1} \cdot \frac{L}{Tg} \quad (145)$$

В силу симметрии по времени, рассмотрим поведение любой из них, например,  $\eta_r$ . На  $-\infty$  в сумме (145) для  $\eta_r$  превалирует последняя производная порядка  $-m + 1$  функции  $\varphi$ , которая и задает форму импульса. Далее, при проходе вершины горы будет происходить трансформация формы волны, из-за появления в сумме (145) более низких производных. Затем, после прохода вершины в сумме превалирует  $\varphi'$ , которая и уходит на  $+\infty$ . При этом, волна убегает на  $+\infty$  за конечное время, что происходит из-за резкого увеличения глубины. Подобное поведение уже встречалось в литературе [29] как раз для профилей  $x^{\frac{4m}{2m+1}}$ , которые на  $+\infty$  эквивалентны рассматриваемым. По сути, при движении слева направо волна будет «интегрироваться»  $-m$  раз, а при обратном движении ( $\eta_l$ ), наоборот «дифференцироваться» такое же число раз.

Если подставить решение уравнения Эйлера-Дарбу-Пуассона (29) в выражение для общего решения на скорость течения (137), и немного преобразовать его, то можно получить

$$u(x(\sigma), t(\lambda)) = A' \sum_{k=0}^{|m|+1} \gamma_k(\sigma) [\varphi^{(k)}(\sigma + \lambda) + \theta^{(k)}(\sigma - \lambda)] \quad (146)$$

где

$$\gamma_0(\sigma) = a_0 A'; \quad \gamma_k(\sigma) = (a_k \sigma^k A)' + a_{k-1} \sigma^{k-1} A, \quad k \in \{1, \dots, |m|\}; \quad \gamma_{|m|+1}(\sigma) = a_{|m|} A \sigma^{|m|} \quad (147)$$

Коэффициенты в сумме (146) знакопереваются, при этом быстро спадают на нули вдали от вершины горы, что объясняется увеличением глубины. На рисунке 9 приведены графики коэффициентов  $A' \gamma_k$  для  $m = -1$  и  $m = -3$ . Понятно, что в силу того, что коэффициенты  $a_k$  (формула (30)) стремятся к 0, то основной вклад в скорость  $u$  будут давать только несколько первых производных функций  $\varphi$  и  $\theta$ . И основная трансформация усредненной по глубине скорости будет в основном происходить близ вершины горы, согласно формуле (146).

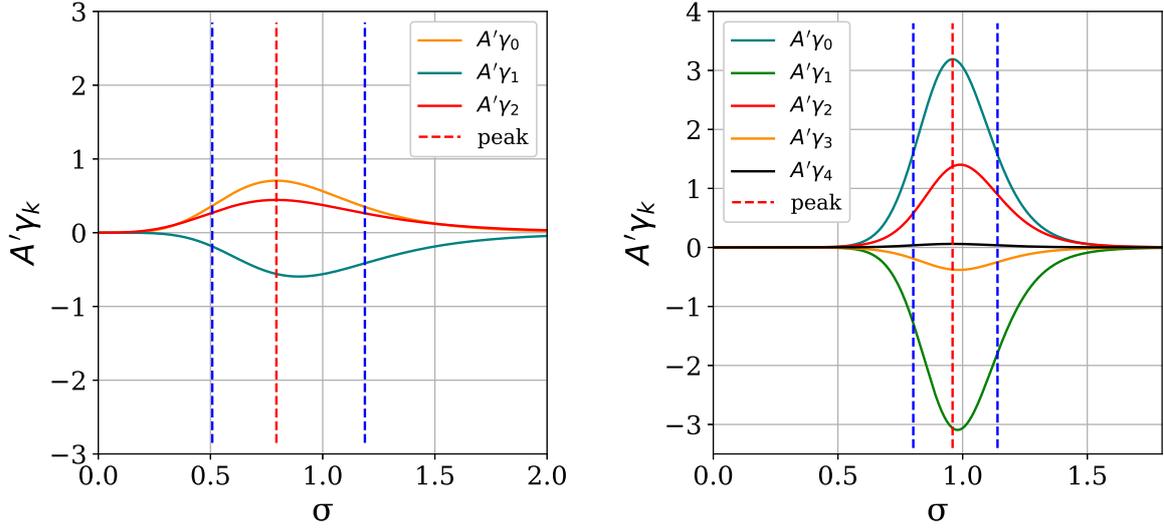


Рис. 16: Графики переменных коэффициентов  $A'(\sigma)\gamma_k(\sigma)$ , стоящих перед производными  $\varphi(k)$  и  $\theta(k)$  в сумме для скорости  $u$  (146). Красная линия (peak) значение параметра  $\sigma$  для вершины горы, синие линии - точки, где глубина увеличилась в 2 раза по сравнению с вершиной ( $h = 2h_{min}$ )

### 9.1 Волновое движение над горой на фиксированном примере

Зафиксируем  $m = -1$ . В таком случае имеем континуальное семейство профилей дна (в зависимости от параметра  $s$ )

$$h = \frac{h_0}{9s^2} \left[ s\sigma^2 - \frac{1}{\sigma} \right]^4, \quad x = \left[ \frac{s\sigma^5}{5} - \sigma^2 - \frac{1}{s\sigma} \right] \frac{L}{3} - x_{min}, \quad \sigma \in (0; +\infty) \quad (148)$$

Рисунки подводных профилей  $h(x)$  и фазы  $\sigma(x)$  для этого случая уже приводились выше (14 и 15). Для того, чтобы рассматривать именно подводные горы необходимо потребовать, что значение параметра  $s < 0$ .

Минимальное значение глубины (вершина горы) имеет координаты

$$\sigma_{min} = -(2s)^{-\frac{1}{3}}, \quad x_{min} = \frac{3L}{5 \cdot 2^{\frac{5}{3}}} s^{-\frac{2}{3}} \approx 0.2Ls^{-\frac{2}{3}}, \quad h_{min} = \frac{9h_0}{2^{\frac{8}{3}}} s^{-\frac{2}{3}} \approx 1.4h_0s^{-\frac{2}{3}} \quad (149)$$

При этом слева от этой точки профиль  $h(\sigma(x))$  при больших (по модулю) значениях координаты  $x$  будет асимптотически вести себя  $\sim x^{\frac{8}{5}}$ , а справа как  $x^4$ .

Решение уравнения Эйлера-Дарбу-Пуассона при  $m = -1$  хорошо известно (29), и записывается как

$$M^{[-1]} = \varphi(\sigma + \lambda) + \theta(\sigma - \lambda) - \sigma[\varphi'(\sigma + \lambda) + \theta'(\sigma - \lambda)] \quad (150)$$

где  $\varphi$  и  $\theta$  - произвольные функции достаточной гладкости. Смещение водной поверхности для бегущей волны тогда будет иметь вид

$$\eta_r = \frac{\varphi'(\sigma + \lambda) - \sigma\varphi''(\sigma + \lambda)}{s\sigma^3 - 1} \frac{L}{Tg} \quad (151)$$

а усредненная по глубине скорость

$$u_r = \frac{3s\sigma^2}{(s\sigma^3 - 1)^3} \left[ \frac{3s\sigma^2}{(s\sigma^3 - 1)} [\varphi(\sigma + \lambda) - \sigma\varphi'(\sigma + \lambda)] + \sigma\varphi''(\sigma + \lambda) \right] \quad (152)$$

Вдали от берега бегущая волна, идущая с  $-\infty$ , задается второй производной функции  $\varphi(\sigma + \lambda)$ , причем амплитуда, на достаточно больших расстояниях, будет меняться по закону Грина (поскольку  $\sim x^{-\frac{2}{5}} \sim h^{-\frac{1}{4}}$ ). Далее, с замедлением скорости распространения и уменьшением длины волны (в силу снижения глубины), волна претерпевает трансформацию, в сумме (151) теперь играют роль оба слагаемых. После чего волна снова набирает скорость и уменьшается в амплитуде. Причем на  $+\infty$  волна уйдет за конечное время, что говорит нам график для фазы  $\sigma$  (рисунок 15). Превалировать при этом в решении будет первая производная (со знаком минус), с практически неизменной амплитудой. Схематичное представление описываемого прохода волны представлено на рисунке 17.

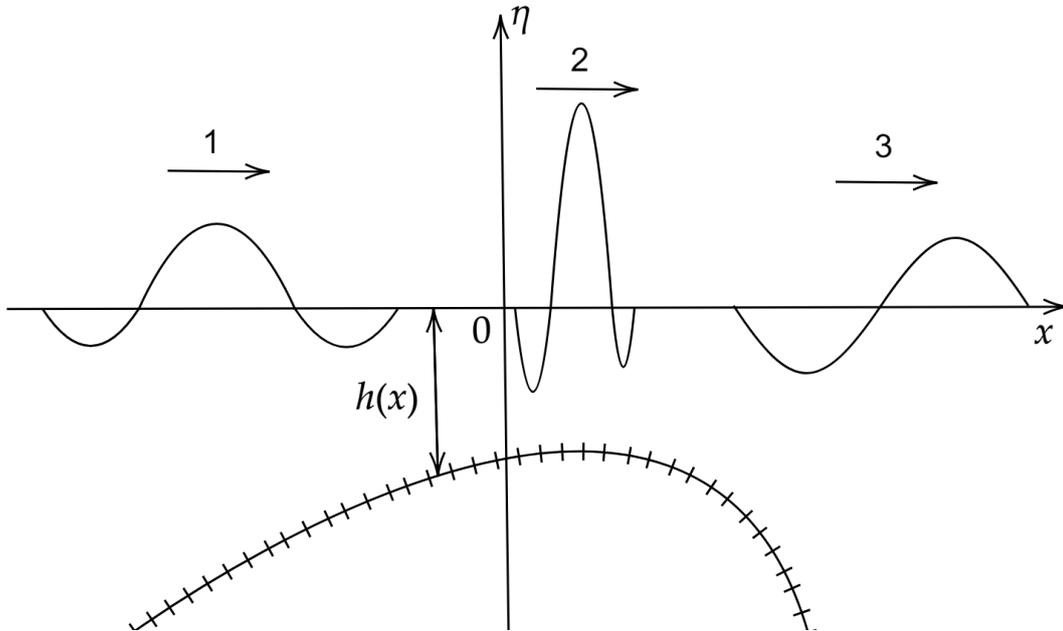


Рис. 17: Схематичное представление прохода волны через подводное возвышение. 1 - подход волны к подводному возвышению. 2 - трансформация на возвышении. 3 - резкий уход на бесконечность. Функция  $\varphi$  представляет собой гауссовский импульс.

Рассмотрим, как в данном случае поведет себя монохроматическая волна. Можно представлять, что в некоторой точке на оси  $x$  установлен волнопродуктор, генерирующий синусоидальный сигнал фиксированной частоты  $\omega$ :

$$\varphi(t) = \alpha \sin \omega \lambda \quad (153)$$

Тогда смещение водной поверхности запишется в виде

$$\eta = \alpha \omega \frac{\sqrt{1 + \omega^2 \sigma^2}}{|s\sigma^3 - 1|} \cos(\omega(\sigma + \lambda) - \arctan \omega \sigma) \quad (154)$$

а также скорость течения

$$u = \alpha \frac{3s\sigma^2 \sqrt{(3s\sigma^2 - s\omega\sigma^4 + \sigma\omega^2)^2 + (3s\omega\sigma^3)^2}}{(s\sigma^3 - 1)^4} \cos\left(\omega(\sigma + \lambda) - \arctan\left(\frac{\sigma^3}{3} - \frac{\sigma}{\omega} - \frac{\omega}{3s}\right)\right) \quad (155)$$

Для корректного сравнения усиления амплитуды волны в зависимости от частоты необходимо для различных частот подстраивать параметр  $\alpha$  в (153) так, чтобы в точке, где установлен волнопродуктор  $x(\sigma_0)$  значение амплитуды (154) было одинаковым (в силу линейности рассматриваемых уравнений, будем рассматривать единичную амплитуду). То есть

$$\alpha = \frac{|s\sigma_0^3 - 1|}{\omega \sqrt{1 + \omega^2 \sigma_0^2}} \quad (156)$$

При больших значениях частоты  $\omega$  для такого импульса можно использовать асимптотические методы, которые приведут к известному закону Грина, поскольку длина волны намного меньше изменения неоднородности (в данном случае, глубины; рисунок 18). Однако, справа от вершины, для достаточно больших по модулю  $x$ ,  $h \sim x^4$ , и скорость изменения глубины все больше и больше. Поэтому насколько ни была бы высока частота импульса, будет существовать такой  $x_1$ , что  $\forall x > x_1$  асимптотические методы неприменимы. Как видно на рисунке 18 справа амплитуда аналитического решения отходит от асимптотической.

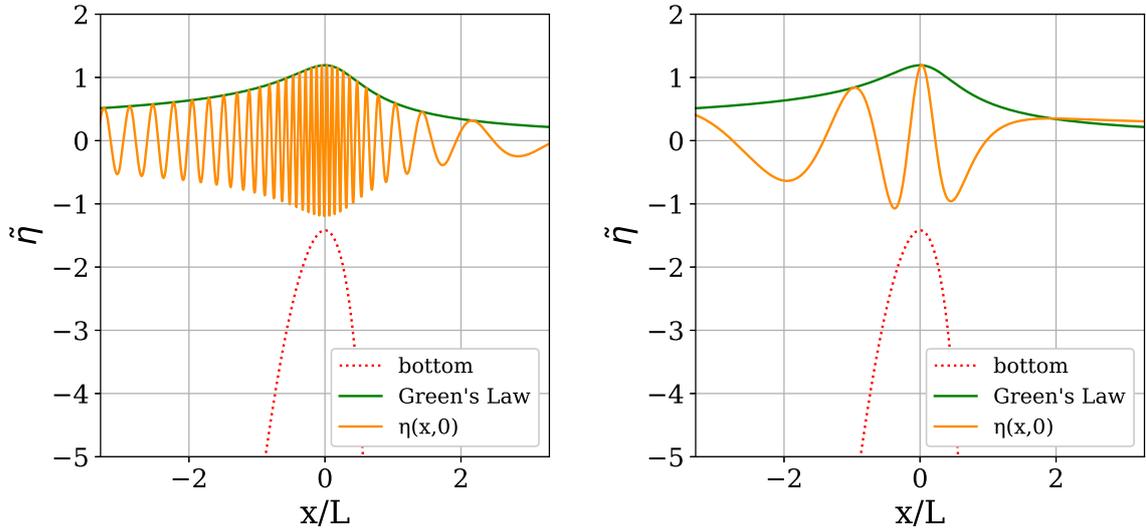


Рис. 18: Поведение монохроматической волны, исходящей с единичной амплитудой из точки удвоенной минимальной глубины, слева от вершины. Параметры  $m = s = -1$ ,  $\omega = 100$  (слева) и  $\omega = 10$  (справа). Масштабы для дна ( $h_0$ ) и решения  $\eta$  ( $\frac{L}{Tg}$ ) различны.

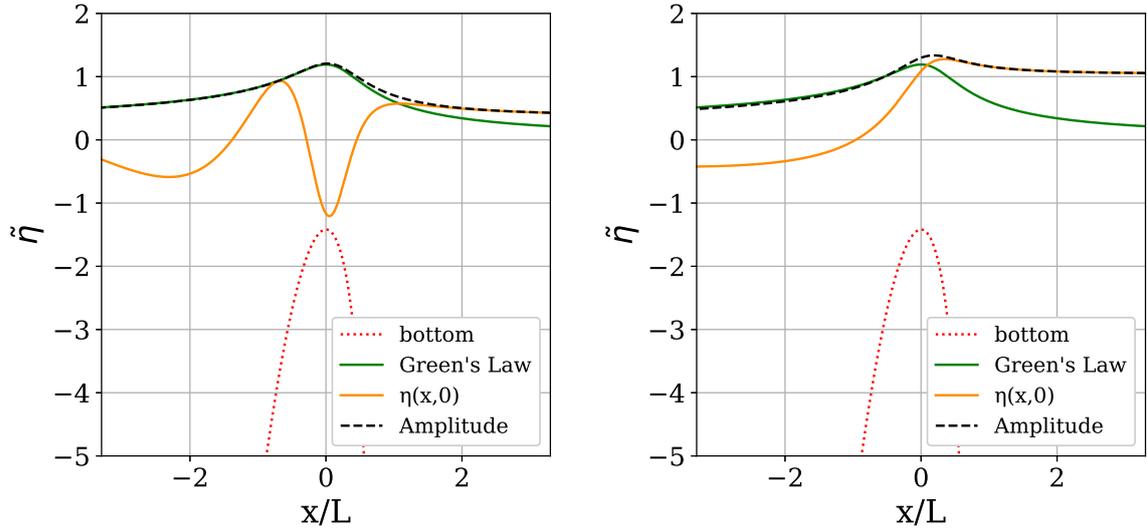


Рис. 19: Поведение монохроматической волны, исходящей с единичной амплитудой из точки удвоенной минимальной глубины, слева от вершины. Параметры  $m = s = -1$ ,  $\omega = 6$  (слева) и  $\omega = 2$  (справа). Масштабы для дна ( $h_0$ ) и решения  $\eta$  ( $\frac{L}{Tg}$ ) различны.

Для более длинных волн аналитическое решение выдает большую амплитуду, чем предполагает закон Грина. Причем максимальное ее значение будет достигаться не на самом пике горы, а чуть правее, в точке

$$\sigma_0(\omega) = G - \frac{1}{2\omega^2 G} < \sigma_{min}, \text{ where } G = \sqrt[3]{-\frac{1}{4s} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{4s^2} + \frac{1}{2\omega^6}}} \quad (157)$$

которая зависит от частоты  $\omega$ . При  $\omega \rightarrow +\infty$ , как и предполагают асимптотические методы,  $\sigma_0(\omega) \rightarrow \sigma_{min}$ , то есть с увеличением частоты точка, где достигается максимальное значение амплитуды подбирается к вершине подводной горы. Причем важно отметить, что максимальная амплитуда длинных импульсов превосходит оценку, которую дает закон Грина (рисунок 19). Полученное поведение волн над подводными горами наталкивает на мысль о том, что наличие подводных хребтов перед островом или берегом, вообще говоря, может не только не задержать волны цунами, но и заметно усилить их.

В качестве иллюстрации волнового поля при проходе одиночной волны слева направо (рисунок 20) возьмем функцию  $\varphi''$ :

$$\varphi''(\sigma) = 2A_0 \left[ 1 - 2\left(\frac{\sigma}{\Lambda}\right)^2 \right] e^{-\left(\frac{\sigma}{\Lambda}\right)^2} \quad (158)$$

где параметр  $A_0$  отвечает за амплитуду волны, а  $\Lambda$  за длину волны.

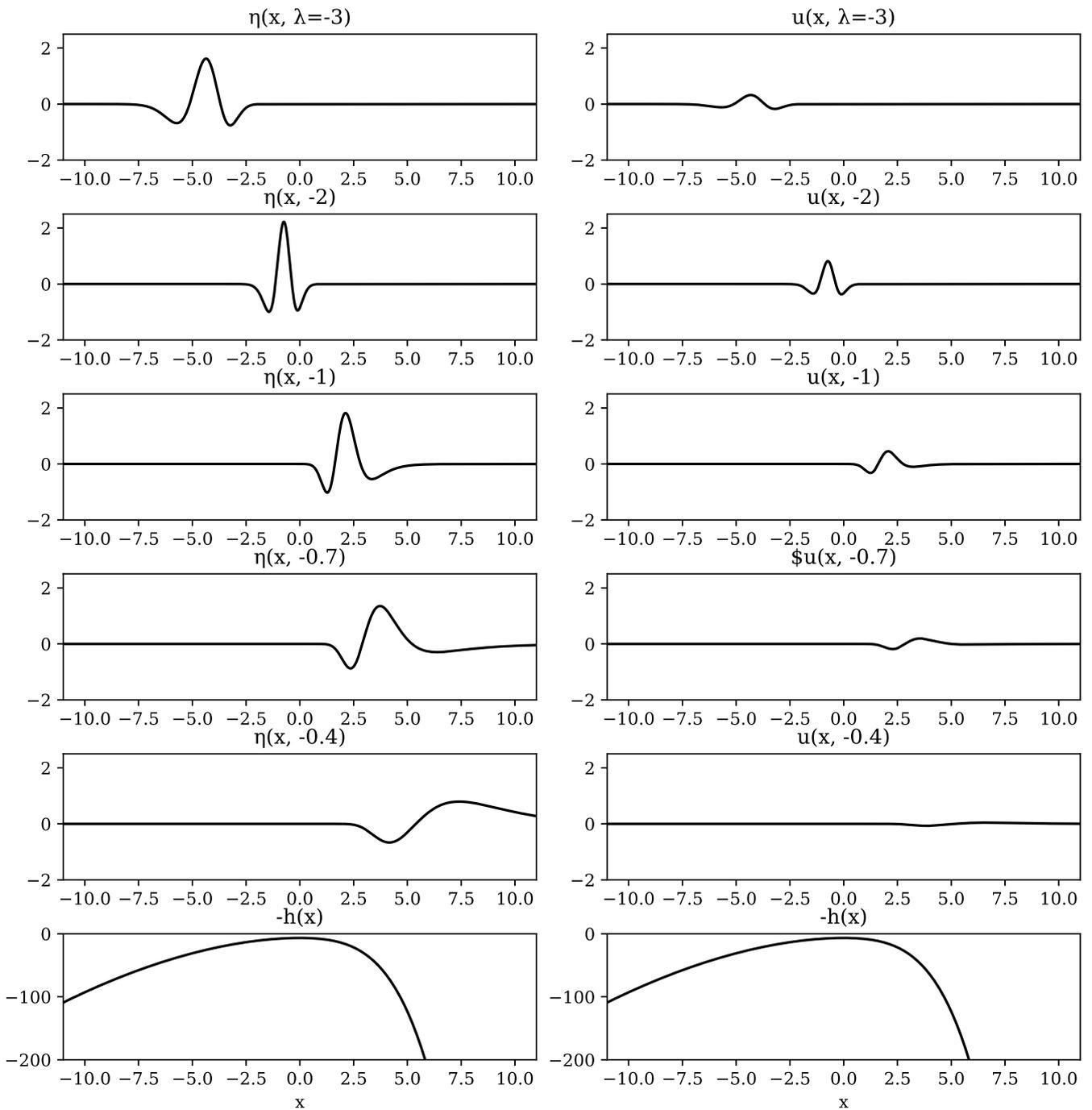


Рис. 20: Эволюция волнового поля одиночной волны на примере функции (158).  $\Lambda = 0.2$ ,  $s = -0.1$

Как уже говорилось выше, на достаточно больших расстояниях слева от вершины горы в сумме (151) преобладает  $\varphi''$ , поэтому, передать форму волны, приходящей с  $-\infty$ , можно при помощи задания  $\varphi''$ . Эволюцию во времени обеих координат волны можно наблюдать на рисунке 20.

## 10 Заключение

Таким образом, в работе предложены методы решения гиперболических уравнений в частных производных, основанные на различных сведениях последних к уравнению Эйлера-Дарбу-Пуассона и его модификаций. Основной упор был сделан на уравнения линейной теории мелкой воды, обширный список точных решений которой получен.

Решение уравнения ЭДП имеет вид двух обобщенных бегущих волн, распространяющихся в противоположных направлениях. Поэтому решения уравнений мелкой воды, полученные описанными методами представляют собой волны, распространяющиеся без отражения, что само по себе имеет очевидный практический интерес. В работе получен обширный список конфигураций дна  $h(x)$ , для которых возможны подобные сведения, поэтому можно утверждать, что такие профили безотражательные.

Наряду с описанием получения счетного семейства степенных безотражательных  $h(x)$ , при помощи трансформационной техники также получены и описаны семейства, задающиеся параметрически, главным достоинством которых является ограниченность (или отсутствие уреза). Для ограниченных конфигураций дна на конкретном примере проиллюстрировано поведение падающей волны, а также рассмотрена задача с граничным условием в виде вертикальной стенки на урезе. Показано, что в рамках линейной задачи вертикальное смещение уровня воды остается конечным. Скорость течения все же стремится к бесконечности на урезе (хотя расход воды нулевой). Из-за неограниченности скорости течений у берега, необходим специальный анализ нелинейных эффектов, который планируется сделать в дальнейшем. Для профилей, осуществляющих переход с глубин на константу также был проделан детальный анализ, в результате которого выяснилось, что более короткие волны сильнее трансформируются при выходе на постоянную глубину.

Описанное в 6 главе обобщение преобразования Кэрриера-Гринспана позволило найти континуальное семейство безотражательных профилей, которые немонотонны и имеют форму подводных гор. Проиллюстрировав поведение волн на конкретном примере, выяснилось, что более длинные волны получают больший прирост амплитуды при проходе вершины горы, чем это предполагаем закон Грина.

В силу того, что для дна линейного уклона преобразование КГ позволило решить нелинейную задачу, мы надеемся, что в будущем будут получены точные решения для подводных гор (или степенных профилей) в рамках нелинейных задач. Возможно, необходимо корректно доопределить нелинейную часть полученных нами преобразований для применения их уже к нелинейным уравнениям.

Часть результатов данной дипломной работы уже была опубликована в статьях:

I. Melnikov, E. Pelinovsky Euler-Darboux-Poisson Equation in Context of the Traveling Waves in a Strongly Inhomogeneous Media. *Mathematics*, 11, 3309 (2023)

I. Melnikov, E. Pelinovsky Linear waves in shallow water over an uneven bottom, slowing down near the shore. *Fluid Dynamics* 59(2) (2024).

а также представлена на конференциях:

I. Melnikov, E. Pelinovsky Non-reflective configurations of bottom profile. *Advances in Applications of Analytical Methods for Solving Differential Equations (Symmetry 2024)*.

I. Melnikov Non-reflective bottom profiles, reaching a constant at infinity. *Математическая весна (2024)*.

И. Мельников Безотражательное распространение волн при переходе с постоянной глубины: аналитические результаты. *VIII Всероссийская научная студенческая конференция НИУ ВШЭ — Нижний Новгород (2024)*.

Результаты последних глав отправлены в журналы *Wave Motion* и *Physics of Fluids*, из которых уже получены в целом положительные рецензии. Также, автор хотел отметить финансовую поддержку, полученную с гранта Российского научного фонда № 23-77-01074.

## Список литературы

- [1] L. Euler Sectio quarta de motu aeris in tubis, Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae, Volume 16, pp. 281-425. (1772) (in Latin)
- [2] Л. Эйлер *Интегральное исчисление*, Т. 3. М: ГИФМЛ. 447 с. (1958)
- [3] O. V. Kaptsov, D. O. Kaptsov Solutions of some wave mechanics models. *Fluid Dynamics*, 58 p. 1227-1234. (2024). [или см. О. В. Капцов, Д. О. Капцов Решения некоторых волновых моделей механики *Прикладная математика и механика. Т. 87. Вып. 2. С. 176-185. (2023).*]
- [4] C. C. Mei *The Applied Dynamics of Ocean Surface Waves*, World Scientific: Singapore, (1989)
- [5] M. W. Dingemans *Water Wave Propagation over Uneven Bottom*, World Scientific: Singapore, (1997)
- [6] Л. М. Бреховских *Волны в слоистых средах*, 2-е изд., доп. и испр. — Москва: Наука, 343 с. (1973)
- [7] Y. A. Kravtsov, Y. I. Orlov *Geometrical Optics of Inhomogeneous Media*, Springer Series on Wave Phenomena, 6; Springer: New York, NY, USA, (1990); ISBN -13-978-3642840333.
- [8] V. M. Babich, V. S. Buldyrev *Asymptotic Methods In Short-Wavelength Diffraction Theory*, Springer: Berlin/Heidelberg, Germany, (2009); ISBN 978-1842652329.
- [9] I. Didenkulova, E. N. Pelinovsky and T. Soomere Long surface wave dynamics along a convex bottom, *Journal of Geophysical Research*, 114, C07006, 14 p. (2008).
- [10] G. Bluman, On mapping linear partial differential equations to constant coefficient equations, *SIAM Journal on Applied Mathematics* 43, 1259-1273 (1983), doi: 10.1137/0143084.
- [11] О. В. Капцов, М. М. Мирзаохмедов Общие решения некоторых линейных уравнений с переменными коэффициентами. *Уфимский математический журнал*, 13 (2), 36-43 (2021).
- [12] I. Didenkulova and E. Pelinovsky, Travelling water waves along a quartic bottom profile. *Proceedings of the Estonian Academy of Sciences* 59, 166– 171 (2010).
- [13] R. Grimshaw, D. Pelinovsky, and E. Pelinovsky, Homogenization of the variable-speed wave equation, *Wave Motion* 47, 496–507 (2010).
- [14] E. Pelinovsky, I. Didenkulova, E. Shurgalina, and N. Aseeva, Nonlinear wave dynamics in self-consistent water channels, *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* 50, 505501 (2017).

- [15] S. M. Churilov and Y. A. Stepanyants, Reflectionless wave propagation on shallow water with variable bathymetry and current, *Journal of Fluid Mechanics* 931 (2021), doi: 10.1017/jfm.2021.935.
- [16] E. Pelinovsky, O. Kaptsov Traveling Waves in Shallow Seas of Variable Depths. *Symmetry*, 14(7), 1448. (2022)
- [17] I. Melnikov, E. Pelinovsky Euler-Darboux-Poisson Equation in Context of the Traveling Waves in a Strongly Inhomogeneous Media. *Mathematics*, 11, 3309. (2023)
- [18] N. Petrukhin, E. Pelinovsky, and T. Talipova, Nonreflected vertical propagation of acoustic waves in a strongly inhomogeneous atmosphere, *Izvestiya, Atmospheric and Oceanic Physics* 48, 169–173 (2012).
- [19] M. S. Ruderman and N. S. Petrukhin, Non-reflective propagation of kink waves in magnetic-flux tubes in the solar atmosphere, *Solar Physics* 299 (2024), doi: 10.1007/s11207-013-0263-2.
- [20] N. Petrukhin, E. Pelinovsky, and E. Didenkulova, Non-reflective magnetohydrodynamic waves in an inhomogeneous plasma, *Radiophysics and Quantum Electronics* 63, 29 – 39 (2020).
- [21] G. F. Carrier and H. P. Greenspan, Water waves of finite amplitude on a sloping beach, *Journal of Fluid Mechanics* 4, 97–109 (1958).
- [22] T. T. W. Carrier, G. F. and H. Yeh, Tsunami run-up and draw-down on a plane beach, *Journal of Fluid Mechanics* 475, 79 – 99 (2003).
- [23] S. Tinti and R. Tonini, Analytical evolution of tsunamis induced by near-shore earthquakes on a constant-slope ocean, *Journal of Fluid Mechanics* 535, 33–64 (2005).
- [24] E. Pelinovsky, Nonlinear hyperbolic equations and run-up of huge sea waves, *Applicable Analysis* 57, 63–84 (1995).
- [25] I. Didenkulova and E. Pelinovsky, Runup of tsunami waves in u-shaped bays, *Pure and applied geophysics* 168, 1239–1249 (2011).
- [26] A. Rybkin, D. Nicolsky, E. Pelinovsky, and M. Buckel, The generalized carrier–greenspan transform for the shallow water system with arbitrary initial and boundary conditions, *Water Waves* 3 (2021), doi: 10.1007/s42286-020-00042-w.
- [27] N. Shuto, Shoaling and deformation of nonlinear long waves. *Coastal Eng. Japan* 16, 1 – 12 (1973).
- [28] E. Pelinovsky, Hydrodynamics of tsunami waves, in *Waves in Geophysical Fluids: Tsunamis, Rogue Waves, Internal Waves and Internal Tides* (Springer Vienna, Vienna, 2006) pp. 1 – 48.
- [29] I. Melnikov, E. Pelinovsky, Linear waves in shallow water over an uneven bottom, slowing down near the shore, *Fluid Dynamics* 59(2) (2024).

Приложение

В Оргкомитет Смотра дипломных работ математиков России

от Минеева Дениса Александровича

Заявление о новизне

Сообщаю, что новыми в моей представленной на Смотр выпускной квалификационной работе (далее - работа) под названием "Численное исследование черновских аппроксимаций решений линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами" являются: Теоремы 5,6,7 и их доказательства, Примеры 1,2 и численный эксперимент.

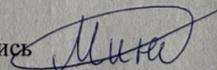
Также сообщаю, что для проверки новизны мною было проделано следующее:

- Проведена серия консультаций с моим научным руководителем Олегом Евгеньевичем Галкиным, доцентом кафедры фундаментальной математики факультета ИМиКН НИУ ВШЭ.
- В период с 01 января по 15 февраля 2024 г. мною был произведен поиск в следующих поисковых системах: Яндекс, Google, Google Scholar, Web of Science, arxiv.org по следующим ключевым словам: Chernoff function, черновские аппроксимации, в выдаче поисковиков было исследовано 21 статьи и все они не содержали материала, заявляемого автором выпускной квалификационной работы в качестве нового. При поиске не было встречено работ или упоминаний работ, позволяющих усомниться в новизне материала. При этом в работах были найдены конструкции, похожие на излагаемые в настоящей выпускной квалификационной работе, однако отличие их ясно видно и наличие таких работ лишь подтверждает актуальность тематики исследования.

Подтверждаю, что являюсь автором предоставляемой на Смотр работы и прошу принять ее для участия в Смотре. Принимаю на себя обязательство соблюдать правила Смотра. Также (в соответствии с п. 4 Положения о Смотре) принимаю на себя обязательство оценить 5 работ участников Смотра, выданных мне Оргкомитетом в результате жеребьевки и сверх того оценить 2-5 работ других участников Смотра на мой выбор. Я понимаю правила оценки работ, приведенные в п. 4.3 Положения о Смотре. Даю согласие на публикацию адреса моей электронной почты.

Защита работы состоится/состоялась 10.06.2024. На Смотр представлен проект текста/окончательный текст работы.

Подпись



Минеев Денис  
Александрович

17.06.2024, Нижний Новгород, Россия

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ  
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ  
“ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ”  
НИЖЕГОРОДСКИЙ ФИЛИАЛ  
*Факультет информатики, математики и компьютерных наук*

ДИПЛОМНАЯ РАБОТА

на тему:

**Численное исследование черновских аппроксимаций  
решений линейных обыкновенных дифференциальных уравнений  
второго порядка с переменными коэффициентами**

Выполнил:

студент 4 курса группы 20ФМ

Минеев Денис Александрович

Научный руководитель:

доцент, кандидат физ.-мат. наук,

Галкин Олег Евгеньевич

Нижний Новгород, 2024

# Содержание

<b>1</b>	<b>Введение</b>	<b>3</b>
1.1	История вопроса . . . . .	3
1.2	Актуальность темы . . . . .	4
1.3	Постановка задачи . . . . .	4
1.4	Полученные результаты . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Основные определения, обозначения и известные результаты</b>	<b>5</b>
2.1	Основные определения и обозначения . . . . .	5
2.2	Некоторые известные результаты . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Основные теоретические результаты выпускной работы</b>	<b>9</b>
<b>4</b>	<b>Численное моделирование</b>	<b>15</b>
4.1	Описание численного эксперимента . . . . .	15
4.2	Результаты в случае, когда все коэффициенты непрерывно дифференцируемы .	18
4.3	Результаты в случае, когда коэффициент $a(x)$ не является дифференцируемым. .	20
4.4	Результаты в случае, когда коэффициент $b(x)$ не является дифференцируемым. .	20
4.5	Результаты в случае, когда коэффициент $c(x)$ не является дифференцируемым. .	22
4.6	Результаты в случае, когда все коэффициенты не являются дифференцируемыми.	22
4.7	Анализ полученных результатов . . . . .	25
<b>5</b>	<b>Выводы</b>	<b>28</b>
	<b>Список литературы</b>	<b>28</b>

# 1 Введение

Данная работа посвящена исследованию функций Чернова и их применению для нахождения ограниченных решений линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка.

## 1.1 История вопроса

Идея использовать композицию линейных операторов для нахождения аппроксимации  $C_0$ -полугрупп принадлежит американскому математику Чернову. Он представил свой метод в работе [3] в 1968 году. Такой способ нахождения приближенного решения получил название метод черновских аппроксимаций. С того времени математики продолжали изучать данный метод и находить ему различные применения.

В течение последних двадцати лет были проведены исследования по этой теме, охватывающие различные сферы применения данного метода. Например, в 2002 году Смолянов О. Г., Токарев А. Г. и Трумэн А. представили статью “Hamiltonian Feynman path integrals via the Chernoff formula” [12] в которой сформулировали и доказали некоторые строгие результаты о представлении решений уравнений Шрёдингера через интегралы Фейнмана по гамильтоновским траекториям, используя формулу Чернова.

Другим интересным результатом связанным с этой темой, исследование на тему скорости сходимости черновских аппроксимаций, которое провели Галкин О.Е. и Ремизов И.Д. [7]. Они предоставляют простые примеры, для которых сходимость может быть быстрой или медленной. Также в работе доказывается общая теорема, которая дает верхнюю оценку скорости убывания нормы остаточного члена аппроксимаций Чернова. Так же результат применяется к одномерным параболическим дифференциальным уравнениям с переменными коэффициентами.

В 2020 году Яна Бутко выпустила статью [1] с обзором основных известных методов применения и примерами различных классов уравнений, для которых применяется метод черновских аппроксимаций. Для более глубокого понимания широты применения функций Чернова рекомендуется ознакомиться с этой статьей.

Мое исследование основывается на статье Ивана Ремизова [11], которую он представил в 2023 году, в своей работе он представил метод применения функций Чернова для решения линейных дифференциальных уравнений второго порядка.

## 1.2 Актуальность темы

Несмотря на то что тема дифференциальных уравнений хорошо изучена, их решение всегда является актуальной проблемой, так как не все методы дают необходимый результат. Изучение нового метода может найти применение в прикладных исследованиях. Изучив сильные и слабые стороны Черновских аппроксимаций, возможно ему найдется применение в других темах. Основным плюсом исследуемого метода является нахождение ограниченных решений, это может стать решающим достоинством при выборе метода.

## 1.3 Постановка задачи

Основной темой работы является исследование свойств и ограничений метода, предложенного Иваном Ремизовым, для решения линейных однородных дифференциальных уравнений (ЛОДУ) второго порядка с помощью черновских аппроксимаций. Основной идеей этого подхода является что приближенное решения уравнения можно найти следующей формулой:

$$f(x) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} (S(t/n)^n g)(x) dt.$$

Для дипломной работы были поставлены следующие задачи:

- Доказать теорему о обобщенной теоретической оценке метода Ивана Ремизова, для решения линейных дифференциальных уравнений второго порядка.
- Доказать теоретическую оценку для оператора чернова  $S_6$  (полученного Александром Ведениним).

$$(S_6(t)f)(x) = \frac{1}{2}(1 + t \cdot c(x)) \cdot \left( f(x + \sqrt{2a(x)t} + 2b(x)t) + f(x - \sqrt{2a(x)t}) \right)$$

- Доказать теоретическую оценку для оператора чернова  $Q$  (полученного Александром Ведениним).

$$\begin{aligned} (Q(t))(x) = & \frac{2}{3}f(x) + \frac{1}{6}f(x + \sqrt{6a(x)t}) + \frac{1}{6}f(x - \sqrt{6a(x)t}) - \\ & - a(x)a'(x)t \left( \frac{7}{2}f(x + \sqrt[3]{3}) + \frac{1}{4}f(x - \sqrt[3]{3}) - \frac{7}{4}f(x + 2\sqrt[3]{3}) + \frac{1}{4}f(x - 2\sqrt[3]{3}) + \frac{1}{4}f(x + 3\sqrt[3]{3}) \right) + \\ & + \frac{1}{2}a(x)a''(x)t \left( f(x + \sqrt{t}) + f(x - \sqrt{t}) \right) + \left( \frac{5}{2}a'(x) - a''(x) \right) a(x)t f(x). \end{aligned}$$

- Провести численный эксперимент для исследуемого метода и сравнить его с уже существующими методами.
- Оформить результаты численного эксперимента, сделать выводы на их основе.

## 1.4 Полученные результаты

В результате Дипломной работы были получены следующие результаты.

- Доказана общая оценка погрешности черновских приближений к решению ЛОДУ второго порядка.

$$\left\| \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t/n)^n f dt - R_\lambda(\bar{A})f \right\| \leq \frac{M \cdot \Gamma(m + \alpha + 1)}{n^{m+\alpha-1}(\lambda - \omega)^{m+\alpha+1}} \sum_{i=0}^{2m+\hat{q}} C_i \|f^{(i)}\|$$

- Доказана оценка погрешности приближений к решению ЛОДУ для функции Чернова  $S_6$  (построенной Александром Ведениним).

$$\|S_6(t/n)^n g - e^{t\bar{A}}g\| \leq \frac{t^{3/2}e^{\|c\|t}}{n^{1/2}} (C_0\|g\| + C_1\|g'\| + C_2\|g''\| + C_3\|g'''\| + C_4\|g^{(IV)}\|).$$

- Доказана оценка погрешности приближений к решению ЛОДУ для функции Чернова  $Q$  (построенной Александром Ведениним).

$$\|Q(t/n)^n g - e^{t\bar{A}}g\| \leq \frac{t^3 e^{wt}}{n^2} (C_0\|g\| + C_1\|g'\| + C_2\|g''\| + C_3\|g'''\| + C_4\|g^{(IV)}\|).$$

- Была проведена аппроксимация выбранного метода с учетом разнообразных начальных условий и количества итераций. В качестве результатов были получены графики, которые демонстрируют приближенные решения, величину ошибок и время, необходимое для выполнения расчетов.
- Изучили результаты численного эксперимента, полученные данные представлены в таблицах. Изученные результаты позволили сформулировать значимые выводы, основанные на представленных в таблицах данных.

## 2 Основные определения, обозначения и известные результаты

### 2.1 Основные определения и обозначения

Приведем определения основных понятий, используемых в работе.

**Определение 1.** *Банахово пространство* — это полное, нормированное векторное пространство.

**Определение 2.** Определим  $UC_b(\mathbb{R})$  как линейное пространство всех равномерно непрерывных, ограниченных функций  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  с равномерной нормой  $\|f\| = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$ .

**Замечание 1.**  $UC_b(\mathbb{R})$  является полным нормированным, то есть банаховым пространством.

**Определение 3.** Для каждого  $n \in \mathbb{N}$  зададим пространство  $UC_b^n(\mathbb{R})$  с помощью равенства  $UC_b^n(\mathbb{R}) = \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f, f', \dots, f^{(n)} \in UC_b(\mathbb{R})\}$ .

Схожим образом определим банахово пространства  $HC_b(\mathbb{R})$  и его подмножество  $HC_b^n(\mathbb{R})$ .

**Определение 4.** Пусть  $HC_b(\mathbb{R})$  — пространство всех липшицевых функций из  $\mathbb{R}$  в  $\mathbb{R}$ , то есть  $HC_b(\mathbb{R}) = \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid |f(x) - f(y)| < L|x - y| \text{ для некоторого } L > 0 \text{ и любых } x, y \in \mathbb{R}\}$ . В свою очередь, при каждом  $n \in \mathbb{N}$  пространство  $HC_b^n(\mathbb{R})$  зададим как множество всех таких функций  $f \in HC_b(\mathbb{R})$ , что  $f', \dots, f^{(n)} \in HC_b(\mathbb{R})$ .

Важнейшей теоремой на которую опирается наша работа, является следующая теорема Чернова [3]:

**Теорема 1.** (П. Р. Чернов, 1968)

Предположим, что выполняются три следующих условия:

1.  $C_0$ -полугруппа  $(e^{tL})_{t \geq 0}$  с генератором  $(L, D(L))$  в банаховом пространстве  $\mathcal{F}$ , такая что для некоторого  $w \geq 0$  и любого  $t \geq 0$  выполняется неравенство  $\|e^{tL}\| \leq e^{wt}$ .
2. Существует сильно непрерывный оператор  $S: [0, +\infty) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{F})$  такой, что  $S(0) = I$  и оценка  $\|S(t)\| \leq e^{wt}$  верна для любого  $t \geq 0$ .
3. Существует линейное подпространство  $D \subset \mathcal{F}$  такое, что для любого  $f \in D$  существует предел  $S'(0)f := \lim_{t \rightarrow +0} (S(t)f - f)/t$ . Более того, оператор  $S'(0)$  на  $D$  имеет замыкание которое находится внутри генератора  $(L, D(L))$ .

Тогда следующие утверждение верно:

(C) для любого  $f \in \mathcal{F}$ , выполняется  $S(t/n)^n f \rightarrow e^{tL} f$  при  $n \rightarrow \infty$  локально равномерно для  $t \geq 0$ , иными словами для каждого  $T > 0$  и каждого  $f \in \mathcal{F}$  имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in [0, T]} \|S(t/n)^n f - e^{tL} f\| = 0.$$

**Определение 5.** Пусть дана  $C_0$ -полугруппа  $(e^{tL})_{t \geq 0}$  с генератором  $L$  в банаховом пространстве  $\mathcal{F}$ . Отображение  $S: [0, +\infty) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{F})$  называется функцией Чернова для оператора  $L$ , если оно удовлетворяет условиям теоремы 1. В таком случае запись  $S(t/n)^n$  будет называться черновской аппроксимацией порядка  $n$  к полугруппе  $e^{tL}$ .

## 2.2 Некоторые известные результаты

Вариант теоремы Чернова 1 для функций Чернова высокого порядка, соответствующих дифференциальным операторам второго порядка, можно найти в работе [7] (см. там теорему 3.1):

**Теорема 2.** (Галкин О.Е., Ремизов И.Д., 2021)

*Предположим, что выполняются следующие условия:*

1. Числа  $m, q \in \mathbb{N}$  фиксированные, и  $\hat{q} = [(q + 1)/2]$ . Даны функции  $a, b, c$  из класса  $HC_b^{2m+\hat{q}-2}(\mathbb{R})$ , такие, что  $\inf_{x \in \mathbb{R}} a(x) > 0$ . Оператор  $A$  на  $UC_b(\mathbb{R})$  с областью определения  $D(A) = HC_b^2(\mathbb{R})$  определен формулой  $Au = au'' + bu' + cu$ .
2. Даны числа  $T > 0$ ,  $M \geq 1$  и  $\sigma \geq 0$ . Для любого  $t \in (0, T]$  ограниченный линейный оператор  $S(t)$  определен на  $UC_b(\mathbb{R})$  так, что  $\|S(t)^k\| \leq Me^{k\sigma t}$  для любого  $k \in \mathbb{N}$ .
3. Существует константа  $\alpha \leq 1$  и положительные константы  $K_0, K_1, \dots, K_{2m+q}$  такие, что для всех  $t \in (0, T]$  и всех  $f \in UC_b^{2m+\hat{q}-2}(\mathbb{R})$  выполняется неравенство

$$\left\| S(t)f - \sum_{k=0}^m \frac{t^k A^k f}{k!} \right\| \leq t^{m+\alpha} \sum_{i=0}^{2m+q} K_i \|f^{(i)}\|. \quad (1)$$

*Тогда выполняются следующие утверждения:*

1. Замыкание  $\bar{A}$  оператора  $A$  в банаховом пространстве  $UC_b(\mathbb{R})$  является генератором  $C_0$ -полугруппы  $(e^{t\bar{A}})_{t \geq 0}$  в  $UC_b(\mathbb{R})$  и для всех  $t \geq 0$  верно неравенство  $\|e^{t\bar{A}}\| \leq e^{\gamma t}$ , где  $\gamma = \sup_{x \in \mathbb{R}} c(x)$ .
2. Пусть  $w = \max(\sigma, \gamma, 0)$ . Тогда существуют неотрицательные константы  $C_0, C_1, \dots, C_{2m+\hat{q}}$  (которые не зависят от  $t$ ,  $T$  и  $n$ ) такие, что для любых  $t > 0$ ,  $n \geq n_{\alpha, t}$  (где  $n_{\alpha, t} = t/T$  если  $\alpha = 1$  или  $n_{\alpha, t} = \max(t/T, t)$  если  $\alpha < 1$ ) и  $f \in UC_b^{2m+\hat{q}}(\mathbb{R})$  имеем неравенство

$$\|S(t/n)^n f - e^{t\bar{A}} f\| \leq \frac{Mt^{m+\alpha} e^{wt}}{n^{m-1+\alpha}} \sum_{i=0}^{2m+\hat{q}} C_i \|f^{(i)}\|. \quad (2)$$

3. Если  $\alpha > 1 - m$ , тогда для всех  $\mathcal{T} > 0$  и всех  $g \in UC_b(\mathbb{R})$  следующая оценка верна:

$$\lim_{\mathcal{T}/T \leq n \rightarrow \infty} \sup_{t \in (0, \mathcal{T})} \|S(t/n)^n g - e^{t\bar{A}} g\| = 0. \quad (3)$$

Следующую теорему 3 можно применять для аппроксимации решений линейного дифференциального уравнения второго порядка.

**Теорема 3.** (Ремизов И.Д., 2023, см. [11])

Пусть  $\mathcal{F}$  является вещественным или комплексным банаховым пространством и пусть  $\mathcal{L}(\mathcal{F})$  является множеством всех ограниченных линейных операторов в  $\mathcal{F}$ . Предположим, что линейный оператор  $L : \mathcal{F} \supset \mathcal{D}(L) \rightarrow \mathcal{F}$  генерирует  $C_0$  полугруппу  $(e^{tL})_{t \geq 0}$  удовлетворяющую неравенство  $\|e^{tL}\| \leq Me^{\omega t}$  для любого  $t$  и некоторых констант  $M \geq 1$  и  $\omega \geq 0$ . Предположим дана функция  $G : [0, +\infty] \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{F})$  удовлетворяющая условию  $\|G(t)^k\| \leq Me^{\omega tk}$  для всех  $t \geq 0$  и  $k = 1, 2, 3, \dots$ . Определим резольвенту для  $(L, D(L))$  символом  $R_\lambda = (\lambda I - L)^{-1}$  для всех  $\lambda \in \rho(L)$ . Предположим, что  $\lambda \in \mathbb{C}$  дано и  $\operatorname{Re} \lambda > \omega$ . Тогда для  $\lambda \in \rho(L)$ :

1. Если для всех  $T > 0$  и всех  $f \in \mathcal{F}$  выполняется  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in [0, T]} \|e^{tL} f - (G(t/n))^n f\| = 0$ , тогда выполняется:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| R_\lambda f - \int_0^\infty e^{-\lambda t} (G(t/n))^n f dt \right\| = 0$$

2. Если для всех  $T > 0$  выполняется  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in [0, T]} \|e^{tL} - (G(t/n))^n\| = 0$ , тогда выполняется:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| R_\lambda - \int_0^\infty e^{-\lambda t} (G(t/n))^n dt \right\| = 0$$

В следующей теореме 4 приведена теоретическая оценка для погрешности черновских приближений, построенных с помощью функции Чернова  $S_8$  (см. формулу 4), к решению линейных дифференциальных уравнений, полученная Иваном Ремизовым в [11, Theorem 6].

**Теорема 4.** (И. Ремизов, 2023)

Предположим, что заданы функции  $a, b, c \in UC_b(\mathbb{R})$ , и их производные до третьего порядка ограничены. Пусть величина  $a_0 = \inf_{x \in \mathbb{R}} a(x)$  положительна и оператор  $A$  на  $UC_b(\mathbb{R})$  с областью определения  $D(A) = HC_b^2(\mathbb{R})$  задан формулой  $Au = au'' + bu' + cu$ . Для любого параметра  $t \geq 0$ , любого значения  $x \in \mathbb{R}$  и любой функции  $f \in UC_b(\mathbb{R})$  положим

$$(S_8(t)f)(x) = \frac{1}{4}f\left(x + 2\sqrt{a(x)t}\right) + \frac{1}{4}f\left(x - 2\sqrt{a(x)t}\right) + \frac{1}{2}f(x + 2b(x)t) + tc(x)f(x). \quad (4)$$

Предположим также, что  $\lambda > \sup_{x \in \mathbb{R}} |c(x)| = \|c\|$ . Тогда выполняются следующие два утверждения:

1. Замыкание  $\bar{A}$  оператора  $A$  является генератором  $C_0$ -полугруппы в  $UC_b(\mathbb{R})$ .
2. Для любой функции  $g \in UC_b(\mathbb{R})$  решение  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  уравнения

$$a(x)f''(x) + b(x)f'(x) + (c(x) - \lambda)f(x) = -g(x) \quad \text{для всех } x \in \mathbb{R} \quad (5)$$

является единственным в  $UC_b(\mathbb{R})$  и задается для всех  $x \in \mathbb{R}$  формулой

$$f(x) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} (e^{\bar{A}} g)(x) dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t} (S_8(t/n)^n g)(x) dt. \quad (6)$$

Дополнительно предположим, что функция  $g$  и ее производные до 4 порядка включительно ограничены. Тогда будут верны ещё следующие два утверждения:

3. Существуют неотрицательные константы  $C_0, C_1, C_2, C_3, C_4$  такие, что для любого  $t > 0$  и любого  $n \in \mathbb{N}$  неравенство верно:

$$\|S_8(t/n)^n g - e^{t\bar{A}} g\| \leq \frac{t^2 e^{\|c\|t}}{n} (C_0 \|g\| + C_1 \|g'\| + C_2 \|g''\| + C_3 \|g'''\| + C_4 \|g^{(IV)}\|).$$

4. Ошибка функции (19) может быть оценена для любого  $n \in \mathbb{N}$  неравенством

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| f(x) - \int_0^\infty e^{-\lambda t} ((S_8(t/n))^n g)(x) dt \right| \leq \frac{2C_g}{n \cdot (\lambda - \|c\|)^3},$$

где  $C_g = C_0 \|g\| + C_1 \|g'\| + C_2 \|g''\| + C_3 \|g'''\| + C_4 \|g^{(IV)}\|$ .

Описанный в двух предыдущих теоремах метод назовем *методом черновских аппроксимаций ЛОДУ*.

### 3 Основные теоретические результаты выпускной работы

В данном разделе излагаются обобщения теоремы Ивана Ремизова 4, полученные, опираясь на теоремы 2 и 3.

**Теорема 5.** *Предположим, что выполняются следующие условия:*

1. Числа  $m, q \in \mathbb{N}$  фиксированные, и  $\hat{q} = [(q + 1)/2]$ . Даны функции  $a, b, c$  из класса  $HC_b^{2m+\hat{q}-2}(\mathbb{R})$ , такие, что  $\inf_{x \in \mathbb{R}} a(x) > 0$ . Оператор  $A$  на  $UC_b(\mathbb{R})$  с областью определения  $D(A) = HC_b^2(\mathbb{R})$  определен формулой  $Au = au'' + bu' + cu$ .
2. Даны числа  $T > 0, M \geq 1$  и  $\sigma \geq 0$ . Для любого  $t \in (0, T]$  ограниченный линейный оператор  $S(t)$  определен на  $UC_b(\mathbb{R})$  так, что  $\|S(t)^k\| \leq M e^{k\sigma t}$  для любого  $k \in \mathbb{N}$ .
3. Существует константа  $\alpha \leq 1$  и положительные константы  $K_0, K_1, \dots, K_{2m+q}$  такие, что для всех  $t \in (0, T]$  и всех  $f \in UC_b^{2m+\hat{q}-2}(\mathbb{R})$  выполняется неравенство

$$\left\| S(t)f - \sum_{k=0}^m \frac{t^k A^k f}{k!} \right\| \leq t^{m+\alpha} \sum_{i=0}^{2m+q} K_i \|f^{(i)}\|. \quad (7)$$

Тогда выполняются следующие утверждения:

1. Замыкание  $\bar{A}$  оператора  $A$  в банаховом пространстве  $UC_b(\mathbb{R})$  является генератором  $C_0$ -полугруппы  $(e^{t\bar{A}})_{t \geq 0}$  в  $UC_b(\mathbb{R})$  и для всех  $t \geq 0$  верно неравенство  $\|e^{t\bar{A}}\| \leq e^{\gamma t}$ , где  $\gamma = \sup_{x \in \mathbb{R}} c(x)$ .
2. Существуют такие неотрицательные константы  $C_0, C_1, \dots, C_{2m+\hat{q}}$ , что для любых  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f \in UC_b^{2m+\hat{q}}(\mathbb{R})$  и  $\lambda > w$  выполняется неравенство

$$\left\| \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t/n)^n f dt - R_\lambda(\bar{A})f \right\| \leq \frac{M \cdot \Gamma(m + \alpha + 1)}{n^{m+\alpha-1}(\lambda - \omega)^{m+\alpha+1}} \sum_{i=0}^{2m+\hat{q}} C_i \|f^{(i)}\|, \quad (8)$$

где интеграл понимается, как несобственный интеграл Римана.

*Доказательство.* 1) Утверждение пункта 1 нашей теоремы доказано в теореме 4.2 из работы [7].

2) Возьмем  $w = \max(0, \sigma, \gamma)$ . Тогда по пункту 2 теоремы 4.2 из [7] существуют такие неотрицательные константы  $C_0, C_1, \dots, C_{2m+\hat{q}}$ , что для любых  $n \in \mathbb{N}$  и  $f \in UC_b^{2m+\hat{q}}(\mathbb{R})$  верна оценка

$$\|S(t/n)^n f - e^{t\bar{A}}f\| \leq \frac{M t^{m+\alpha} e^{\omega t}}{n^{m-1+\alpha}} \sum_{i=0}^{2m+\hat{q}} C_i \|f^{(i)}\|. \quad (9)$$

Далее, воспользуемся теоремой II.1.10 в [5], которая утверждает, что  $\lambda$  лежит в резольвентном множестве  $\rho(\bar{A})$ , для любого  $f \in UC_b(\mathbb{R})$  выполняется равенство  $R_\lambda(\bar{A})f = \int_0^\infty e^{-\lambda t} e^{t\bar{A}}f dt$ , а также верна оценка  $\|R_\lambda(\bar{A})\| \leq M/(\lambda - w)$ .

Из этих фактов следует равенство

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t/n)^n f dt - R_\lambda(\bar{A})f = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \cdot (S(t/n)^n f - e^{t\bar{A}}f) dt.$$

Отсюда и из формулы (9) вытекают следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t/n)^n f dt - R_\lambda(\bar{A})f \right\| &\leq \left\| \int_0^\infty e^{-\lambda t} \cdot (S(t/n)^n f - e^{t\bar{A}}f) dt \right\| \leq \\ &\leq \int_0^\infty e^{-\lambda t} \|S(t/n)^n f - e^{t\bar{A}}f\| dt \leq \int_0^\infty e^{-\lambda t} \left( \frac{M t^{m+\alpha} e^{\omega t}}{n^{m-1+\alpha}} \sum_{i=0}^{2m+\hat{q}} C_i \|f^{(i)}\| \right) dt = \\ &= \int_0^\infty t^{m+\alpha} e^{t(\omega-\lambda)} dt \cdot \left( \frac{M}{n^{m-1+\alpha}} \sum_{i=0}^{2m+\hat{q}} C_i \|f^{(i)}\| \right). \end{aligned} \quad (10)$$

Интеграл вычислим отдельно, воспользовавшись заменой  $a = t(\lambda - \omega)$ :

$$\int_0^\infty t^{m+\alpha} e^{t(\omega-\lambda)} dt = \int_0^\infty \frac{a^{m+\alpha}}{(\lambda - \omega)^{m+\alpha+1}} e^{-a} da = \frac{\Gamma(m + \alpha + 1)}{(\lambda - \omega)^{m+\alpha+1}}.$$

Отсюда и из формулы (10) получаем необходимую оценку:

$$\left\| \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t/n)^n f dt - R_\lambda(A)f \right\| \leq \frac{M \cdot \Gamma(m + \alpha + 1)}{n^{m+\alpha-1}(\lambda - \omega)^{m+\alpha+1}} \sum_{i=0}^{2m+\hat{q}} C_i \|f^{(i)}\|.$$

Теорема доказана.  $\square$

**Пример 1.** Предположим, что функции  $a, b, c \in HC_b^2(\mathbb{R})$  заданы так, что  $\inf_{x \in \mathbb{R}} a(x) > 0$ . Предположим так же, что дифференциальный оператор второго порядка  $A: UC_b(\mathbb{R}) \rightarrow UC_b(\mathbb{R})$  с областью определения  $UC_b^2(\mathbb{R})$  задан равенством

$$Au = au'' + ba' + cu. \quad (11)$$

Далее, для каждого  $t \geq 0$ , каждой  $f \in UC_b^2(\mathbb{R})$  и каждого  $x \in \mathbb{R}$  положим

$$(S_6(t)f)(x) = \frac{1}{2}(1 + t \cdot c(x)) \cdot \left( f(x + \sqrt{2a(x)t} + 2b(x)t) + f(x - \sqrt{2a(x)t}) \right). \quad (12)$$

Тогда существуют неотрицательные константы  $C_0, C_1, \dots, C_4$  такие, что для всех  $t > 0$ , всех натуральных  $n \geq t$  и всех  $f \in UC_b^4(\mathbb{R})$  верно следующее неравенство:

$$\|S_6(t/n)^n f - e^{tA} f\| \leq \frac{t^{3/2} e^{\|c\|t}}{n^{1/2}} (C_0 \|f\| + C_1 \|f'\| + C_2 \|f''\| + C_3 \|f'''\| + C_4 \|f^{(IV)}\|).$$

*Доказательство.* Всюду далее в доказательстве будем считать, что  $T = 1$ .

1) Положим  $m = 2$ ,  $q = 1$ . Тогда  $\hat{q} = 2$  и пункт 1 условия теоремы 2 выполняется.

2) Оценим норму  $\|S_6(t)f\|$  для любого  $t > 0$  и любого  $f \in UC_b(\mathbb{R})$  пользуясь формулой (12):

$$\begin{aligned} \|S_6(t)f\| &\leq \frac{1}{2}(1 + t \sup_{x \in \mathbb{R}} |c(x)|) \cdot \left( \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| f(x + \sqrt{2a(x)t} + 2b(x)t) \right| + \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| f(x - \sqrt{2a(x)t}) \right| \right) = \\ &= \frac{1}{2}(1 + t\|c\|) \cdot (\|f\| + \|f\|) = (1 + t\|c\|) \cdot \|f\| \leq e^{\|c\|t} \|f\|. \end{aligned}$$

Получаем, что  $\|S_6(t)\| \leq e^{\|c\|t}$  и  $\|S_6(t)^k\| \leq e^{k\|c\|t}$  для произвольных  $t > 0$  и  $k \in \mathbb{N}$ . Пункт 2 условия теоремы 2 выполняется для  $M = 1$ ,  $\sigma = \|c\|$  и  $T = 1$ .

3) Возьмем произвольную функцию  $f \in UC_b^4(\mathbb{R})$  и разложим  $[S_6(t)f](x)$  при  $t \in (0, T]$ , используя формулу Тейлора с центром в точке  $x$  и остатком в форме Лагранжа.

$$\begin{aligned} f(x + \sqrt{2a(x)t} + 2b(x)t) &= f(x) + f'(x) \cdot (\sqrt{2a(x)t} + 2b(x)t) + \\ &+ \frac{1}{2} f''(x) \cdot (\sqrt{2a(x)t} + 2b(x)t)^2 + \frac{1}{6} f'''(x) \cdot (\sqrt{2a(x)t} + 2b(x)t)^3 + \\ &+ \frac{1}{24} f^{IV}(\xi_1) \cdot (\sqrt{2a(x)t} + 2b(x)t)^4 \end{aligned}$$

$$f\left(x - \sqrt{2a(x)t}\right) = f(x) - f'(x) \cdot \sqrt{2a(x)t} + \frac{1}{2}f''(x) \cdot \left(\sqrt{2a(x)t}\right)^2 - \frac{1}{6}f'''(x) \cdot \left(\sqrt{2a(x)t}\right)^3 + \frac{1}{24}f^{IV}(\xi_2) \cdot \left(\sqrt{2a(x)t}\right)^4,$$

где  $\xi_1 = \xi_1(t, x)$  принадлежит интервалу с концами  $x$  и  $\left(x + \sqrt{2a(x)t} + 2b(x)t\right)$ , а так же  $\xi_2 = \xi_2(t, x)$  принадлежит интервалу с концами  $x$  и  $\left(x + \sqrt{2a(x)t}\right)$ .

Используя эти равенства вместе с формулой (12), получим следующее выражение для  $[S_6(t)f](x)$ :

$$\begin{aligned} [S_6(t)f](x) = & f(x) + t[a(x)f''(x) + b(x)f'(x) + c(x)f(x)] + t^2b(x)c(x)f'(x) + t^2a(x)c(x)f''(x) + \\ & + \frac{1}{2}(1 + c(x)t) \cdot \left[ \frac{1}{2}f''(x) \left(2\sqrt{2}a(x)b(x)t^{\frac{3}{2}} + 4b(x)^2t^2\right) + \frac{1}{6}f'''(x) \left( \left(\sqrt{2a(x)t} + 2b(x)t\right)^3 - \right. \right. \\ & \left. \left. - (2a(x)t)^{\frac{3}{2}} \right) \right] + \frac{1}{24}f^{IV}(\xi_1) \left(\sqrt{2a(x)t} + 2b(x)t\right)^4 + \frac{1}{24}f^{IV}(\xi_2)(2a(x)t)^2 \end{aligned} \quad (13)$$

Тогда для любого  $t \in (0, T]$  имеем следующее неравенство:

$$\begin{aligned} \|S_6(t)f - (f + tAf)\| & \leq t^{\frac{3}{2}} \left[ \|b\| \cdot \|c\| \cdot \|f'\| + \|a\| \cdot \|c\| \cdot \|f''\| + \frac{1}{2}(1 + \|c\|) \left( \frac{1}{2}\|f''\|(2\sqrt{2}\|a\| \cdot \|b\| + \right. \right. \\ & \left. \left. + 4\|b\|^2) + \frac{1}{6}\|f'''\|((\sqrt{2}\|a\| + 2\|b\|)^3 - (2\|a\|)^{\frac{3}{2}}) + \frac{1}{24}\|f^{IV}\|((\sqrt{2}\|a\| + 2\|b\|)^4 - (2\|a\|)^2) \right) \right] = \\ & = t^{3/2} \sum_{i=1}^4 K_i \|f^{(i)}\|, \end{aligned}$$

где  $K_1 = \|b\| \cdot \|c\|$ ,  $K_2 = \|a\| \cdot \|c\| + 1/2 \cdot (1 + \|c\|)(\sqrt{2}\|a\| \cdot \|b\| + 2\|b\|^2)$ ,  $K_3 = 1/12 \cdot (1 + \|c\|)((\sqrt{2}\|a\| + 2\|b\|)^3 - (2\|a\|)^{\frac{3}{2}})$ ,  $K_4 = 1/48 \cdot (1 + \|c\|)((\sqrt{2}\|a\| + 2\|b\|)^4 - (2\|a\|)^2)$ . Таким образом, пункт 3 условия теоремы 2 выполняется для  $\alpha = 1/2$ .

4) Теперь, когда все условия теоремы 2 проверены, воспользуемся пунктом 2 из утверждающей части и получим следующее неравенство:

$$\|S_6(t/n)^n f - e^{tA} f\| \leq \frac{t^{3/2} e^{\|c\|t}}{n^{1/2}} (C_0 \|f\| + C_1 \|f'\| + C_2 \|f''\| + C_3 \|f'''\| + C_4 \|f^{(IV)}\|)$$

для любых  $t > 0$ , для всех натуральных  $n \geq t$ , любых  $f \in UC_b^4(\mathbb{R})$  и некоторых неотрицательных констант  $C_0, C_1, C_2, C_3, C_4$ .  $\square$

Следующая теорема является аналогом теоремы 6 из [11], но вместо функции Чернова (4) использует функцию Чернова (14) построенную Александром Ведениным.

**Теорема 6.** *Предположим, что заданы функции  $a, b, c \in UC_b(\mathbb{R})$ , и их производные до третьего порядка ограничены. Пусть величина  $a_0 = \inf_{x \in \mathbb{R}} a(x)$  положительна и оператор  $A$  на  $UC_b(\mathbb{R})$  с областью определения  $D(A) = HC_b^2(\mathbb{R})$  задан формулой  $Au = au'' + bu' + cu$ . Для любого параметра  $t \geq 0$ , любого значения  $x \in \mathbb{R}$  и любой функции  $f \in UC_b(\mathbb{R})$  положим*

$$(S_6(t)f)(x) = \frac{1}{2} \cdot (1 + t \cdot c(x)) \cdot \left( f(x + \sqrt{2a(x)t + 2b(x)t}) + f(x - \sqrt{2a(x)t}) \right). \quad (14)$$

*Предположим также, что  $\lambda > \sup_{x \in \mathbb{R}} |c(x)| = \|c\|$ . Тогда выполняются следующие два утверждения:*

1. *Замыкание  $\bar{A}$  оператора  $A$  является генератором  $C_0$ -полугруппы в  $UC_b(\mathbb{R})$ .*
2. *Для любой функции  $g \in UC_b(\mathbb{R})$  существует единственное решение  $f$  уравнения*

$$a(x)f''(x) + b(x)f'(x) + (c(x) - \lambda)f(x) = -g(x) \text{ для всех } x \in \mathbb{R} \quad (15)$$

*в классе  $UC_b^2(\mathbb{R})$ . Оно для всех  $x \in \mathbb{R}$  задается формулой*

$$f(x) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} (e^{\bar{A}}g)(x) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty e^{-\lambda t} (S_6(t/n)^n g)(x) dt. \quad (16)$$

*Дополнительно предположим, что функция  $g$  и ее производные до 4 порядка включительно ограничены. Тогда будут верны ещё следующие два утверждения:*

3. *Существуют неотрицательные константы  $C_0, C_1, C_2, C_3, C_4$  такие, что для любого  $t > 0$  и любого  $n \in \mathbb{N}$  верно неравенство*

$$\|S_6(t/n)^n g - e^{t\bar{A}}g\| \leq \frac{t^{3/2} e^{\|c\|t}}{n^{1/2}} (C_0 \|g\| + C_1 \|g'\| + C_2 \|g''\| + C_3 \|g'''\| + C_4 \|g^{(IV)}\|).$$

4. *Погрешность черновского приближения к решению (20) может быть оценена для любого  $n \in \mathbb{N}$  неравенством*

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| f(x) - \int_0^\infty e^{-\lambda t} (S_6(t/n)^n g)(x) dt \right| \leq \frac{3\sqrt{\pi} C_g}{4n^{1/2} (\|c\| - \lambda)^{5/2}}, \quad (17)$$

*где  $C_g = C_0 \|g\| + C_1 \|g'\| + C_2 \|g''\| + C_3 \|g'''\| + C_4 \|g^{(IV)}\|$ .*

*Доказательство.* 1) Утверждение пункта 1 следует из теоремы 2.

2) Утверждение пункта 2 является частным случаем теоремы 3.

3) Утверждение пункта 3 было доказано в примере 1.

4) Утверждение пункта 4 следует из доказанных пунктов 2 и 3, а так же следующих соотношений:

$$\left\| \int_0^\infty e^{-\lambda t} (e^{\bar{A}}g)(x) dt - \int_0^\infty e^{-\lambda t} (S_6(t/n)^n g)(x) dt \right\| \leq$$

$$\leq \int_0^\infty e^{-\lambda t} \left\| e^{\bar{A}} g - (S_6(t/n))^n g \right\| dt \leq \int_0^\infty e^{(\|c\|-\lambda)t} \frac{t^{3/2}}{n^{1/2}} C_g dt = \frac{3\sqrt{\pi} C_g}{4n^{1/2} (\|c\| - \lambda)^{5/2}}.$$

Теорема доказана.  $\square$

Следующая теорема является аналогом предыдущей теоремы, но в ней используется функция Чернова второго порядка, которую нашел Александр Веденин.

**Теорема 7.** *Предположим, что задана функция  $a \in UC_b(\mathbb{R})$ , и её производные до третьего порядка ограничены. Пусть величина  $a_0 = \inf_{x \in \mathbb{R}} a(x)$  положительна и оператор  $A$  на  $UC_b(\mathbb{R})$  с областью определения  $D(A) = HC_b^2(\mathbb{R})$  задан формулой  $Au = au''$ . Для любого параметра  $t \geq 0$ , любого значения  $x \in \mathbb{R}$  и любой функции  $f \in UC_b(\mathbb{R})$  положим*

$$\begin{aligned} (Q(t))(x) &= \frac{2}{3}f(x) + \frac{1}{6}f(x + \sqrt{6a(x)t}) + \frac{1}{6}f(x - \sqrt{6a(x)t}) - \\ &- a(x)a'(x)t \left( \frac{7}{2}f(x + \sqrt[3]{3}) + \frac{1}{4}f(x - \sqrt[3]{3}) - \frac{7}{4}f(x + 2\sqrt[3]{3}) + \frac{1}{4}f(x - 2\sqrt[3]{3}) + \frac{1}{4}f(x + 3\sqrt[3]{3}) \right) + \\ &+ \frac{1}{2}a(x)a''(x)t \left( f(x + \sqrt{t}) + f(x - \sqrt{t}) \right) + \left( \frac{5}{2}a'(x) - a''(x) \right) a(x)tf(x). \end{aligned} \quad (18)$$

Предположим также, что  $\lambda > w$ . Тогда выполняются следующие два утверждения:

1. Замыкание  $\bar{A}$  оператора  $A$  является генератором  $C_0$ -полугруппы в  $UC_b(\mathbb{R})$ .
2. Для любой функции  $g \in UC_b(\mathbb{R})$  существует единственное решение  $f$  уравнения

$$a(x)f''(x) - \lambda f(x) = -g(x) \text{ для всех } x \in \mathbb{R} \quad (19)$$

в классе  $UC_b^2(\mathbb{R})$ . Это решение для всех  $x \in \mathbb{R}$  задается формулой

$$f(x) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} (e^{\bar{A}} g)(x) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty e^{-\lambda t} (Q(t/n)^n g)(x) dt. \quad (20)$$

Дополнительно предположим, что функция  $g$  и ее производные до 4 порядка включительно ограничены. Тогда будут верны ещё следующие два утверждения:

3. Существуют неотрицательные константы  $C_0, C_1, C_2, C_3, C_4$  такие, что для любого  $t > 0$  и любого  $n \in \mathbb{N}$  верно неравенство

$$\|Q(t/n)^n g - e^{t\bar{A}} g\| \leq \frac{t^3 e^{wt}}{n^2} (C_0 \|g\| + C_1 \|g'\| + C_2 \|g''\| + C_3 \|g'''\| + C_4 \|g^{(IV)}\|).$$

4. Погрешность черновского приближения к решению (20) может быть оценена для любого  $n \in \mathbb{N}$  неравенством

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| f(x) - \int_0^\infty e^{-\lambda t} (Q(t/n)^n g)(x) dt \right| \leq \frac{6C_g}{n^2 (w - \lambda)^4}, \quad (21)$$

$$\text{где } C_g = C_0\|g\| + C_1\|g'\| + C_2\|g''\| + C_3\|g'''\| + C_4\|g^{(IV)}\|.$$

*Доказательство.* 1) Утверждение пункта 1 следует из теоремы 2.

2) Утверждение пункта 2 является частным случаем теоремы 3.

3) Пункт 3 утверждающей части был доказан в дипломной работе Насрин Никбахт [8] (см. пункт 2 теоремы 4).

4) Пункт 4 утверждения получается из следующих неравенств.

$$\begin{aligned} & \left\| \int_0^\infty e^{-\lambda t} (e^{\bar{A}}g)(x)dt - \int_0^\infty e^{-\lambda t} (Q(t/n)^n g)(x)dt \right\| \leq \\ & \leq \int_0^\infty e^{-\lambda t} \left\| e^{\bar{A}}g - (Q(t/n))^n g \right\| dt \leq \int_0^\infty e^{(w-\lambda)t} \frac{t^3}{n^2} C_g dt = \frac{6C_g}{n^2 (w-\lambda)^4}, \end{aligned}$$

где  $C_g = C_0\|g\| + C_1\|g'\| + C_2\|g''\| + C_3\|g'''\| + C_4\|g^{(IV)}\|$ . □

## 4 Численное моделирование

В данном параграфе приведем результаты численных экспериментов по поиску черновских аппроксимаций к решениям линейных дифференциальных уравнений второго порядка с различными начальными условиями и различным числом итераций. В результате этих экспериментов посчитаем погрешность аппроксимации, затраченное время и оценим влияние гладкости начальных условий на качество аппроксимации.

Для того, чтобы сравнить наш метод с какими-нибудь другими известными методами, аналогичные вычисления проведем с помощью методов Рунге-Кутты 4-го и 8-го порядков. Метод Рунге-Кутты, в отличие от метода черновских аппроксимаций, требует задания начальных условий. Мы проводим сравнение именно с методом Рунге-Кутты, так как нам неизвестны другие приближенные методы решения уравнений, не требующие начальных условий, кроме исследуемого нами метода черновских аппроксимаций. Все вычисления будем проводить в среде MATLAB. Выбранные нами методы Рунге-Кутты так же удобны тем, что реализованы в MATLAB.

### 4.1 Описание численного эксперимента

Мы проводили численные эксперименты по поиску черновских аппроксимаций к решениям уравнения  $a(x)f''(x) + b(x)f'(x) + (c(x) - \lambda)f(x) = -g(x)$  по следующей схеме:

1. Задаем коэффициентные функции  $a(x)$ ,  $b(x)$ ,  $c(x)$  из класса  $UC_b(\mathbb{R})$  и константу  $\lambda$  такую, что  $\lambda > \sup_{x \in \mathbb{R}} |c(x)|$ .
2. Задаем точное решение  $f(x)$  нашего уравнения.
3. Вычисляем правую часть уравнения по формуле

$$g(x) = -a(x)f''(x) - b(x)f'(x) - (c(x) - \lambda)f(x)$$

4. Задаем количество аппроксимаций  $n$ .
5. Вычисляем начальные условия  $f(0)$  и  $f'(0)$ .
6. Находим приближенное решение  $R_{45}(x)$  и  $R_{89}(x)$  методами Рунге-Кутты 4-го и 8-го порядка соответственно.
7. Вычисляем графики погрешностей приближенных решений по методами Рунге-Кутты по формулам

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - R_{45}(x)| \quad \text{и} \quad \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - R_{89}(x)|.$$

8. Реализуем функции Чернова  $S_6(t)$  и  $S_8(t)$ .
9. Вычисляем черновские аппроксимации  $F_{1,n}(x)$  и  $F_{2,n}(x)$  решения  $f(x)$ , соответствующие функциям Чернова  $S_6(t)$  и  $S_8(t)$ , по формулам

$$F_{1,n}(x) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} (S_6(t/n)^n g)(x) dt \quad \text{и} \quad F_{2,n}(x) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} (S_8(t/n)^n g)(x) dt.$$

10. Вычисляем погрешность черновских аппроксимаций  $F_{1,n}(x)$  и  $F_{2,n}(x)$  по формулам

$$D_{1,n} = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - F_{1,n}(x)| \quad \text{и} \quad D_{2,n} = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - F_{2,n}(x)|.$$

11. Находим приближенный закон убывания погрешностей  $D_{1,n}$  и  $D_{2,n}$  для черновских функций  $S_6(t)$  и  $S_8(t)$  соответственно.
12. Замеряем время потраченное для вычисления каждого метода.
13. Находим приближенный закон роста затрачиваемого времени  $T_{1,n}$  и  $T_{2,n}$  для черновских функций  $S_6(t)$  и  $S_8(t)$  соответственно.
14. Строим график точного решения и приближенных решений для каждого метода.
15. Для каждого метода строим графики зависимости от  $n$  погрешности и времени работы программы.

В следующих пяти результатах мы приводим результаты численных экспериментов проведенных по описанной выше схеме.

**Описание цветового обозначения на рисунках** Для каждого выбора коэффициентных функций  $a(x)$ ,  $b(x)$ ,  $c(x)$ , константы  $\lambda$  и точного решения  $f(x)$  мы приводим три рисунка: приближенного решения, зависимости погрешности от числа итераций и зависимость времени от числа итераций.

- 1. На рисунках приближенного решения** изображены следующие графики: график точного решения  $y = f(x)$  (черным пунктиром); график  $y = F_{1,n}(x)$  черновской аппроксимации к решению, полученному с помощью функции Чернова  $S_8$  (сплошная зеленая линия); график  $y = F_{2,n}(x)$  черновской аппроксимации к решению, полученному с помощью функции Чернова  $S_6$  (сплошная синяя линия); график  $y = R_{45}(x)$  приближенного решения, полученного методом Рунге-Кутты 4-го порядка (сплошная розовая линия); график  $y = R_{89}(x)$  приближенного решения, полученного методом Рунге-Кутты 8-го порядка (сплошная красная линия).
- 2. На рисунках с зависимостью погрешности от числа итераций** изображены следующие графики: график  $y = R_{45}(x)$  погрешности приближенного решения, полученного методом Рунге-Кутты 4-го порядка (сплошная розовая линия), пунктиром изображены погрешность для половины исследуемого отрезка; график  $y = R_{89}(x)$  погрешности приближенного решения, полученного методом Рунге-Кутты 8-го порядка (сплошная красная линия), пунктиром изображены погрешность для половины исследуемого отрезка; график  $y = F_{1,n}(x)$  погрешности черновской аппроксимации к решению, полученному с помощью функции Чернова  $S_8$  (сплошная зеленая линия); график  $y = F_{2,n}(x)$  погрешности черновской аппроксимации к решению, полученному с помощью функции Чернова  $S_6$  (сплошная синяя линия).
- 3. На рисунках с зависимостью времени от числа итераций приближенного решения** изображены следующие графики: график  $y = R_{45}(x)$  затраченного времени на нахождение приближенного решения, полученного методом Рунге-Кутты 4-го порядка (сплошная розовая линия); график  $y = R_{89}(x)$  затраченного времени на нахождения приближенного решения, полученного методом Рунге-Кутты 8-го порядка (сплошная красная линия); график  $y = F_{1,n}(x)$  затраченного времени на нахождение черновской аппроксимации к решению, полученному с помощью функции Чернова  $S_8$  (сплошная зеленая линия), пунктиром изображено время необходимое для вычисления в 1 точке;

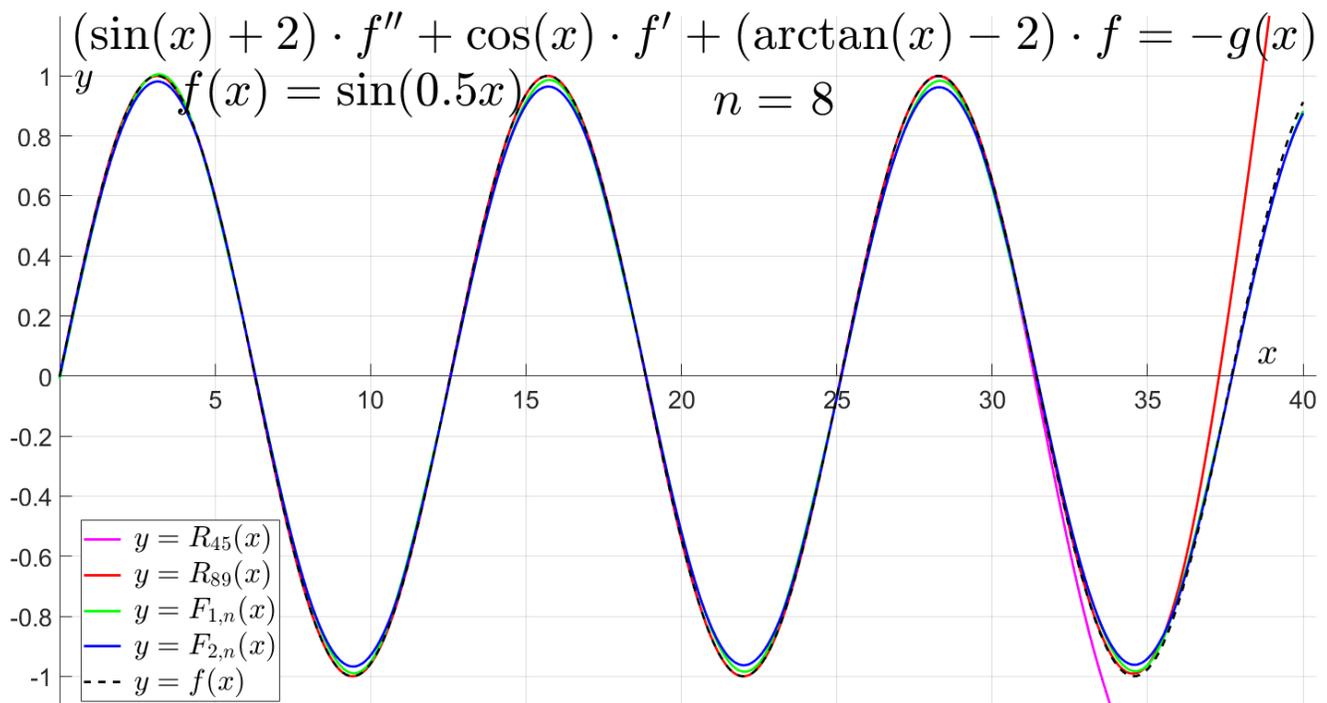


Рис. 1: Приближенное решение (Все коэффициенты непрерывно дифференцируемы)

график  $y = F_{2,n}(x)$  затраченного времени на нахождение черновской аппроксимации к решению, полученному с помощью функции Чернова  $S_6$  (сплошная синяя линия), пунктиром изображено время необходимое для вычисления в 1 точке.

#### 4.2 Результаты в случае, когда все коэффициенты непрерывно дифференцируемы

Пусть  $a(x) = \sin x + 2$ ,  $b(x) = \cos x$ ,  $c(x) = \operatorname{arctg} x$ ,  $\lambda = 2$  и точное решение задается равенством  $f(x) = \sin(0,5x)$ .

Графики точного и приближенного решений приведены на рисунке 1 на странице 18.

На рисунке 2 на странице 19 приведена зависимость погрешности приближенного решения от числа итераций.

На рисунке 3 на странице 19 приведена зависимость времени вычисления от числа итераций.

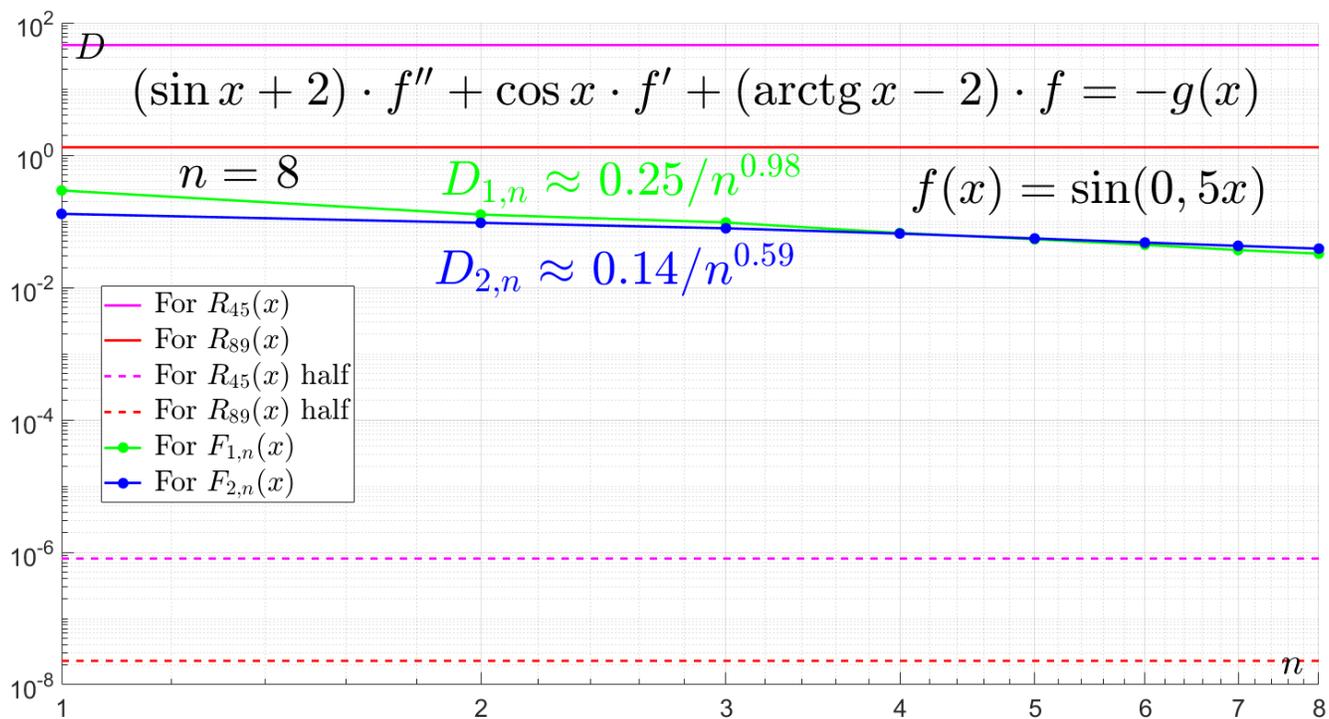


Рис. 2: Зависимость погрешности приближенного решения от числа итераций (Все коэффициенты непрерывно дифференцируемы)

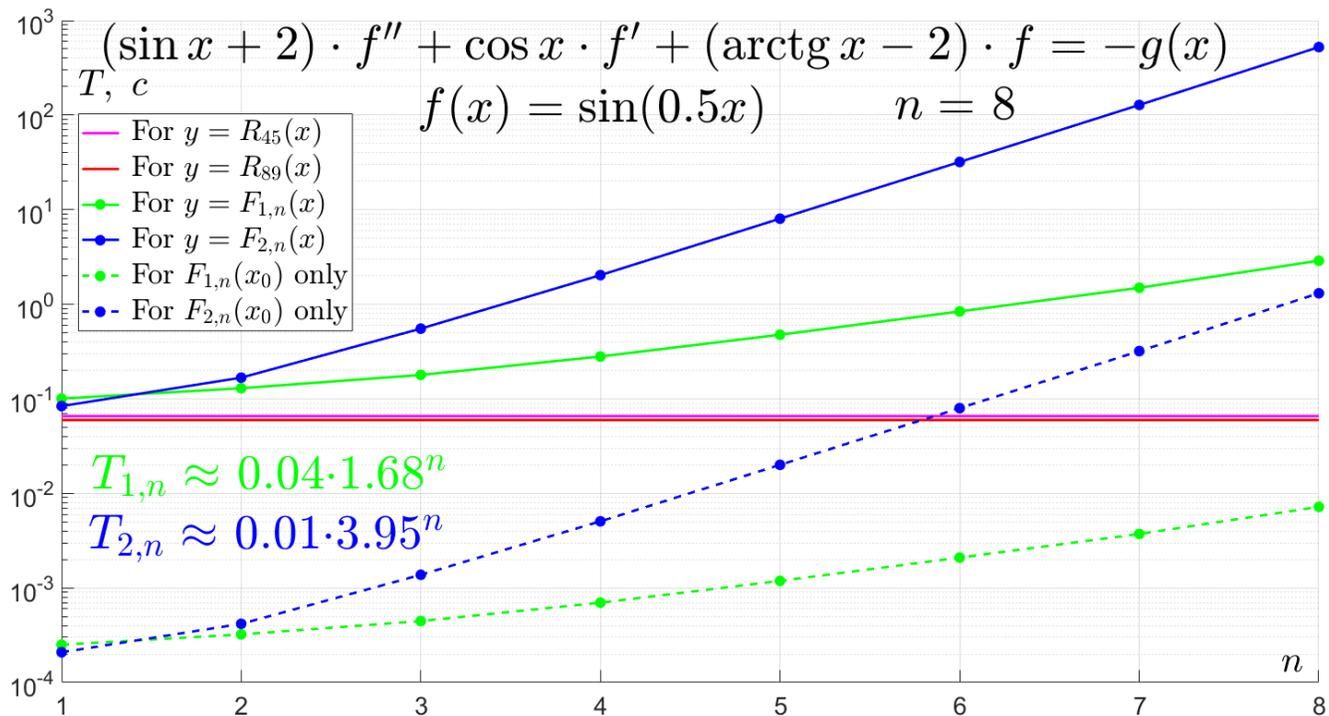


Рис. 3: Зависимость времени вычисления от числа итераций (Все коэффициенты непрерывно дифференцируемы)

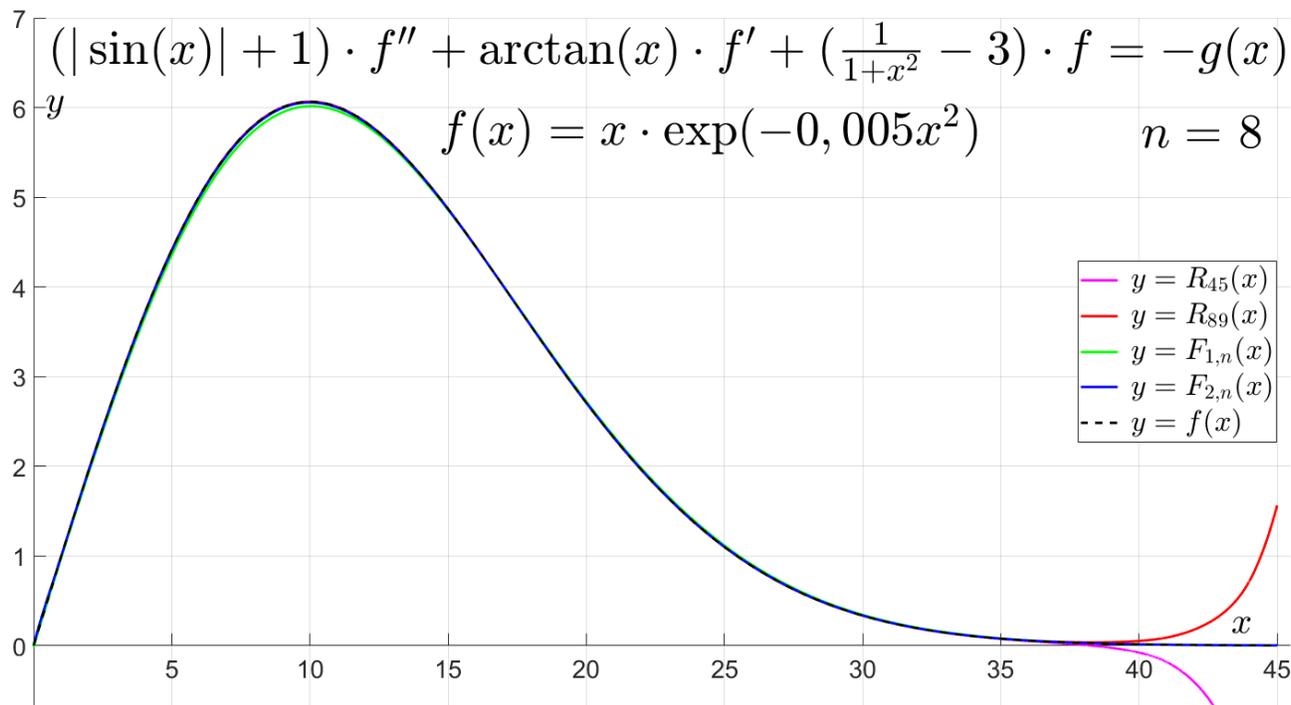


Рис. 4: Приближенное решение (Коэффициент  $a(x)$  не является дифференцируемым)

#### 4.3 Результаты в случае, когда коэффициент $a(x)$ не является дифференцируемым.

Вторые начальные условия. Рассмотрим вариант когда  $a(x) = |\sin(x)| + 1$ ,  $b(x) = \arctan(x)$ ,  $c(x) = 1/(1 + x^2)$ ,  $\lambda = 3$  и точным решением  $f(x) = x \cdot \exp(-0,005x^2)$ .

На рисунке 4 на странице 20 приведено приближенное решение.

На рисунке 5 на странице 21 приведена зависимость погрешности приближенного решения от числа итераций.

На рисунке 6 на странице 21 приведена зависимость времени вычисления от числа итераций.

#### 4.4 Результаты в случае, когда коэффициент $b(x)$ не является дифференцируемым.

Третьи начальные условия. Рассмотрим вариант когда  $a(x) = \arctan(x) + 2$ ,  $b(x) = |\sin(x)|$ ,  $c(x) = \exp(-0,002x^2)$ ,  $\lambda = 2$  и точным решением  $f(x) = (\cos(0,25x))/(1 + 0,002x^2)$ .

На рисунке 7 на странице 22 приведено приближенное решение.

На рисунке 8 на странице 23 приведена зависимость погрешности приближенного решения от числа итераций.

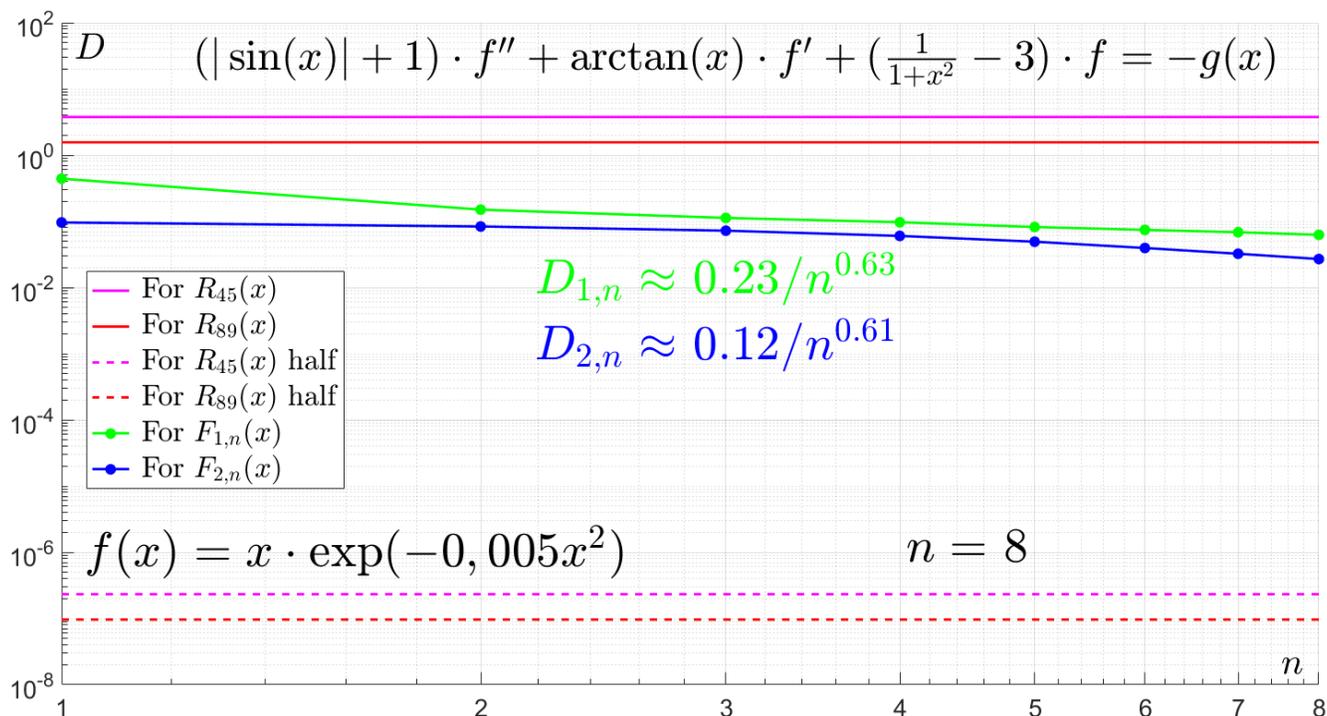


Рис. 5: Зависимость погрешности приближенного решения от числа итераций (Коэффициент  $a(x)$  не является дифференцируемы)

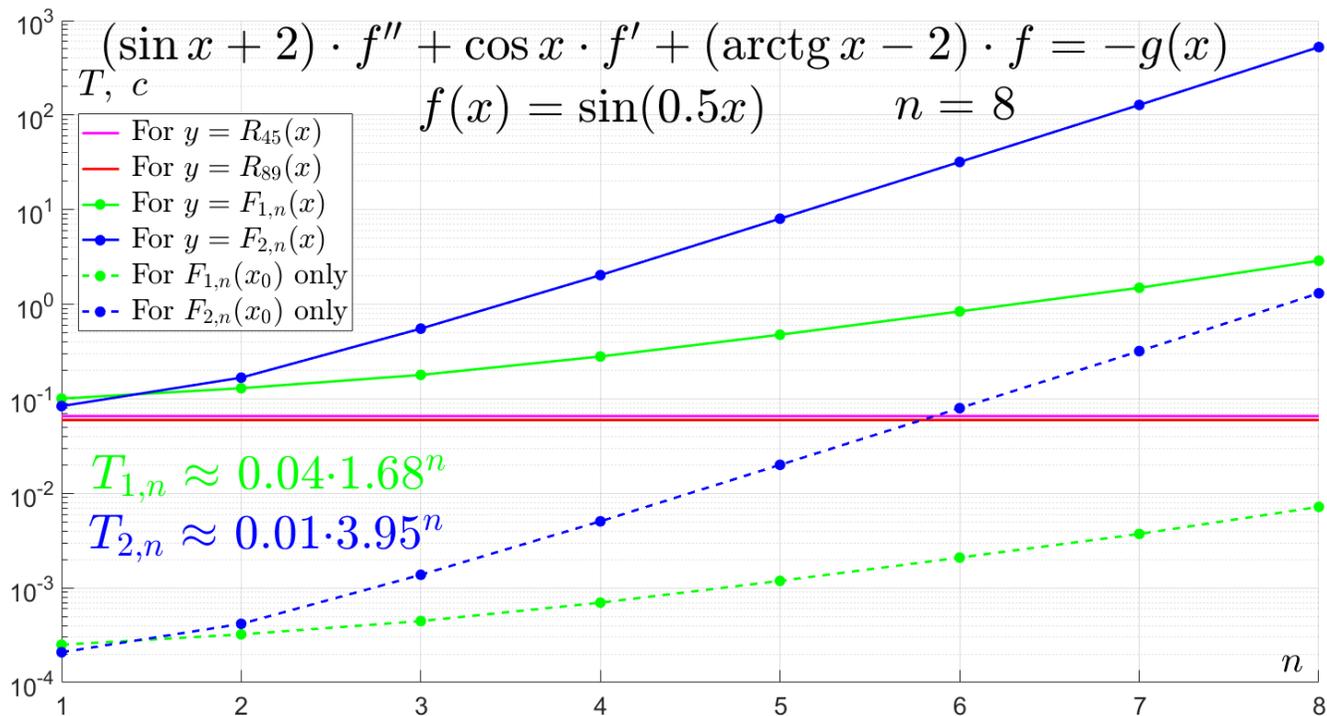


Рис. 6: Зависимость времени вычисления от числа итераций (Коэффициент  $a(x)$  не является дифференцируемы)

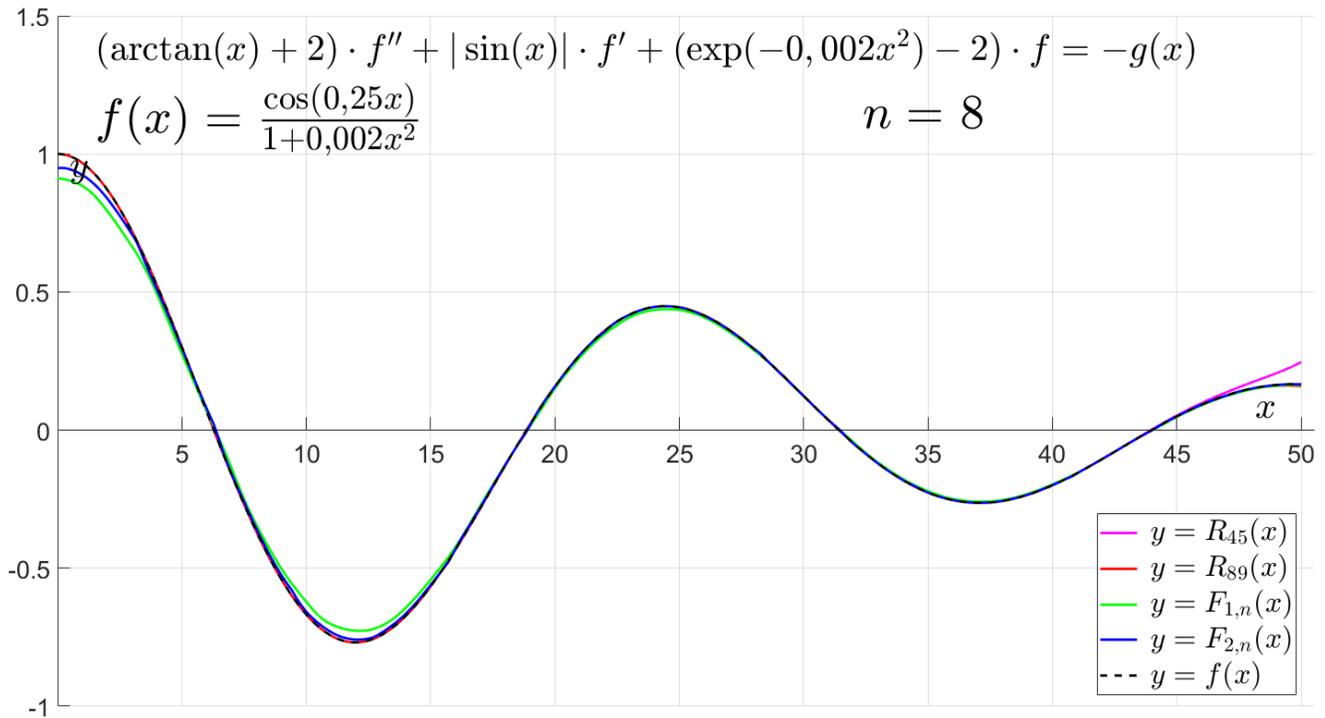


Рис. 7: Приближенное решение (Коэффициент  $b(x)$  не является дифференцируемым)

На рисунке 9 на странице 23 приведена зависимость времени вычисления от числа итераций.

#### 4.5 Результаты в случае, когда коэффициент $c(x)$ не является дифференцируемым.

Четвертые начальные условия. Рассмотрим вариант когда  $a(x) = \cos(x) + 1,5$ ,  $b(x) = (1)/(1 + 0,001x^2)$ ,  $c(x) = |\cos(x)|$ ,  $\lambda = 2$  и точным решением  $f(x) = \sin\left(\frac{1}{3}x\right) \cdot \sin\left(\frac{1}{7}x\right)$ .

На рисунке 10 на странице 24 приведено приближенное решение.

На рисунке 11 на странице 24 приведена зависимость погрешности приближенного решения от числа итераций.

На рисунке 12 на странице 25 приведена зависимость времени вычисления от числа итераций.

#### 4.6 Результаты в случае, когда все коэффициенты не являются дифференцируемыми.

Пятое начальные условия. Рассмотрим вариант когда  $a(x) = |\cos(x)| + 0,5$ ,  $b(x) = |\cos(x)|$ ,  $c(x) = |\sin(x)|$ ,  $\lambda = 2$  и точным решением  $f(x) = \sin\left(\frac{1}{5}x\right) + 0,5 \sin\left(\frac{1}{2}x\right)$ .

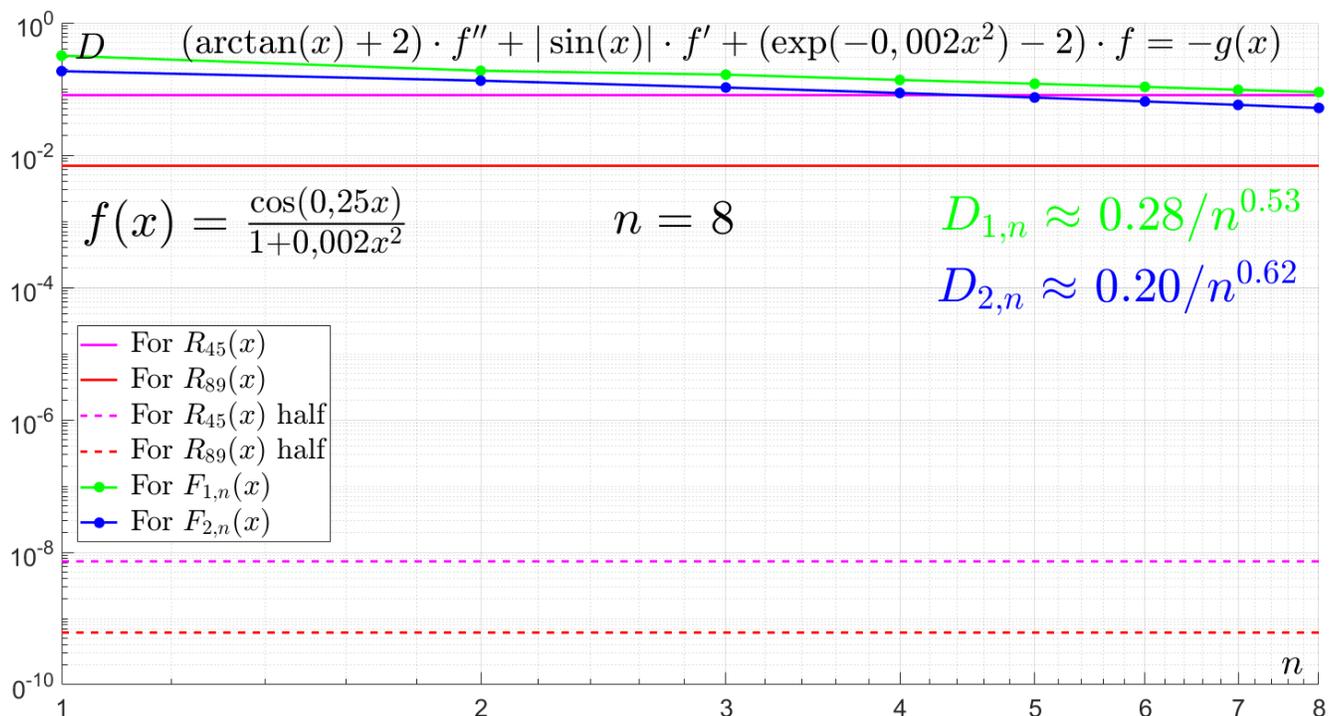


Рис. 8: Зависимость погрешности приближенного решения от числа итераций (Коэффициент  $b(x)$  не является дифференцируемым)

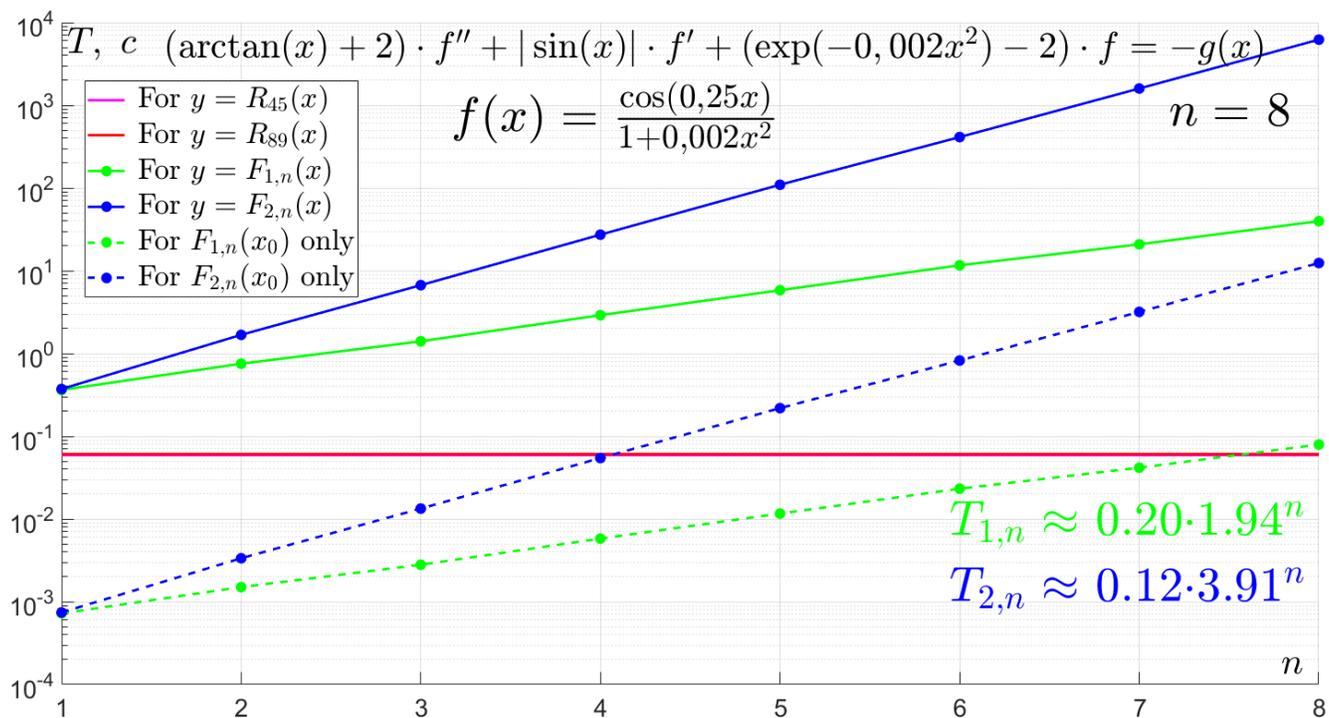


Рис. 9: Зависимость времени вычисления от числа итераций (Коэффициент  $b(x)$  не является дифференцируемым)

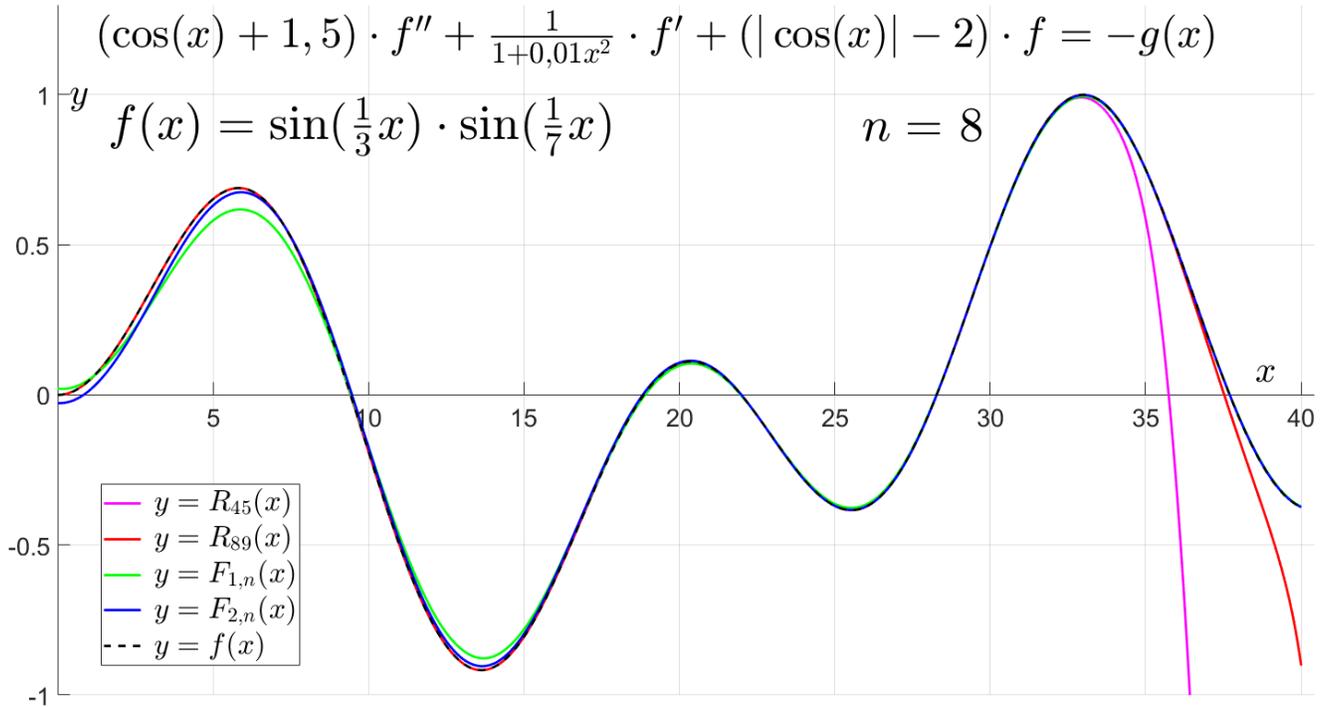


Рис. 10: Приближенное решение (Коэффициент  $c(x)$  не является дифференцируемым)

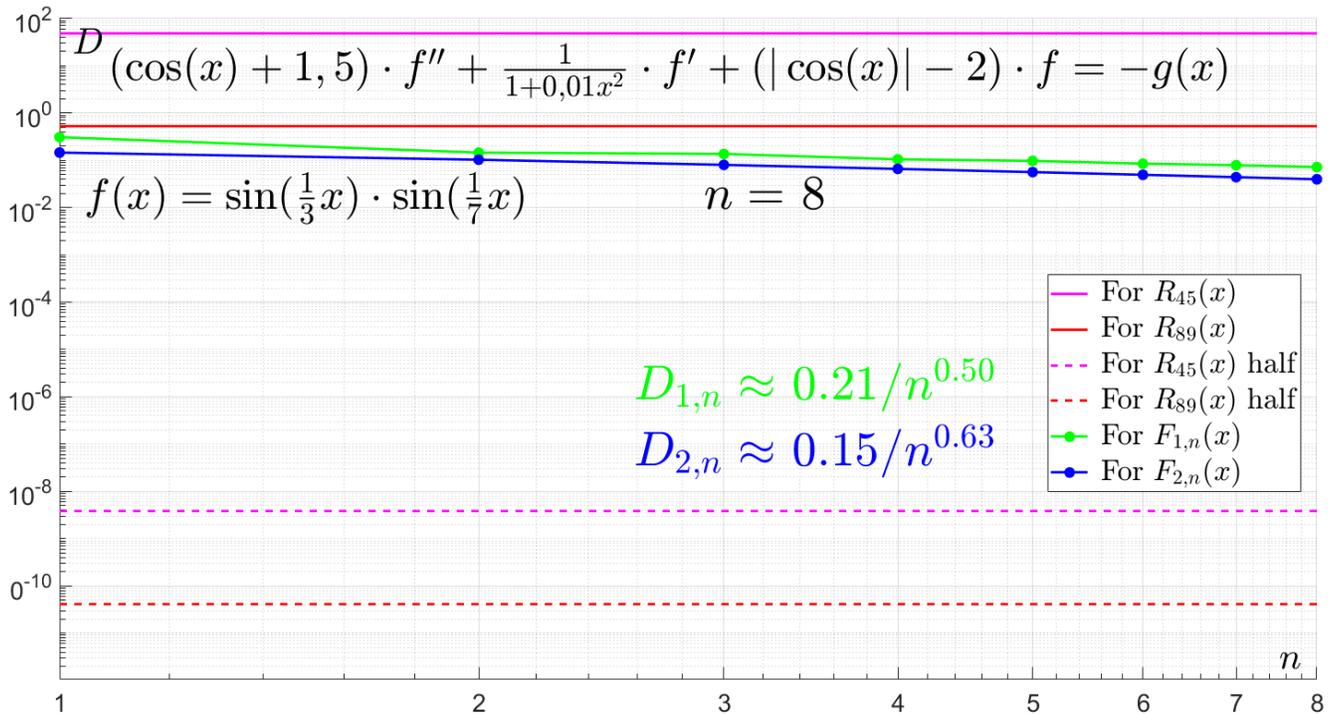


Рис. 11: Зависимость погрешности приближенного решения от числа итераций (Коэффициент  $c(x)$  не является дифференцируемым)

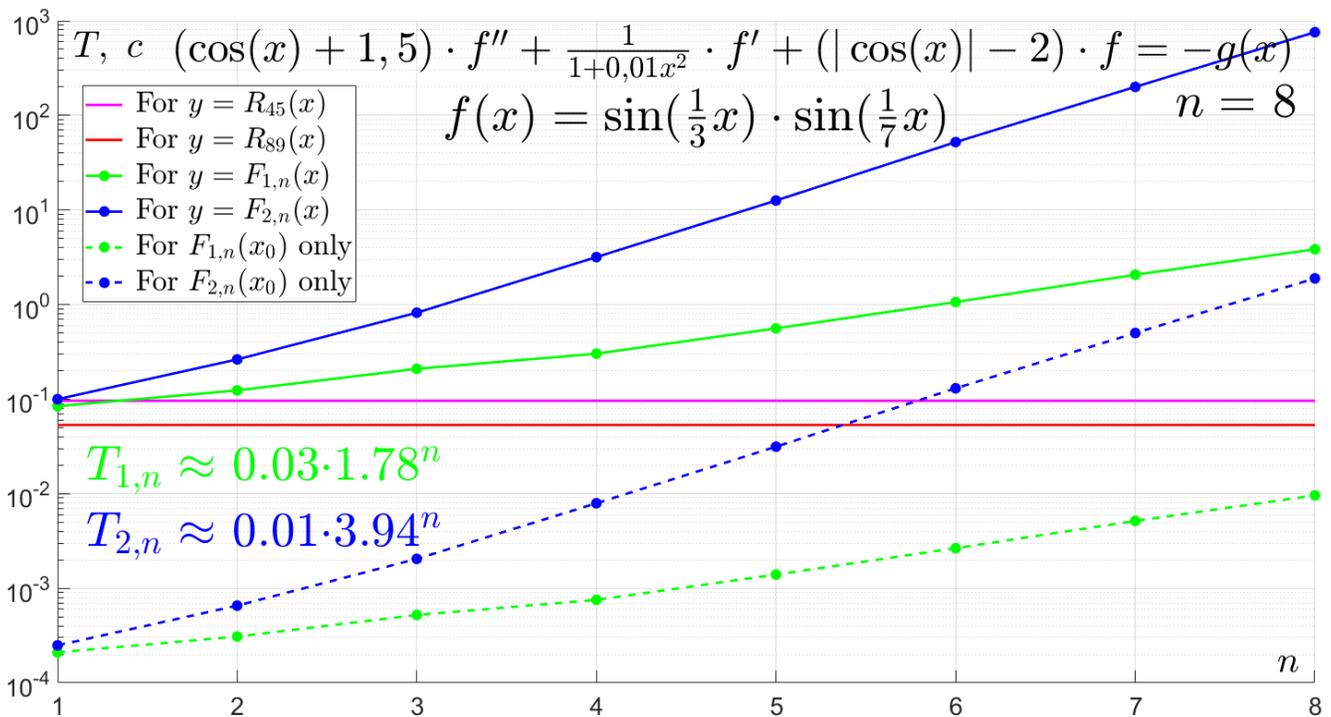


Рис. 12: Зависимость времени вычисления от числа итераций (Коэффициент  $c(x)$  не является дифференцируемым)

На рисунке 13 на странице 26 приведено приближенное решение.

На рисунке 14 на странице 26 приведена зависимость погрешности приближенного решения от числа итераций.

На рисунке 15 на странице 27 приведена зависимость времени вычисления от числа итераций.

#### 4.7 Анализ полученных результатов

На основе полученных результатов можно построить две таблицы: таблица полученных погрешностей и таблица затраченного времени.

**Таблица показателей погрешностей  $C/n^p$  методов, основанных на функции Чернова  $S_6$  и  $S_8$ , в зависимости от гладкости коэффициентов  $a(x), b(x), c(x)$ .**

	Все коэф. гладкие	$a(x)$ не гладкое	$b(x)$ не гладкое	$c(x)$ не гладкое	Все коэф. не гладкие
$p$ для $S_6$	0.98	0.63	0.53	0.50	0.80
$p$ для $S_8$	0.59	0.61	0.62	0.63	0.99

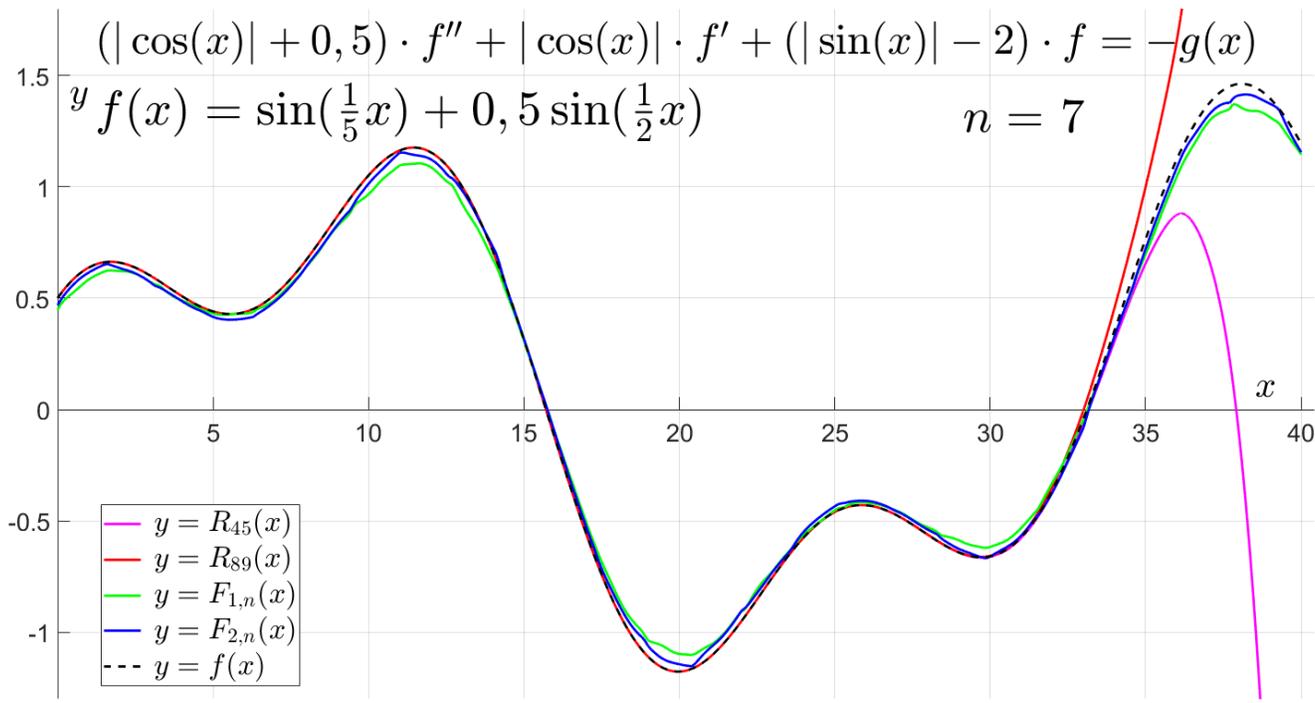


Рис. 13: Приближенное решение (Все коэффициенты не являются дифференцируемыми)

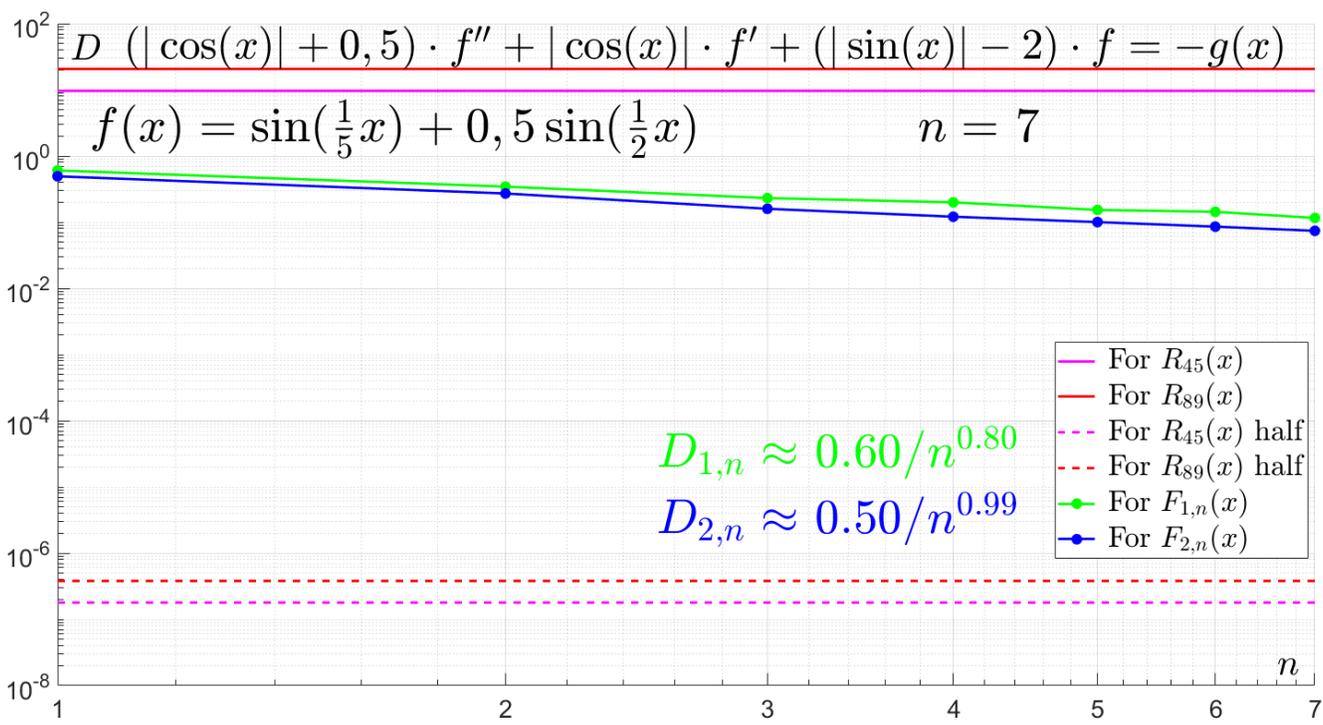


Рис. 14: Зависимость погрешности приближенного решения от числа итераций (Все коэффициенты не являются дифференцируемыми)

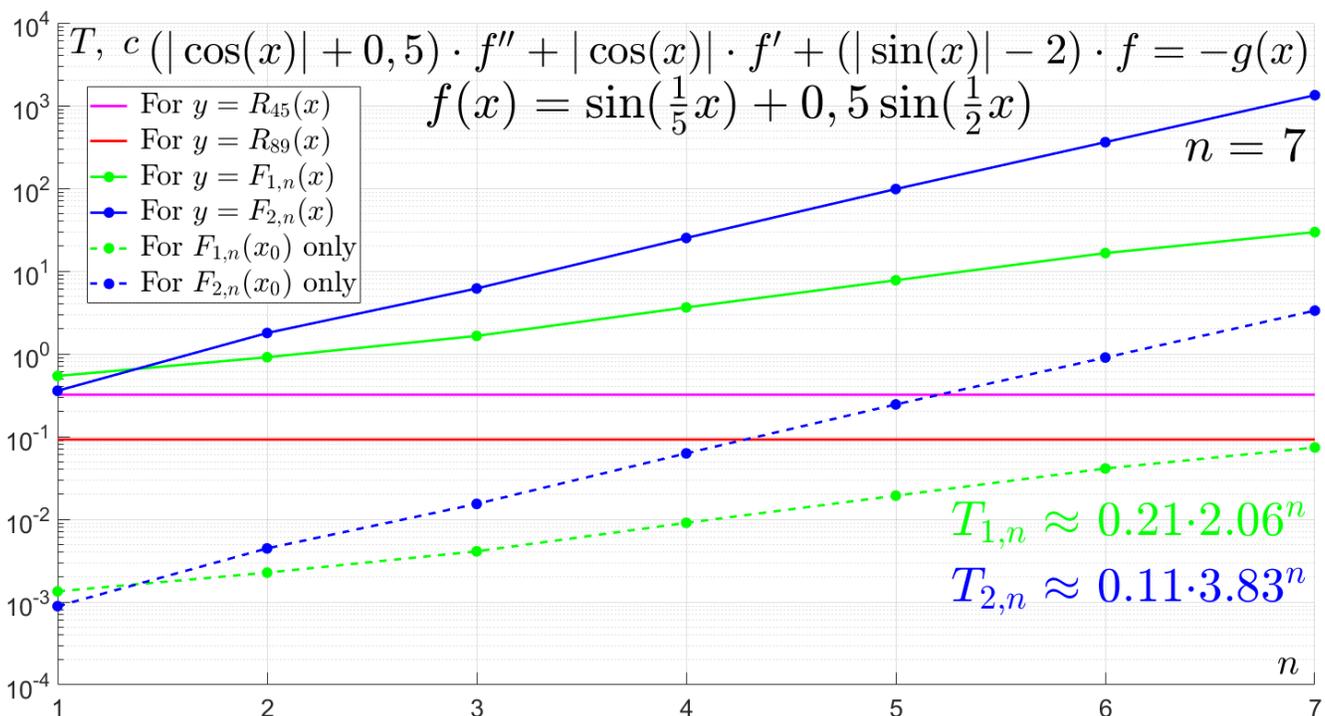


Рис. 15: Зависимость времени вычисления от числа итераций (Все коэффициенты не являются дифференцируемыми)

*Заключение:*

- Методы приближения, основанные на функциях Чернова  $S_6$  и  $S_8$ , при небольших  $n$  ведут себя примерно одинаково, но результаты оказались хуже проведённых теоретических оценок погрешности.
- Скорость убывания погрешности зависит не только от гладкости коэффициентов, но и от их конкретного вида.

**Таблица оснований для времени, затраченного на вычисления  $k \cdot h^n$ , для методов основанных на функции Чернова  $S_6$  и  $S_8$ , в зависимости от гладкости коэффициентов  $a(x), b(x), c(x)$ .**

	Все коэф. гладкие	$a(x)$ не гладкое	$b(x)$ не гладкое	$c(x)$ не гладкое	Все коэф. не гладкие
$h$ для $S_6$	1.68	1.65	1.94	1.78	2.06
$h$ для $S_8$	3.95	3.44	3.91	3.94	3.83

*Заключение:*

- При небольших  $n$  время вычисления растет как показательная функция от  $n$ .
- Для приближений, основанных на функции Чернова  $S_6$ , меньше, чем для  $S_8$ , примерно в  $2^n$  раз.
- Время вычислений зависит не только от гладкости коэффициентов, но и от их конкретного вида.

## 5 Выводы

В результате данной работы были получены как теоретические так и численные оценки черновских аппроксимаций. Изучаемый метод показал свои положительные качества по сравнению с уже известными методами, такие как необязательность начальных условий и работе на отрезке любой длины. Полученные результаты можно будет применить для решения линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка в случае, когда требуется решение на длинном отрезке и не требуется большая точность.

В будущем можно продолжить изучение данной темы изучая функции Чернова второго порядка в данном методе. Другим направлением для изучения являются другие функции Чернова, для которых еще не была доказана теоретическая оценка, которую после можно будет сравнить с численными результатами.

## Список литературы

- [1] Butko Y. A. (2020). *The method of Chernoff approximation*. // Springer Proceedings in Mathematics and Statistics. V. 325, p. 19–46.  
<https://doi.org/10.1007/978-3-030-46079-2>
- [2] Butko Y. A., Grothaus M., Smolyanov O. G. (2010). *Lagrangian Feynman formulas for second-order parabolic equations in bounded and unbounded domains*. // Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics. V. 13, no. 3, p. 377–392.  
<https://doi.org/10.1142/s0219025710004097>
- [3] Chernoff P. R. (1968). *Note on product formulas for operator semigroups*. // Journal of Functional Analysis, V. 2, no. 2, p. 238–242.  
[https://doi.org/10.1016/0022-1236\(68\)90020-7](https://doi.org/10.1016/0022-1236(68)90020-7)
- [4] Chernoff P. R. (1974). *Product formulas, nonlinear semigroups, and addition of unbounded operators*. // Memoirs of the American Mathematical Society, V. 1, p. 121.  
<https://doi.org/10.1090/memo/0140>
- [5] Engel K.-J., Nagel R., Brendle S. (2000). *One-parameter semigroups for linear evolution equations*. New York: Springer. 587 p.
- [6] Feynman R. P. (1951). *An operator calculus having applications in quantum electrodynamics*. // Physical Review, Rev. 84, p. 108-128.  
<https://doi.org/10.1103/physrev.84.108>
- [7] Galkin O.E., Remizov I.D. (2021) *Upper and lower estimates for rate of convergence in the Chernoff product formula for semigroups of operators*  
<https://doi.org/10.48550/arXiv.2104.01249>
- [8] Nasrin Nikbakht (2023) Numerical study of chernoff approximations for parabolic heat-type equation with variable coefficients.  
<https://www.hse.ru/en/edu/vkr/836769576>
- [9] Polyanin A. D. (2016). *Handbook of Linear Partial Differential Equations for engineers and scientists*. Chapman and Hall.

- [10] Remizov I. D. (2018). *Explicit formula for evolution semigroup for diffusion in Hilbert Space.* // Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics, V. 21, n. 04.  
<https://doi.org/10.1142/s021902571850025x>
- [11] Remizov I. D. (2023). *Chernoff approximations as a way of finding the resolvent operator with applications to finding the solution of linear ODE with variable coefficients*  
<https://doi.org/10.48550/arXiv.2301.06765>
- [12] Smolyanov O. G., Tokarev A. G., Truman A. (2002). *Hamiltonian feynman path integrals via the Chernoff formula.* // Journal of Mathematical Physics, V. 43, p. 5161–5171.  
<https://doi.org/10.1063/1.1500422>
- [13] Vedenin A. V., Voevodkina V. S., Galkin V. D., Karatetskaya E. Yu., Remizov I. D. (2020). *Speed of convergence of Chernoff approximations to solutions of evolution equations.* // Mathematical Notes, V. 108, p. 451–456.  
<https://doi.org/10.1134/s0001434620090151>

В Оргкомитет Смотра дипломных работ математиков России  
от Пушкина Никиты Алексеевича

Заявление о новизне

Сообщаю, что новыми в моей представленной на Смотр выпускной квалификационной работе (далее - работа) под названием "Разработка REST API service для мессенджера с механизмом рекомендации в друзья на основе метода среднеквадратичного отклонения" являются: Внедрение МСКО в рекомендательные системы мессенджера

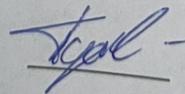
Также сообщаю, что для проверки новизны мною было проделано следующее:

- Выступление на научной студенческой конференции факультета ПММ в ВГУ.
- Поиск в интернете и анализ существующих методов, которые потенциально могут подойти для моей работы, выявление плюсов и минусов каждого метода, и выбор самого рационального и эффективного.

Подтверждаю, что являюсь автором предоставляемой на Смотр работы и прошу принять её для участия в Смотре. Принимаю на себя обязательство соблюдать правила Смотра. Также (в соответствии с п. 4 Положения о Смотре) принимаю на себя обязательство оценить 5 работ участников Смотра, выданных мне Оргкомитетом в результате жеребьёвки и сверх того оценить 2-5 работ других участников Смотра на мой выбор. Я понимаю правила оценки работ, приведённые в п. 4.3 Положения о Смотре. Даю согласие на публикацию адреса моей электронной почты.

Защита работы состоится/состоялась 01.07.24. На Смотр представлен проект текста/окончательный текст работы.

Подпись



Пушкин Никита Алексеевич

15.06.2024, Воронеж, Россия

МИНОБРНАУКИ РОССИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
(ФГБОУ ВО «ВГУ»)

Разработка RESTful API service для мессенджера с механизмом  
рекомендации в друзья на основе метода среднеквадратичного отклонения

Факультет прикладной математики, информатики и механики  
Кафедра Системного анализа и управления

## Бакалаврская работа

Направление 01.03.02 Прикладная математика и информатика программа  
Профиль подготовки «Динамические системы и управление»

Зав. кафедрой д.ф.-м.н., проф. Курбатов В.Г. \_\_\_\_\_ \_\_.\_\_.2024

Обучающийся Пушкин Никита Алексеевич \_\_\_\_\_ \_\_.\_\_.2024

Научный руководитель к.ф.-м.н., доц Белоусова Е. П. \_\_\_\_\_ \_\_.\_\_.2024

Воронеж 2024

## Оглавление

1. Введение.....	3
2. Теоретические сведения.....	4
3. Сравнительный анализ различных методов.....	15
4. Сравнительный анализ приложения с другими популярными мессенджерами.....	...19
3. Развитие и масштабирование сервиса.....	25
4. Практическая часть.....	27
5. Дальнейшая разработка.....	40
5. Заключение.....	42
6. Код приложения.....	45
7. Обзор литературы.....	48

## Введение

В предлагаемом научном исследовании предлагается создать RESTful API сервис, который представляет мессенджер для обмена сообщениями между пользователями зарегистрированными в нём. Сервис позволит пользователям создавать аккаунты, отправлять сообщения и управлять списком друзей, а также есть возможность удалить свой аккаунт(функция переводит аккаунт в состояние не активен, и после истечения 1 мин аккаунт удалится). Его уникальная функциональность будет в осуществлении рекомендаций в друзья на основе среднеквадратического отклонения по нескольким критериям, например, страна проживания, город, возраст, хобби и др.

В процессе создания мессенджера будут уделены внимание ключевым аспектам, включая разработку структуры, добавление функционала, тестирование и обеспечение безопасности. Одной из уникальных особенностей сервиса будет применение метода среднеквадратического отклонения по различным критериям для предложения пользователю возможных кандидатов в друзья. Это позволит учитывать несколько факторов при формировании рекомендаций, что способствует повышению точности и соответствия предложенных контактов интересам пользователя.

Основная цель разработки заключается в создании функционального и безопасного API-сервиса для обмена сообщениями, который предлагает уникальную возможность рекомендаций друзей на основе анализа нескольких критериев с использованием метода среднеквадратического отклонения. Этот подход способен значительно улучшить пользовательский опыт, предоставляя более релевантные и интересные контакты для общения.



## Теоретические сведения

### *Spring Framework*

Spring Framework предоставляет полноценную модель разработки и настройки для современных бизнес-приложений на Java на различных платформах. Основной фокус Spring - обеспечение инфраструктуры на уровне приложения: внимание сосредоточено на "трубопроводе" бизнес-приложений, что позволяет разработчикам сосредоточиться на бизнес-логике, минимизируя настройки под конкретную среду выполнения.

Фреймворк состоит из более маленьких фреймворков, которые в себе тоже содержат много полезных подпроектов.

Структура:

#### Spring Core

- Spring DAO
- Spring Security
- Spring Web
- Spring MVC
- Spring Cloud
- Spring Data

Все эти компоненты и образуют полноценный фреймворк с открытым исходным кодом для языка программирования Java. Создание и развертывание приложений на Spring становится проще благодаря этому инструменту; он быстро и удобно управляет зависимостями, загружает необходимые модули и поддерживает встроенный сервер для запуска

приложений; кроме того, он способен автоматически создавать и настраивать базу данных для приложения.

### *Клиент-серверная архитектура*

Архитектура клиент-сервер представляет собой организацию сети, в которой взаимодействуют два различных вида программ: клиентские и серверные. В данной модели клиенты посылают запросы серверам, которые обрабатывают эти запросы и отвечают на них.



Рис. 0 Иллюстрация клиент-сервер

Основные компоненты клиент-серверной архитектуры включают:

- Клиенты: Программы, которые инициируют запросы к серверам и отображают результаты для пользователей.
- Серверы: Программы, которые принимают запросы от клиентов, обрабатывают их и возвращают соответствующие ответы.
- Сеть: Канал связи, по которому передаются запросы и ответы между клиентами и серверами.

### *Преимущества клиент-серверной архитектуры*

Использование клиент-серверной архитектуры обеспечивает следующие преимущества:

- Масштабируемость: Клиент-серверная архитектура легко масштабируется путем добавления дополнительных клиентов или серверов для обработки увеличения нагрузки.

- Надежность: Серверы можно дублировать для обеспечения высокой доступности и отказоустойчивости.

- Безопасность: Серверы можно разместить в защищенных сетях, чтобы защитить данные и приложения от несанкционированного доступа.

- Удобство обслуживания: Клиенты и серверы можно разрабатывать и обслуживать независимо друг от друга.

- Распределение нагрузки: Запросы можно распределять между несколькими серверами для повышения производительности и устранения узких мест.

Архитектура клиент-сервер представляет собой гибкую и расширяемую сетевую схему, которая находит свое применение в различных областях прикладной программной разработки. Ее основные достоинства – это возможность масштабирования, надежность, высокий уровень защищенности, простота в управлении и эффективное распределение объема работы, делают клиент-серверную архитектуру идеальным решением для создания передовых сетевых систем.

### *PostgreSQL*

При разработке RESTful API для мессенджера было решено использовать PostgreSQL в качестве основной базы данных. Эта система обладает широким набором функций для управления информацией, обеспечивает надежность и эффективность при работе с большими объемами данных. Использование утилиты командной строки PostgreSQL (psql) значительно упростило процесс мониторинга и управления данными,

что позволяет безопасно выполнять различные операции, такие как создание таблиц, вставка данных и выполнение запросов.

### *Java*

Для создания функциональности мессенджера мы использовали подход на основе Java. Разработка вспомогательных классов, таких как репозитории, сервисы и контроллеры, позволила эффективно взаимодействовать с базой данных, обрабатывать бизнес-логику и предоставлять стабильное API для клиентов. Репозитории занимаются операциями с базой данных, сервисы содержат основную бизнес-логику, а контроллеры обрабатывают HTTP-запросы для взаимодействия с клиентами.

Особое внимание уделялось аспектам безопасности. Мы применили современные методы защиты: хэширование паролей пользователей для обеспечения их конфиденциальности, использование токенов для аутентификации и авторизации пользователей, а также тщательную проверку входных данных на наличие уязвимостей типа SQL-инъекций.

Этот подход к разработке гарантирует высокую модульность и структурированность приложения. Взаимодействие между репозиториями, сервисами и контроллерами обеспечивает полноценное функционирование сервиса и эффективную обработку запросов от пользователей.

Дополнительно, уникальная функциональность рекомендаций в друзья по среднеквадратичному отклонению по нескольким критериям значительно обогатила пользовательский опыт, делая процесс добавления друзей более интуитивным и персонализированным.

Такой комплексный подход, используя PostgreSQL, psql, Java-классы и принципы безопасности, сделал созданный RESTful API сервис для

мессенджера надежным, безопасным и функциональным, предоставляя пользователям возможность обмениваться сообщениями и взаимодействовать друг с другом в безопасной и защищенной среде.

### *Использование Postman*

Postman - это известная платформа для проверки API, которая помогает разработчикам отправлять HTTP-запросы, анализировать ответы и управлять коллекциями и окружениями. Postman предлагает простой в использовании пользовательский интерфейс и широкий набор функций для проверки, документирования и совместной работы над API.

*Основные операции, выполняемые в Postman, включают:*

- **Создание запросов:** Создание и отправка HTTP-запросов к конечным точкам API.
- **Проверка ответов:** Проверка ответов API на соответствие ожидаемым результатам.
- **Создание коллекций:** Группировка связанных запросов API в коллекции для управления и повторного использования.
- **Управление средами:** Создание и управление различными средами для имитации разных условий тестирования.
- **Документирование API:** Автоматическая генерация документации API на основе запросов и ответов.

### *Вывод*

Postman - это эффективный инструмент для тестирования API с удобным пользовательским интерфейсом, обширным функционалом и возможностью расширения. Благодаря возможностям тестирования API, документирования, управления коллекциями и окружениями, а также совместной работы Postman становится неотъемлемым помощником в разработке и тестировании современных API.

#### *Использование JWT для Аутентификации:*

Использование JWT (JSON Web Token) - это важная составляющая в обеспечении безопасности и аутентификации в приложении. Включение этого в отчет поможет подчеркнуть подходы к обеспечению безопасности в разрабатываемом мессенджере.

JSON Web Token (JWT) представляет собой стандартный метод аутентификации, основанный на JSON-структуре для передачи информации между двумя сторонами. Он обеспечивает безопасный способ аутентификации пользователей при запросах к серверу и передаче информации между клиентом и сервером.

#### *Роль JWT в Мессенджере:*

JWT используется в мессенджере для создания токенов аутентификации после успешной проверки учетных данных пользователя. Эти токены передаются в каждом запросе от клиента к серверу и позволяют серверу удостовериться в подлинности пользователя без необходимости повторной передачи учетных данных.

#### *Преимущества Использования JWT:*

**1. Безопасность:** JWT использует механизмы подписи для проверки подлинности токенов, обеспечивая безопасную передачу информации между клиентом и сервером.

**2. Масштабируемость:** Токены JWT легко передаются через HTTP-заголовки, что делает их удобными для использования в различных сценариях и совместимыми с различными платформами.

### *Использование Docker*

Docker - это инструмент для контейнеризации, который дает возможность разработчикам создавать, развертывать и запускать приложения в изолированных окружениях, называемых контейнерами. Контейнеры Docker работают на основе виртуализации операционной системы, обеспечивая приложениям доступ ко всем необходимым зависимостям и программному обеспечению без воздействия на основную систему.

### *Преимущества Docker*

**Изоляция приложений:** Контейнеры изолируют приложения друг от друга и от хост-системы, предотвращая конфликты и повышая стабильность.

- **Портативность:** Контейнеры могут работать в различных средах без изменений кода, что упрощает развертывание приложений в облаке и на локальных серверах.

- **Масштабируемость:** Контейнеры могут легко масштабироваться по горизонтали путем запуска нескольких экземпляров одного образа контейнера.

- **Быстрое развертывание:** Контейнеры быстро развертываются и запускаются, сокращая время вывода на рынок новых функций и обновлений.

- Эффективное использование ресурсов: Контейнеры используют общие ресурсы операционной системы хоста, что повышает эффективность использования ресурсов и снижает затраты.

Таким образом, Docker представляет собой эффективную систему контейнеризации, которая трансформирует процессы разработки, развертывания и управления приложениями. Благодаря возможностям изоляции приложений, их переносимости, масштабируемости и быстрому развертыванию, Docker становится оптимальным выбором для современных задач в области информационных технологий.

### *Использование Liquibase*

Liquibase представляет собой свободно распространяемую платформу для управления базами данных, которая позволяет программистам контролировать и корректно реализовывать изменения в структуре баз данных в разнообразных окружениях. Этот инструмент опирается на использование файлов с текстовым описанием модификаций схемы базы, что делает возможным их точное воспроизведение на множестве баз данных.

Liquibase предоставляет исполнение скриптов, проверки на повторное выполнение, проверки целостности и т. д.

### *Использование Liquibase обеспечивает следующие преимущества:*

- Управление изменениями в схеме: Liquibase отслеживает изменения в схеме базы данных и хранит их в текстовых файлах изменений.

- Безопасное применение изменений: Liquibase гарантирует безопасное применение изменений в схеме базы данных, предотвращая неожиданную потерю данных или отказ базы данных.

- Автоматизация развертывания базы данных: Liquibase автоматизирует развертывание изменений в схеме базы данных в различных средах, таких как разработка, тестирование и эксплуатация.

- Совместная работа команды: Liquibase позволяет нескольким разработчикам совместно работать над изменениями схемы базы данных, обеспечивая согласованность и контроль версий.

- Поддержка различных баз данных: Liquibase поддерживает широкий спектр баз данных, включая MySQL, PostgreSQL, Oracle и Microsoft SQL Server.

Таким образом, Liquibase - это полезный инструмент для управления изменениями в структуре базы данных, который помогает разработчикам безопасно и эффективно внедрять изменения в различных средах. Преимущества отслеживания изменений, автоматизации внедрения и поддержки различных типов баз данных делают Liquibase неотъемлемым инструментом для современных проектов в области разработки баз данных.

### *Мессенджеры и их рекомендательные системы*

Мессенджеры играют ключевую роль в современном обществе, предоставляя платформы для мгновенного обмена сообщениями между пользователями. В процессе эволюции мессенджеров, особенно в контексте социальных сетей, рекомендательные системы становятся неотъемлемой частью функционала. Они предоставляют пользователям рекомендации по добавлению новых контактов на основе различных

критериев, включая общие интересы, контент, локацию и взаимодействия с другими пользователями. Степень эффективности этих рекомендаций влияет на привлекательность мессенджера для конечного пользователя.

### *Использование среднеквадратичного отклонения в рекомендательных системах*

Среднеквадратичное отклонение (RMSE) является одним из основных инструментов оценки точности предсказаний в рекомендательных системах. Этот статистический показатель позволяет измерять разницу между фактическими и прогнозируемыми значениями. В контексте разработки рекомендательных систем для мессенджеров, RMSE может быть применено для оценки точности рекомендаций на основе взаимодействий пользователей с контентом или другими пользователями.

#### *Метод среднеквадратичного отклонения:*

Метод среднеквадратичного отклонения (или стандартное отклонение) является мерой разброса значений в наборе данных относительно их среднего значения. Он часто используется в статистике и анализе данных для измерения различий между значениями и выявления степени изменчивости в наборе данных.

#### *Формула среднеквадратичного отклонения:*

$$CO = \sqrt{\frac{\sum |x - \mu|^2}{N}}$$

где  $\sum$  означает «сумма»,  $x$  — это одно значение из выборки,  $\mu$  — среднее арифметическое, а  $N$  — количество элементов в выборке.

Вот краткое перечисление этапов:

Этап 1: Находим среднее арифметическое.

Этап 2: Для каждого элемента находим квадрат его расстояния до среднего арифметического.

Этап 3: Суммируем все результаты, полученные на втором шаге.

Этап 4: Делим полученное число на количество элементов.

Этап 5: Извлекаем квадратный корень.

Среднеквадратичное отклонение позволяет оценить, насколько значения в наборе данных отличаются от его среднего значения. Чем больше среднеквадратичное отклонение, тем больше изменчивость в данных

## Сравнительный анализ различных методов

В данной работе представлен подробный сравнительный анализ метода среднеквадратичного отклонения (МСКО) с другими аналогичными методами рекомендации в друзья для мессенджера. МСКО был выбран благодаря своим уникальным преимуществам и новизне при решении задачи рекомендации в друзья.

### 1. Метод косинусного сходства

Косинусное сходство измеряет угловое расстояние между двумя векторами, представляющими пользователей. Оно часто используется для выявления похожих пользователей на основе их общих интересов или друзей.

Если даны два вектора признаков,  $A$  и  $B$ , то косинусное сходство,  $\cos(\theta)$ , может быть представлено используя скалярное произведение и норму:

$$\text{similarity} = \cos(\theta) = \frac{A \cdot B}{\|A\| \|B\|} = \frac{\sum_{i=1}^n A_i \times B_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (A_i)^2} \times \sqrt{\sum_{i=1}^n (B_i)^2}}$$

#### Преимущества:

- Простота реализации и вычислений.
- Подходит для разреженных данных.

#### Недостатки:

- Не учитывает направление векторов.
- Не чувствителен к шуму в данных.
- Не учитывает вес отношений.

## 2. Метод Жаккара

Коэффициент Жаккара измеряет пересечение двух множеств, представляющих пользователей и их друзей. Он полезен для выявления пользователей с похожими социальными кругами.

$$K_J = \frac{c}{a + b - c},$$

где  $a$  — количество видов на первой пробной площадке,  $b$  — количество видов на второй пробной площадке,  $c$  — количество видов, общих для первой и второй площадок.

### *Преимущества:*

- Эффективен для выявления точных совпадений.
- Эффективен для больших наборов данных.

### *Недостатки:*

- Не учитывает вес отношений.
- Не учитывает контекст отношений.

## 3. Метод взаимной информации

Взаимная информация измеряет степень зависимости между двумя переменными. В контексте рекомендации в друзья она используется для выявления пользователей, которые имеют значительные взаимные связи.

$$I(X; Y) = H(X) - H(X | Y) = H(X) + H(Y) - H(X, Y)$$

### *Преимущества:*

- Учитывает направление отношений.
- Не чувствителен к шуму в данных.

### *Недостатки:*

- Высокие вычислительные затраты.

- Сложность интерпретации результатов.

#### 4. Метод линейной регрессии

Линейная регрессия моделирует линейную зависимость между двумя переменными. В контексте рекомендации в друзья она используется для прогнозирования вероятности дружбы на основе различных характеристик пользователя.

Регрессионная модель

$$y = f(x, b) + \varepsilon, E(\varepsilon),$$

где  $b$  — параметры модели,  $\varepsilon$  — случайная ошибка модели; называется линейной регрессией, если функция регрессии  $f(x, b)$  имеет вид

$$f(x, b) = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + \dots + b_k x_k,$$

где  $b_j$  — параметры (коэффициенты) регрессии,  $x_j$  — регрессоры (факторы модели),  $k$  — количество факторов модели<sup>[1]</sup>.

Коэффициенты линейной регрессии показывают скорость изменения зависимой переменной по данному фактору, при фиксированных остальных факторах (в линейной модели эта скорость постоянна):

$$\forall j \quad b_j = \frac{\partial f}{\partial x_j} = const$$

#### Преимущества:

- Возможность учета различных факторов.
- Простота интерпретации результатов.

#### Недостатки:

- Предполагает линейную зависимость.
- Может быть чувствителен к шуму в данных.

#### Преимущества МСКО

В отличие от перечисленных выше методов, МСКО обладает несколькими уникальными преимуществами:

- *Учитывает вес отношений*: МСКО взвешивает силу связей между пользователями на основе их активности, продолжительности и других факторов.

- *Учитывает направление отношений*: МСКО учитывает направление отношений, что позволяет выявлять взаимные связи.
- *Учитывает контекст отношений*: МСКО учитывает контекст отношений, например, тип сообщения, время и частоту взаимодействия.
- *Рассчитывается эффективно*: МСКО можно рассчитать эффективно, даже для больших наборов данных.
- *Новизна*: МСКО представляет собой новый подход к рекомендации в друзья, который не был широко исследован ранее в контексте мессенджеров.

### *Обоснование предпочтительности МСКО*

На основе вышеизложенных преимуществ МСКО оказался предпочтительнее других методов рекомендации в друзья для мессенджеров по следующим причинам:

- Он позволяет выявить более точные и персонализированные рекомендации, учитывая вес, направление и контекст отношений.
- Он эффективен и масштабируем, что делает его подходящим для больших объемов данных с высокой активностью пользователей.
- Он новаторский и может способствовать улучшению взаимодействия и вовлеченности пользователей в мессенджерах.

### *Вывод*

МСКО является многообещающим методом рекомендации в друзья для мессенджеров. Его уникальные преимущества, такие как учет веса, направления и контекста отношений, а также его эффективность и новизна делают его предпочтительным выбором для расширения социальных сетей пользователей и улучшения общего пользовательского опыта.

## **Сравнительный анализ приложения с другими популярными мессенджерами**

Сервисы мгновенного обмена сообщениями предоставляют пользователям множество возможностей для общения, включая обмен текстовыми сообщениями, голосовыми и видеозвонками, а также обмен медиафайлами. Разработчики непрерывно совершенствуют свои приложения, реализуя новые функции и улучшая пользовательский опыт.

В данном разделе будет проведена сравнительная оценка приложения-мессенджера с механизмом подбора друзей, основанным на методе среднеквадратичного отклонения, с другими популярными мессенджерами, такими как ВКонтакте и Tinder.

### *Методология*

Сравнительный анализ будет проводиться по следующим критериям:

- **Функциональность:** Набор функций, доступных пользователям, включая обмен сообщениями, голосовые и видеозвонки, обмен файлами и т.д.
- **Пользовательская база:** Количество активных пользователей и демографические данные
- **Безопасность и конфиденциальность:** Меры, предпринятые для защиты данных пользователей и обеспечения их конфиденциальности
- **Инновации:** Уникальные или передовые функции, которые отличают приложение от конкурентов
- **Пользовательский интерфейс:** Удобство использования, наглядность и эстетическая привлекательность

- Социальные аспекты: Возможности для общения, установления новых связей и построения отношений

### *Сравнение с ВКонтакте*

ВКонтакте является крупнейшим мессенджером в России и странах СНГ. Приложение имеет множество функций, включая:

- Обмен текстовыми, голосовыми и видеосообщениями
- Голосовые и видеозвонки
- Создание и участие в групповых чатах
- Обмен файлами всех типов
- Доступ к новостной ленте с актуальными новостями и контентом друзей
- Возможность интеграции с играми и приложениями

ВКонтакте имеет огромную пользовательскую базу, насчитывающую более 500 миллионов активных пользователей. Это популярная платформа не только для общения, но и для поиска друзей, знакомства с новыми людьми и построения отношений.

По вопросу безопасности ВКонтакте использует передовые методы защиты данных, такие как двухфакторная аутентификация и шифрование сообщений. Тем не менее, возникают сомнения о надежности платформы из-за случаев утечек информации и взломов аккаунтов.

Интерфейс ВКонтакте легок в использовании и понятен для пользователей. Приложение имеет стильный дизайн и регулярно обновляется, учитывая отзывы пользователей.

В социальных аспектах ВКонтакте уделяется значительное внимание. Пользователи могут добавлять друзей, присоединяться к группам по интересам и принимать участие в онлайн-дискуссиях. Встроенные функции поиска людей позволяют пользователям находить друзей и потенциальных партнеров на основе их местоположения.

#### *Механизм рекомендации в друзья*

- **Связи с друзьями:** Приложение анализирует связи пользователей с их друзьями, предлагая в качестве рекомендации тех, кто имеет общих знакомых с пользователем.

- **Геолокация:** Данные о местоположении пользователей используются для рекомендации знакомств в ближайшем окружении.

**Поведение в приложении:** Отслеживание активности пользователей, таких как посещаемые группы, предпочитаемый контент и контакты, помогает ВКонтакте предлагать новых друзей с похожими интересами.

#### *Сравнение с Tinder*

Tinder - одно из самых популярных приложений знакомств в мире. Основным принципом Tinder - свайп-механика. Пользователи могут просматривать профили других пользователей и свайпать направо для выражения заинтересованности или налево для проигнорирования. Если два человека свайпают друг друга направо, они получают возможность общаться через сообщения.

Tinder предлагает ограниченный набор функций по сравнению с ВКонтакте и другими полноценными мессенджерами. Основное внимание приложение уделяет поиску потенциальных партнеров и развитию отношений.

Сообщество пользователей Tinder в основном состоит из молодых людей, которые ищут новые знакомства и романтические связи. Приложение насчитывает более 50 миллионов активных пользователей по всему миру.

Интерфейс приложения Tinder простой и удобный в использовании. Его дизайн привлекателен, а навигация оптимизирована для быстрого и эффективного использования.

Tinder уделяет большое внимание социальным аспектам. Пользователи имеют возможность добавлять друзей, общаться с ними и знакомиться с новыми людьми на основе своего местоположения. Встроенная функция поиска позволяет находить потенциальных партнеров в соответствии с заданными критериями.

#### *Механизм рекомендации в друзья*

- Свайпы: Основным механизмом рекомендаций друзей в Tinder - это функция свайпов. Пользователи могут просматривать профили других пользователей и свайпать вправо, чтобы показать интерес, или влево, чтобы пропустить.

- Геолокация Приложение использует геолокацию для того, чтобы предлагать друзей, которые находятся поблизости от пользователя.

- Поведение в приложении: Tinder отслеживает поведение пользователей в приложении: какие профили они просматривают, кому ставят лайки и с кем общаются. На основании этих данных приложение рекомендует людей с похожими интересами и поведением.

- Алгоритм подбора: Алгоритм подбора пар использует машинное обучение для того, чтобы предоставлять пользователям профили, которые им вероятно понравятся. Учитываются такие факторы как возраст, местоположение, интересы и поведение пользователей в приложении.

### *Сравнение с предлагаемым приложением*

Предлагаемое приложение для общения отличается уникальной функцией добавления друзей, которая основана на методе среднеквадратичного отклонения. Этот инструмент анализирует профили пользователей и подбирает потенциальных друзей на основе их ответов на вопросы анкеты и активности в приложении.

По сравнению с ВКонтакте и Tinder предлагаемое приложение обладает следующими преимуществами:

- Точный и индивидуализированный подбор друзей: Метод среднеквадратичного отклонения позволяет приложению точно определять совместимость пользователей и предлагать им только тех, кто реально подходит для дружбы.

- Больше функциональности, направленной на установление дружеских связей: в приложении есть специальные возможности для упрощения создания дружеских отношений, такие как общие интересы, групповые чаты.

- Меньший упор на внешний вид: Программа подбора приложения зависит от общих интересов и поведенческих характеристик пользователей, а не от их внешности. Это способствует более дружелюбной и инклюзивной среде, где люди могут концентрироваться на установлении значимых связей.

Тем не менее, предложенное приложение может уступать ВКонтакте и Tinder по следующим пунктам:

- Меньшее количество пользователей: Поскольку это новое приложение, у него меньше пользователей, чем у ВКонтакте и Tinder.

- Ограниченный функционал: Предложенное приложение имеет ограниченный набор функций по сравнению с полнофункциональным мессенджером и социальной сетью - ВКонтакте.

- Низкая популярность: ВКонтакте и Tinder широко известны и популярны, в то время как предложенное приложение еще не достигло такой же степени известности.

### *Вывод*

Предлагаемое мессенджер-приложение с механизмом добавления друзей на основе метода среднеквадратичного отклонения предоставляет уникальные преимущества для пользователей, желающих создать новые дружеские связи. Хотя в некоторых аспектах оно может быть менее конкурентоспособным по сравнению со старыми популярными мессенджерами, предлагаемое приложение обладает потенциалом для завоевания рынка и привлечения пользователей, заинтересованных в более индивидуализированном подходе к поиску друзей.

При развитии данного приложения ожидается его повышение конкурентоспособности на рынке мессенджеров как ценного инструмента для формирования дружеских отношений онлайн.

## Развитие и масштабирование сервиса

При разработке RESTful API для мессенджера следует учитывать возможности будущего развития и масштабирования сервиса. Важно иметь в виду следующие ключевые аспекты:

При увеличении числа пользователей и объема сообщений может понадобиться горизонтальное масштабирование. Развертывание нескольких экземпляров сервиса на различных серверах с использованием балансировки нагрузки поможет равномерно распределить запросы и улучшить производительность.

Для обеспечения надежности и равномерного распределения нагрузки рекомендуется использовать репликацию базы данных. Создание нескольких копий базы данных и распределение между ними операций чтения и записи обеспечит стабильную работу сервиса даже при возможных сбоях.

Развитие мессенджера может потребовать добавления нового функционала, такого как новые возможности обмена сообщениями, интеграция с внешними сервисами для получения данных или расширение механизмов безопасности. Гибкая архитектура разработки позволит легко расширять и модифицировать функционал.

Необходимо обеспечить эффективный мониторинг и отладку сервиса для оперативного выявления проблем и устранения ошибок. Мониторинг нагрузки, логирование событий, анализ производительности и системы оповещения помогут поддерживать стабильную и отзывчивую работу сервиса.

При разработке и масштабировании мессенджера рекомендуется использовать современные технологии и инструменты, обеспечивающие

эффективную работу системы. Тестирование и оптимизация производительности играют важную роль в обеспечении стабильности и отзывчивости сервиса для пользователей.

Возможные доработки включают расширение функционала JWT для включения дополнительных слоев безопасности или для поддержки дополнительных функций, таких как обновление токенов или расширенная проверка.

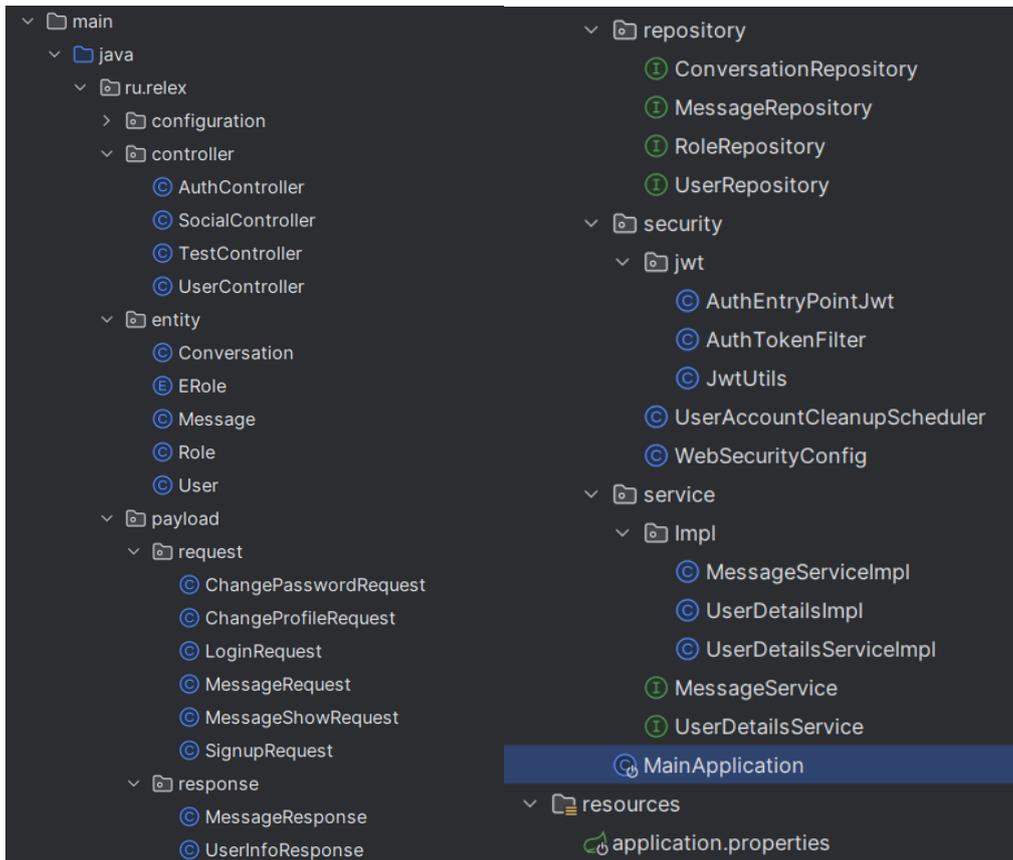
Добавление информации о использовании JWT в отчете подчеркнет применение современных методов безопасности в мессенджере и покажет внимание к обеспечению конфиденциальности данных пользователей.

## Практическая часть

При разработке структуры сервиса обмена сообщениями важно учитывать требования проекта, особенности выбранных технологий и возможность дальнейшего расширения. Грамотно спроектированная архитектура поможет создать надежный мессенджер, готовый к масштабированию и адаптации к изменяющимся потребностям пользователей в сфере общения.

### *Общая ветка файлов*

Для реализации концепции мессенджера я выбрал Java Spring Framework, который предоставляет необходимые инструменты для разработки API приложений. Для этой цели были созданы несколько служб (Service), хранилищ (Repository) и контроллеров (Controller). Репозиторий отвечает за хранение информации в базе данных, выполнение операций записи, удаления, обновления и других. Service реализует бизнес-логику приложения, а Controller управляет приложением, в зависимости от действий пользователя, к примеру, перенаправление на нужную страничку сайта.



## Обзор web-приложения

Сервис API проекта представляет собой гибкий и безопасный инструмент для управления учетными записями пользователей и обмена сообщениями. Ниже приведен обзор основных запросов, реализованных в API.

### Аутентификация и авторизация:

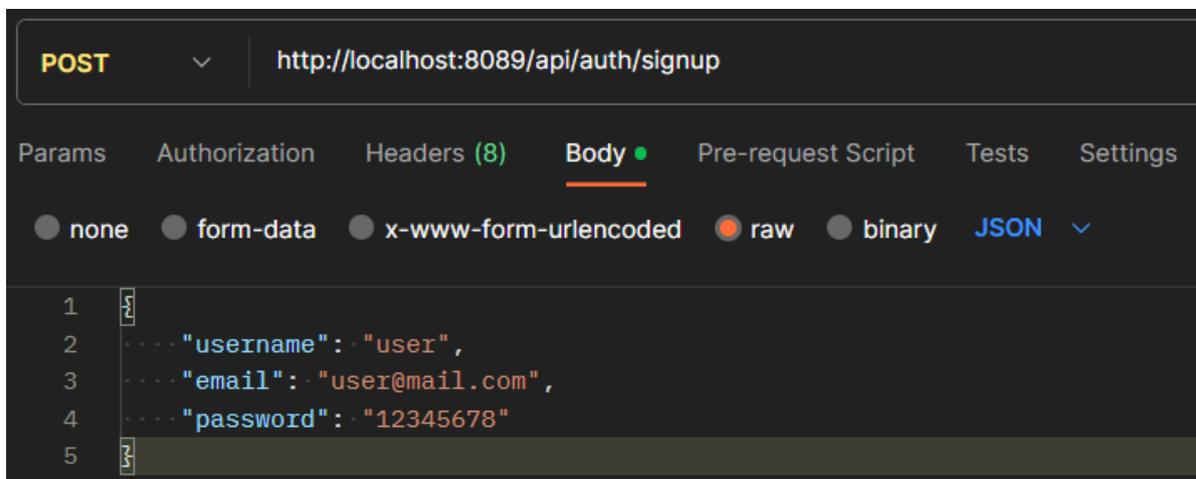


Рис. 1

Регистрация нового пользователя с указанием имени пользователя, адреса электронной почты и пароля.

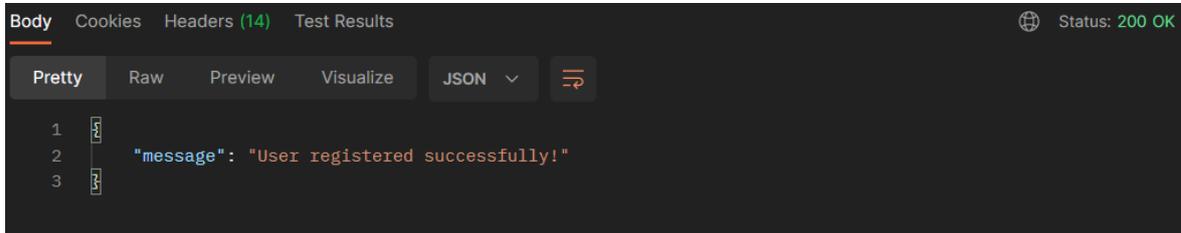


Рис. 2

При регистрации на сервере используется ограниченный функционал: например, если пользователь уже существует, выводится соответствующее сообщение об ошибке. То же самое происходит при несовпадении паролей.

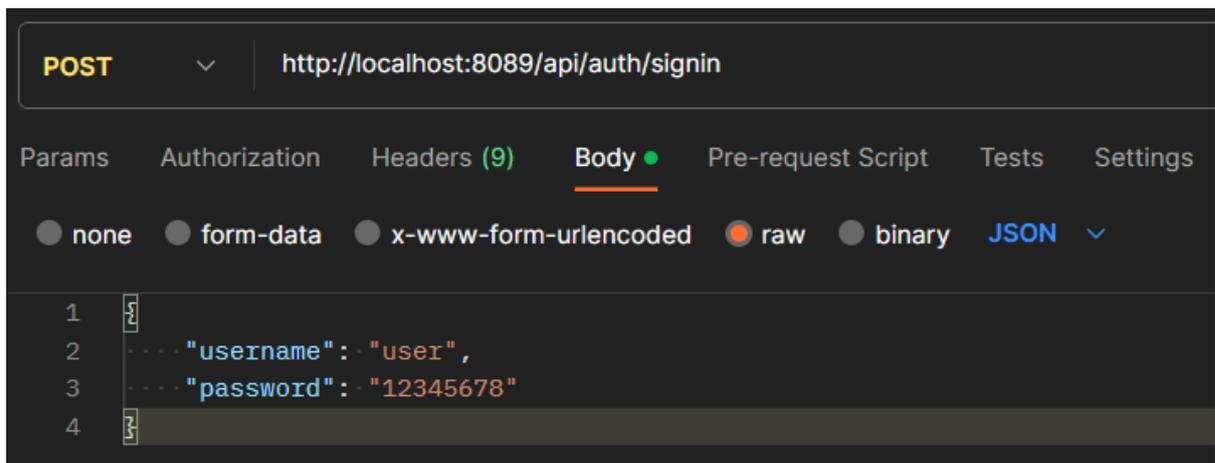


Рис. 3

Вход пользователя в систему с использованием имени пользователя и пароля.

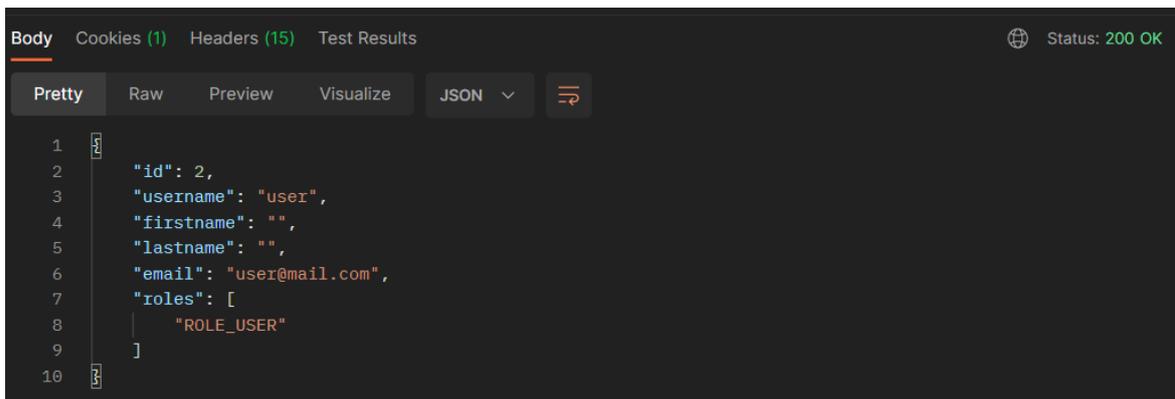


Рис. 4

Так выглядит сообщение об успешной аутентификации.

*Управление профилем:*

Для получения информации о пользователе используются такие запросы, как:

- GET /api/test/user: Получение информации о пользователе.
- GET /api/test/mod: Получение информации о модераторе.
- GET /api/test/admin: Получение информации о администраторе.

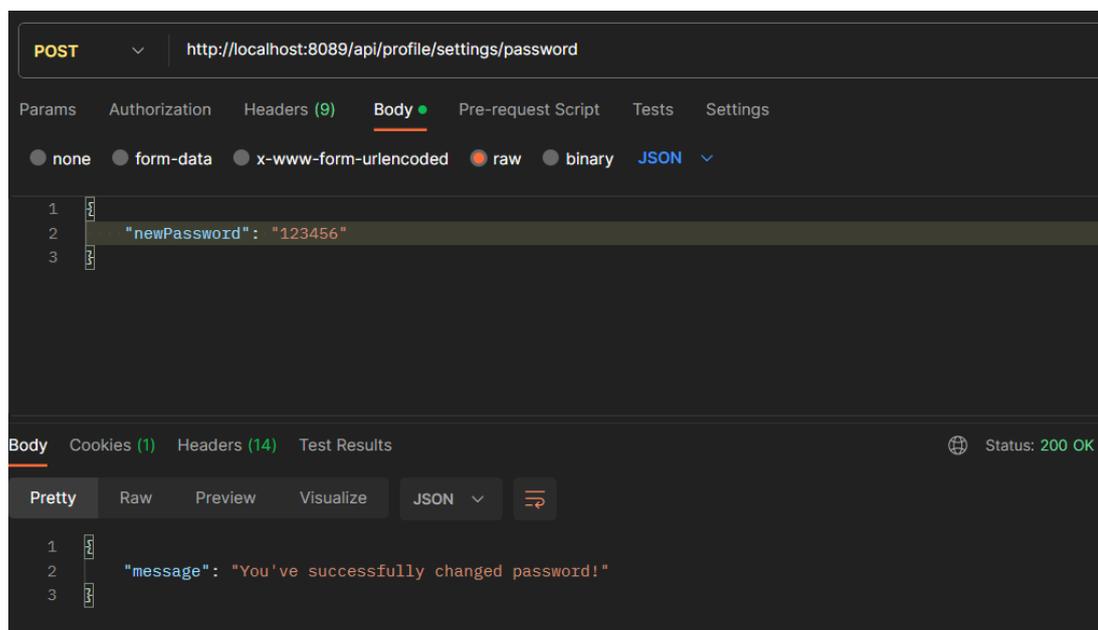


Рис. 5

Изменение пароля пользователя.

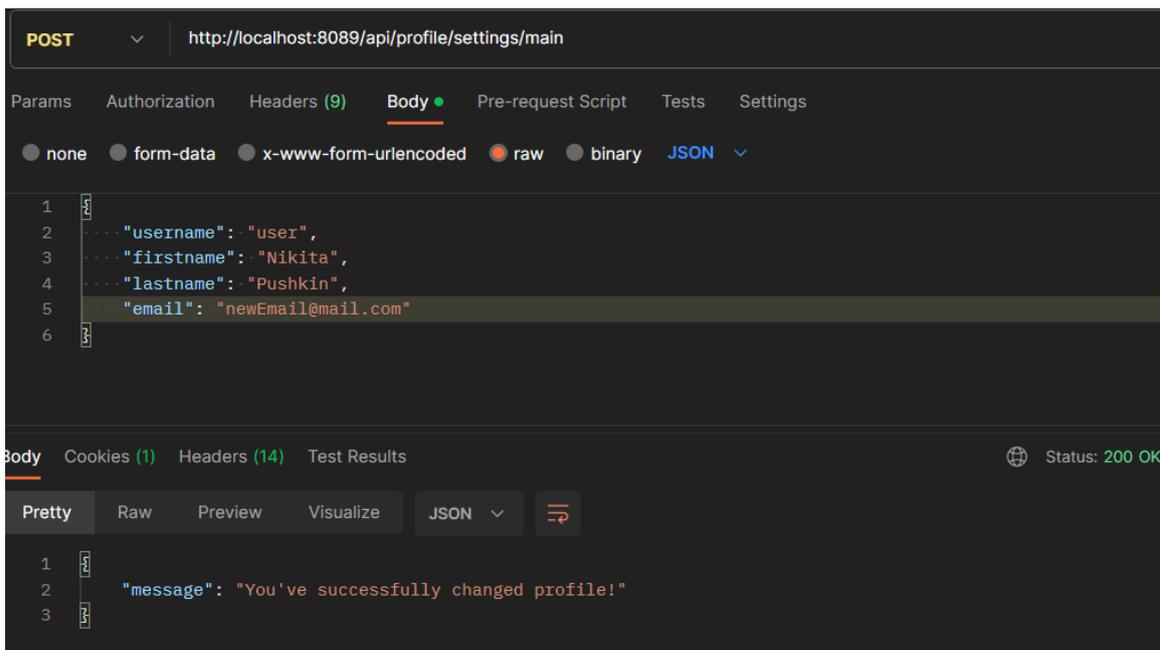


Рис. 6

API с возможностью изменения личной информации.

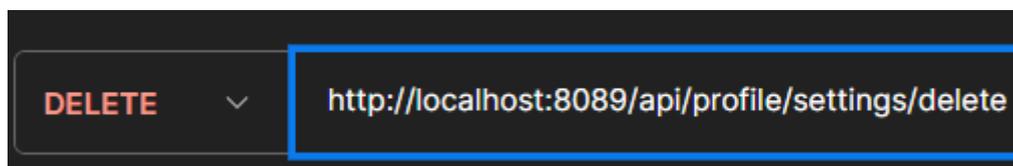


Рис. 7

*Удаление аккаунта пользователя.*

А если точнее, то аккаунт переводится в состояние «Не активен», чтобы пользователь имел возможность восстановить его, вдруг пользователь по случайности это сделал. Если за определённый промежуток времени аккаунт не восстановлен, то аккаунт удаляется окончательно без возможности восстановления.

Для этого функционала используется специальный класс, который и будет каждые, например, 60 секунд, запускать метод, который ищет в базе данных пользователей, у которых «просроченный» аккаунт, и тогда метод

удаляет таких пользователей. После чего человек сможет заново зарегистрироваться, начав свой путь в мессенджере с самого начала.

Класс должен быть с аннотацией `@Component`, чтобы Спринг смог его определить и внедрить его в бины, а сам метод - `@Scheduled` с параметром `fixedRate`, в котором необходимо указать нужное время.

```
@Transactional
@Scheduled(fixedRate = 60000) // Запуск каждую 1 min
public void cleanupInactiveUserAccounts() {
    LocalDateTime tenMinutesAgo = LocalDateTime.now().minusMinutes(1);
    List<User> inactiveUsers = userRepository.findInactiveUsers(tenMinutesAgo);
    for (User user : inactiveUsers) {
        conversationRepository.deleteByFirstId(user);
        conversationRepository.deleteBySecondId(user);
        messageRepository.deleteBySender(user);
        userRepository.delete(user);
    }
}
```

Рис. 7.1

Управление сообщениями:

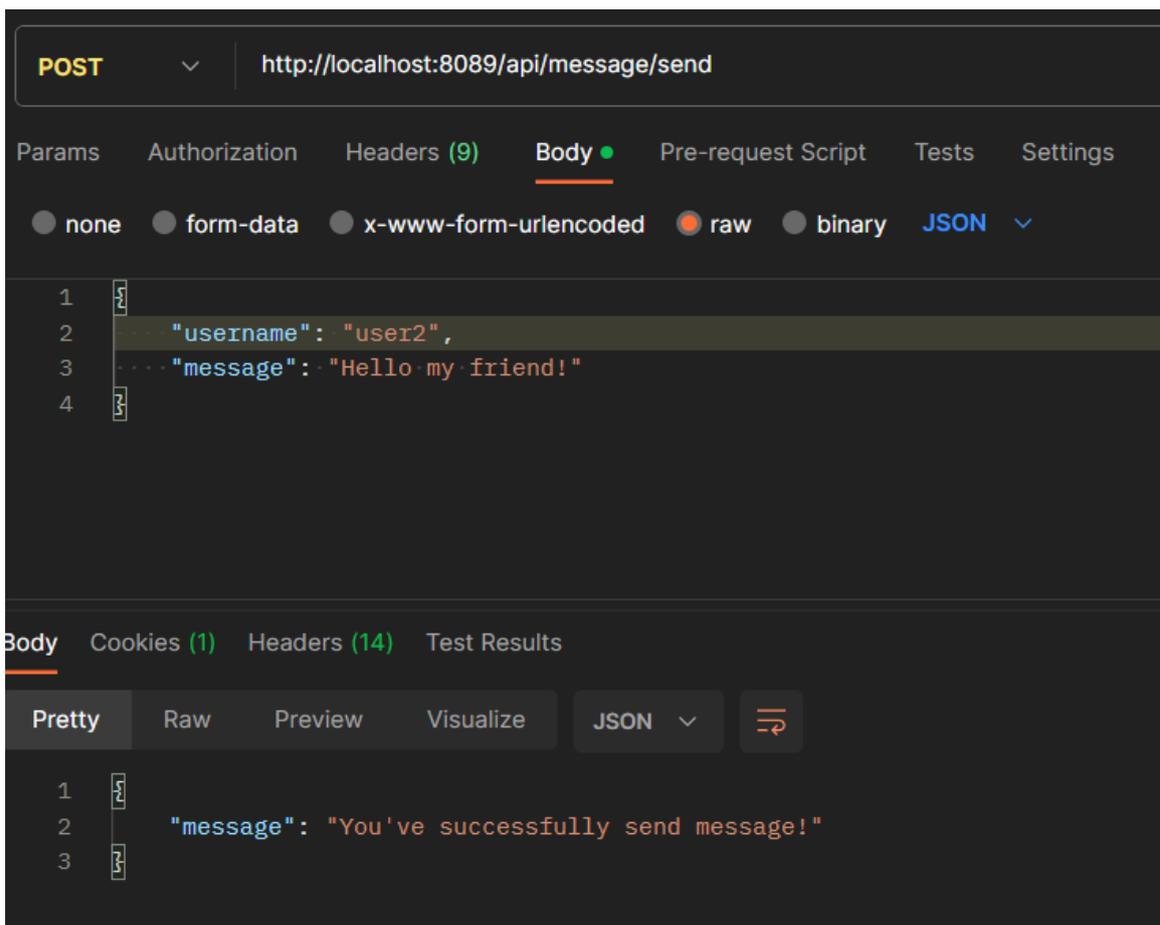


Рис. 8

Отправка сообщения от указанного пользователя.

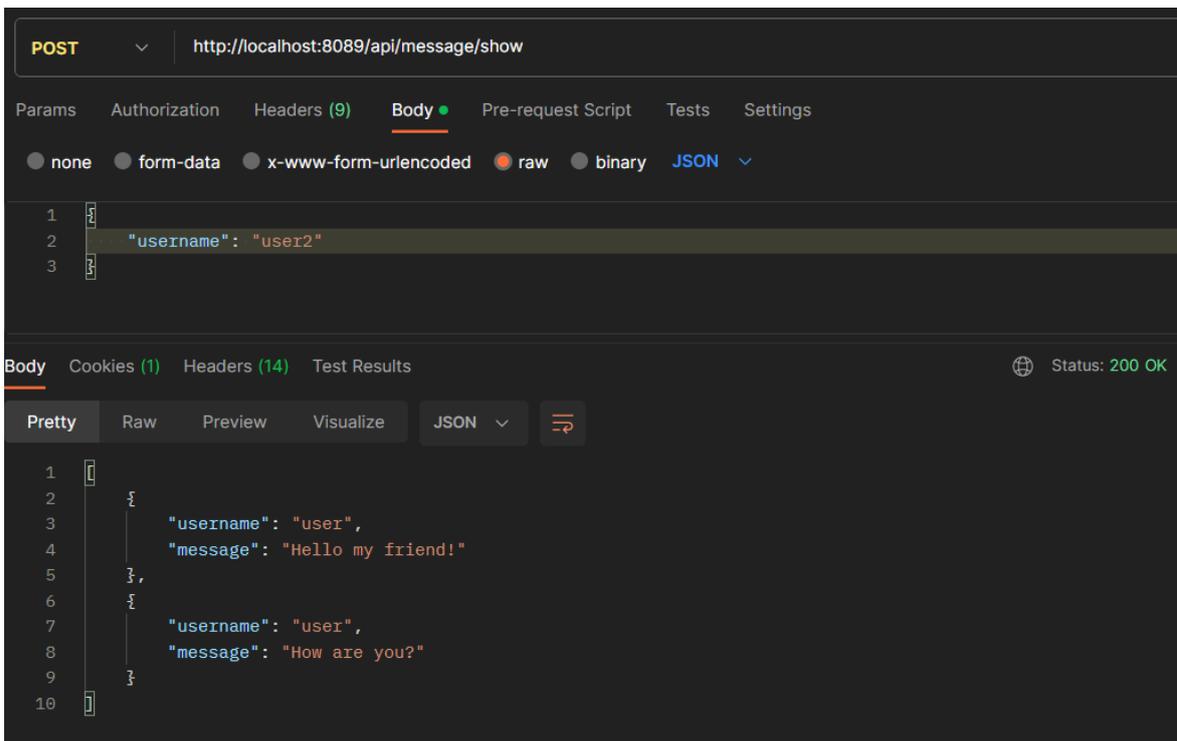


Рис. 9

Отображение всех сообщений для указанного пользователя.

И также реализован функционал очистки переписок.

*Добавление пользователей в друзья:*

Для добавления в друзья любого пользователя, достаточно указать его 'username'.

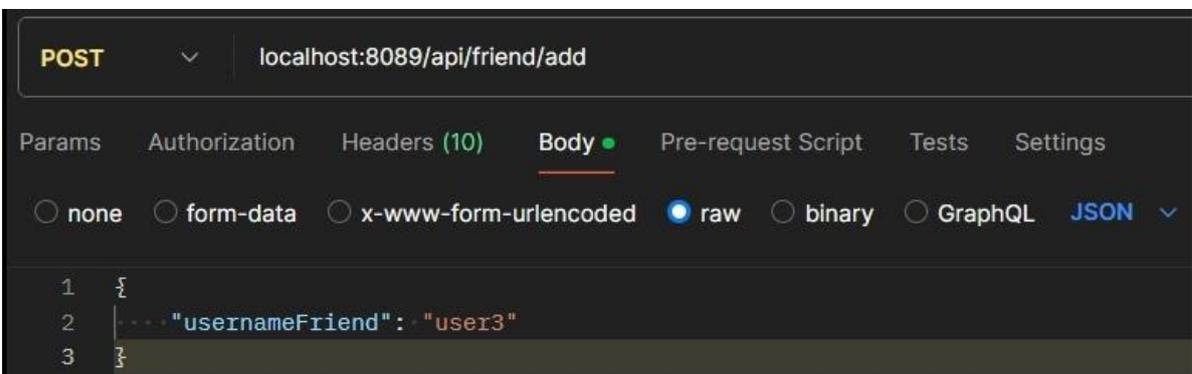
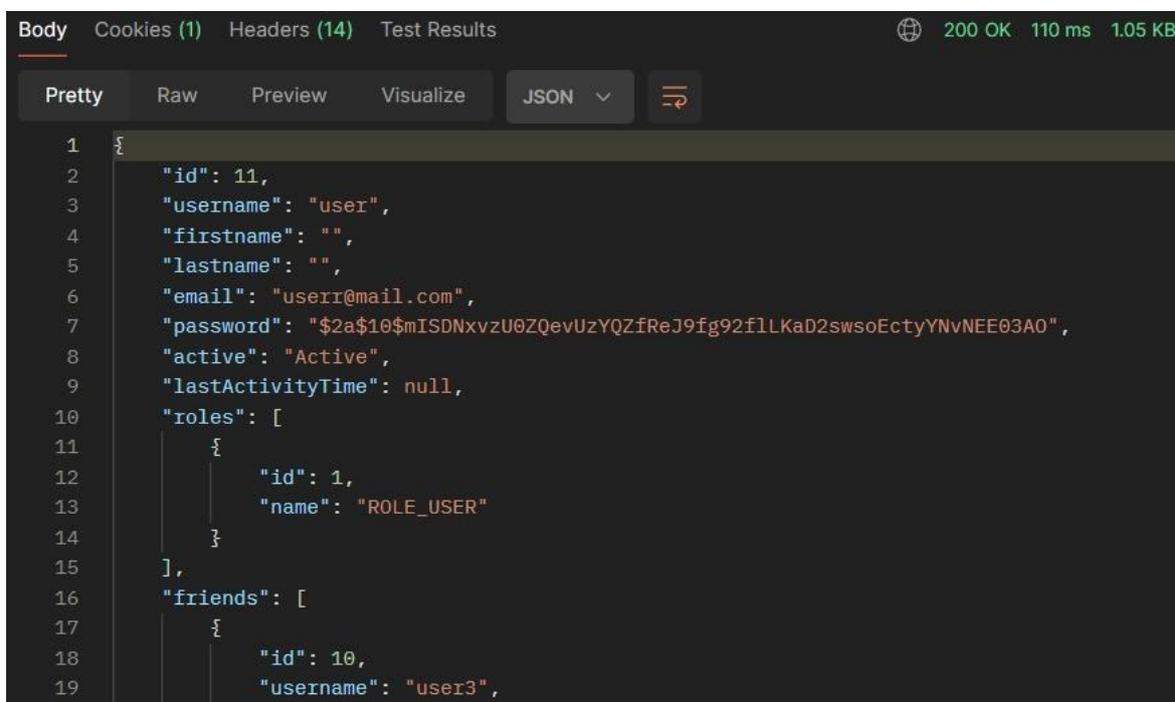


Рис. 10

После добавления пользователя в дружбу в ответ приходит json пользователя и подтверждение, что пользователь действительно стал другом:



```
1 {
2   "id": 11,
3   "username": "user",
4   "firstname": "",
5   "lastname": "",
6   "email": "user1@mail.com",
7   "password": "$2a$10$mISDNxvzU0ZQevUzYQZfReJ9fg92fllKaD2swoEctyYNvNEE03A0",
8   "active": "Active",
9   "lastActivityTime": null,
10  "roles": [
11    {
12      "id": 1,
13      "name": "ROLE_USER"
14    }
15  ],
16  "friends": [
17    {
18      "id": 10,
19      "username": "user3",
```

Рис. 11

Также можно посмотреть список своих друзей. Для этого достаточно отправить такой запрос:

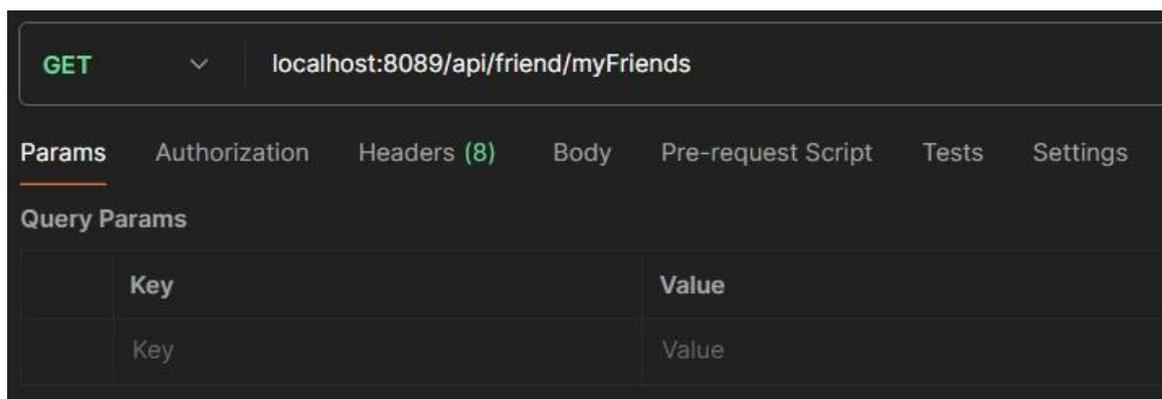


Рис. 12

В ответ на этот запрос приходит список пользователей, являющиеся вашими друзьями. В UI-интерфейсе этот список можно будет красиво вывести.

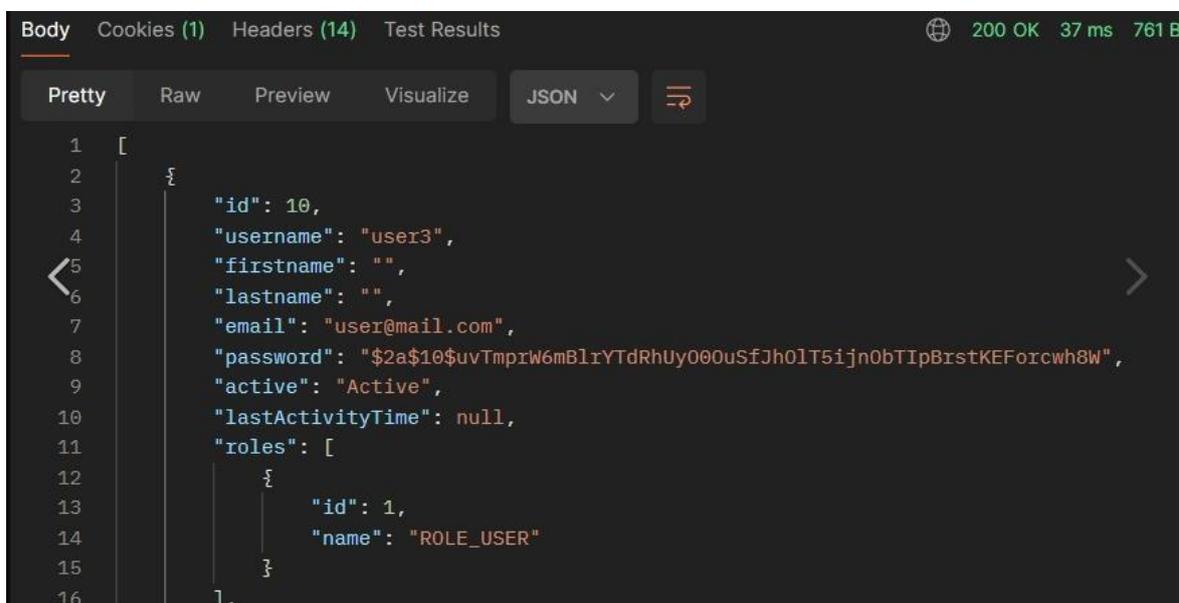


Рис. 13

Функционал рекомендаций в друзья:

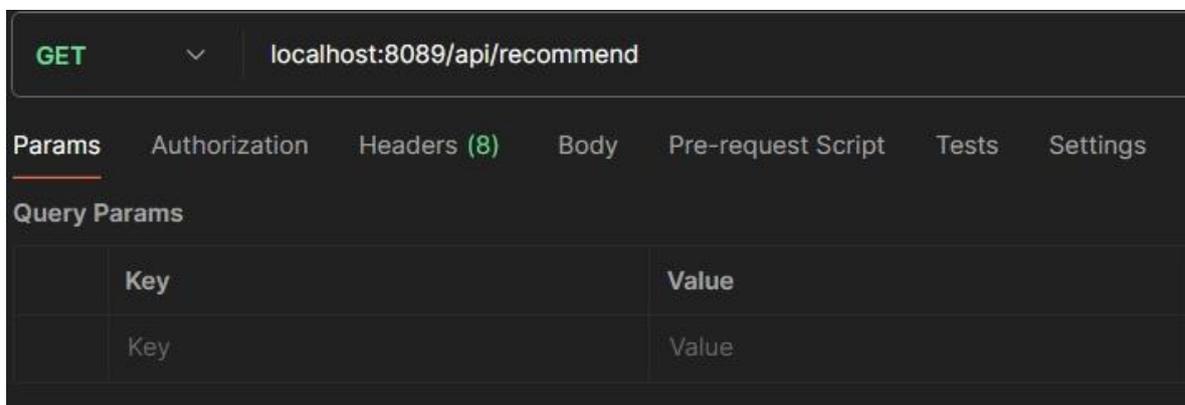


Рис. 14

В ответе можно увидеть список пользователей, которые были высчитаны с помощью метода среднеквадратичного отклонения. Это значит, что ваши взгляды и интересы совпадают, а также вы находитесь недалеко друг от друга, и значит у людей будет возможность не только пообщаться с сети, но и увидеться в реальной жизни и пообщаться вживую.

Функционал рекомендаций в друзья предполагает предложение пользователю добавить в друзья других пользователей на основе их общих интересов, хобби, предпочтений и т.д. Это может помочь увеличить количество друзей у пользователя и обогатить его социальный опыт в приложении.

*Для реализации такого функционала используется следующий подход:*

Сначала необходимо анализировать профиль каждого пользователя, чтобы понять его интересы, хобби, предпочтения и другую социальную активность.

У каждого пользователя есть возможность у себя в профиле указать необходимые данные для поиска новых друзей. Именно по этим данным будет отрабатывать метод среднеквадратичного отклонения и находить людей, у которых либо совпадают, либо незначительно отличаются интересы.

Далее для каждого пользователя с текущим высчитывается среднеквадратичное отклонение по заполненным данным и выводится список людей, которых система рекомендует в друзья. И тогда пользователь, на основе своих предпочтений, может находить друзей с одинаковыми интересами.

*Запуск приложения*

При переходе в репозиторий приложения или загрузки всех файлов, можно наблюдать несколько файлов и папок проекта.

Папка `src` – в ней лежат все исходники приложения, которые и отвечают за функциональность приложения.

Файл `pom.xml` – содержит все необходимые настройки и зависимости для сборки и запуска приложения.

Файл `docker-compose.yml` – служит для разворачивания в контейнере необходимых инструментов и приложений из заранее заготовленных шаблонов(Docker-образов).

Папка `.idea` – в ней лежат настройки проекта для вашей IDE, индексированный код для поиска, взаимосвязи, зависимости и т.д.

Файл `README.md` – это специально написанная инструкция для разработчиков, которая объясняет и поясняет как работать с приложением и как им пользоваться.

Все запросы, которые существуют в проекте, можно найти именно в файле `README.md`, и понять как пользоваться API.

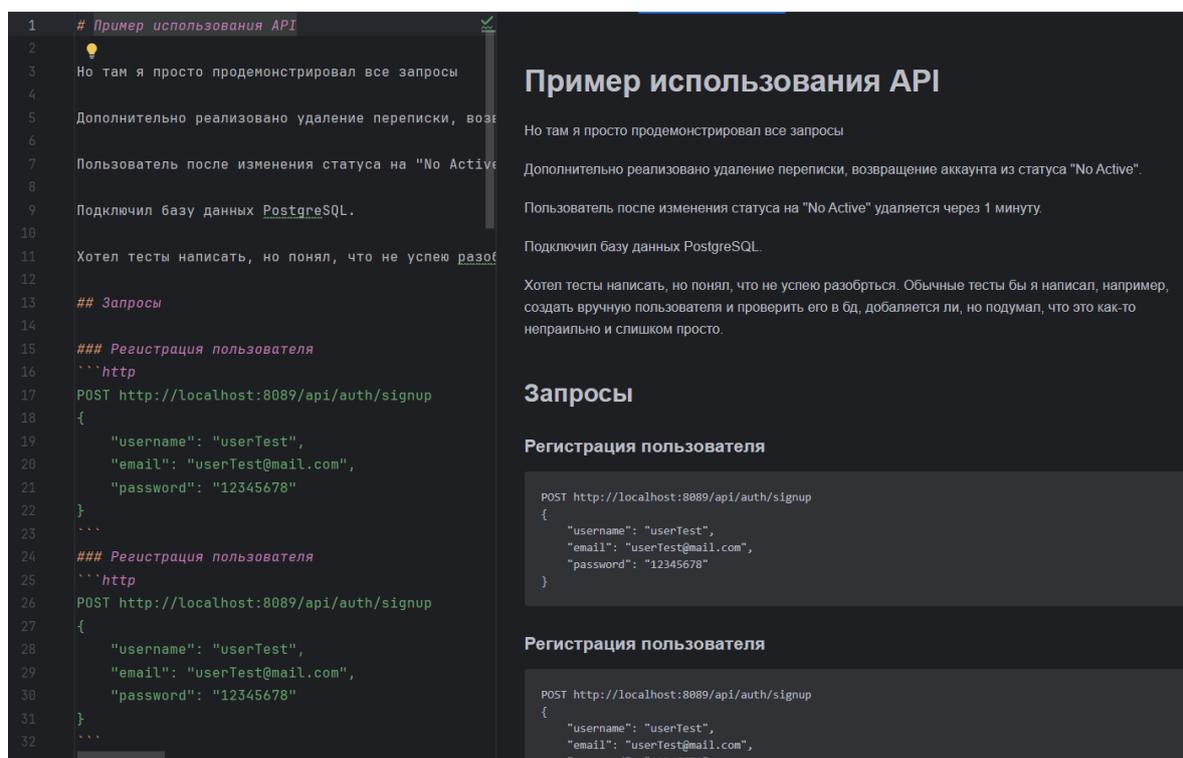


Рис. 15

После запуска приложения, загружается файл конфигурации `application.yml`, после чего создается контекст приложения Spring, который управляет жизненным циклом компонентов приложения. Так как приложение работает за счёт подключения базы данных PostgreSQL, то оно подключается к базе данных и выполняет миграцию схемы, таблиц с

заполнением некоторых данных(админа-пользователя). Далее контекст приложения сканирует пакеты, указанные в аннотации `@ComponentScan`, но так как в моём приложении не указана данная аннотация в конфигурационном файле, то контекст сканирует полностью весь проект(все папки приложения) и регистрирует все компоненты Spring, такие как контроллеры, сервисы и репозитории, то есть бины. После инициализации и создания всех компонентов запускается сервлетный контейнер Tomcat и приложение становится доступным для входящих запросов развёрнутом на порту 8080.

## Дальнейшая разработка

Для дальнейшего усовершенствования приложения важно уделить внимание затратам времени на его поддержку и обновление. Это включает регулярное улучшение структуры кода, исправление ошибок на основе обратной связи от пользователей, а также тестирование на различных устройствах и операционных системах, включая нагрузочное тестирование. Рассмотрите возможность создания собственного веб-интерфейса с применением современных дизайнерских методов и шаблонов. Также необходимо следить за обновлениями используемых технологий и расширять функциональные возможности приложения.

Все более актуальным становится использование технологий, которые позволяют эффективно управлять инфраструктурой и приложениями. Docker, сообщества брокеры, микросервисы и Liquibase - все они играют ключевую роль в современной разработке программного обеспечения. Вот краткое описание каждой из этих технологий и ее роли в развитии и масштабировании сервиса:

**1. Docker:** Docker - это платформа для разработки, доставки и запуска приложений с использованием контейнеризации. Он позволяет упаковывать приложения и их зависимости в контейнеры, что обеспечивает согласованную работу приложений в различных окружениях. Для развития и масштабирования сервиса Docker обеспечивает изолированную среду для приложений, упрощает развертывание и обновление, а также облегчает масштабирование с использованием оркестраторов, таких как Kubernetes или Docker Swarm.

**2. Брокеры сообщений:** Брокеры сообщений, такие как Apache Kafka, RabbitMQ или ActiveMQ, играют ключевую роль в асинхронной связи между различными компонентами системы. Они обеспечивают надежную и масштабируемую передачу сообщений между

микросервисами, что позволяет создавать гибкие и отказоустойчивые архитектуры. Развитие сервиса может включать в себя использование брокеров сообщений для управления асинхронными задачами, обмена данными между сервисами и обеспечения высокой доступности и отказоустойчивости.

**3. Микросервисы:** Микросервисная архитектура разделяет приложение на небольшие автономные сервисы, каждый из которых решает определенную задачу. Это позволяет достигать высокой гибкости, масштабируемости и отказоустойчивости приложения. Развитие сервиса может включать в себя разбиение монолитного приложения на микросервисы, что упрощает управление и масштабирование каждого компонента отдельно.

**4. Liquibase:** Liquibase - это инструмент управления схемой базы данных, который позволяет автоматизировать процесс управления изменениями в структуре базы данных. Он использует файлы формата XML, YAML или SQL для описания изменений в схеме базы данных и применяет их к базе данных автоматически. Развитие и масштабирование сервиса может включать в себя использование Liquibase для управления миграциями базы данных, обеспечивая согласованность и надежность данных при изменении схемы.

Использование этих технологий вместе обеспечивает эффективное развитие сервиса, обеспечивая высокую гибкость, надежность и отказоустойчивость приложения.

## **Итоги ВКР**

### *Задачи исследования:*

- Изучить существующие методы рекомендаций друзей.
- Проанализировать различные математические методы.
- Реализовать механизм рекомендаций друзей на основе среднеквадратичного отклонения.
- Разработать RESTful API службу с использованием Spring Boot.
- Развернуть приложение в Docker.
- Провести тестирование и оценку производительности.

### *План исследования:*

- Изучение существующих методов рекомендаций друзей.
- Анализ различных методов, которые подходят для реализации механизма рекомендаций в друзья в мессенджере.
- Разработка и реализация механизма рекомендаций друзей на основе среднеквадратичного отклонения.
- Проектирование и разработка RESTful API службы с использованием Spring Boot.
- Конфигурирование и развертывание приложения в Docker.
- Тестирование и оценка производительности приложения с использованием Postman.

### *Результаты исследования:*

- Установлено, что метод среднеквадратичного отклонения является эффективным методом для рекомендаций друзей.
- Реализован механизм рекомендаций друзей на основе среднеквадратичного отклонения, который показывает высокую точность и эффективность.
- Разработана RESTful API служба с использованием Spring Boot, которая обеспечивает надежное и масштабируемое решение для рекомендаций друзей.
- Приложение PostgreSQL развернуто в Docker, что обеспечивает его портативность и легкость развертывания.
- Результаты тестирования показали, что приложение имеет высокую производительность и эффективность.

*Выводы:*

- Метод среднеквадратичного отклонения является перспективным методом для рекомендаций друзей.
- Разработанный RESTful API сервис с реализованным механизмом рекомендаций друзей на основе среднеквадратичного отклонения является надежным и эффективным решением.
- Применение Docker обеспечивает удобство развертывания и масштабирования приложения.

*Практическая значимость:*

- Разработанная система рекомендаций друзей может быть интегрирована в существующие мессенджеры или социальные сети.

- Реализация на основе среднеквадратичного отклонения может быть использована в различных областях рекомендательных систем.

*Дальнейшие направления исследований:*

- Исследование гибридных методов рекомендаций, сочетающих среднеквадратичное отклонение с другими методами.

- Изучение влияния размера выборки и параметров модели на точность рекомендаций.

- Разработка мобильного приложения с интеграцией механизма рекомендаций друзей.

## Заключение

В рамках данной научно-исследовательской работы был рассмотрен процесс разработки RESTful API сервиса мессенджера для обмена сообщениями. Основной упор был сделан на концепции проектирования архитектуры и реализации основного функционала.

При разработке мессенджера особое внимание было уделено безопасности и защите данных пользователей. Использование методов шифрования для хранения и передачи конфиденциальной информации, а также применение надежных механизмов аутентификации и авторизации, стали важной составляющей, обеспечивающей безопасность взаимодействия пользователей с сервисом.

Однако разработка мессенджера - это задача, которая требует комплексного подхода. Важно учитывать не только технические аспекты, но и факторы, касающиеся безопасности данных и уровня соответствия нормативным требованиям. Тщательное тестирование и обеспечение безопасности пользовательских данных и коммуникаций - важные составляющие создания стабильного и надежного сервиса обмена сообщениями.

Среднеквадратичное отклонение - это важный статистический показатель, который измеряет разброс значений в наборе данных относительно их среднего значения. Чем больше среднеквадратичное отклонение, тем больше разброс данных вокруг среднего значения, и наоборот.

В контексте разработки мессенджера, где безопасность и защита данных играют важную роль, понимание среднеквадратичного отклонения может быть полезным для анализа различных аспектов системы. Например, при анализе времени ответа сервера на запросы клиентов или

распределения размеров сообщений между пользователями, среднеквадратичное отклонение может помочь определить, насколько данные значения стабильны или изменчивы.

Для обеспечения безопасности пользовательских данных и коммуникаций также важно учитывать разброс значений в различных параметрах системы и стремиться к минимизации этого разброса. Понимание среднеквадратичного отклонения и его применение в анализе и управлении системой могут помочь повысить уровень безопасности и надежности сервиса обмена сообщениями.

Таким образом, при разработке мессенджера необходимо учитывать не только технические аспекты, но и статистические характеристики данных, такие как среднеквадратичное отклонение, чтобы обеспечить стабильность, безопасность и удовлетворение потребностей пользователей. Разработка RESTful API сервиса для мессенджера представляет собой интересное и актуальное направление, требующее внимания к различным аспектам, от технических решений до вопросов безопасности и удовлетворения потребностей пользователей в области коммуникаций.

## **Код приложения**

<https://github.com/TALKER2k/MessengerRestAPI>

## Обзор литературы

1. Курс по программированию - GeekBrains ВТБ (Java для молодых специалистов Банка ВТБ (ПАО)), Neil Alishev Spring course
2. Habr Java Spring Framework - <https://habr.com/ru/articles/490586/>
3. Habr Spring Boot - <https://habr.com/ru/articles/674858/>
4. Habr REST API - <https://habr.com/ru/articles/435144/>
5. Habr Микросервисы Spring Boot - <https://habr.com/ru/articles/485094/comments/>
6. Руководство по вкатыванию в backend-разработку на Java для почти начинающих и сочувствующих - <https://github.com/EightM/JavaBackendStartGuide>
7. Книга по Java – Вводный курс Java SE 9 Герберт Шилдт
8. JSON Web Token (JWT) — пример Java реализации на Spring Boot OAuth2 Resource Server 6.0 - <https://habr.com/ru/articles/684270/>
9. Аутентификация с использованием Spring Security и JWT-токенов - <https://habr.com/ru/articles/278411/>
10. Базы данных на Java – первые шаги - <https://java-course.ru/begin/database01/>
11. Приёмы объектно-ориентированного проектирования. Паттерны проектирования Э. Гамма, Р. Хелм, Р. Джонсон, Д. Влиссидес. СПб: Питер, 2001 — 368 с.
12. Документация по Spring[Электронный ресурс] — <https://docs.spring.io/spring-boot/docs/current/reference/html/index.html>

Приложение

В Оргкомитет Смотра дипломных работ математиков России  
от Рябова Кирилла Сергеевича  
Заявление о новизне

Сообщаю, что новыми в моей представленной на Смотр выпускной квалификационной работе под названием «Синхронизация в мультиплексных сетях фазовых осцилляторов: учет взаимодействий высокого порядка» являются: 6.2 - Нейронная сеть с симплексами второго порядка, 6.2.1 Явление гистерезиса, 4.1 Нейро-глиальные сети.

Также сообщаю, что для проверки новизны было проделано следующее:

- В период с 01 января по 15 марта 2023 г. мною был произведён поиск в следующих поисковых системах: Яндекс, Google, Google Scholar, Web of Science, arXiv.org по следующим ключевым словам: явление гистерезиса, мультиплексная сеть, в выдаче поисковиков было исследовано 13 статей, 5 тезисов докладов, 6 монографий, 5 препринтов, 7 диссертаций и все они не содержали материала, заявляемого автором выпускной квалификационной работы в качестве нового. При поиске не было встречено работ или упоминаний работ, позволяющих усомниться в новизне материала. При этом в работах [1-6], [7] были найдены конструкции, похожие на излагаемые в настоящей выпускной квалификационной работе, однако отличие их ясно видно и наличие таких работ лишь подтверждает актуальность тематики исследования.

- Проведена серия консультаций с моим научным руководителем Татьяной Владимировной Лаптевой, доцентом кафедры теории управления и динамики систем Нижегородского государственного университета имени Лобачевского.

- Проведена переписка с профессором теории управления и динамики систем Нижегородского государственного университета имени Лобачевского Григорием Владимировичем Осиповым.

- Проведено выступление на VIII Всероссийской научной студенческой конференции НИУ ВШЭ — Нижний Новгород (Зусман Валерий Григорьевич - председатель комитета).

- Проведено выступление на XII Всероссийской Научно-практической конференции с международным участием «Наука настоящего и будущего» для студентов, аспирантов и молодых ученых, секция «Алгоритмическая математика», где был получен диплом 1 степени.

Таким образом, по результатам поиска в сети Интернет и тематических научных базах, а также обсуждений с указанными выше специалистами следует, что, по-видимому, представленный в моей выпускной квалификационной работе указанный выше математический материал действительно является новым.

Подтверждаю, что являюсь автором предоставляемой на Смотр работы и прошу принять её для участия в Смотре. Принимаю на себя обязательство соблюдать правила Смотра. Также (в соответствии с п. 4 Положения о Смотре) принимаю на себя обязательство оценить 5 работ участников Смотра, выданных мне Оргкомитетом в результате жеребьёвки и сверх того оценить 2-5 работ других участников Смотра на мой выбор. Я понимаю правила оценки работ, приведённые в п. 4.3 Положения о Смотре. Даю согласие на публикацию адреса моей электронной почты.

Защита работы состоялась 25.06.2023. На Смотр представлен текст работы.



Рябов Кирилл Сергеевич  
4 июня 2024 г. Нижний Новгород, Россия

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Национальный исследовательский  
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского»  
(ННГУ)

Институт информационных технологий математики и механики

Кафедра теории управления и динамики систем

Направление подготовки: «Прикладная математика и информатика»

**ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА  
БАКАЛАВРА**

Тема:

**Синхронизация в мультиплексных сетях фазовых осцилляторов:  
учет взаимодействий высокого порядка**

**Выполнил:**

студент группы 381903-2

Рябов Кирилл Сергеевич

---

Подпись

**Научный руководитель:**

доцент каф. ТУиДС, к.ф.-м.н

Лаптева Татьяна Владимировна

---

Подпись

Нижний Новгород

2023

## Содержание

<b>1</b>	<b>Аннотация</b> . . . . .	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Постановка задачи</b> . . . . .	<b>4</b>
<b>3</b>	<b>Введение</b> . . . . .	<b>5</b>
3.1	Актуальность задачи . . . . .	5
3.2	Нейро-глиальные сети . . . . .	5
<b>4</b>	<b>Теория</b> . . . . .	<b>6</b>
4.1	Нейро-глиальные сети . . . . .	6
4.2	Нейронные сети . . . . .	6
4.3	Гистерезис . . . . .	8
4.4	Глиальные сети . . . . .	9
<b>5</b>	<b>Обзор литературы</b> . . . . .	<b>11</b>
<b>6</b>	<b>Численные результаты</b> . . . . .	<b>12</b>
6.1	Нейронная сеть с симплексами первого порядка . . . . .	13
6.2	Нейронная сеть с симплексами второго порядка . . . . .	17
6.2.1	Явление гистерезиса . . . . .	18
6.3	Глиальная сеть . . . . .	19
<b>7</b>	<b>Заключение</b> . . . . .	<b>21</b>
7.1	Полученные результаты . . . . .	21
7.2	Дальнейшее развитие . . . . .	21
<b>8</b>	<b>Список литературы</b> . . . . .	<b>22</b>

## 1 Аннотация

В современном мире процессы синхронизации становятся неотъемлемой частью широкого спектра научных исследований. Они могут быть полезны в физике, нейробиологии, в искусственных и природных системах. К таким можно отнести, например, работу мозга человека. В рамках этой работы мы рассмотрим влияние связи обоих слоев на синхронизацию в мультиплексных сетях фазовых осцилляторов. В ходе работы будут исследованы, а затем реализованы алгоритмы для этого. В процессе исследования разработана программа, имитирующая нейро-глиальные сети. В глиальной сети элементы образуют между собой упорядоченную двумерную решетку, в которой каждый элемент связан с тремя соседями, поскольку глиии не имеют дальнедействующих связей. Связи между нейронами представлены случайным графом. В ходе выполнения работы были разработаны программы моделирующие синхронизацию, каждого из слоев мультиплексной сети, приведены физические и биологические объяснения возникающим явлениям.

## 2 Постановка задачи

Целью работы является разработка программного решения для моделирования мультиплексной сети фазовых осцилляторов. Для этого необходимо исследовать строение и функции нейронной и глиальной сети. Изучить природу передачи импульсов них. Исследовать математическую модель нейроно-глиальной сети, и, опираясь на научные публикации в данной теме. Отдельно рассмотреть поведение сети нейронов с различными порядками связей. В триплетной связи изучить явление возникновения гистерезиса. Проанализировать глиальные сети на предмет фазовой и частотной синхронизации. Рассмотреть существующие программные решения для данной задачи, понять алгоритмы работы, а также выявить преимущества и недостатки. После чего необходимо проанализировать полученную информацию, а затем реализовать и протестировать собственные эффективные алгоритмы моделирования синхронизации мультиплексной нейроно-глиальной сети.

## 3 Введение

### 3.1 Актуальность задачи

В современном мире процессы синхронизации становятся неотъемлемой частью широкого спектра научных исследований. Они могут быть полезны в физике, нейробиологии, в искусственных и природных системах. К таким можно отнести, например, работу мозга человека. Значительная роль синхронизации в процессах передачи и обработки информации придает важность данной задаче. Важно отметить, что бурное развитие вычислительных мощностей в совокупности с математическим аппаратом, в том числе и физическим, дают огромный толчок в понимании процессов синхронизации.

### 3.2 Нейро-глиальные сети

В данной работе будет рассматриваться вопрос синхронизации мультиплексной нейрон-глиальной сети. Для этого необходимо отдельно рассмотреть глиальную и нейронную сеть. Наиболее популярная математическая модель для этого - модель Курамото. Она описывает поведение большого числа связанных друг с другом осцилляторов. А именно сеть глобальных связанных осцилляторов - все со всеми. За последние несколько лет особенно успешным было исследование в понимании фазовой синхронизации многослойных глобально связанных ансамблей Курамото с различным частотным распределением [1-6]. В данной работе будет исследовано явление синхронизации в сети фазовых осцилляторов, моделирующей активность нейронного слоя сети. Так же будет рассмотрена и глиальная сеть. Для рассмотрения будет использована модель, в которой нейронный слой представляет из себя граф со случайно сгенерированными связями. Подобная сеть может быть сгенерирована при помощи модели Эрдеша-Реньи [7]. Мы будем исследовать доведение симплексов первого и второго порядка сетей осцилляторов с различным распределением частот. Рассмотрим явление гистерезиса в нейронных сетях с симплексами второго порядка. Отдельный интерес представляют глиальные сети, в которых мы займемся вопросами отыскания частотной и фазовой характеристик.

## 4 Теория

### 4.1 Нейро-глиальные сети

В данной работе будет рассмотрено поведение нейрон-глиальной сети. Непосредственно будет произведена разработка алгоритмов и исследовании математических моделей отдельных систем клеток с различной конфигурацией взаимодействий между элементами. Модели представляют собой нелинейные системы дифференциальных уравнений.

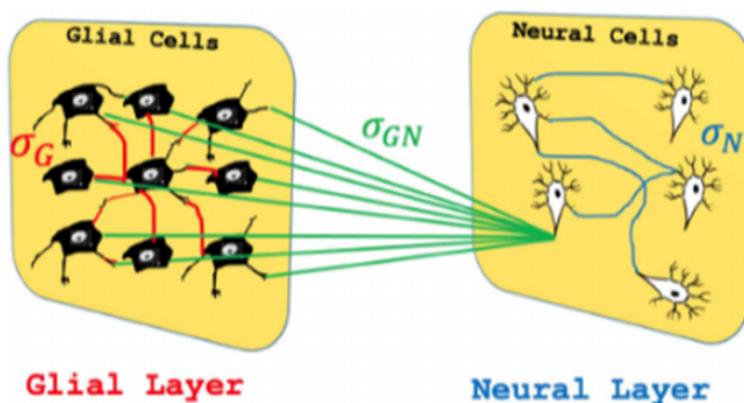


Figure 1. Модель нейро-глиальной сети.

Как мы видим, мультиплексная сеть состоит из нейронной сети, мультиплексной и связи между ними. Для полного анализа необходимо отдельно исследовать каждый слой на предмет синхронизации, и только после этого заняться отысканием синхронизации в нейро-глиальных сетях.

### 4.2 Нейронные сети

Под синхронизацией мы будем понимать подстройку ритмов осцилляторов за счет взаимодействия между ними [9].

Мы будем изучать нейронный слой клеток, который содержит  $N \times N$  узлов. Рассмотрим несколько вариантов связи: для каждой пары узлов будем генерировать случайное число  $P$ , которое будет принимать значения от 0 до 1. Будем сравнивать это число с заданным значением вероятности связи между парой нейронов, относительно это будет делать

вывод о необходимости создания ребра связи между ними. Таким образом, связи среди нейронных узлов в сети моделируются случайной сетью Эрдеша-Реньи. Так же возможен вариант, где осцилляторы связаны все со всеми, который еще называют сетью глобальных осцилляторов. Мы не можем упорядочить все нейроны в упорядоченную двумерную решетку, так как в них присутствует и близкодействующая и дальнедействующая связь.

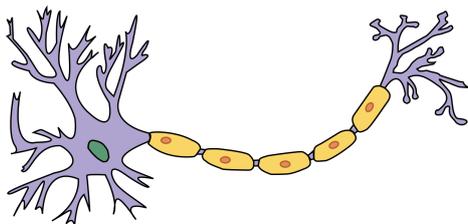


Figure 2. Модель нейрона с дендритами и аксонами.

Поэтому прибегнем к понятию симплекса. Симплексами будем называть  $n$ -мерное обобщение треугольника. Таким образом, симплексом первого порядка будет называть отрезок, а симплексом второго порядка-треугольник. Приведем соответствующие примеры.



Figure 3. Симплекс первого порядка- отрезок.

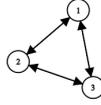


Figure 4. Симплекс второго порядка- треугольник.

Запишем уравнение, которое задает динамику изменения узлов в нейронном слое с течением времени [9]:

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + \frac{K1}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\theta_j - \theta_i) + \frac{K2}{N^2} \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \sin(2\theta_j - \theta_k - \theta_i). \quad (1)$$

В данной формуле  $\theta_i$  - фаза и  $\omega_i$  - частота  $i$ -го осциллятора,  $k$ - сила связи между элементами. Будет использовать симплексы до 2го порядка включительно, так вклад вклад симплексов более высоких связей не вносит значительный вклад.

Будем разделять фазовую синхронизацию, критерием которого будет являться параметр порядка, и частотную, критерий которой есть разброс частот. Так же приведем выражение для подсчета параметра порядка:

$$r = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N e^{i\theta_i}, \quad (2)$$

если мы получили,  $r = 0$ , значит нет фазовой синхронизации, а случай  $r = 1$  соответствует случаю фазовой синхронизации осцилляторов. Но принимать значения он может любые из отрезка  $[0; 1]$ .

Разброс частот:

$$\Delta\Omega = \frac{\Theta_i(t) - \Theta_i(t_0)}{t - t_0}, \quad (3)$$

где  $t_0$  -значение времени достаточно большое, чтобы переходные процессы закончились.

### 4.3 Гистерезис

Явление гистерезиса можно встретить в различных науках: физики, биологии или механики. На данный момент известен целый ряд явлений, в которых можно встретить

кривую, которую называют петлей гистерезиса. Непосредственно гистерезисом будем называть свойство систем, которое заключается в том, что отклик на приложенное воздействие может зависеть от ее текущего состояния. При этом изменение системы на временном интервале зависит от предыстории, от состояний в которых система находилась до этого. Математический аппарат исследования данного вопроса позволяет применить функционально-аналитические методы в исследованиях вопросах как анализ устойчивости и абсолютной устойчивости периодических колебаний. При интегрировании системы в прямом и в обратном времени характерна так несимметричность полученных кривых.

Явление возникновения гистерезиса характерно только для нейронных сетей с симплексами второго порядка, так как в графике их частотной синхронизации происходит скачковый переход первого порядка. Отличительной чертой этих сетей можно назвать свойство адаптивности межэлементных взаимодействий, которое заключается в динамическом изменении силы связи между элементами сети в зависимости от их текущих состояний. При дуплетной связи переход происходит плавно, поэтому в этом случае гистерезис отсутствует.

#### 4.4 Глиальные сети

Глиальные клетки - это клетки, вспомогательные в нервной ткани. Они образуют такое окружение клеток нейронного слоя, которое благоприятствует передаче и генерации импульсов.

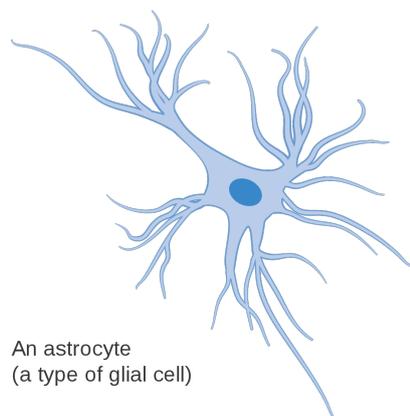


Figure 5. Модель клетки астроцита (тип глиальной клетки).

Элементы глиального слоя находятся в ячейках сетки упорядоченной двумерной

решетки. Каждый из элементов строки связан с каждым из глий последующей строки. Следовательно, можем сказать, что образуется структура, которая благоприятствует движению сигнала по решетке в сторону увеличения индексов. При моделировании будем использовать самую понятную модель квадратную модель сетки, где каждый узел взаимодействует только с ближайшими четырьмя соседями, если он не относится к так называемому граничному слою (тогда у него возможно 2 или 3 соседа).

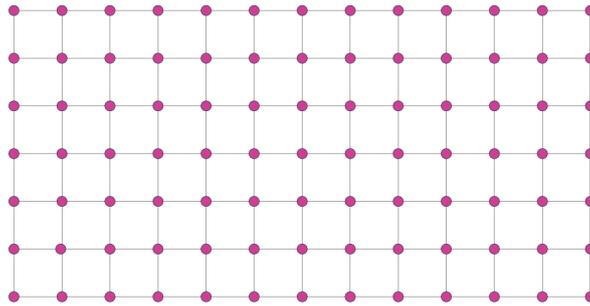


Figure 6. Упорядоченная двумерная сетка.

Мы можем так поступить, поскольку, в отличие от нейронов, глии обладают только близкодействующими связями. Уравнение изменение динамики будет очень похоже на уравнение для нейронного слоя, с тем лишь изменением, что тут представлена связь не каждый с каждым, а с конкретными соседями:

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + \sum_{j=1}^N \sigma_{ij} \sin(\theta_j - \theta_i). \quad (4)$$

В данной формуле  $\theta_i$  - фаза и  $\omega_i$  - частота  $i$ -го осциллятора,  $k$ - сила связи между элементами.

## 5 Обзор литературы

У вопросов исследования мультиплексных сетей богатая история. В нелинейной динамике исследование устойчивости различных систем является одним из самых важных аспектов. Одной из главных работ в этом направлении можно считать работу А. Уинфри [12], который в 1967 предложил новый подход для описания явлений синхронизации в больших ансамблях осцилляторов. Он предположил, что динамика каждого элемента через среднее поле сводится к описанию, где используется всего одна фазовая переменная. Данную концепцию развил Курамото [13,14], который предложил наиболее удобную для описания модель (1) для исследования процессов синхронизации в больших ансамблях взаимосвязанных осцилляторов.

Непосредственно вопросы синхронизации мультиплексных сетей начали развиваться достаточно активно за последние несколько лет. В статье [10] поднимается вопрос исследования взаимного поведения нейрон-глиальной сети. В нейронной сети для рассмотрения была использована модель, в которой нейронный слой представляет из себя граф со случайно сгенерированными связями. Подобная сеть может быть сгенерирована при помощи модели Уоттса–Строгаца (от регулярных и малых до случайных графов Эрдеша–Рени). Связь в глиальной сети была задана двумерной упорядоченной периодической структурой, в которой каждый элемент был связан с восемью соседними. Было обнаружено, что при взаимодействии обоих слоев мультиплексной сети нейронный взаимодействия пытаются помешать синхронизации, но глиальный слой препятствует этому.

В статье [11] авторами поднимался вопрос взаимодействия высшего порядка между связанными фазовыми осцилляторами. Было установлено, что эти взаимодействия приводят к нелинейности, которая, вызывает резкие переходы синхронизации через гистерезис. Исследования показали, что взаимодействия высокого порядка способствуют стабилизации даже в ситуациях, когда попарная связь приводит к отталкиванию.

## 6 Численные результаты

Для проведения численных исследований необходимо задать начальные распределения в формуле (1). Будем использовать исследующие фазы  $\omega$  будут распределены по Коши с параметрами  $(0, 0.5)$ , а частоты  $\theta$ , в свою очередь, будут распределены равномерно в пределах от 0 до  $2\pi$ .

Приведем соответствующие формулы:

1) Распределение по Коши имеет следующую формулу распределения:

$$F(x) = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg}\left(\frac{x - x_0}{\gamma}\right) + \frac{1}{2}, \quad (5)$$

2) Плотность распределения Коши будем искать по формуле:

$$f(x) = \frac{1}{\pi\gamma\left(1 + \left(\frac{x-x_0}{\gamma}\right)^2\right)}, \quad (6)$$

3) Нормальное распределение имеет следующий вид:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right), \quad (7)$$

4) Плотность нормального распределения:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right). \quad (8)$$

Где

$$\sigma = 1, \mu = 0, \gamma = 0.5, x_0 = 0. \quad (9)$$

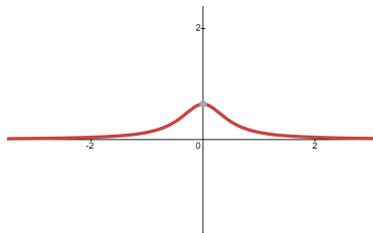


Figure 7. Распределение Коши при заданных параметрах.

## 6.1 Нейронная сеть с симплексами первого порядка

Теперь займемся отысканием режима синхронизации в нейронных сетях с симплексами первого порядка. Для этого в формуле (1) необходимо параметр  $K_2$  принять равным нулю, так как симплексы второго порядка в данной части работы мы в расчет не берем.

Первую часть исследований проведем с количеством осцилляторов  $N = 25$ , то есть количество узлов 625. Приведем график распределения частот.

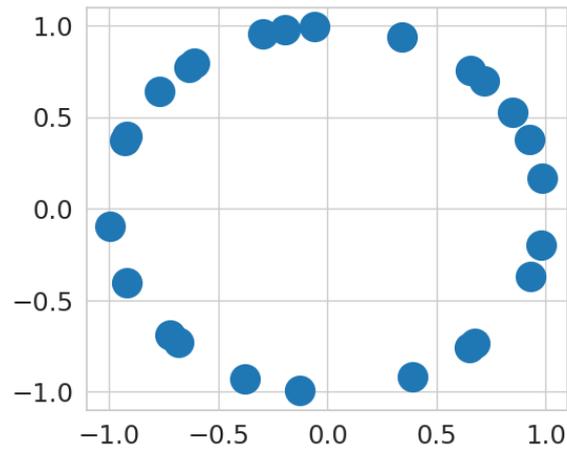


Figure 8. Распределение фаз при  $N=25$ .

Для того, чтобы найти условие возникновения синхронного режима нашей модели проведём численное интегрирование системы методом Рунге-Кутты 4го порядка: шаг по времени  $dt = 0.01$  на времени  $T = 1000$ .

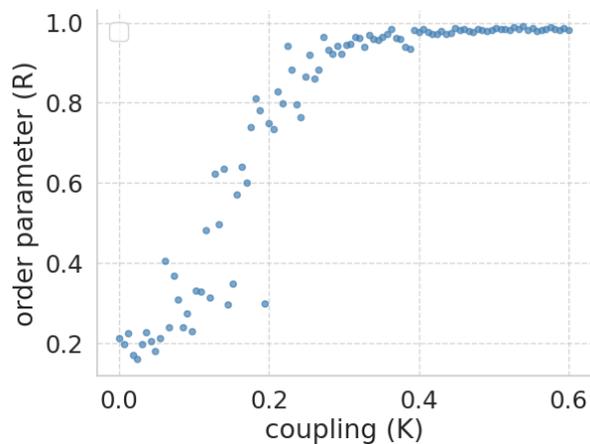


Figure 9. Изменение параметра порядка при  $N=25$  от параметра  $K$  в связях с симплексами первого порядка.

Как мы видим, осцилляторы можно явным образом разделить на 2 кластера: те, где синхронизация произошла, и где ее нет. Переход происходит достаточно плавно, но есть некоторый разброс точек. Для того, что бы переход был виден более ярко - многократно, а конкретно в 10 раз увеличим число осцилляторов. Приведем график распределения частот при новом  $N = 250$

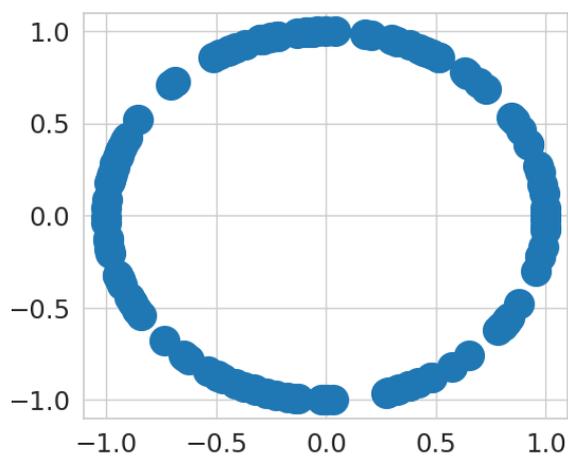


Figure 10. Распределение фаз при  $N=250$ .

Теперь проведем численное интегрирование системы методом Рунге-Кутты 4го порядка с теми же параметрами (шаг  $dt = 0.01$ , на времени  $T = 1000$ ).

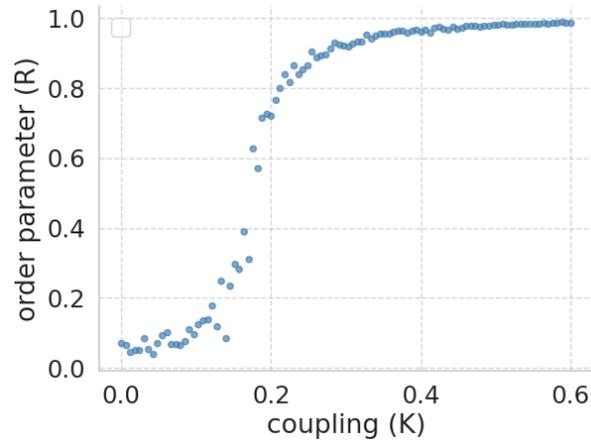


Figure 11. Изменение параметра порядка при  $N=250$  от параметра  $K_1$  в связях с симплексами первого порядка.

Как мы видим, переход стал еще более плавный. Это переход от асинхронной динамики элементов сети к полностью синхронному поведению в смысле фазовой хаотической синхронизации, который происходит постепенно, когда по мере увеличения силы связи между отдельными элементами сети все большее и большее количество осцилляторов становятся синхронизованны. Мы видим, что есть области без синхронизации и с синхронными фазами. Точка перехода близка к 0.2. При меньших значениях осцилляторы не синхронизируются, при больших - значительная часть ансамбля синхронна.

Теперь приведем эти кривые на одном графике и добавим промежуточное значение  $N = 125$ . Интегрирование проводим методом Рунге-Кутты с теми же параметрами.

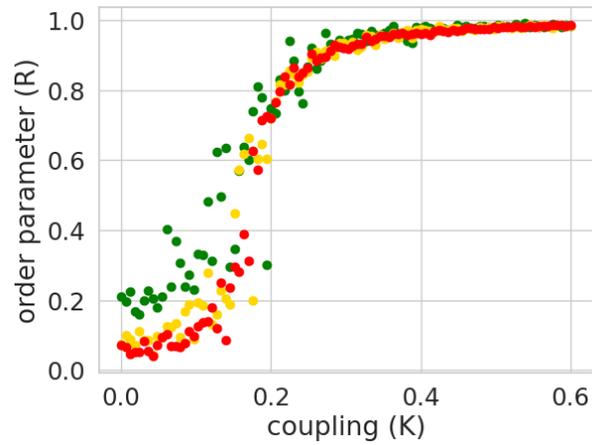


Figure 12. Изменение параметра порядка при  $N=25$ ,  $N=125$ ,  $N=250$  от параметра  $K$  в связях с симплексами первого порядка.

Желтой кривой обозначена кривая при  $N = 125$ , зеленой -  $N = 25$  и красной при  $N = 250$ . На фоне других кривых, видим, что зеленая в зеленой кривой ансамбль асинхронных осцилляторов достаточно широкий, точки расположены далеко друг от друга. В желтой кривой уже более явно можно заметить переход Курамото. В свою очередь, в красной кривой оба кластера просматриваются достаточно явно.

## 6.2 Нейронная сеть с симплексами второго порядка

Теперь изучим задачу поиска синхронизации в нейронных сетях с симплексами второго порядка. Возьмем  $N = 25$ , как и в предыдущих численных экспериментах. Для этого в уравнении (1) параметр  $K_2$  примем равным 0.15. Проведя интегрирование методом Рунге-Кутты четвертого порядка при параметре шага  $dt = 0.01$  на времени  $T = 1000$  получим следующую картину.

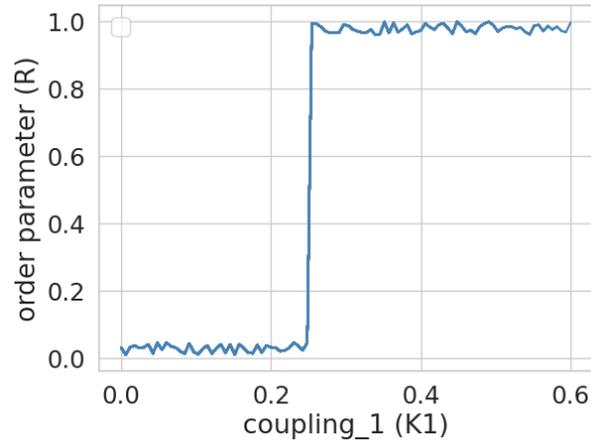


Figure 13. Изменение параметра порядка при  $N=25$  от параметра  $K_1$  в связях с симплексами второго порядка.

Видим, что в отличие от симплексов первого порядка, тут переход происходит не так плавно (скачком). Резко возникает бассейн глобально синхронизованных осцилляторов. Для подобного типа связей характерно явление гистерезиса, которые мы и рассмотрим ниже.

### 6.2.1 Явление гистерезиса

Для построения петли гистерезиса возьмем нейронную сеть с симплексами второго порядка при значении  $N = 25$ , параметр  $K_2 = 0.15$ . При построении графика 13 возьмем массив значений параметра  $K_1$ . Проинтегрируем тем же методом со все теми же параметрами в прямом и в обратном времени. Получим график 14.

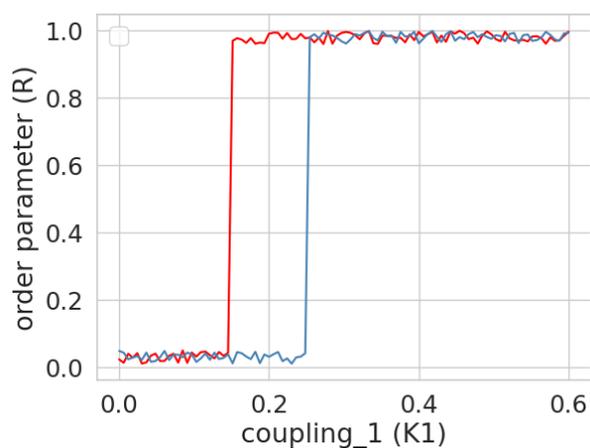


Figure 14. Явление гистерезиса в сетях с симплексами второго порядка.

Кривую полученную при интегрировании изобразим синим цветом, при интегрировании в обратном цвете обозначим красным. Мы видим, что значение параметра  $K_1$ , при котором происходит скачковый переход, отличается. На красной прямой он находится левее относительно синей.

### 6.3 Глиальная сеть

Теперь займемся рассмотрением вопроса отыскания режима синхронизации в глиальных сетях. Для этого воспользуемся формулой (4). Сначала попробуем найти частотную синхронизацию. Для этого проведем интегрирование при тех же параметрах, зафиксируем число элементов  $N = 25$ . Получим график 15.

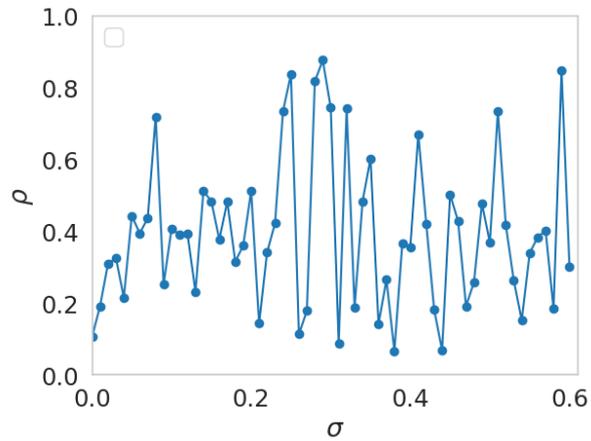


Figure 15. Изменение параметра порядка при  $N=25$  от параметра  $\sigma$  в глиальных связях.

Как мы видим, фазовая синхронизация в глиальном слое отсутствует. Теперь попробуем отыскать частотную синхронизацию, проинтегрировав систему (4).

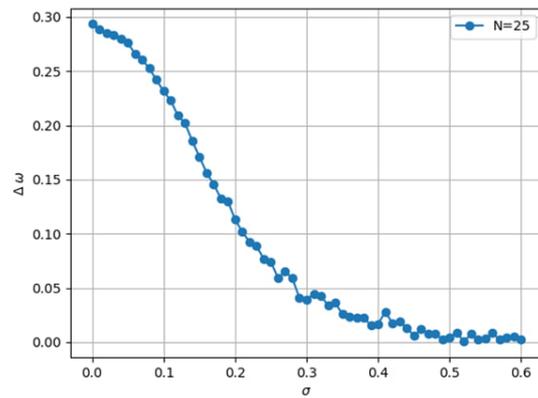


Figure 16. Частотная синхронизация при  $N=25$  в глиальной сети.

Как мы видим, в глиальной сети частотная синхронизация присутствует.

## 7 Заключение

### 7.1 Полученные результаты

В заключении данной работы стоит отметить, что большинство поставленных задач было выполнено. Проведено исследование математической модели мультиплексной сети связанных осцилляторов. Отдельно были рассмотрены вопросы синхронизации в каждом слое нейрон-глиальной сети.

В нейронной сети были рассмотрены несколько различных вариантов симплекс связей между элементами. При дуплетной связи мы столкнулись с эффектом перехода Курамото (переход второго рода), рассмотрели поведение ансамблей различной численности. Было обнаружено, что при увеличении числа связанных друг с другом осцилляторов точка перехода ставится значительно более видимой, переход становится более четким. В триплетной связи мы увидели совершенно другую картину. Переход стал происходить иначе, происходил скачкообразный переход первого рода. Столкнулись с эффектом гистерезиса, привели соответствующую теорию, графически изобразили петлю гистерезиса в данном процессе.

В рассмотрении так же была и глиальная сеть, которая представлена упорядоченной двумерной сетью, где у каждого элемента четыре соседа. Рассмотрели вопросы фазовой и частотной синхронизации в данном слое. Было замечено, что фазовая синхронизация отсутствует, в отличие от частотной. При написании программного кода исследования нейрон-мультиплексной сети, я столкнулся с проблемой большого ресурсопотребления кода.

### 7.2 Дальнейшее развитие

В ходе дальнейшего развития решения задачи синхронизации в мультиплексных сетях можно реализовать несколько новых алгоритмов.

В нейронном слое возможно рассмотрение различных начальных распределений фаз и частот. Интересно изучить симплексную связь еще более высокого порядка, чем третий, отследить какой вклад это вносит в синхронизацию отдельного слоя и всей сети. Можно изменить структуру связи и рассмотреть матрицу связи, где нейроны связаны не все со всеми. В глиальном слое перспективу имеет рассмотрение большего числа соседей. Поскольку программы для численного анализа достаточно ресурсоемкие необходимо заняться оптимизацией кода: изменением структуры хранения и обработки данных, улучшением времени работы программы распараллеливание процессов на разные ядра для значительного улучшения работы кода и улучшением времени работы программы.

## 8 Список литературы

- [1] M. Komarov and A. Pikovsky, Phys. Rev. E 92, 012906 (2015).
- [2] S. Lück and A. Pikovsky, Phys. Lett. A 375, 2714 (2011).
- [3] M. Komarov and A. Pikovsky, Phys. Rev. Lett. 110, 134101 (2013).
- [4] Y. Terada and T. Aoyagi, Phys. Rev. E 94, 012213 (2016).
- [5] B. Pietras, N. Deschle, and A. Daffertshofer, Phys. Rev. E 94, 052211 (2016).
- [6] D. Papo, M. Zanin, J. A. Pineda-Pardo, S. Boccaletti, and J. M. Buldu, Phil. Trans. R. Soc. B 369, 20130525 (2014). [7] R. Albert and A.-L. Barabasi, Rev. Mod. Phys. 74, 47 (2002).
- [8] S. Makovkin, A. Kumar, A. Zaikin, S. Jalan, M. Ivanchenko Multiplexing topologies and time scales: The gains and losses of synchrony. Phys. Rev. E 96, 052214 (2017).
- [9] A. Pikovsky, M. Rosenblum, Y. Kubota Sync. Fundamental nonlinear phenomenon. M: Tekhnosfera, 2003.
- [10] Sergey Makovkin, Tetyana Lapyteva, Sarika Jalan, Mikhail Ivanchenko. Synchronization in multiplex models of neuron–glial systems: Small-world topology and inhibitory coupling, 2021.
- [11] Per Sebastian Skardal, Alex Arenas. Higher order interactions in complex networks of phase oscillators promote abrupt synchronization switching, 2020.
- [12] Winfree A.T. Biological rhythms and the behavior of populations of coupled oscillators J. Theor. Biol. 1967. Vol. 16, P. 15–42.
- [13] Kuramoto Y. Self-entrainment of a population of coupled non-linear oscillators In: Araki H, editor. International Symposium on Mathematical Problems in Theoretical Physics, Lecture Notes in Physics. Berlin: Springer-Verlag, 1975. P. 420–422.
- [14] Kuramoto Y. Chemical Oscillations, Waves and Turbulence. Berlin: Springer-Verlag, 1984

Приложение  
(пример заполнения см. ниже)

В Оргкомитет Смотра дипломных работ математиков России

от Сараева Ильи  
Александровича

Заявление о новизне

Сообщаю, что новыми в моей представленной на Смотр выпускной квалификационной работе (далее - работа) под названием "О топологической классификации градиентно-подобных потоков на четырехмерных многообразиях" являются: Предложения 1 – 5, 8, 9; Теоремы 1, 2; Леммы 1 – 4; Следствия 1, 2.

Также сообщаю, что для проверки новизны мною было проделано следующее:

- Проверка работы на антиплагиат в сервисе [https://bpm.hse.ru/Runtime/Runtime/Form/AP\\_f\\_Request/](https://bpm.hse.ru/Runtime/Runtime/Form/AP_f_Request/)

- Проведена серия консультаций с моим научным руководителем Еленой Яковлевной Гуревич, доцентом кафедры фундаментальной математики, информатики и компьютерных наук НИУ ВШЭ в Нижнем Новгороде.
- Проведено выступление на научной конференции "Dynamics in Siberia – 2024" и на научном семинаре Международной Лаборатории Динамических Систем и Приложений.

Таким образом, по результатам отчета системы Антиплагиат, а также обсуждений с указанными выше специалистами следует, что, по-видимому, представленный в моей выпускной квалификационной работе указанный выше математический материал действительно является новым.

Подтверждаю, что являюсь автором предоставляемой на Смотр работы и прошу принять её для участия в Смотре. Принимаю на себя обязательство соблюдать правила Смотра. Также (в соответствии с п. 4 Положения о Смотре) принимаю на себя обязательство оценить 5 работ участников Смотра, выданных мне Оргкомитетом в результате жеребьёвки и сверх того оценить 2-5 работ других участников Смотра на мой выбор. Я понимаю правила оценки работ, приведённые в п. 4.3 Положения о Смотре. Даю согласие на публикацию адреса моей электронной почты.

Защита работы состоится/состоялась 10.06.2024. На Смотр представлен проект текста/окончательный текст работы.

Подпись



Сараев Илья  
Александрович  
13.06.2024

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ»

Факультет информатики, математики и компьютерных наук  
Программа подготовки бакалавров по направлению  
01.03.01 Математика

*Сараев Илья Александрович*

**ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА**

О ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ КЛАССИФИКАЦИИ ГРАДИЕНТНО-ПОДОВНЫХ ПОТОКОВ  
НА ЧЕТЫРЕХМЕРНЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

Рецензент  
доцент кафедры ДУМЧА  
ННГУ им. Н.И. Лобачевского,  
к. ф.-м. н. Т. М. Митрякова

Научный руководитель  
кандидат физ.-мат. наук, доцент  
Е. Я. Гуревич

Нижний Новгород, 2024 г.

## Содержание

<b>Введение</b>	<b>2</b>
<b>1 Вспомогательные факты</b>	<b>5</b>
1.1 Обозначения . . . . .	5
1.2 Топология . . . . .	6
1.2.1 Вложения многообразий . . . . .	6
1.2.2 Ориентации компактных многообразий . . . . .	6
1.2.3 Склеивание многообразий и связные суммы . . . . .	8
1.2.4 Узлы на трехмерной сфере и приклеивание ручек . . . . .	9
1.2.5 Хирургия Дена на трехмерной сфере и Диаграмма Кирби четырехмерного многообразия . . . . .	12
1.2.6 Форма пересечений четырехмерного многообразия . . . . .	16
1.2.7 Продолжение гомеоморфизмов . . . . .	19
1.3 Динамика . . . . .	20
1.3.1 Энергетическая функция градиентно-подобного потока . . . . .	20
1.3.2 Компактная каноническая окрестность седлового состояния равновесия	21
<b>2 Диаграмма Кирби потока <math>f^t \in G_{g,k}(M^4)</math></b>	<b>22</b>
<b>3 Оснащенный граф потока <math>f^t \in G_{g,k}</math></b>	<b>28</b>
3.1 Взаимосвязь оснащенного графа и диаграммы Кирби потока $f^t \in G_{g,k}(M^4)$ . .	29
3.2 Оснащенный граф – полный инвариант в классе $G_*(M^4)$ . . . . .	30
<b>References</b>	<b>31</b>

## Введение

Пусть  $M^n$  – связное замкнутое гладкое  $n$ -мерное многообразие. Поток  $f^t$  на  $M^n$  называется *градиентно-подобным*, если его неблуждающее множество  $\Omega_{f^t}$  состоит из конечного числа гиперболических состояний равновесия, а инвариантные многообразия пересекаются трансверсально. Обозначим за  $G(M^n)$  класс градиентно-подобных потоков на  $M^n$ . Будем говорить, что гиперболическое состояние равновесия  $p \in \Omega_{f^t}$  имеет тип  $(i, n - i)$ ,  $i \in \{0, \dots, n\}$ , если  $\dim W_p^u = i$ . Состояние равновесия потока  $f^t \in G(M^n)$  типа  $(0, n)$  называется *стоковым*, типа  $(n, 0)$  – *источниковым* и другие – *седловыми*. Градиентно-подобный поток, неблуждающее множество которого содержит в точности одно стоковое и одно источниковое состояние равновесия, называется *полярным*.

Проблема топологической классификации градиентно-подобных потоков исчерпывающе решена в классе  $G(M^n)$  для  $n = 1, 2, 3$ . Классификация потоков класса  $G(M^1)$  непосредственно следует из классификации грубых преобразований окружности, полученной А.Г. Майером в работе [1]. В работах [2], [3] Е.А. Леонтович и А.Г. Майером получена классификация градиентно-подобных потоков на сфере  $S^2$ . Позднее, в работе [4] М. Пейкшото обобщил этот результат на класс градиентно-подобных потоков на произвольных замкнутых поверхностях.

Если градиентно-подобный поток задан на многообразии размерности три и выше, то инвариантные многообразия различных седловых состояний равновесия могут пересекаться. Такие пересечения называются *гетероклиническими*. Из-за такого эффекта класс  $G(M^n)$ ,  $n \geq 3$  требует более тонких инвариантов. В работах [5], [6] Я.Л. Уманским и Г.М. Флейтасом получена классификация потоков из  $G(M^3)$  при условии, что  $M^3$  ориентируемо и число гетероклинических пересечений конечно.

В работе [7] С.Ю. Пилюгина получена полная классификация градиентно-подобных потоков без гетероклинических пересечений на сфере  $S^n$ ,  $n \geq 3$ , а в работе [8] – на связной сумме сферы и произвольного конечного числа копий  $S^{n-1} \times S^1$ . Согласно [7], [9, Теорема 1] у таких потоков все седловые состояния равновесия имеют тип  $(1, n - 1)$  или  $(n - 1, 1)$ .

В перечисленных работах класс топологической эквивалентности потока может быть описан с помощью комбинаторного инварианта, описывающего взаимное расположение замыканий инвариантных многообразий коразмерности 1, делящих фазовое пространство на области с одинаковым асимптотическим поведением траекторий. Градиентно-подобные потоки на многообразиях размерностей  $n \geq 4$  могут иметь седловые состояния равновесия типов, отличных от  $(1, n - 1)$ ,  $(n - 1, 1)$  и замыкания инвариантных многообразий таких седловых состояний равновесия не делят несущее многообразие даже локально. Этот эффект принципиально препятствует получению комбинаторного инварианта для потоков из класса  $G(M^n)$  при  $n \geq 4$ . Как показано в [10, Раздел 3.3], вложение сепаратрис коразмерности два потока не определяет даже топологию несущего многообразия. Эти факты, наряду с возрастающей сложностью топологических задач, возникающих при изучении динамики многомерных потоков, по-видимому, объясняет небольшое количество известных классификационных результатов. Среди этих результатов отметим работы [11], [12] Е.В. Жужомы, В.С. Медведева,

в которых доказано, что все полярные потоки с одним седлом на четырехмерных многообразиях топологически эквивалентны, при этом седло имеет тип  $(2, 2)$ . В [10] получена топологическая классификация полярных потоков из класса  $G(M^4)$  с произвольным числом седел типа  $(2, 2)$ . В качестве инварианта для такого класса потоков авторы использовали *диаграмму Кирби* — инвариант, описывающий разбиение на ручки гладких четырехмерных многообразий, введенный Р. Кирби и Е. де Са в [13], [14].

Настоящая работа является естественным продолжением работ [8], [10] и расширяет инвариант, имеющийся для полярных потоков на более общий класс  $G_*(M^4)$  градиентно-подобных потоков без гетероклинических пересечений, заданных на ориентируемом многообразии  $M^4$ . Прежде чем перейти к точной формулировке результатов, приведем известные факты о топологии многообразия, допускающего потоки из класса  $G_*(M^4)$ .

Для  $n \geq 3$ ,  $i \in \{0, \dots, n\}$  обозначим за  $k_i$  число состояний равновесия потока  $f^t \in G_*(M^n)$  типа  $(i, n - i)$ ,

$$g_{f^t} = \frac{k_1 + k_{n-1} - k_0 - k_n + 2}{2}.$$

Следующая теорема, доказанная в [15, Теорема 1], устанавливает связь между структурой неблуждающего множества потока  $f^t \in G_*(M^n)$  и топологией несущего четырехмерного многообразия  $M^n$ .

**Утверждение 1.** Пусть  $f^t \in G_*(M^n)$ . Тогда  $g_{f^t}$  — целое неотрицательное число и  $M^n$  гомеоморфно связной сумме

$$\underbrace{(\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1) \# \dots \# (\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1) \# N^n}_{g_{f^t}} \quad (1)$$

$g_{f^t}$  копий прямого произведения  $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$  и односвязного замкнутого многообразия  $N^n$ , допускающего полярный поток без седловых состояний равновесия  $(1, n - 1)$  и  $(n - 1, 1)$ .

Благодаря замечательным классификационным результатам М. Фридмана [16], В.А. Рохлина [17], С. Дональдсона [18] и М. Фуруты [19] односвязных замкнутых четырехмерных многообразий, топологию слагаемого  $N^4$  в связной сумме 1 можно значительно уточнить.

**Предложение 1.** Пусть  $N^4$  допускает полярный поток  $f^t$  без седел типов  $(1, 3)$ ,  $(3, 1)$ . Тогда  $N^4$  гомеоморфно одному из следующих попарно негомеоморфных многообразий:

1. сфера  $\mathbb{S}^4$  тогда и только тогда, когда  $k_2 = 0$ ;
2. связная сумма  $m_1$  копий  $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$  и  $m_2$  копий  $-\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ , где  $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ ,  $-\mathbb{C}\mathbb{P}^2$  — комплексная проективная плоскость с противоположными ориентациями,  $m_1^2 + m_2^2 \neq 0$  и  $m_1 + m_2 = k_2$ ;
3. связная сумма  $2m_1$  копий  $E_8$ -многообразий Фридмана и  $m_2 \geq 2m_1 + 1$  копий  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ ,  $m_1 \geq 0$  и  $16m_1 + 2m_2 = k_2$ .

Предложение 1 доказывается в разделе 1.2.6.

Пусть  $f^t \in G_{g,k}(M^4)$ ,  $\mathcal{L}_{f^t}$  – объединение замыканий всех трехмерных инвариантных многообразий седловых состояний равновесия,  $\mathcal{D}_{f^t}$  – множество всех компонент связности пространства  $M^4 \setminus \mathcal{L}_{f^t}$ .

Каждому потоку  $f^t \in G_{g,k}(M^4)$  поставим в соответствие *двухцветный граф*  $\Gamma_{f^t}$  со следующими свойствами:

1. существует взаимно однозначное соответствие  $\xi_0$  между множеством  $V(\Gamma_{f^t})$  вершин графа  $\Gamma_{f^t}$  и множеством  $\mathcal{D}_{f^t}$ ;
2. существует взаимно однозначное соответствие  $\xi_1$  между множеством  $E(\Gamma_{f^t})$  ребер графа  $\Gamma_{f^t}$  и множеством  $\mathcal{L}_{f^t}$ ;
3. вершины  $v_i, v_j \in V(\Gamma_{f^t})$  инцидентны ребру  $e_{i,j} \in E(\Gamma_{f^t})$  тогда и только тогда, когда множество  $\xi_1(e_{i,j}) \in \mathcal{L}_{f^t}$  находится на границе обеих областей  $\xi_0(v_i), \xi_0(v_j) \in \mathcal{D}_{f^t}$ ;
4. ребро  $e \in E(\Gamma_{f^t})$  имеет цвет  $s$ , если  $\xi_1(e)$  – замыкание устойчивой сепаратрисы, и цвет  $u$  – если неустойчивой.

В силу [20, Предложение 3.2] справедливо следующее предложение.

**Утверждение 2.** *Замыкание  $\text{cl } D$  каждой компоненты связности  $D \subset \mathcal{D}_{f^t}$  в  $M^4$  содержит в точности один источник и ровно один сток, при этом хотя бы одно из этих состояний равновесия лежит в  $\text{cl } D \setminus D$ .*

Утверждение 2 позволяет оснастить граф  $\Gamma_{f^t}$  информацией о вложении двумерных инвариантных многообразий. Пусть  $D$  – область, содержащая седла  $\sigma_2^1, \dots, \sigma_2^r$  типа  $(2, 2)$ ,  $\alpha, \omega \subset \text{cl } D$  – источник и сток, соответственно, и  $S_\omega \subset W_\omega^s \setminus \{\omega\}, S_\alpha \subset W_\alpha^u \setminus \{\alpha\}$  – гладко вложенные трехмерные сферы, трансверсальные траекториям  $f^t$ . Пересечения  $B_\alpha, B_\omega$  сфер  $S_\alpha, S_\omega$  с дополнением области  $D$  до всех одномерных инвариантных многообразий седловых состояний равновесия – это открытые трехмерные подмногообразия в  $S_\alpha, S_\omega$ , а сепаратрисы  $W_{\sigma_2^s}^s, W_{\sigma_2^u}^u$ , соответственно, пересекают их по узлам  $l_i^s, l_i^u$ . Пусть  $R_\omega, R_\alpha$  – дополнения до объединения этих узлов на многообразиях  $B_\alpha, B_\omega$ , соответственно. Обозначим за  $\eta_D : R_\alpha \rightarrow R_\omega$  гомеоморфизм, ставящий в соответствие точке  $x \in R_\alpha$  точку пересечения ее траектории  $\mathcal{O}_x$  с  $R_\omega$ . Обозначим за  $\mu_i \subset R_\alpha$  меридиан узла  $l_i^s$  (гладкая замкнутая кривая, ограничивающая диск  $B^2 \subset B_\alpha$ , который трансверсально пересекает  $l_i^s$  в одной точке), положим  $\tilde{l}_i^u = \eta_D(\mu_i)$ .

Объединение  $L_D = \bigcup_{i=1}^r (l_i^u \cup \tilde{l}_i^u) \subset B_\omega$  будем называть *диаграммой Кирби области  $D$* . Вершину  $v \in V(\Gamma_{f^t})$ , соответствующую области  $D = \xi_0(v)$  с седлами типа  $(2, 2)$ , назовем *отмеченной*. К каждой отмеченной вершине  $v$  графа  $\Gamma_{f^t}$  добавим диаграмму Кирби  $L_D$  соответствующей области и назовем граф  $\Gamma_{f^t}$  с диаграммами Кирби *оснащенным графом потока  $f^t$*  (см. рисунок 1). Для оснащенного графа потока  $f^t$  сохраним обозначение  $\Gamma_{f^t}$ .

Будем говорить, что оснащенные графы  $\Gamma_{f^t}, \Gamma_{f^{t'}}$  потоков  $f^t, f^{t'} \in G_{g,k}(M^4)$  *изоморфны*, если выполняются следующие условия:

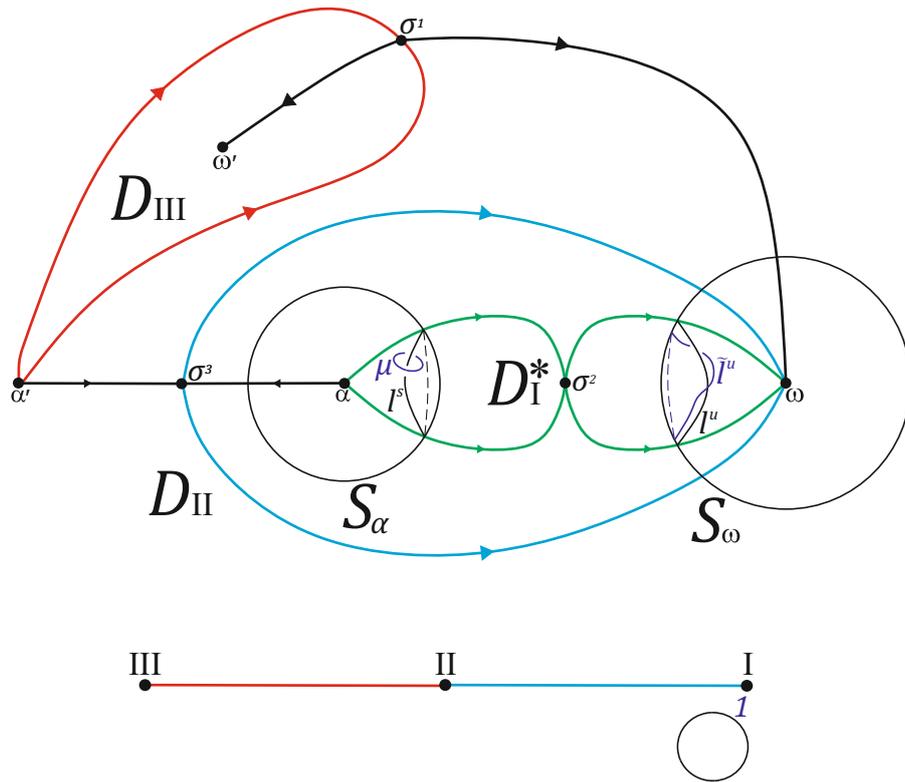


Рис. 1: Фазовый портрет и оснащенный граф потока  $f^t \in G_{0,1}(M^4)$ .

1. существует изоморфизм  $I_* : \Gamma_{f^t} \rightarrow \Gamma_{f^{t'}}$  сохраняющий цвета ребер и отмеченные вершины;
2. для любой пары отмеченных вершин  $v \in V(\Gamma_{f^t})$  и  $v' = \zeta(v) \in V(\Gamma_{f^{t'}})$  существует гомеоморфизм  $h_D : S_\omega \rightarrow S_{\omega'}$  такой, что  $h_D(L_D) = L'_{D'}$ , и существует нумерация узлов  $L_D$  такая, что  $h_D(l_i^u) = l_i^u$  и  $h_D(\tilde{l}_i^u) = \tilde{l}_i^u$  для любого  $i \in \{1, \dots, r_D\}$ .

**Теорема 1.** *Потоки  $f^t, f^{t'} \in G_{g,k}(M^4)$  топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда их оснащенные графы изоморфны.*

Теорема 1 доказана для потоков из классов  $G_{g,0}, G_{0,1}$  в работах [8], [21]. В настоящей работе мы доказываем ее для произвольных  $g, k$ .

## 1 Вспомогательные факты

### 1.1 Обозначения

Всюду ниже  $S^{n-1}, B^n, n \geq 1$ , обозначают  $(n-1)$ -мерную сферу и  $n$ -мерный компактный шар, то есть многообразия, гомеоморфные

$$\mathbb{S}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}, \mathbb{B}^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\},$$

соответственно, и  $B^0$  – точка.

$\Pi = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{B}^2$  – стандартный полноторий,  $\partial\Pi = \mathbb{S}^1 \times \partial\mathbb{B}^2 = \mathbb{T}^2$  – стандартный тор. Для любой точки  $(x, y) \in \mathbb{S}^1 \times \partial\mathbb{B}^2$ :  $\mu = \{x\} \times \partial\mathbb{B}^2$  – меридиан стандартного полнотория,  $\lambda = \mathbb{S}^1 \times \{y\}$ , – каноническая параллель стандартного полнотория.

Для целого числа  $g \geq 0$  обозначим за  $gY^n$  связную сумму  $g$  копий замкнутого многообразия  $Y^n$ , а за  $gX^n$  – граничную сумму  $g$  копий компактного многообразия  $X^n$ . Многообразие  $0Y^n$  считается сферой  $S^n$ , а  $0X^n$  – шаром  $B^n$ .

## 1.2 Топология

### 1.2.1 Вложения многообразий

Пусть  $X, Y$  – произвольные топологические пространства. Непрерывное отображение  $e : X \rightarrow Y$  называется *топологическим вложением*, если оно гомеоморфно отображает пространство  $X$  на подпространство  $e(X)$  пространства  $Y$ . *Воротником*  $C_Z$  подпространства  $Z$  в  $Y$  называется образ относительно вложения  $e : Z \times [0, 1] \rightarrow Y$  такого, что  $e(Z \times \{0\}) = Z$ .

В данном разделе  $X^k$  – связное компактное топологическое многообразие размерности  $k \geq 1$  с, возможно, непустым краем  $\partial X^k$ ,  $Y^n$  – связное замкнутое топологическое многообразие размерности  $n \geq k$ ;  $\mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^n$  – координатная гиперплоскость, определенная равенствами  $x_{k+1} = \dots = x_n = 0$  и  $\mathbb{R}_+^k = \{(x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^k : x_k \geq 0\}$ .

Многообразие  $X^k \subset Y^n$  *локально плоское* в  $Y^n$ , если у каждой точки  $x \in \text{int } X^k$  ( $x \in \partial X^k$ ) существует окрестность  $U_x \subset Y^n$  и гомеоморфизм  $\psi : U_x \rightarrow \mathbb{R}^n$  такой, что  $\psi(X^k \cap U_x) = \mathbb{R}^k$  ( $\psi(X^k \cap U_x) = \mathbb{R}_+^k$ ). Если точка  $x \in X^k$  не удовлетворяет условию локальной плоскостности, то,  $x$  называется *точкой дикости*, а многообразие  $X^k$  – *диким* в точке  $x$ . По определению  $X^k$  – *подмногообразие* в  $Y^n$  тогда и только тогда, когда  $X^k$  локально плоское в  $Y^n$ .

Пусть  $Y^n$  триангулируемо и  $T(Y^n)$  – триангуляция (симплициальный комплекс). Подмножество  $X \subset Y^n$  называется *ручным* в  $Y^n$ , если  $X$  – носитель подкомплекса комплекса  $T(Y^n)$ . В силу [22, Theorem 8], [23] любое компактное локально плоское подмножество замкнутого трехмерного многообразия является в нем ручным.

Пусть  $Y^n$  – гладкое многообразие с гладким атласом  $\{(U, \psi)\}$ ,  $X^k$  – его топологическое подмногообразие. Тогда  $X^k$  – *гладкое подмногообразие*  $Y^n$ , если  $\{(U \cap X^k, \psi|_{X^k})\}$  – гладкий атлас на  $X^k$ .

Подпространства  $X, X'$  *объемлемо изотопны* в  $Y$ , если существует гомотопия  $\{H_t : Y \rightarrow Y\}$  такая, что  $H_0 = \text{id}_Y$ ,  $H_1(X) = X'$  и при каждом  $t \in [0, 1]$  отображение  $H_t$  – гомеоморфизм. Семейство  $\{H_t\}$  называется *изотопией многообразия*  $Y$ .

### 1.2.2 Ориентации компактных многообразий

Пусть  $X^n$  – топологическое компактное связное многообразие, возможно, с непустым связным краем. Следуя [24, §3.3], мы определяем ориентируемость  $X^n$  следующим образом. Многообразие  $X^n$  называется *ориентируемым*, если группа относительных сингулярных гомологий  $H_n(X^n, \partial X^n)$  с целыми коэффициентами бесконечная циклическая. В группе

$H_n(X^n, \partial X^n)$  тогда есть ровно два различных элемента, которые можно выбрать в качестве её образующей:  $\mu_X$  и  $-\mu_X$ . Оба эти элемента называются *ориентацией*  $X^n$ , а само многообразие  $X^n$  считается *ориентированным*, если ориентация зафиксирована. Если же группа  $H_n(X^n, \partial X^n)$  не является бесконечной циклической, то она тривиальна, и многообразие  $X^n$  *неориентируемо*. Если край  $\partial X^n$  пуст, то  $X^n$  называется *замкнутым многообразием*, а группа  $H_n(X^n, \partial X^n) = H_n(X^n, \emptyset)$  изоморфна группе абсолютных сингулярных гомологий  $H_n(X^n)$  с целыми коэффициентами. Так как край компактного многообразия (если он непуст) — замкнутое многообразие размерности на единицу ниже, следует понимать, как в этом случае ориентация  $\mu_X$  первого индуцирует ориентацию  $\mu_{\partial X}$  второго.

В силу [24, Теорема 2.16] точна последовательность гомоморфизмов

$$\dots \rightarrow H_n(X^n) \rightarrow H_n(X^n, \partial X^n) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(\partial X^n) \xrightarrow{i_*} H_{n-1}(X^n) \rightarrow \dots, \quad (2)$$

где  $i_*$  — гомоморфизм, ставящий в соответствие гомологическому классу цикла в  $H_{n-1}(\partial X^n)$  — гомологический класс того же цикла в  $H_{n-1}(X^n)$ . Последовательность (2) называется *точной гомологической последовательностью пары*  $(X^n, \partial X^n)$ . В предположении что край  $\partial X^n$  непуст группа  $H_n(X^n)$  тривиальна. Если  $X^n$  ориентируемо, то, во-первых,  $\partial X^n$  ориентируемо, а иначе бесконечная циклическая группа  $H_n(X^n, \partial X^n)$  тривиальна по свойству точной последовательности гомоморфизмов. То есть группа  $H_{n-1}(\partial X^n)$  изоморфна  $\mathbb{Z}$ ,  $\partial X^n$  — единственный (с точностью до знака)  $(n-1)$ -мерный цикл в  $\partial X^n$ , и его гомологический класс — образующая группы  $H_n(\partial X^n)$ . Тогда образ  $\text{Im } i_*$  гомоморфизма — бесконечная циклическая подгруппа в группе  $H_{n-1}(X^n)$ , порожденная гомологическим классом границы  $\partial X^n$  в этой группе. Но гомологический класс границы компактного ориентируемого  $n$ -мерного многообразия тривиален в  $(n-1)$ -мерной группе гомологий этого многообразия, а значит  $\text{Im } i_*$  тривиален. Тогда точна последовательность

$$0 \rightarrow H_n(X^n, \partial X^n) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(\partial X^n) \rightarrow 0,$$

она дает изоморфизм  $\partial_*$  между  $H_n(X^n, \partial X^n)$  и  $H_{n-1}(\partial X^n)$ . Так, если  $\mu_X$  — ориентация  $X^n$ , то  $\mu_{\partial X^n} = \partial_*(\mu_X)$  — ориентация края, которую будем называть *естественной*.

Пусть  $Y^n$  — замкнутое связное  $n$ -мерное ориентированное многообразие,  $\mu_Y \in H_n(Y^n)$  — ориентация, и  $X^n$  — связное  $n$ -мерное подмногообразие в  $Y^n$  с краем  $\partial X^n$ , гомеоморфным сфере  $S^{n-1}$ . При помощи теоремы о вырезании (см. [24, Теорема 2.20]) можно построить изоморфизм  $H_n(Y^n) \rightarrow H_{n-1}(S^{n-1})$ . Посредством этого изоморфизма ориентация на  $Y^n$  индуцирует ориентацию сферы  $S^{n-1}$ , а ориентация сферы, как края, — ориентацию многообразия  $X^n$ .

Из [24, Предложение 2.19] следует, что гомеоморфизм  $h : X^n \rightarrow Z^n$  индуцирует изоморфизм  $h_* : H_n(X^n, \partial X^n) \rightarrow H_n(Z^n, \partial Z^n)$ . Тогда гомеоморфизм  $h$  называется *сохраняющим ориентацию*, если  $h_*(\mu_X) = \mu_Z$ . Иначе  $h$  — *меняющий ориентацию*.

Пусть теперь  $X^n$  — сглаживаемое многообразие. Следуя [25, Chapter 15], будем говорить, что  $X^n$  ориентируемо, если на нем существует ориентирующий гладкий атлас  $\{(U, \psi)\}$ , то

есть Якобиан каждой функции перехода положителен на всей области определения. Гладкая структура, образованная ориентирующим атласом, называется *ориентацией многообразия*  $X^n$ . Ориентирующий атлас многообразия  $X^n$ , если он есть, определяется выбором базиса  $e_1, \dots, e_n$  линейного пространства  $\mathbb{R}^n$  локальных координат некоторой карты из атласа на  $X^n$ . Если край  $X^n$  непуст, то ориентирующий атлас  $\{(U, \psi)\}$  на  $X^n$  индуцирует ориентирующий атлас  $\{(U \cap \partial X^n, \psi|_{\partial X^n})\}$  на  $\partial X^n$ . Ориентация края, порожденная этим атласом, – *естественная ориентация края*  $\partial X^n$ .

Пусть  $Y^n$  – гладкое замкнутое связное ориентированное  $n$ -мерное многообразие,  $X^n$  – гладкое связное  $n$ -мерное подмногообразие в  $Y^n$  с непустым краем  $\partial X^n$ . Если  $\{(U, \psi)\}$  – ориентирующий атлас на  $Y^n$ , то  $\{(U \cap X^n, \psi|_{X^n})\}$  – ориентирующий атлас на  $X^n$ .

Диффеоморфизм  $h : X^n \rightarrow Z^n$  ориентированных многообразий называется *сохраняющим ориентацию*, если в атласах на  $X^n, Z^n$  найдется по одной карте, в которых представитель  $h$  имеет положительный Якобиан хотя бы в одной точке. Иначе диффеоморфизм  $h$  – *меняющий ориентацию*.

### 1.2.3 Склеивание многообразий и связные суммы

Пусть  $X^n, Z^n$  – топологические компактные связные многообразия размерности  $n \geq 1$  с непустыми краями  $\partial X^n, \partial Z^n$ . Положим  $M \subset \partial X^n, N \subset \partial Z^n$  – компактные гомеоморфные (диффеоморфные) подмногообразия,  $e : M \rightarrow N$  – гомеоморфизм (диффеоморфизм). Пусть на  $X^n \sqcup Z^n$  задано минимальное отношение эквивалентности такое, что  $x \sim e(x)$  для любого  $x \in M$ . Тогда будем говорить, что факторпространство  $X^n \cup_e Z^n$  объединения  $X^n \sqcup Z^n$  по отношению  $\sim$  получено *склеиванием многообразий*  $X^n, Z^n$  по гомеоморфизму (диффеоморфизму)  $e$ . Если в данном определении  $M, N$  –  $(n-1)$ -мерные шары, то будем говорить, что  $X^n \cup_e Z^n$  – (*гладкая*) *граничная сумма многообразий*  $X^n, Z^n$ , и обозначать ее за  $X^n \natural Z^n$ .

Пусть  $Y^n, W^n$  – топологические замкнутые связные многообразия размерности  $n \geq 1$ ,  $B_Y^n, B_W^n$  – компактные шары, локально плоские в  $Y^n, W^n$ , соответственно. Обозначим  $X^n = Y^n \setminus \text{int } B_Y^n, Z^n = W^n \setminus \text{int } B_W^n$  и рассмотрим гомеоморфизм (диффеоморфизм)  $e$  краев  $S_X^{n-1}, S_Z^{n-1}$  этих многообразий. Если  $Y^n, W^n$  оба ориентируемы, то  $X^n, Y^n$  оба ориентируемы и мы требуем дополнительно, чтобы  $e$  менял естественную ориентацию края. Тогда  $n$ -мерное многообразие  $Y^n \# W^n$ , полученное склеиванием  $X^n, Y^n$  по гомеоморфизму (диффеоморфизму)  $e$  является замкнутым связным и называется (*гладкой*) *связной суммой*  $Y^n$  и  $W^n$ . Из [26, Lemma 2.1] следует, что гладкая связная сумма ориентируемых многообразий не зависит от выбора шаров и склеивающих диффеоморфизмов. Аналогично можно доказать обобщение этого результата на случай топологической связной суммы ориентируемых и неориентируемых многообразий.

**Утверждение 3.** *Связная сумма двух многообразий не зависит от выбора шаров и склеивающего гомеоморфизма. Эта операция также удовлетворяет следующим условиям:*

1.  $Y^n \# W^n$  гомеоморфно  $W^n \# Y^n$ ;
2.  $Y^n \# S^n$  гомеоморфно  $Y^n$ ;

3.  $(Y^n \# V^n) \# W^n$  гомеоморфно  $Y^n \# (V^n \# W^n)$ .

Не уменьшая общности, будем отождествлять  $X^n, Z^n$  с их образами при проекции на факторпространство  $X^n \cup_e Z^n = Y^n \# W^n$ . Тогда  $\partial X^n = \partial Z^n = S^{n-1}$ , и сфера  $S^{n-1}$  имеет воротник  $C_X$  в  $X^n$  и воротник  $C_Z$  в  $Z^n$ . Обозначим  $\tilde{X}^n = X^n \cup C_Z, \tilde{Z}^n \cup C_X$ . Согласно [24, §2.2] точна длинная гомологическая последовательность:

$$\cdots \rightarrow H_n(\tilde{X}^n) \oplus H_n(\tilde{Z}^n) \rightarrow H_n(X^n \cup_e Z^n) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(C_X \cup C_Z) \xrightarrow{i_*} H_{n-1}(\tilde{X}^n) \oplus H_{n-1}(\tilde{Z}^n) \rightarrow \dots \quad (3)$$

Последовательность (3) называется *последовательностью Майера-Вьеториса*. Гомотопические эквивалентности  $\tilde{X}^n \approx X^n, \tilde{Z}^n \approx Z^n, C_X \cup C_Z \approx S^{n-1}$  дают следующую последовательность

$$\cdots \rightarrow H_n(X^n) \oplus H_n(Z^n) \rightarrow H_n(X^n \cup_e Z^n) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(S^{n-1}) \xrightarrow{i_*} H_{n-1}(X^n) \oplus H_{n-1}(Z^n) \rightarrow \dots, \quad (4)$$

где  $i_*$  – гомоморфизм, ставящий в соответствие гомологическому классу цикла в  $H_{n-1}(S^{n-1})$  пару гомологических классов того же цикла в  $H_{n-1}(X^n) \oplus H_{n-1}(Z^n)$ . Если  $Y^n, W^n$  ориентируемы, то ориентируемы и  $X^n, Z^n$  и  $\text{Im } i_* = 0$ .  $H_n(X^n) = H_n(Z^n) = 0$  по определению, значит последовательность (4) упрощается до последовательности

$$0 \rightarrow H_n(Y^n \# W^n) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(S^{n-1}) \rightarrow 0,$$

откуда получаем изоморфизм  $\partial_* : H_n(Y^n \# W^n) \rightarrow H_{n-1}(S^{n-1})$ . Если выбраны ориентации  $\mu_Y, \mu_W$  для  $Y^n, W^n$ , соответственно, и  $\mu_S$  – ориентация  $S^{n-1}$  индуцированная ориентацией  $\mu_Y$ , то будем всегда считать, что  $\mu_{Y \# W} = \partial_*(\mu_S)$  – ориентация связной суммы  $Y^n \# W^n$ .

Из определения следует равенство  $\partial(X^n \natural Z^n) = \partial X^n \# \partial Z^n$ . Поэтому утверждение 3 справедливо при замене операции связной суммы на операцию граничной и замене сферы  $S^n$  на шар  $B^n$ .

#### 1.2.4 Узлы на трехмерной сфере и приклеивание ручек

Простая замкнутая кривая  $C \subset S^3$  называется *узлом*. Объединение  $L$   $m$  попарно не пересекающихся узлов называется  *$m$ -компонентным зацеплением*. Два зацепления  $L_1, L_2 \subset S^3$  называются *эквивалентными*, если существует объемлющий гомеоморфизм  $h$  сферы  $S^3$  такой, что  $h(L_1) = L_2$ . Два зацепления  $L_1, L_2 \subset S^3$  называются *изотопными*, если существует изотопия  $h_t$  сферы  $S^3$  от тождественного такой, что  $h_1(L_1) = L_2$ .

*Диаграмма зацепления*  $L$  – это его проекция на некоторую плоскость, имеющая только конечное число пересечений или самопересечений, называемых *перекрестками*, и в каждом перекрестке сходятся ровно четыре отрезка.  $m$ -компонентное зацепление называется *тривиальным*, если его диаграмма состоит из  $m$  попарно непересекающихся копий окружности. Однокомпонентное тривиальное зацепление – *тривиальный узел*.

Напомним, что *полноторий* – это многообразие  $\Pi = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{B}^2$ . Узлы  $\mu = \{x\} \times \partial \mathbb{B}^2, \lambda = \mathbb{S}^1 \times \{y\}$ , где  $(x, y) \in \mathbb{S}^1 \times \partial \mathbb{B}^2$ , называются *меридианом* и *канонической параллелью* полнотория

$\Pi$ , соответственно. Узел  $l \subset \mathbb{S}^1 \times \partial\mathbb{B}^2$ , нестягиваемый в  $\Pi$ , пересекающий меридиан  $\mu$  ровно в одной точке, называется *параллелью* полнотория  $\Pi$ .

Пусть  $C \subset S^3$  – узел. Тогда *трубчатая окрестность* узла  $C$  есть локально плоский полноторий  $\Pi_C$ , в котором  $C$  – средняя линия. Меридиан и параллель для трубчатой окрестности узла определяются аналогично определению для полнотория. Определение канонической параллели трубчатой окрестности требует сперва введения понятия коэффициента зацепления и потому появится позже.

Отметим, что ориентированный меридиан  $m_C$  (выбрано направление обхода) окрестности  $\Pi_C$  может быть выбран в качестве образующей группы  $H_1(S^3 \setminus C)$ , которая является бесконечной циклической (см. [27, Exercise 3.9]). Так, если параллель  $\tilde{C}$  тоже ориентирована, то найдется целое число  $q \in \mathbb{Z}$  такое, что  $[\tilde{C}] = q[m_C]$  в  $H_1(S^3 \setminus C)$ . Число  $q$  называется *коэффициентом зацепления* узлов  $C$  и  $\tilde{C}$ , обозначается за  $\text{lk}(\tilde{C}, C)$ . Коэффициент зацепления симметричен:  $\text{lk}(\tilde{C}, C) = \text{lk}(C, \tilde{C})$  и является изотопическим инвариантом (см. [28, §4.5]). Однако, его знак зависит от ориентаций  $\tilde{C}$  и  $\mu_C$ . Мы все время будем считать коэффициент зацепления для двух узлов, ориентированных следующим образом.

Пусть  $S^3$  и  $C$  ориентированы произвольно. Тогда ориентация  $C$  определяет направление обхода  $\tilde{C}$  посредством проекции параллели  $\tilde{C}$  на  $C$  вдоль двумерных дисков, образующих расслоение полнотория  $\Pi_C$  (такие ориентации  $C$  и  $\tilde{C}$  будем называть *согласованными*). Положим  $p = \tilde{C} \cap m_C$ ,  $U_p$  – область определения некоторой карты ориентирующего атласа на  $S^3$ , содержащей точку  $p$ . Область  $U_p$  отождествим с линейным пространством  $\mathbb{R}^3$ , образом которой оно является посредством координатного отображения. Векторы  $e_{\tilde{C}}, e_m \in U_p$  с началом в точке  $p$  линейно независимы, направляющие к узлам  $\tilde{C}, m_C$ , соответственно, и  $e_n \in U_p$  – вектор с началом в  $p$ , линейно независимый в совокупности с предыдущими двумя, направленный вне полнотория  $\Pi_C$ . Выберем  $e_m$  так, чтобы тройка  $(e_m, e_{\tilde{C}}, e_n)$  образовала заранее выбранную ориентацию в  $\mathbb{R}^3$ . Тогда  $\text{lk}(\tilde{C}, C)$  – это число оборотов  $\tilde{C}$  вокруг меридиана  $m_C$  в направлении вектора  $e_m$ . Для наглядности можно использовать правило буравчика для выбора ориентации меридиана в определении коэффициента зацепления.

Параллель  $\lambda_C$  трубчатой окрестности  $\Pi_C$  узла  $C$  будем называть *канонической*, если  $\text{lk}(\lambda_C, C) = 0$ .

Многообразие  $H_i^n = \mathbb{B}^i \times \mathbb{B}^{n-i}$  называется  *$n$ -мерной  $i$ -ручкой*, а  $(n-1)$ -мерное подмногообразие  $F_i^{n-1} = \partial\mathbb{B}^i \times \mathbb{B}^{n-i}$  её границы называется *подошвой*. Любая  $n$ -мерная  $i$ -ручка диффеоморфна стандартному шару  $\mathbb{B}^n$ . Поэтому граница  $\partial H_i^n$  есть  $(n-1)$ -сфера, которая естественным образом представляется в виде объединения  $F_i^{n-1} \cup P_i^{n-1}$ , где  $P_i^{n-1} = \mathbb{B}^i \times \partial\mathbb{B}^{n-i}$ . Будем по умолчанию рассматривать ориентацию на ручке  $H_i^n$ , унаследованную с  $\mathbb{R}^n$ , подмножеством которого она является. Подошва  $F_i^{n-1}$  наследует естественную ориентацию края  $\partial H_i^n$ . Пусть  $X^n$  – компактное многообразие,  $e : F_i^n \times \mathbb{Z}_m \rightarrow \partial X^n$  – гомеоморфизм. Говорят, что компактное многообразие  $Z^n = X^n \bigcup_e H_i^n$  получено *приклеивкой  $m$  ручек  $H_i^n$  к многообразию  $X^n$* .

Многообразие  $M^n$ , полученное приклеиванием  $n$ -мерных  $i$ -ручек  $i \leq k$  к шару  $B^n$  называется  *$(n, k)$ -ручечным телом*. Для  $(n, 1)$ -ручечного тела  $M^n$  число  $n$ -мерных 1-ручек на-

зывается *родом тела*  $M^n$ . О топологии ориентируемого  $(n, 1)$ -ручного тела  $M^n$  известно следующее.

**Предложение 2.** *Ориентируемое  $(n, 1)$ -ручное тело  $M^n$  рода  $g$  гомеоморфно многообразию  $g(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{B}^{n-1})$ .*

**Доказательство.** Сперва заметим, что каждое из вложений  $e_1, \dots, e_g : F_1^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$  либо меняет, либо сохраняет ориентацию образа обеих компонент подошвы, наследованную с естественной ориентации края  $S^{n-1}$  шара  $B^n$ . Иначе тело  $M^n$  неориентируемо, что приводит к противоречию. Не ограничивая общности будем считать, что вложения меняют ориентацию.

Для  $g = 0$  предложение следует из определения, пусть  $g > 0$ . Проведем доказательство по индукции. Для  $g = 1$  обозначим за  $e_1^0, e_1^1$  – ограничения  $e$  на  $\{0\} \times \mathbb{B}^{n-1}, \{1\} \times \mathbb{B}^{n-1}$ , соответственно. В силу [29, Лемма 2]  $B^n \cup_{e_1} H_1^n$  гомеоморфно  $B^{n-1} \times [0, 1]$ . Тогда, приклеив вторую компоненту подошвы  $F_1^{n-1}$  по меняющему ориентацию гомеоморфизму  $e_1$  на образ, получим многообразие  $\mathbb{B}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$ .

Пусть предположение верно для  $(g-1)$  приклеенных ручек к  $B^n$ . Обозначим за  $e_g : F_1^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$  вложение, по которому приклеивается ещё одна ручка к  $B^n$ . Согласно [30, Лемма 3.34] существует изотопия  $H_t : S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ , тождественная на образах подошв первых  $(g-1)$  ручек, и такая, что  $H_1 e_g(F_1^{n-1})$  содержится в области определения некоторой окрестности  $U$ , гомеоморфной  $\mathbb{R}^{n-1}$ . Из [30, Лемма 6.1] следует, что  $M^n$  гомеоморфно многообразию  $\widetilde{M}^n$ , полученному приклеиванием первых  $(g-1)$  ручек к  $B^n$  по склеивающим отображениям  $e_1, \dots, e_{g-1}$  и последней ручки – по отображению  $H_1 e_g$ . Из критерия компактности в  $\mathbb{R}^{n-1}$  следует, что существует компактный локально плоский шар  $B_1^{n-1} \subset S^{n-1}$ , содержащий  $H_1 e_g(F_1^{n-1})$ . Край  $S^{n-2} = \partial B_1^{n-1}$  – локально плоская сфера, по обобщенной теореме Шенфлиса (см. [31]), ограничивает другой шар  $B_2^{n-1} \subset S^{n-1}$ , содержащий образы первых  $(g-1)$  подошв. Пусть  $D^{n-1} \subset B^n$  – шар, ограниченный сферой  $S^{n-2}$  такой, что  $\text{int } D^{n-1} \subset \text{int } B^n$ . Такой шар нетрудно построить, например, взяв объединение отрезков, соединяющих некоторую точку внутри  $B^n$  с точками на  $S^{n-2}$ . По Теореме Александра о сфере (см., например, [32, Следствие 12.1]):  $S_1^{n-1} = B_1^{n-1} \cup D^{n-1}$  и  $S_2^{n-1} = D^{n-1} \cup B_2^{n-1}$  –  $(n-1)$ -мерные сферы, ограничивающие в  $B^n$  компактные локально плоские  $n$ -мерные шары  $B_1^n, B_2^n$ , соответственно. Обозначим за  $M_{g-1}^n$  – тело, полученное приклеиванием  $(g-1)$  ручек  $H_1^n$  к  $B_2^n$  по вложениям  $e_1, \dots, e_{g-1} : F_1^{n-1} \rightarrow B_2^{n-1}$ , за  $M_1^n$  – тело, полученное приклеиванием одной ручки  $H_1^n$  к  $B_1^n$  по вложению  $H_1 e_g : F_1^{n-1} \rightarrow B_1^{n-1}$ . Тело  $M^n$  есть граничная сумма многообразия  $M_{g-1}^n$  и  $M_1^n$ , сопровождающаяся тождественным гомеоморфизмом шара  $D^{n-1}$  на себя (для простоты мы его отождествили с его же проекциями на факторпространства  $M_1^n$  и  $M_{g-1}^n$ ). Многообразие  $M_1^n$  гомеоморфно  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{B}^{n-1}$  по базе индукции, а  $M_{g-1}^n$  гомеоморфно  $(g-1)(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{B}^{n-1})$  по предположению индукции. Тогда,  $\widetilde{M}^n$  гомеоморфно  $g(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{B}^{n-1})$  и  $M^n$  таково.  $\diamond$

По определению, граница многообразия  $g(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{B}^{n-1})$  является связной суммой  $g(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^{n-2})$ . Таким образом, справедливо следующее утверждение.

**Следствие 1.** *Край ориентируемого  $(n, 1)$ -ручного тела  $M^n$  рода  $g$  гомеоморфен  $g(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^{n-2})$ .*

### 1.2.5 Хирургия Дена на трехмерной сфере и Диаграмма Кирби четырехмерного многообразия

Подошва  $F_2^4 = \partial\mathbb{B}^2 \times \mathbb{B}^2$  четырехмерной ручки индекса 2 является полноторием. Обозначим через  $e : F_2^4 \times \mathbb{Z}_m \rightarrow S^3$  вложение, по которому приклеиваются ручки  $H_2^4$  к  $B^4$ ,  $L = e((\partial\mathbb{B}^2 \times \{O\}) \times \mathbb{Z}_m)$ ,  $\Pi_L = e(F_2^4 \times \mathbb{Z}_m)$ , где  $O$  – центр диска  $\mathbb{B}^2$ . По определению множество  $L \subset S^3$  –  $m$ -компонентное зацепление. Тогда будем говорить, что многообразие  $Z^4$  получено приклейкой  $m$  ручек  $H_2^4$  к шару  $B^4$  вдоль зацепления  $L \subset S^3$ . Обозначим меридиан полнотория  $F_2^4$  за  $\mu$ , а каноническую параллель – за  $\lambda$ . Для любого узла  $C \subset L$  многообразие  $\Pi_C = e(F_2^4 \times \{i\})$  является его трубчатой окрестностью  $C$  при некотором  $i \in \mathbb{Z}_m$ . Обозначим  $\partial\Pi_C = T_C$ ,  $m_C = e(\mu \times \{i\})$  и  $\tilde{C} = e(\lambda \times \{i\})$ . Так как  $e|_{F_2^4 \times \{i\}}$  – гомеоморфизм полноториев  $F_2^4$  и  $\Pi_C$ , узел  $m_C$  находится в гомотопическом классе меридиана полнотория  $\Pi_C$  в группе  $\pi_1(T_C)$  (см. [33, Chapter 2, E]). А узел  $\tilde{C} \subset T_C$  является параллелью  $\Pi_C$  и называется *оснащением узла  $C$* . Коэффициент зацепления узлов  $\tilde{C}$ ,  $C$  на сфере  $S^3$  называется *коэффициентом оснащения*. Итак, приклеивание четырехмерных два-ручек к шару  $B^4$  описывается диаграммой зацепления на его границе  $S^3$  с приписанными целыми числами. Оказывается, такое представление, с точностью до некоторых преобразований, однозначно определяет топологию многообразия  $Z^4$ , подробнее об этом написано ниже.

Рассмотрим сначала границу  $M^3 = \partial Z^4$ . По определению многообразие  $P_2^4 = H_2^4 \setminus \text{int} F_2^4 = \mathbb{B}^2 \times \partial\mathbb{B}^2$  – полноторий, а  $\mu$  и  $\lambda$  – его каноническая параллель и меридиан, соответственно. Из конструкции следует, что  $\partial Z^4$  получено приклеиванием  $m$  копий полнотория  $P_2^4$  к многообразию  $S^3 \setminus \text{int}\Pi_L$  по гомеоморфизму  $e|_{\partial F_2^4 \times \mathbb{Z}_m} : \partial P_2^4 \times \mathbb{Z}_m \rightarrow \partial(S^3 \setminus \text{int}\Pi_L)$ . Тогда будем говорить, что  $\partial Z^4$  получено из сферы  $S^3$  *хирургией Дена* вдоль зацепления  $L$ . Так как для любого узла  $C \subset L$  фундаментальная группа  $\pi_1(T_C)$  тора  $T_C = \partial\Pi_C$  изоморфна его одномерной группе гомологий  $H_1(T_C)$  и изоморфна  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ , то гомологический класс узла  $\tilde{C}$  в  $H_1(T_C)$  представляется в виде  $[\tilde{C}] = [l_C] + q[m_C]$  (один обход по канонической параллели окрестности  $\Pi_C$  и  $q$  обходов по меридиану). Число  $q$  называется *коэффициентом хирургии* вдоль узла  $C$ .

Согласно конструкции, приклеивание четырехмерных два-ручек вдоль зацепления  $L \subset S^3$  определяет целочисленную хирургию над сферой  $S^3$  вдоль этого зацепления с коэффициентом каждой компоненты, равным коэффициенту оснащения этой компоненты. Следующее предожение дает информацию о группах гомологий края четырехмерного многообразия, полученного приклеиванием одной два-ручки к четырехмерному шару.

**Предложение 3.** Пусть  $M^3$  – замкнутое многообразие, полученное хирургией Дена вдоль узла  $C$  с целым коэффициентом  $q$ . Если  $q = 0$ , то  $H_1(M^3)$ ,  $H_2(M^3)$  изоморфны  $\mathbb{Z}$ . Если  $q \neq 0$ , то  $H_1(M^3)$  изоморфна  $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ , а  $H_2(M^3)$  тривиальна.

**Доказательство.** Пусть  $\Pi_C \subset S^3$  – трубчатая окрестность узла  $C$  и  $\psi : \partial\Pi \rightarrow T_C$  – склеивающий диффеоморфизм. Тогда в группе  $H_1(T_C)$  имеют место равенства  $[\psi(\{x\} \times \partial\mathbb{B}^2)] = [l] + q[m]$ ,  $[\psi(S^1 \times \{y\})] = a[l] + b[m]$  для любого  $x \in S^1$ ,  $y \in \partial\mathbb{B}^2$  и  $-b + aq = -1$ . Обозначим за  $\pi : (S^3 \setminus \text{int}\Pi_C) \sqcup \Pi \rightarrow (S^3 \setminus \text{int}\Pi_C) \cup_\psi \Pi$  каноническую проекцию.

Положим  $U_0 = \pi(S^3 \setminus \text{int}\Pi_C)$ ,  $V_0 = \pi(\Pi)$ ,  $T_0 = U_0 \cap V_0$ . Пусть  $N \subset M^3$  – открытая трубчатая

окрестность  $T_0$  в  $M^3 = (S^3 \setminus \text{int } \Pi_C) \cup_\psi \Pi$ ,  $N_u = N \cap U_0$ ,  $N_v = N \cap V_0$  и  $U = U_0 \cup N_v$ ,  $V = V_0 \cup N_u$ . Тогда  $M^3 = U \cup V$ ,  $U \cap V = N$  и имеется точная последовательность Майера-Вьеториса

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow H_2(U) \oplus H_2(V) \xrightarrow{j_*^2} H_2(M^3) \xrightarrow{\partial_*^2} H_1(N) \xrightarrow{i_*^1} H_1(U) \oplus H_1(V) \xrightarrow{j_*^1} H_1(M^3) \xrightarrow{\partial_*^1} \\ \xrightarrow{\partial_*^1} H_0(N) \xrightarrow{i_*^0} H_0(U) \oplus H_0(V) \xrightarrow{j_*^0} H_0(M^3) \xrightarrow{\partial_*^0} 0. \end{aligned}$$

Теперь вычислим группы гомологий из последовательности выше. Заметим, что  $U, V, N$  гомотопически эквивалентны  $U_0, V_0, T_0$ , соответственно.

Поскольку  $U, V, N$  связны, нульмерные группы гомологий всех этих многообразий изоморфны  $\mathbb{Z}$  (см. [27, Теорема 1.2]). Применяя последовательность Майера-Вьеториса (см., например, [27, Теорема 3.4, упражнение 3.9]), легко показать, что  $H_1(S^3 \setminus \text{int } \Pi_C)$ , и, как следствие,  $H_1(U_0), H_1(U)$  изоморфны  $\mathbb{Z}$ , а  $H_2(U_0), H_2(U)$  тривиальны.

Так как  $T_0, V_0$  - это тор и полноторий, имеем  $H_1(T_0) \cong \mathbb{Z}^2$ ,  $H_2(T_0) \cong \mathbb{Z}$ ,  $H_1(V) \cong H_1(V_0) \cong \mathbb{Z}$ ,  $H_2(V) = 0$  (см., например, [27, Упражнения 3.9, 3.6]). Обозначим за  $\delta_*^k : H_1(N) \rightarrow \mathbb{Z}^2$ ,  $\delta_*^1 : H_0(N) \rightarrow \mathbb{Z}$ ,  $\phi_*^1 : H_1(U) \oplus H_1(V) \rightarrow \mathbb{Z}^2$ ,  $\phi_*^0 : H_0(U) \oplus H_0(V) \rightarrow \mathbb{Z}^2$  изоморфизмы и положим  $\Delta_*^k = \delta_*^k \circ \partial_*^k$ ,  $\Phi_*^{k-1} = \phi_*^{k-1} \circ i_*^{k-1} \circ (\delta_*^k)^{-1}$ ,  $\Psi^{k-1} = j_*^{k-1} \circ (\phi_*^{k-1})^{-1}$ ,  $k = 1, 2, 3$ . Тогда последовательность Майера-Вьеториса, данная выше, преобразуется в точную последовательность

$$\cdots \rightarrow 0 \oplus 0 \xrightarrow{\Psi_*^2} H_2(M^3) \xrightarrow{\Delta_*^2} \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{\Phi_*^1} \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{\Psi_*^1} H_1(M^3) \xrightarrow{\Delta_*^1} \mathbb{Z} \xrightarrow{\Phi_*^0} \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{\Psi_*^0} \mathbb{Z} \xrightarrow{\Delta_*^0} 0,$$

Поскольку  $\text{Ker } \Delta_*^0 = \text{Im } \Psi_*^0 = \mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Z}^2 / \text{Im } \Phi_*^0 \cong \text{Im } \Psi_*^0 = \mathbb{Z}$ , то  $\text{Im } \Phi_*^0 \cong \mathbb{Z}$ . Тогда из изоморфизма  $\mathbb{Z} / \text{Im } \Delta_*^1 \cong \text{Im } \Phi_*^0 = \mathbb{Z}$  следует, что группа  $\text{Im } \Delta_*^1$  тривиальна. По свойствам точных последовательностей вытекает, что следующая подпоследовательность точна:

$$0 \xrightarrow{\Psi_*^2} H_2(M^3) \xrightarrow{\Delta_*^2} \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{\Phi_*^1} \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{\Psi_*^1} H_1(M^3) \rightarrow 0.$$

Найдем  $\text{Im } \Phi_*^1$ . Пусть  $\mu_V = \pi(\{x\} \times \partial \mathbb{B}^2)$ ,  $\lambda_V = \pi(\mathbb{S}^1 \times \{y\})$ . Положим  $[\mu_V] = (\delta_*^2)^{-1}((0, 1))$ ,  $[\lambda_V] = (\delta_*^2)^{-1}((1, 0))$  - образующие  $H_1(N)$ . Тогда  $\Phi_*^1((0, 1)) = \phi_*^1([\mu_V]_U, [-\mu_V]_V) = (q, 0)$ ,  $\Phi_*^1((1, 0)) = \phi_*^1([\lambda_V]_U, [-\lambda_V]_V) = (b, -1)$ . Для любого  $[z] \in H_1(N)$  имеем  $[z] = c[\lambda_V] + d[\mu_V] = c(\delta_*^2)^{-1}((1, 0)) + d(\delta_*^2)^{-1}((0, 1)) = (\delta_*^2)^{-1}((c, d))$ ,  $\Phi_*^1((c, d)) = c(b, -1) + d(q, 0)$ . Так как  $-b + aq = -1$ , выполняются равенства  $\Phi_*^1((c, d)) = c(aq + 1, -1) + d(q, 0) = c(1, -1) + (ac + d)(q, 0)$ . Тогда  $\text{Im } \Phi_*^1 = \langle (1, -1), (q, 0) \rangle$  - группа, образованная элементами  $(1, -1), (q, 0)$ .

Пусть  $q = 0$ . Тогда  $\text{Im } \Phi_*^1 = \langle (1, -1) \rangle$ , и изоморфизм  $\Psi : \text{Im } \Phi_*^1 \rightarrow \mathbb{Z}$  определяется по формуле  $\Psi(\alpha, -\alpha) = \alpha$ . Тогда последовательности

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{\Psi_*^1} H_1(M^3) \rightarrow 0,$$

$$0 \rightarrow H_2(M^3) \xrightarrow{\Delta_*^2} \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

точные, следовательно, группы  $H_1(M^3), H_2(M^3)$  изоморфны  $\mathbb{Z}$ .

Пусть  $q \neq 0$ . Тогда изоморфизм  $\Psi : \text{Im } \Phi_*^1 \rightarrow \mathbb{Z} \times q\mathbb{Z}$  определен по формуле  $\Psi(\alpha + q\beta, -\alpha) =$

$(\alpha, q\beta)$ , и последовательности

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \times q\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{\Psi_1^1} H_1(M^3) \rightarrow 0,$$

$$0 \rightarrow H_2(M^3) \xrightarrow{\Delta_2^2} \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z} \times q\mathbb{Z} \rightarrow 0$$

точны. Значит,  $H_1(M^3)$  изоморфна  $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ , а  $H_2(M^3)$  тривиальна.

◇

Замкнутое связное трехмерное многообразие  $\Sigma_g^3$  будем называть *гомологической копией многообразия*  $g(S^1 \times S^2)$ , если  $H_i(\Sigma^3)$  изоморфна  $H_i(g(S^1 \times S^2))$ ,  $i, g \geq 0$ . Следующее предложение доказано в [34, Следствие].

**Утверждение 4.** *Для любых  $n \geq 3$ ,  $g \geq 0$  группа гомологий  $H_k(g(S^1 \times S^{n-1}))$  тривиальна для  $2 \leq k \leq (n-2)$ , изоморфна  $\mathbb{Z}^g$  для  $k \in \{1, n-1\}$  и изоморфна  $\mathbb{Z}$  для  $k \in \{0, n\}$ .*

Из предложения 3 и утверждения 4 вытекает такое следствие.

**Следствие 2.** *Многообразие  $M^3$ , полученное целочисленной хирургией Дена вдоль узла  $C \subset S^3$  с коэффициентом  $q$ , является гомологической сферой  $\Sigma_0^3$  тогда и только тогда, когда  $q = \pm 1$  и является гомологической копией  $\Sigma_1^3$  многообразия  $S^1 \times S^2$  тогда и только тогда, когда  $q = 0$ . Во всех остальных случаях  $M^3$  не гомеоморфно  $\Sigma_g^3$  ни для какого  $g \geq 0$ .*

Хирургия Дена, вообще говоря, определена на трехмерной сфере  $S^3$  независимо от приклейки четырехмерных два-ручек и сопровождается не только целыми коэффициентами. А именно, пусть  $L \subset S^3$  – зацепление,  $C$  – узел из  $L$ ,  $\Pi_C$  – его трубчатая окрестность  $e : \partial\Pi \rightarrow \partial(S^3 \setminus \text{int}\Pi_C)$  – гомеоморфизм склейки такой, что меридиан  $\mu$  полнотория  $\Pi$  отображается в узел  $\tilde{C} \subset T_C$ . Из представления  $[\tilde{C}] = p[l_C] + q[m_C]$  гомологического класса узла  $\tilde{C}$  в  $H_1(T_C)$ , получаем, вообще говоря, рациональный коэффициент хирургии  $\frac{q}{p} \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ , где  $\infty$  соответствует случаю  $p = 0$ . Хирургия с коэффициентом  $\infty$  называется *тривиальной хирургией Дена*. При тривиальной хирургии меридиан  $\mu$  отображается в узел  $\tilde{C} \subset T_C$  с гомологическим классом  $0[l_C] + q[m_C]$  в  $H_1(T_C)$ . Таким образом,  $\tilde{C}$  лежит в гомотопическом классе меридиана полнотория  $\Pi_C$  в группе  $\pi_1(T_C)$ . Тогда, гомеоморфизм приклеивания ручки продолжается на трубчатую окрестность узла  $C$  (опять же по [33, Chapter 2, E]), и тривиальная хирургия вдоль любого узла всегда дает сферу. Однако, класс эквивалентности узла на сфере имеет значение при нетривиальной хирургии. Следующий важный результат принадлежит Гордону К. и Люку Дж. (см. [35, Theorem 2]) – авторам знаменитой теоремы о дополнении до узла.

**Утверждение 5.** *Многообразие  $M^3$ , полученное нетривиальной хирургией вдоль нетривиального узла не гомеоморфно сфере.*

Из следствия 2 и утверждения 5 сразу следует, что хирургия Дена вдоль любого нетривиального узла с коэффициентом  $\pm 1$  дает гомологическую сферу  $\Sigma_0^3$ , не гомеоморфную стандартной, что в очередной раз подтверждает существование таковых. Предположим теперь,

что коэффициент произвольный, а узел  $C$  тривиальный. Тогда известна топология многообразия, полученного хирургией Дена вдоль этого узла.

**Предложение 4.** Пусть  $M^3$  получено из сферы  $S^3$  хирургией Дена вдоль тривиального узла  $C$  с коэффициентом  $\frac{q}{p}$ . Тогда  $M^3$  гомеоморфно линзовому пространству  $L_{q,p}$  типа  $(q,p)$ . В частности,  $M^3$  гомеоморфно сфере тогда и только тогда, когда  $q = \pm 1$  или  $p = 0$  и гомеоморфно  $S^1 \times S^2$  тогда и только тогда, когда  $q = 0$ .

**Доказательство.** Поскольку  $C$  – тривиальный узел в  $S^3$ . Тогда  $P_C = S^3 \setminus \text{int}\Pi_C$  – полноторий. По определению  $[\tilde{C}] = p[l_C] + q[m_C]$  – гомологический класс образа меридиана  $\mu$  стандартного полнотория  $\Pi$  в  $H_1(T_C)$  при склеивании  $\Pi$  и  $P_C$ . Узел  $l_C$  стягиваем в  $S^3$ , но нестягиваем в полнотории  $\Pi_C$ . Значит,  $l_C$  стягивается в полнотории  $P_C$  и, следовательно, является его меридианом. В то время, как  $m_C$  является параллелью полнотория  $P_C$ . Тогда  $M^3$  получено склейкой полноториев  $P_C$  и  $\Pi$  такой, что меридиан  $\mu \subset \Pi$  отображается в узел  $\tilde{C} \subset P_C$  с гомологическим классом  $q[m_C] + p[l_C]$  в группе  $H_1(\partial P_C)$ . По определению,  $M^3$  – линзовое пространство  $L_{q,p}$ .

Согласно необходимым и достаточным условиям гомеоморфности линз, полученным [36, Theorem],  $M^3$  гомеоморфно сфере  $S^3 = L_{\pm 1,p}$  тогда и только тогда, когда  $q = \pm 1$  или  $p = 0$ , и  $M^3$  гомеоморфно  $S^2 \times S^1$  тогда и только тогда, когда  $q = 0$ .  $\diamond$

При  $p \neq 0$  требование тривиальности узла  $C$  необходимо для гомеоморфности многообразия  $M^3$  сфере, в силу утверждения 5. Тогда имеет место следующая лемма

**Лемма 1.** Пусть  $M^3$  получено хирургией Дена вдоль узла  $C \subset S^3$  с коэффициентом  $\frac{q}{p}$ . Тогда  $M^3$  гомеоморфно сфере тогда и только тогда, когда узел  $C$  тривиальный и  $q = \pm 1$  или  $p = 0$ .

Так как приклеивание ручки  $H_2^4$  индуцирует целочисленную хирургию, то из Предложения 4 мгновенно вытекает такое следствие.

**Следствие 3.** Пусть  $M^3$  ограничивает многообразие  $Z^4$  полученное приклеиванием ручки  $H_2^4$  вдоль узла  $C \subset S^3$  с коэффициентом оснащения  $q$ . Тогда  $M^3$  гомеоморфно сфере тогда и только тогда, когда узел  $C$  тривиальный и  $q = \pm 1$ .

Заметим, что обобщение утверждения 5 на зацепления неверно. Например, из [33, Chapter 9, Н, Exercise 13] следует счетное число примеров приклеивания четырехмерных два-ручек вдоль нетривиального зацепления, дающего компактное многообразие  $Z^4$ , ограниченное сферой  $S^3$  (см. Рисунок 2). Оснащения  $q_1, \dots, q_n$  удовлетворяют равенству

$$\frac{1}{p} = q_n - \frac{1}{q_{n-1} - \frac{1}{\dots - \frac{1}{q_1}}}, \quad q \in \mathbb{N}.$$

Рассмотрим замкнутое связное ориентированное четырехмерное многообразие  $M^4$ , допускающее разложение на ручки. Тогда оно допускает разложение, в котором имеется ровно

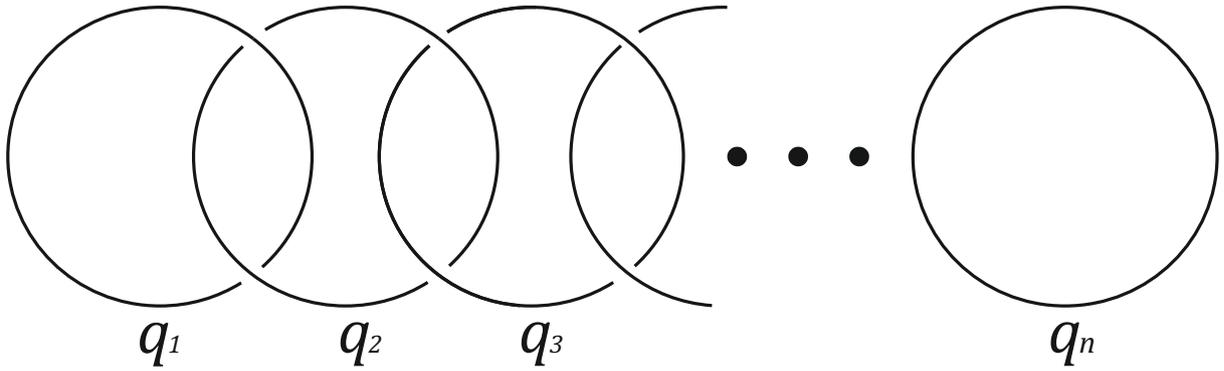


Рис. 2: Нетривиальное оснащенное зацепление, хирургия вдоль которого дает сферу.

одна 0-ручка  $B^4$  и одна 4-ручка. Пусть сфера  $S^3 = \partial B^4 \subset M^4$  наследует естественную ориентацию края многообразия  $B^4$ , индуцированную с ориентации  $M^4$ . Из результатов Лауденбаха и Поэнару ([37]) следует, что топология на  $M^4$  полностью определяется приклеиванием один- и два-ручек, поэтому нас интересуют классы объемлемой изотопии только вложений  $e_i$  подшив  $F_i^4 = \partial \mathbb{B}^i \times \mathbb{B}^{n-i}$  в край  $(4, i-1)$ -ручечного тела,  $i \in \{1, 2\}$ . Положим  $C^0 = e_1((\partial \mathbb{B}^1 \times \{O\}) \times \mathbb{Z}_m)$ ,  $L^1 = e_2((\partial \mathbb{B}^2 \times \{O\}) \times \mathbb{Z}_m)$ ,  $\tilde{L}^1 = e_2((\partial \mathbb{B}^2 \times \{x\}) \times \mathbb{Z}_m)$ ,  $x \in \{O\} \times \partial \mathbb{B}^2$ . Множество  $C^0$  – дизъюнктное объединение чётного числа точек,  $L^1$  – оснащенное зацепление с множеством  $\tilde{L}^1$  оснащений и коэффициентами оснащения  $q_j$ ,  $j \in \{1, \dots, m\}$ . Семейство  $K_{M^4} = \{C^0, L^1, \tilde{L}^1\}$  на ориентированной сфере  $S^3$  называется *диаграммой Кириби многообразия*  $M^4$ . В работах [13], [14] введены два преобразования диаграммы, связанные с сокращением и протаскиванием ручек, и показано, что два многообразия  $M^4$ ,  $M'^4$  гомеоморфны тогда и только тогда, когда диаграмма одного из многообразий получается из диаграммы второго этими двумя преобразованиями и послойными изотопиями.

### 1.2.6 Форма пересечений четырехмерного многообразия

*Формой пересечения* ориентированного компактного четырехмерного многообразия  $X$  называется симметричная билинейная форма  $Q_x : H_2(X) \times H_2(X) \rightarrow \mathbb{Z}$ , ставящая в соответствие каждой паре классов  $(a, b) \in H_2(X) \times H_2(X)$  их гомологический индекс пересечения (см. определение в [38, §5.3]).

В силу [28, Предложение 4.5.11] справедливо следующее утверждение.

**Утверждение 6.** Пусть  $Z^4$  – многообразие, полученное приклеиванием 2-ручек к шару  $B^4$  вдоль оснащенного зацепления  $L \subset S^3$ . Тогда матрица формы пересечений  $Q_{Z^4}$  в некотором каноническом базисе совпадает с матрицей коэффициентов зацепления  $A_L$ .

Если граница полного тела  $Z^4$  гомеоморфна трехмерной сфере, то приклеивание ручки  $H_4^4$  к  $Y$  дает сглаживаемое замкнутое многообразие  $M^4$ . Поскольку любой гомеоморфизм сферы продолжается до гомеоморфизма шара, который эта сфера ограничивает, многообразие  $M^4$  с точностью до гомеоморфизма полностью определяется топологией многообразия  $Z^4$ . Многообразие  $M^4$  односвязно, так как любая петля в  $M^4$  гомотопна петле в  $Z^4$ , а  $Z^4$  гомотопически эквивалентно букету двумерных сфер, следовательно является односвязным.

Из односвязности  $M^4$  следует его ориентируемость. С помощью последовательности Майера-Виеториса доказывается, что группа  $H_2(M^4)$  изоморфна группе  $H_2(Z^4)$ , которая, в свою очередь, изоморфна группе  $\mathbb{Z}^m$ . Поэтому для многообразия  $M^4$  верно следующее утверждение.

**Следствие 4.** *Матрица формы пересечений  $Q_{M^4}$  в некотором базисе совпадает с матрицей  $A_L$ .*

Из предложения 6, в частности, вытекает следующий факт: если  $-M^4$  — многообразие, полученное из  $M^4$  обращением его ориентации, то  $Q_{-M^4} = -Q_{M^4}$ . При замене базиса в группе  $H_2(M^4)$  матрица, представляющая форму пересечения в новом базисе, имеет вид  $C^T A_L C$ , где  $C$  — невырожденная унимодулярная целочисленная матрица (говорят, что такая матрица *конгруэнтна* матрице  $A_L$ ).

Известно, что форма пересечений замкнутого четырехмерного многообразия унимодулярна (см. [28, Упражнение 1.2.10]). Из результатов Дж. Уайтхеда и Л. С. Понтрягина (см. [28, Теорема 1.2.25] и комментарии к этой теореме там же) следует, что два таких многообразия  $M^4$ ,  $N^4$  гомотопически эквивалентны тогда и только тогда, когда их формы пересечений *эквивалентны*, то есть существуют такие ориентации  $M^4$ ,  $N^4$ , что матрицы, определяющие их формы пересечений в некоторых базисах, конгруэнтны с помощью целочисленной матрицы. М. Фридман доказал следующее утверждение (см. [16], [28, 1.2.27]).

**Утверждение 7.** *Для каждой унимодулярной симметричной билинейной формы  $Q$  существует односвязное замкнутое топологическое четырехмерное многообразие  $M^4$ , форма пересечения которого эквивалентна  $Q$ . Если форма  $Q$  четна, то это многообразие единственно с точностью до гомеоморфизма, если форма  $Q$  нечетна, то существует ровно два негомеоморфных топологических многообразия с данной формой пересечений, и не более чем одно из них допускает гладкую структуру. Следовательно, гладкие односвязные замкнутые многообразия определяются своей формой пересечения с точностью до гомеоморфизма.*

Напомним, что *сигнатурой*  $\text{sign}(M^4)$  замкнутого многообразия  $M^4$  называется сигнатура его формы  $Q_{M^4}$ , то есть разность положительных и отрицательных знаков на диагонали у диагонализированной матрицы, реализующей  $Q_{M^4}$ . Еще за 30 лет до теоремы Фридмана советский математик В.А. Рохлин доказал факт о гладких многообразиях (см. [17], [39, §4.4]).

**Утверждение 8.** *Сигнатура гладкого замкнутого многообразия  $M^4$  кратна 16.*

Теорема Рохлина позволяет обнаруживать негладживаемые четырехмерные многообразия. Спустя год после появления теоремы Фридмана, Дональдсон закрыл вопрос в изучении знакоопределенных форм пересечений гладких замкнутых четырехмерных многообразий, что наряду с теоремой Рохлина привело к препятствиям в реализуемости некоторых определенных форм пересечения гладкими многообразиями и открытию недиффеоморфных гладких структур на  $\mathbb{R}^4$  (см. [39, §5.4]).

**Утверждение 9.** Пусть  $Q_M^4$  – положительно (отрицательно) определенная форма пересечений ранга  $t$  гладкого замкнутого многообразия  $M^4$ . Тогда  $Q_{M^4}$  эквивалентна форме  $t[1](t[-1])$ .

Из результатов по классификации целочисленных унимодулярных билинейных симметрических знакоопределенных форм по Серру следует такой результат (см. [39, §5.1]).

**Утверждение 10.** Пусть  $Q$  – целочисленная унимодулярная билинейная симметрическая знакоопределенная форма ранга. Тогда:

- если  $Q$  нечетна, то она эквивалентна  $t[1] \oplus n[-1]$ ;
- если  $Q$  четна, то она эквивалентна  $t(\pm E_8) \oplus nH$ .

По теореме Рохлина если гладкое многообразие имеет форму пересечения, конгруэнтную  $t(\pm E_8) \oplus nH$ , то  $t$  – четное число. В силу [19], [39, §5.4] справедливо следующее утверждение, дающее оценку снизу числа  $n$  в пункте 2 утверждения 10.

**Утверждение 11.** Если гладкое многообразие  $M^4$  имеет форму пересечения  $Q_{M^4}$ , эквивалентную форме  $2m_1(\pm E_8) \oplus m_2H$ , то  $m_2 \geq 2m_1 + 1$ .

Утверждения 7, 9, 11 дают всю известную на данный момент информацию о топологии замкнутых односвязных гладких четырехмерных многообразиях. Неизвестно, любое ли такое многообразие допускает полярный поток без седловых состояний равновесия типов  $(1, 3)$ ,  $(3, 1)$ , но ежели допускает, то его топология такова.

**Предложение 1.** Пусть  $N^4$  допускает полярный поток  $f^t$  без седел типов  $(1, 3)$ ,  $(3, 1)$ . Тогда  $N^4$  гомеоморфно одному из следующих попарно негомеоморфных многообразий:

1. сфера  $S^4$  тогда и только тогда, когда  $k_2 = 0$ ;
2. связная сумма  $m_1$  копий  $\mathbb{C}P^2$  и  $m_2$  копий  $-\mathbb{C}P^2$ , где  $\mathbb{C}P^2$ ,  $-\mathbb{C}P^2$  – комплексная проективная плоскость с противоположными ориентациями,  $m_1^2 + m_2^2 \neq 0$  и  $m_1 + m_2 = k_2$ ;
3. связная сумма  $2m_1$  копий  $E_8$ -многообразий Фридмана и  $m_2 \geq 2m_1 + 1$  копий  $S^2 \times S^2$ ,  $m_1 \geq 0$  и  $16m_1 + 2m_2 = k_2$ .

Приняв во внимание 11/8-гипотезу (см. [19], [39, §5.4]), в предположении, что она верна, можно сделать такой сильный вывод.

**Предложение 5.** Пусть  $N^4$  – замкнутое гладкое односвязное многообразие. Тогда  $N^4$  гомеоморфно одному из следующих попарно негомеоморфных многообразий:

1. сфера  $S^4$ ;
2. связная сумма  $m_1$  копий  $\mathbb{C}P^2$  и  $m_2$  копий  $-\mathbb{C}P^2$ , где  $\mathbb{C}P^2$ ,  $-\mathbb{C}P^2$  – комплексная проективная плоскость с противоположными ориентациями;
3. связная сумма  $2m_1$  копий  $E_8$ -многообразий Фридмана и  $m_2 \geq 3m_1$  копий  $S^2 \times S^2$ .

Более того, любое многообразие из перечисленных выше допускает разложение на ручки без 1- и 3-ручек и, следовательно, полярный поток без седел типов  $(1, 3)$ ,  $(3, 1)$ .

### 1.2.7 Продолжение гомеоморфизмов

Доказательства следующих двух утверждений изложены в [32, Предложение 14.3, Предложение 14.5].

**Утверждение 12.** Пусть  $B^3$  – локально плоский компактный шар в  $S^3$ , наследующий ориентацию  $S^3$ ,  $e_i, e'_i : \mathbb{B}^3 \rightarrow \text{int} B^3$ ,  $i \in \{1, \dots, k\}$  меняющие ориентацию вложения с локально плоскими образами такие, что  $e_i(\mathbb{B}^3) \cap e_j(\mathbb{B}^3) = \emptyset$ ,  $e'_i(\mathbb{B}^3) \cap e'_j(\mathbb{B}^3) = \emptyset$ ,  $i \neq j \in \{1, \dots, k\}$ . Тогда существует гомеоморфизм  $\theta : S^3 \rightarrow S^3$  такой, что:

1.  $\theta e_i = e'_i$ ;
2.  $\theta|_{S^3 \setminus \text{int} B^3} = \text{id}_{S^3 \setminus \text{int} B^3}$ .

**Утверждение 13.** Пусть  $A = S^2 \times B^1$  – локально плоское кольцо в  $S^3$ ,  $e, e' : S^2 \times \mathbb{B}^1 \rightarrow \text{int} A_0$  – локально плоские вложения.

Тогда существует гомеоморфизм  $\theta : A \rightarrow A$  такой, что:

1.  $\theta e = e'$ ;
2.  $\theta|_{S^3 \setminus \text{int} A} = \text{id}_{S^3 \setminus \text{int} A}$ .

При помощи следующей леммы можно показать, что знак оснащения в диаграмме Кирби не играет роли в топологии некоторых четырехмерных многообразий.

**Лемма 2.** Пусть  $P_0 = S^1 \times B^2$  – локально плоский полноторий в  $S^3$ ,  $C = S^1 \times \{O\}$  – узел, и  $e, e' : \Pi \rightarrow \text{int} P_0$  – вложения с локально плоскими образами такие, что:

1.  $e(S^1 \times \{O\}) = e'(S^1 \times \{O\}) = C$ ;
2.  $|\text{lk}(e(\lambda), C)| = |\text{lk}(e'(\lambda), C)|$ .

Тогда существует гомеоморфизм  $\theta : S^3 \rightarrow S^3$ , такой, что:

1.  $\theta e = e'$ ;
2. если  $\text{lk}(e(\lambda), C) = \text{lk}(e'(\lambda), C)$ , то  $\theta|_{S^3 \setminus \text{int} P_0} = \text{id}_{S^3 \setminus \text{int} P_0}$ ;
3. иначе  $\theta(P_0) = P_0$ .

**Доказательство.** Доказательство, исчерпывающее пункт 2, изложено в [10, Предложение 4]. Докажем лемму для случая  $\text{lk}(e(\lambda), C) = -\text{lk}(e'(\lambda), C)$ .

Положим  $P = \eta(\Pi)$ ,  $P' = \eta(\Pi)$ ,  $\tilde{C} = \eta(\lambda)$  и  $\tilde{C}' = \eta(\lambda)$ . Множества  $m = \eta(\mu)$ ,  $m' = \eta(\mu)$  являются меридианами, а  $\tilde{C}$ ,  $\tilde{C}'$  – параллелями  $P$  и  $P'$  соответственно. Многообразия  $P_0$ ,  $P$  и  $P'$  являются компактными подмногообразиями в  $S^3$ , следовательно, они являются ручными в  $S^3$ . Тогда множества  $P_0$ ,  $P$  и  $P'$  являются регулярными кусочно-линейными окрестностями  $C$  (в смысле определения, данного в [30, Глава 3]). В силу [30, Следствие 3.18] многообразие  $P_0 \setminus \text{int} P$  гомеоморфно прямому произведению  $\partial P_0 \times [0, 1]$ . Существуют два расслоения  $\{T_s\}$ ,

$\{I_z\}$  на  $P_0 \setminus \text{int} P$  со слоями, гомеоморфными тору  $\partial P_0 = T_0$  и отрезку  $I = [0, 1]$ , соответственно. Каждая компонента связности границы  $P_0 \setminus \text{int} P$  принадлежит расслоению  $\{T_s\}$ , и каждые два слоя  $T_s, I_z$  пересекают друг друга ровно в одной точке. Мы будем считать, что расслоение  $\{T_s\}$  параметризовано точками  $s \in [0, 1]$ , а расслоение  $\{I_z\}$  параметризовано точками  $z \in T_0$ . Аналогичные расслоения  $\{T'_s\}, \{I'_z\}$  определены для  $P_0 \setminus \text{int} P'$ .

Определим проекции  $\text{pr} : P_0 \setminus \text{int} P \rightarrow T_0, \text{pr}' : P_0 \setminus \text{int} P' \rightarrow T_0$  вдоль одномерных слоев. Тогда  $\text{pr}(m), \text{pr}'(m')$  являются меридианами полнотория  $P_0$  и  $\text{lk}(\text{pr}(\tilde{C}), C) = \text{lk}(\tilde{C}, C) = -\text{lk}(\text{pr}'(\tilde{C}'), C)$ . Определим гомеоморфизм  $h : T_0 \rightarrow T_0$  по формуле  $h \text{pr} e = \text{pr}' e'$ . Отображение  $h$  сохраняет гомотопический класс меридиана  $m_0$  в  $T_0$  и удовлетворяет условию  $h(\text{pr}(\tilde{C})) = \text{pr}'(\tilde{C}')$ , так что в группе  $H_1(T_0)$  с образующими меридианом  $m_0$  и канонической параллелью  $l_0$  полнотория  $P_0$  выполняется равенство  $[h(\text{pr}(\tilde{C}))] = [l_0] - q[m_0]$ . В силу [33, Глава 2, D, теорема 4] существует изотопия  $h_s : T_0 \rightarrow T_0$ , соединяющая  $h_1 = h$  с отображением  $h_0$  тора на себя, заданного матрицей  $A_{h^*} = A_{h_0^*} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ . Таким образом, требуемый гомеоморфизм  $\xi : P_0 \rightarrow P_0$  определен по формуле

$$\xi(y) = \begin{cases} I'_{h_s(\text{pr}(y))} \cap T'_s, y \in P_0 \setminus \text{int} P; \\ e'(e^{-1}(y)), y \in \Pi. \end{cases}$$

Поскольку  $C$  - это тривиальный узел,  $P_1 = S^3 \setminus \text{int} P_0$  - полноторий, ограниченный  $T_0$ . Каноническая параллель  $l_0$  полнотория  $P_0$  является меридианом полнотория  $P_1$ . Поскольку  $[h_0(l_0)] = (1, 0) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = (1, 0)$  отображение  $h_0 : T_1 \rightarrow T_1$  сохраняет гомотопический класс меридиана  $l_0$  полнотория  $P_1$  в  $T_0$ . Таким образом, гомеоморфизм  $h_0$  может продолжаться до гомеоморфизма  $H : P_1 \rightarrow P_1$ . Тогда  $\theta : S^3 \rightarrow S^3$  определяется формулой  $\theta(p) = \begin{cases} \xi(p), p \in P_0; \\ H(p), p \in P_1. \end{cases}$  Заметим, что  $\theta$  меняет ориентацию сферы  $S^3$ .  $\diamond$

### 1.3 Динамика

#### 1.3.1 Энергетическая функция градиентно-подобного потока

Следующее предложение напрямую следует из [40, Theorem B], [41, Theorem 1].

**Утверждение 14.** *Для любого потока  $f^t \in G(M^n)$  существует функция Морса  $\varphi : M^n \rightarrow [0, n]$  такая, что:*

1.  $\varphi$  строго убывает вдоль незамкнутых траекторий;
2. множество критических точек  $\varphi$  совпадает с  $\Omega_{f^t}$ , а индекс критической точки  $p$  равен размерности  $\dim W_p^u$  неустойчивого многообразия  $W_p^u$  точки  $p$ , как состояния равновесия потока  $f^t$ ;

3.  $\varphi(p) = \dim W_p^u$  для любого  $p \in \Omega_{f^t}$ ;

4. для любого некритического значения  $c \in (0, n)$  множество  $\Sigma_c = \varphi^{-1}(c)$  является гладким подмногообразием  $M^n$ , трансверсальным к траекториям  $f^t$ .

Функция  $\varphi$ , определенная в утверждении 14, называется *самоиндексирующей энергетической функцией потока*  $f^t$ . Будем обозначать  $M_c^n = \varphi^{-1}([0, c])$ ,  $\Sigma_c = \varphi^{-1}(c)$ ,  $c \in [0, n]$ .

### 1.3.2 Компактная каноническая окрестность седлового состояния равновесия

Следующее утверждение является следствием классической  $\lambda$ -леммы (см. [42, Леммы 7.1., 7.3.]).

**Утверждение 15.** Пусть  $\sigma$  – гиперболическое состояние равновесия типа  $(i, n - i)$  потока  $f^t : M^n \rightarrow M^n$ ,  $i \in \{1, \dots, n - 1\}$ . Тогда существует компактная окрестность  $V_\sigma \subset M^n$  точки  $\sigma$ , снабженная двумя непрерывными отображениями  $\pi_s : V_\sigma \rightarrow B_\sigma^s$ ,  $\pi_u : V_\sigma \rightarrow B_\sigma^u$ , где  $B_\sigma^s = V_\sigma \cap W_\sigma^s$ ,  $B_\sigma^u = V_\sigma \cap W_\sigma^u$  – шары размерности  $(n - i)$  и  $i$ , соответственно, со следующими свойствами:

1.  $\pi_s^{-1}(\sigma) = B_\sigma^u$ ,  $\pi_u^{-1}(\sigma) = B_\sigma^s$ ;
2. для любой точки  $x \in B_\sigma^s$  ( $y \in B_\sigma^u$ ) ее прообраз  $B_x^u = \pi_s^{-1}(x)$  ( $B_y^s = \pi_u^{-1}(y)$ ) является гладким шаром в  $M^n$  размерности  $i$  ( $n - i$ );
3. для любых  $x \in B_\sigma^s$  и  $y \in B_\sigma^u$  пересечение  $B_x^u \cap B_y^s$  трансверсально и состоит ровно из одной точки;
4.  $B_{f^t(x)}^u \subset f^t(B_x^u)$ ,  $f^t(B_y^s) \subset B_{f^t(y)}^s$  для любого  $t \geq 0$ .

Будем называть множество  $V_\sigma$ , определенное в утверждении 15 *компактной канонической окрестностью точки  $\sigma$* .

Отображения  $\pi_s : V_\sigma \rightarrow B_\sigma^s$ ,  $\pi_u : V_\sigma \rightarrow B_\sigma^u$  определяют структуру прямого произведения  $B_\sigma^s \times B_\sigma^u$  на многообразии  $V_\sigma$ . Край  $\partial V_\sigma$  может быть представлен как объединение двух компактных подмножеств  $\Pi_\sigma^u$ ,  $\Pi_\sigma^s$ , гомеоморфных  $(\partial B_\sigma^s \times B_\sigma^u)$ ,  $(B_\sigma^s \times \partial B_\sigma^u)$ , соответственно с общей границей, гомеоморфной  $\partial B_\sigma^s \times \partial B_\sigma^u$ . Так компактная каноническая окрестность седлового состояния равновесия типа  $(i, n - i)$  является локально плоским образом ручки  $H_i^n$  при вложении в  $M^n$ .

Доказательство следующего предложения следует из [21, Предложение 11] и [10, Предложение 13]

**Предложение 6.** Пусть  $\sigma, \sigma'$  – седловые состояния равновесия типа  $(i, n - i)$  потоков  $f^t, f'^t$ , соответственно, и  $V_\sigma, V_{\sigma'}$  – их компактные канонические окрестности. Тогда существует гомеоморфизм  $h_{\sigma, \sigma'} : V_\sigma \rightarrow V_{\sigma'}$  такой, что:

1.  $h_{\sigma, \sigma'} f^t = f'^t h_{\sigma, \sigma'}$  для всех  $t$ , при которых определены правая и левая часть равенства;
2. если седла  $\sigma, \sigma'$  имеют тип  $(2, 2)$ , то дополнительно  $h_{\sigma, \sigma'}$  переводит меридианы полноториев  $\Pi_\sigma^u, \Pi_\sigma^s$  в меридианы полноториев  $\Pi_{\sigma'}^u, \Pi_{\sigma'}^s$ , соответственно

## 2 Диаграмма Кирби потока $f^t \in G_{g,k}(M^4)$

В данном разделе даются определения диаграммы Кирби потока  $f^t \in G_{g,k}(M^4)$  и эквивалентности диаграмм Кирби потоков. Мы показываем, что любые два потока  $f^t, f^{t'} \in G_{g,k}(M^4)$ , обладающих эквивалентными диаграммами Кирби, топологически эквивалентны. Так доказательство теоремы 1 сводится к проверке того факта, что из изоморфизма графов  $\Gamma_{f^t}, \Gamma_{f^{t'}}$  потоков  $f^t, f^{t'}$  эквивалентность из их диаграмм Кирби.

Обозначим за  $\Omega_{f^t}^i$  множество состояний равновесия типа  $(i, 4 - i)$ , а  $k_i$  – мощность множества  $\Omega_{f^t}^i$ ,  $i \in \{0, \dots, 4\}$ . Обозначение  $\sigma^i$  будет использовано для седловой точки, принадлежащей  $\Omega_{f^t}^i$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$ . Поскольку  $M^4$  компактно, самоиндексирующаяся энергетическая функция  $\varphi$  потока  $f^t$  должна иметь по крайней мере один локальный максимум и один локальный минимум, поэтому  $k_0$  и  $k_4$  должны быть положительными. Если  $k_1 = k_3 = 0$ , то  $f^t$  является полярным, и классификация таких потоков выполнена в [10]. Случай  $k_2 = 0$  полностью изучен в [8]. Итак, ниже мы предполагаем, что по крайней мере одно из чисел  $k_1, k_3$  является положительным и  $k_2 \geq 1$ .

Пусть  $W_X^u$  ( $W_X^s$ ) – объединение неустойчивых (устойчивых) многообразий равновесий  $f^t$ , принадлежащих множеству  $X$ . Положим  $A_{f^t}^2 = W_{\Omega_{f^t}^0}^u \cup W_{\Omega_{f^t}^1}^u \cup W_{\Omega_{f^t}^2}^u$ ,  $A_{f^t}^1 = W_{\Omega_{f^t}^0}^u \cup W_{\Omega_{f^t}^1}^u$ ,  $R_{f^t}^1 = W_{\Omega_{f^t}^3}^s \cup W_{\Omega_{f^t}^4}^s$ , и  $V_{f^t} = M^4 \setminus (A_{f^t}^2 \cup R_{f^t}^1)$ .

Отождествим множество  $A_{f^t}^1$  с графом, вершины которого являются стоками потока  $f^t$ , а ребра – одномерными неустойчивыми многообразиями седловых состояний равновесия. Аналогично [32, Лемма 3.1] можно доказать, что  $A_{f^t}^1$  является связным графом. Тогда  $k_1 - k_0 + 1 \geq 0$ . Пусть  $g_a = k_1 - k_0 + 1$ . Если  $g_a = 0$ , то граф  $A_{f^t}^1$  является деревом, если  $g_a > 0$ , то существует множество  $\widehat{\Omega}_{f^t}^1 = \{\widehat{\sigma}_1^1, \dots, \widehat{\sigma}_{g_a}^1 \in \Omega_{f^t}^1\}$  такое, что граф  $\widehat{A}_{f^t}^1 = A_{f^t}^1 \setminus W_{\widehat{\Omega}_{f^t}^1}^u$  – это дерево (оно называется *максимальное дерево графа  $A_{f^t}^1$* ). Обозначим  $\Omega_{f^t}^{*1} = \Omega_{f^t}^1 \setminus \widehat{\Omega}_{f^t}^1$ .

Мы строим сферу  $S_{f^t}^3$ , ограничивающую окрестность множества  $\widehat{A}_{f^t}^1$ , на которой будет изображена диаграмма Кирби потока  $f^t$ .

**Лемма 3.** *Для любого потока  $f^t \in G_{g,k}(M^4)$ ,  $g, k \geq 0$  существует локально плоская трехмерная сфера  $S_{f^t}^3 \subset M^4$  с следующие свойства: (см. Рисунок 3):*

1.  $S_{f^t}^3$  ограничивает шар  $B_{f^t}^4$  таким образом, что  $\widehat{A}_{f^t}^1 \subset \text{int } B_{f^t}^4$ ;
2. для любой точки  $x \in V_{f^t} \cup (W_{\Omega_{f^t}^2}^u \setminus \Omega_{f^t}^2) \cup (W_{\Omega_{f^t}^1}^u \setminus \widehat{\Omega}_{f^t}^1)$  существует единственное время  $t_x \in \mathbb{R}$  такое, что  $f^{t_x}(x) \in S_{f^t}^3$ . Более того,  $f^t(x) \in \text{int } B_{f^t}^4$  для любого  $t > t_x$  и  $f^t(x) \in V_{f^t} \setminus B_{f^t}^4$  для любого  $t < t_x$ ;
3. для любой точки  $\sigma \in \widehat{\Omega}_{f^t}^1 \cup \Omega_{f^t}^2 \cup \Omega_{f^t}^3$  пересечение ее компактной канонической окрестности  $V_\sigma = B_\sigma^s \times B_\sigma^u \subset S_{f^t}^3$  состоит из множества  $B_\sigma^s \times \partial B_\sigma^u$ ;
4. для любой точки  $\sigma \in \Omega_{f^t}^{*1}$  пересечение ее компактной канонической окрестности  $V_\sigma = B_\sigma^s \times B_\sigma^u \subset S_{f^t}^3$  состоит из множества  $\partial B_\sigma^s \times B_\sigma^u$ .

**Доказательство.**

Пусть  $\{V_\sigma : \sigma \in \Omega_{ft}\}$  – множество попарно непересекающихся компактных канонических окрестностей седел потока  $f^t$  и  $\varepsilon \in (0, 1)$  такое, что  $V_\sigma \cap \Sigma_\varepsilon = \emptyset$  для любого  $\sigma \in \Omega_{ft}$  (напомним, что  $\Sigma_c$  означает  $\varphi^{-1}(c)$ , где  $\varphi : M^4 \rightarrow \mathbb{R}$  – самоиндексирующаяся энергетическая функция для потока  $f^t$ ). Из свойств функции Морса следует, что  $\Sigma_\varepsilon$  является объединением  $k_0$  непересекающихся гладких трехмерных сфер, ограничивающих объединение  $M_\varepsilon^4 = \varphi^{-1}([0, \varepsilon])$  4-мерных шаров.

Обозначим  $\Pi_\sigma^u = B_\sigma^s \times \partial B_\sigma^u$  и  $\Pi_\sigma^s = \partial B_\sigma^s \times B_\sigma^u$ . Для любого  $x \in \Pi_\sigma^u$  существует единственное время  $t_x \in \mathbb{R}_+$  такое, что  $\tilde{x} = f^{t_x}(x) \in \Sigma_\varepsilon$ . Рассмотрим вложение  $\eta_\sigma : \Pi_\sigma^u \rightarrow \Sigma_\varepsilon$ , определенное формулой  $\eta_\sigma(x) = f^{t_x}(x)$  для любого  $x \in \Pi_\sigma^u$ . Положим  $\tilde{\Pi}_\sigma^u = \eta_\sigma(\Pi_\sigma^u)$ .

Поскольку  $V_\sigma \cap V_{\tilde{\sigma}} = \emptyset$  для любого  $\sigma \neq \tilde{\sigma}$ , то  $\tilde{\Pi}_\sigma^u \cap \tilde{\Pi}_{\tilde{\sigma}}^u = \emptyset$ . Множество  $\tilde{\Pi}_\sigma^u$  является топологическим подмногообразием  $\Sigma_\varepsilon$  и существует вложение  $\theta_\sigma : \partial\tilde{\Pi}_\sigma^u \times [0, 1] \rightarrow \Sigma_\varepsilon$  такое, что  $\theta_\sigma(\partial\tilde{\Pi}_\sigma^u \times [0, 1]) \cap \tilde{\Pi}_\sigma^u = \theta_\sigma(\partial\tilde{\Pi}_\sigma^u \times \{0\})$ , и множество  $N_\sigma^u = \tilde{\Pi}_\sigma^u \cup \theta_\sigma(\partial\tilde{\Pi}_\sigma^u \times [0, 1])$ , не пересекает никакое множество  $N_{\tilde{\sigma}}^u$ , определенное аналогично для седловых состояний равновесия  $\tilde{\sigma} \neq \sigma$ .

Пусть  $T : \Pi_\sigma^u \rightarrow (-\infty, 0)$  – непрерывная функция, определяемая формулой  $T(\tilde{x}) = -t_x$ . Продолжим функцию  $T(\tilde{x})$  до непрерывной функции  $\mathbf{T} : N_\sigma^u \rightarrow (-\infty, 0]$  такой, что  $\mathbf{T}(\tilde{y}) = 0$  для любого  $\tilde{y} \in \partial N_\sigma^u$  и определим непрерывную функцию  $\mathbf{T} : \Sigma_\varepsilon \rightarrow (-\infty, 0]$  по формуле

$$\mathbf{T}(y) = \begin{cases} \mathbf{T}(y), & y \in N_\sigma^u; \\ 0, & y \in \Sigma_\varepsilon \setminus \text{int } N_\sigma^u. \end{cases}$$

Функция  $\mathbf{T}$  может быть определена следующим образом. Так как  $N_\sigma^u = N_\sigma^u \setminus \text{int } \Pi_\sigma^u$  является гомеоморфным образом прямого произведения  $\partial\tilde{\Pi}_\sigma^u \times [0, 1]$  при вложении  $\theta_\sigma$ , каждая точка  $\tilde{y} \in K_\sigma^u$  может быть представлена в виде пары  $(\tilde{x}, s)$  координат, где  $\tilde{x} \in \partial\tilde{\Pi}_\sigma^u$ ,  $s \in [0, 1]$ . Пусть  $\psi_{\tilde{x}} : [0, 1] \rightarrow [-t_{\tilde{x}}, 0]$  – линейная функция, определенная для каждого  $\tilde{x} \in \partial\tilde{\Pi}_\sigma^u$  по формуле  $\psi_{\tilde{x}}(0) = -t_x$  и  $\psi_{\tilde{x}}(1) = 0$ . Тогда  $\mathbf{T}(\tilde{y}) = \begin{cases} T(\tilde{x}), & \tilde{y} = \tilde{x} \in \tilde{\Pi}_\sigma^u; \\ \psi_{\tilde{x}}(s), & \tilde{y} = (\tilde{x}, s) \in N_\sigma^u. \end{cases}$

Для любого  $y \in \Sigma_\varepsilon$  положим  $h_\sigma(y) = f^{\mathbf{T}(y)}(y)$  и  $\tilde{\Sigma}_\varepsilon = H(\Sigma_\varepsilon) = \bigcirc_{\sigma \in \Omega_{ft}} h_\sigma(\Sigma_\varepsilon)$  (см. рисунок 3).

Из конструкции  $H : \Sigma_\varepsilon \rightarrow \tilde{\Sigma}_\varepsilon$  является гомеоморфизмом, а множество  $\tilde{\Sigma}_\varepsilon$  является объединением локально плоских трехмерных сфер, так что для любой седловой точки  $\sigma \in \Omega_{ft}$  выполняется равенство  $V_\sigma \cap \tilde{\Sigma}_\varepsilon = \Pi_\sigma^u$ . Более того,  $\tilde{\Sigma}_\varepsilon$  ограничивает  $\tilde{M}_\varepsilon^4$  – объединение  $k_0$  шаров. Набор  $\Omega_{ft}^{*1}$  состоит из  $k_1 - g_a = k_0 - 1$  элементов.

Обозначим  $V_* = \bigcup_{\sigma^1 \in \Omega_{ft}^{*1}} V_{\sigma^1}$  и  $B_{ft}^4 = \tilde{M}_\varepsilon^4 \cup V_*$  и  $S_{ft}^3 = \partial B_{ft}^4$ . По построению  $\hat{A}_{ft} \subset B_{ft}^4$  и множество  $S_{ft}^3$  удовлетворяют пунктам 2, 3 и 4 леммы. Покажем, что  $B_{ft}^4$  – это шар. По конструкции,  $\Pi_{\sigma^1}^u$  представляет собой пару непересекающихся трехмерных шаров для любого  $\sigma^1 \in \Omega_{ft}^{*1}$ . Более того, ни одна пара трехмерных шаров из  $\Pi_{\sigma^1}^u$  не принадлежит одному четырехмерному шару из объединения  $\tilde{M}_\varepsilon^4$ , и каждый четырехмерный шар из  $\tilde{M}_\varepsilon^4$  содержит по крайней мере один трехмерный шар из семейства  $\{\Pi_{\sigma^1}^u\}$ . Кроме того, для любых двух разных седел  $\sigma^1, \tilde{\sigma}^1 \in \Omega_{ft}^{*1}$  пары  $\Pi_{\sigma^1}^u, \Pi_{\tilde{\sigma}^1}^u$  не лежат на одной и той же паре из объединения  $\tilde{M}_\varepsilon^4$ . Будь

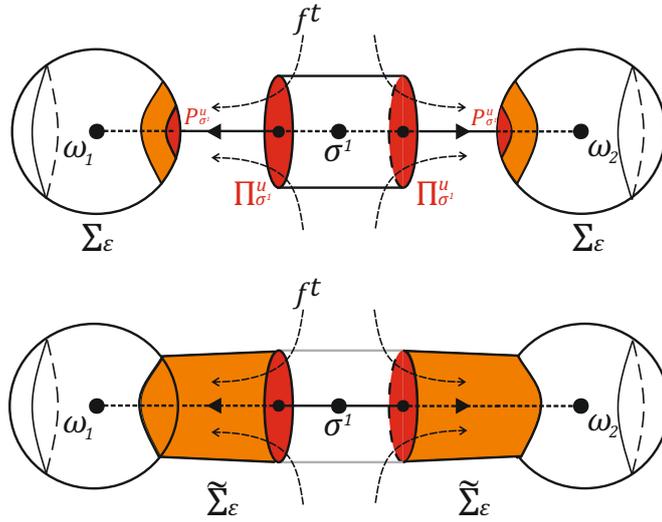


Рис. 3: Построение  $\tilde{\Sigma}_\epsilon$ .

оно иначе, граф  $\hat{A}_{ft}$  имел бы цикл, содержащий два ребра  $W_{\sigma^1}^u, W_{\tilde{\sigma}^1}^u$ , соединяющие вершины  $\omega^1, \tilde{\omega}^1$ , принадлежащие соответствующей паре паре шаров, что приведет к противоречию.

Тогда для любого  $\sigma^1 \in \Omega_{ft}^{*1}$  пересечение  $\tilde{M}_\epsilon^4 \cap V_{\sigma^1}$  состоит из пары  $\Pi_{\sigma^1}^u$  из непересекающихся трехмерных шаров, образующих общую часть границы четырехмерного шара  $V_{\sigma^1}$  и двух четырехмерных шаров из объединения  $\tilde{M}_\epsilon^4$ . Тогда объединение  $\tilde{M}_\epsilon^4 \cup V_{\sigma^1}$  состоит из граничной суммы  $V_{\sigma^1}$  с двумя шарами из  $\tilde{M}_\epsilon^4$  и оставшихся  $k_0 - 2$  шаров. Имеется непересекающееся объединение  $k_0 - 1$  четырехмерных шаров, удовлетворяющее тем же условиям, что и объединение  $\tilde{M}_\epsilon^4$ . Применяя те же рассуждения к оставшимся  $k_0 - 2$  седлам из  $\Omega_{ft}^{*1}$ , мы получаем шар  $B_{ft}^4$  и искомую сферу  $S_{ft}^3$ .

◇

Рассмотрим теперь многообразие  $Q_{ft}^4 = B_{ft}^4 \cup_{\hat{\sigma}^1 \in \hat{\Omega}_{ft}^1} V_{\sigma^1}$ . По определению, оно является  $(4, 1)$ -ручечным телом рода  $g_a$ . В силу предложения 2  $Q_{ft}^4$  гомеоморфно  $g_a(S^1 \times B^3)$ , а его граница  $\Sigma_{ft}^3 = g_a(S^1 \times S^2)$ . Будем называть  $\Sigma_{ft}^3$  *характеристической секущей для потока  $f^t$* .

Положим

$$L_{ft}^0 = S_{ft}^3 \cap W_{\hat{\Omega}_{ft}^1}^u, L_{ft}^1 = S_{ft}^3 \cap W_{\Omega_{ft}^2}^u, L_{ft}^{2,u} = S_{ft}^3 \cap W_{\Omega_{ft}^3}^u, L_{ft}^{2,s} = S_{ft}^3 \cap W_{\Omega_{ft}^1 \setminus \hat{\Omega}_{ft}^1}^s.$$

Так как инвариантные многообразия различных седловых равновесий потока  $f^t \in G_{g,k}(M^4)$  не пересекаются, элементы  $L_{ft}^0, L_{ft}^1, L_{ft}^{2,u}, L_{ft}^{2,s}$  попарно не пересекаются. Из леммы 3 сразу получаем следующее предложение.

**Предложение 7.** 1. если  $g_a = 0$ , то набор  $L_{ft}^0$  пуст, если  $g_a > 0$ , то  $L_{ft}^0$  является объединением  $g_a$  пар точек;

2.  $L_{ft}^1$  – это  $k$ -компонентное зацепление;

3.  $L_{ft}^{2,u}$  – это непересекающееся объединение  $k_3$  локально плоских двумерных сфер в  $S_{ft}^3$ ;

4.  $L_{ft}^{2,s}$  – это непересекающееся объединение  $(k_1 - g_a)$  локально плоских двумерных сфер в  $S_{ft}^3$ .

Пусть  $\sigma^2 \in \Omega_{ft}^2$  и  $C_{\sigma^2} = W_{\sigma^2}^u \cap S_{ft}^3$  – компонента зацепления  $C_{ft}^1$ . Тогда  $B_{ft}^4 \cup V_{\sigma^2}$  –  $(4, 2)$ -ручное тело, полученное приклеиванием 2-ручки  $V_{\sigma^2}$  к шару  $B_{ft}^4$  вдоль узла  $C_{\sigma^2}$ . По определению,  $\Pi_{\sigma^2}^u = B_{\sigma^2}^s \times \partial B_{\sigma^2}^u$  является трубчатой окрестностью узла  $C_{\sigma^2}$  с границей  $T_{\sigma^2}^u = \partial B_{\sigma^2}^s \times \partial B_{\sigma^2}^u$ . Обозначим за  $\tilde{C}_{\sigma^2}$  меридиан полнотория  $\Pi_{\sigma^2}^s$ . Тогда  $\tilde{C}_{\sigma^2}$  – параллель полнотория  $\Pi_{\sigma^2}^u$  и оснащение узла  $C_{\sigma^2}$ , определяющее приклеивание ручки  $V_{\sigma^2}$ . Положим  $q_{\sigma^2} = \text{lk}(\tilde{C}_{\sigma^2}, C_{\sigma^2})$ .

**Определение 1.** Семейство  $K_{ft} = \{S_{ft}^3, L_{ft}^0, L_{ft}^1, \tilde{L}_{ft}^1, L_{ft}^{2,u}, L_{ft}^{2,s}\}$  называется диаграммой Кирби потока  $f^t \in G_{g,k}(M^4)$ .

**Замечание 1.** Согласно определению раздела 1.2.5, диаграмма Кирби многообразия  $M^4$ , несущего поток  $f^t \in G_{g,k}(M^4)$ , не содержит множеств  $C_{ft}^{2,u}$  и  $C_{ft}^{2,s}$ . Мы включаем  $C_{ft}^{2,u}$  и  $C_{ft}^{2,s}$  в диаграмму Кирби потока, чтобы она так же определяла класс эквивалентности потоков из  $G_{g,k}(M^4)$ . На рисунке 4 показаны фазовые портреты неэквивалентных потоков и их неэквивалентные диаграммы Кирби на гомеоморфных многообразиях с эквивалентными диаграммами Кирби.

**Определение 2.** Диаграммы Кирби  $K_{ft}, K_{ft'}$  потоков  $f^t, f^{t'} \in G_{g,k}(M^4)$  эквивалентны, если существует гомеоморфизм  $h : S_{ft}^3 \rightarrow S_{ft'}^3$  такой, что:

1.  $h(L_{ft}^i) = L_{ft'}^i$  для  $i \in \{0, 1\}$ ;
2.  $h(\tilde{C}_{\sigma^2}) = \tilde{C}_{\sigma'^2}$  для любой пары  $C_{\sigma^2} \subset L_{ft}^1, C_{\sigma'^2} = h(C_{\sigma^2})$ ;
3.  $h(L_{ft}^{2,u}) = L_{ft'}^{2,u}, h(L_{ft}^{2,s}) = L_{ft'}^{2,s}$ ;

**Предложение 8.** Пусть  $f^t \in G_{g,k}(M^4)$ . Тогда

1.  $g_a = g_{ft} = \frac{k_1 + k_3 - k_0 - k_4 + 2}{2}$ ;
2. если  $k = 1$ , то  $L_{ft}^1$  – тривиальный узел с коэффициентом оснащения  $\pm 1$ .

**Доказательство.** Рассмотрим сферу  $S_{ft}^3$ , построенную в лемме 3. Из конструкции  $S_{ft}^3$  следует, что многообразию  $N_1 = B_{ft}^4 \bigcup_{\hat{\sigma}_i^1 \in \hat{\Omega}_{ft}^1} V_{\sigma_i^1}$  получается приклеиванием  $g_a$  1-ручек к шару  $B_{ft}^4$  по гомеоморфизмам  $e_i^1 : F_1^4 \rightarrow \Pi_{\sigma_i^1}^u$ . Согласно утверждению 2,  $N_1$  гомеоморфно граничной сумме  $g_a(S^1 \times B^3)$ .  $N_2 = N_1 \cup V_{\sigma^2}$  получается приклеиванием 2-ручки к  $N_1$  по гомеоморфизму  $e^2 : F_2^4 \rightarrow \Pi_{\sigma^2}^u$ . Поскольку сфера  $S_{ft}^3 \setminus V_{\sigma^2}$  связна, существует замкнутый шар  $D^3 \subset S_{ft}^3 \setminus V_{\sigma^2}$ , такая, что  $\bigcup_{\hat{\sigma}_i^1} V_{\sigma_i^1} \cap S_{ft}^3 \subset \text{int } D^3$ . Тогда  $\partial N_2$  можно представить в виде связанной суммы  $X \# Y$  двух многообразий  $X, Y$ , где  $X$  гомеоморфно  $g_a(S^1 \times S^2)$  и  $Y$  получено из сферы  $S_{ft}^3$  целочисленной хирургией Дена вдоль узла  $L_{ft}^1$  с коэффициентом  $q$ .

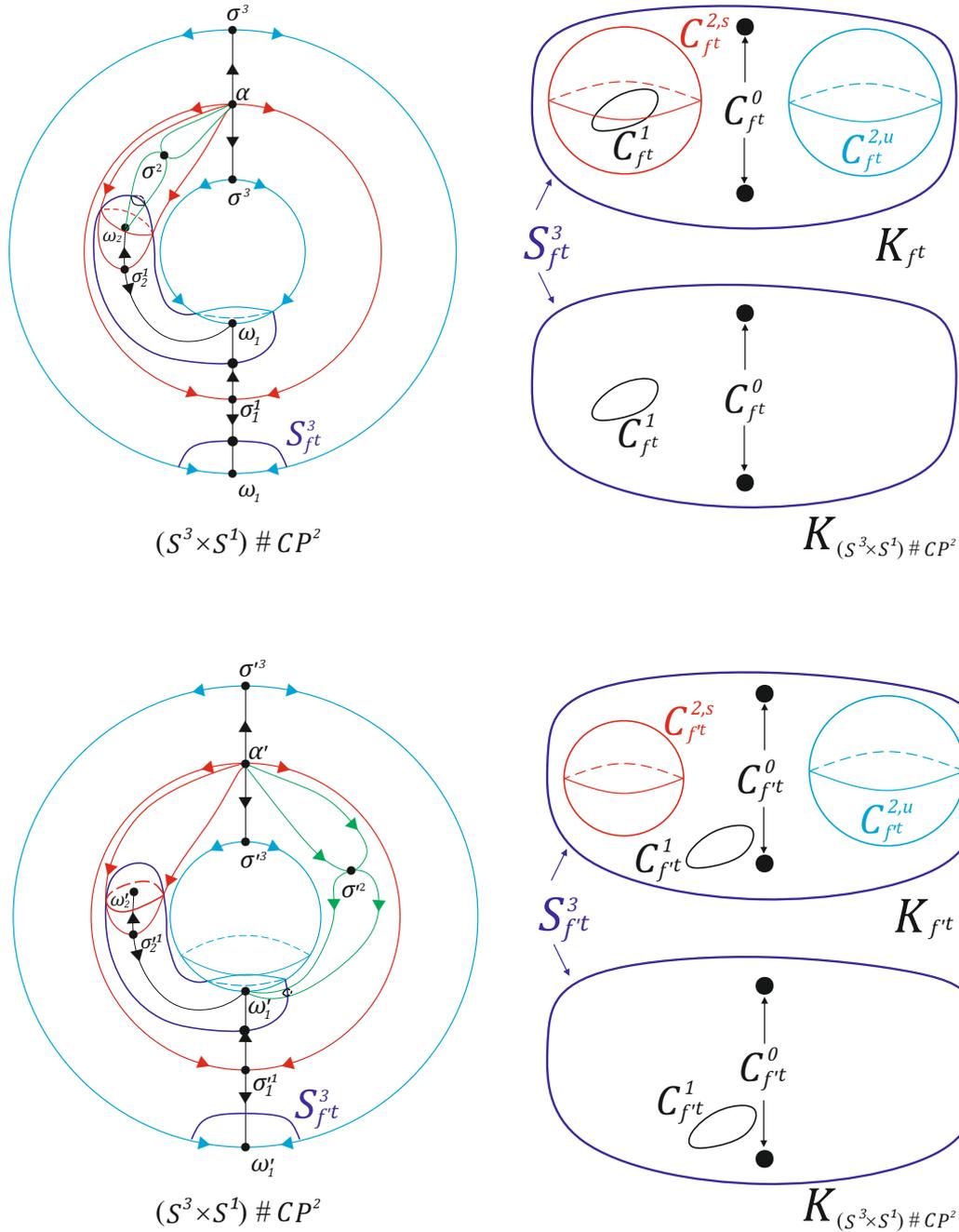


Рис. 4: Фазовые портреты, диаграммы Кирби потоков  $f^t, f'^t \in G_{1,1}(M^4)$  и диаграммы Кирби их несущего многообразия  $(S^3 \times S^1) \# CP^2$

С другой стороны, если  $\partial N_2$  пересекается с траекторией потока  $f^t$ , то пересечение состоит из ровно одной точки, следовательно, существует естественный гомеоморфизм  $H : \partial N_2 \rightarrow \Sigma_{f^{-t}}^3$ , переводящий любую точку  $x \in \partial N_2$  в точку  $\mathcal{O}_{f^t}(x) \cap \Sigma_{f^{-t}}^3$ , где  $\mathcal{O}_{f^t}(x)$  – траектория  $x$ ,  $\Sigma_{f^{-t}}^3$  – характеристическая секущая для потока  $f^{-t}$ . Тогда  $\partial N_2$  гомеоморфно  $g_r(S^1 \times S^2)$ , где  $g_r = k_3 - k_4 + 1$ .

В силу теоремы Милнора-Кнезера разложение любого замкнутого трехмерного многообразия на связную сумму единственно с точностью до гомеоморфизма слагаемых (см., например, [43, 3.21 Theorem]). Тогда  $Y$  гомеоморфно  $l(S^1 \times S^2)$ ,  $l = g_r - g_a \geq 0$ . Тогда  $Y$  – гомологическая копия  $\Sigma_l^3$  многообразия  $l(S^1 \times S^2)$  по необходимости. В силу следствия 2 оснащение  $q$  либо нулевой, либо равен  $\pm 1$ . Тогда из того же следствия  $Y$  гомеоморфно либо  $S^1 \times S^2$ , либо сфере  $S^3$ , соответственно. Первое невозможно, так как в этом случае  $g_a = g_r - 1$  и число  $g_{ft} = \frac{g_a + g_r}{2}$  не является целым, что противоречит утверждению 1. Тогда  $Y$  гомеоморфно сфере и по лемме 1  $q = \pm 1$  и узел  $L_{f^t}^1$  тривиальный.  $\diamond$

**Теорема 2.** Пусть диаграммы Кирби  $K_{f^t}, K_{f^{t'}}$  потоков  $f^t, f^{t'} \in G_{g,k}(M^4)$  эквивалентны. Тогда  $f^t, f^{t'}$  топологически эквивалентны.

**Доказательство.** Пусть потоки  $f^t, f^{t'}$  принадлежат классу  $G_{g,k}(M^4)$ ,  $K_{f^t}, K_{f^{t'}}$  – их диаграммы Кирби такие, что существует гомеоморфизм  $h : S_{f^t}^3 \rightarrow S_{f^{t'}}^3$ , удовлетворяющий определению 2. Построим гомеоморфизм  $H : M^4 \rightarrow M^4$  такой, что  $f^t = H^{-1}f^{t'}H$ , то есть докажем, что потоки  $f^t, f^{t'}$  топологически сопряжены (и, следовательно, топологически эквивалентны).

Пусть  $V_\sigma(V_{\sigma'})$  обозначает каноническую окрестность седловой точки  $\sigma \in \Omega_{f^t}(\sigma' \in \Omega_{f^{t'}})$ , пересекающая сферу  $S_{f^t}^3(S_{f^{t'}}^3)$  по множеству  $\Pi_\sigma^u(\Pi_{\sigma'}^u)$ .

Со следом неустойчивого многообразия седла  $\sigma \in \widehat{\Omega}_{f^t}^1 \cup \Omega_{f^t}^2 \cup \Omega_{f^t}^3$  на сфере  $S_{f^t}^3$  связаны две окрестности:  $\widetilde{\Pi}_\sigma^u = h(\Pi_\sigma^u)$  и  $\Pi_{\sigma'}^u = h_{\sigma,\sigma'}(\Pi_\sigma^u)$ , где  $h_{\sigma,\sigma'}$  – гомеоморфизм, определенный в Предложении 6, сопрягающий ограничения потоков  $f^t, f^{t'}$  на окрестности  $V_\sigma, V_{\sigma'}$ , соответственно. При этом для любого седла  $\sigma'^2 \in \Omega_{f^t}^2$  гомеоморфизм  $h_{\sigma^2,\sigma'^2}$  переводит меридиан  $\widetilde{C}_{\sigma^2}$  полнотория  $\Pi_{\sigma^2}^s$  в меридиан полнотория  $\Pi_{\sigma'^2}^s$  в силу предложения 6. Для любого седла  $\sigma'$  обозначим за  $\Pi_{\sigma'}$  – компактное подмногообразие в  $S_{f^{t'}}^3$ , гомеоморфное  $\Pi_{\sigma'}^u$ , такое, что  $\Pi_{\sigma'}^u \cup \widetilde{\Pi}_\sigma^u \subset \text{int } \Pi_{\sigma'}$  и не пересекающие аналогичные множества, определенные для седел отличных от  $\sigma'$ . Существование таковой следует из локальной плоскостности множеств  $\Pi_{\sigma'}^u, \widetilde{\Pi}_\sigma^u$  в  $S_{f^{t'}}^3$ .

Из утверждений 12, 13 и леммы 2 следует, что существует гомеоморфизм  $h_{\sigma'} : S_{f^{t'}}^3 \rightarrow S_{f^t}^3$  со следующими свойствами:

1.  $h_{\sigma'}h|_{\Pi_\sigma^u} = h_{\sigma,\sigma'}|_{\Pi_\sigma^u}$ ;
2.  $h_{\sigma'}|_{S_{f^{t'}}^3 \setminus \text{int } \Pi_{\sigma'}^u} = \text{id}_{S_{f^{t'}}^3 \setminus \text{int } \Pi_{\sigma'}^u}$ .

Обозначим через  $h' : S_{f^{t'}}^3 \rightarrow S_{f^t}^3$  суперпозицию гомеоморфизмов  $h_{\sigma'}$ , построенных для каждой пары седловых точек  $\sigma \in \Omega_{f^t}, \sigma' \in \Omega_{f^{t'}}$ , и положим  $\chi = h'h$ . По построению  $\chi|_{\Pi_\sigma^u} = h_{\sigma,\sigma'}|_{\Pi_\sigma^u}$  для каждой точки  $\sigma \in \Omega_{f^t}$ .

Каждой точке  $z \in M^4 \setminus \Omega_{ft}$  поставим в соответствие время  $t_z \in \mathbb{R}$  такое, что  $f^{t_z}(z) \subset S_{ft}^3 \cup_{\sigma \in \Omega_{ft}} V_\sigma$  и положим

$$G(z) = \begin{cases} f'^{-t_z}(\chi(f^{t_z}(z))), & f^{t_z}(z) \in S_{ft}^3; \\ f'^{-t_z}(h_{\sigma, \sigma'}(f^{t_z}(z))), & f^{t_z}(z) \in V_\sigma. \end{cases}$$

Отметим, что несмотря на то, что время  $t_z$ , вообще говоря, определяется неоднозначно для тех точек  $z$ , для которых  $f^{t_z}(z) \in V_\sigma$ , отображение  $G$  является непрерывной биекцией. Действительно, пусть  $\tau_z, \nu_z$  такие, что  $f^{\tau_z}(z) \in V_\sigma, f^{\nu_z}(z) \in V_\sigma$  и  $t = \nu_z - \tau_z > 0$ . Тогда  $G(z) = f'^{-\tau_z}(h_{\sigma, \sigma'}(f^{\tau_z}(z))) = f'^{-\tau_z}(f'^{-t}(h_{\sigma, \sigma'}(f^t(f^{\tau_z}(z))))) = f'^{-\nu_z}(h_{\sigma, \sigma'}(f^{\nu_z}(z)))$ . Построенное отображение единственным образом по непрерывности продолжается на множество  $\Omega_{ft}$  до искомого гомеоморфизма  $H$ .  $\diamond$

### 3 Оснащенный граф потока $f^t \in G_{g,k}$

Напомним определения оснащенного графа потока  $f^t \in G_{g,k}(M^4)$  и диаграммы Кирби области. Пусть  $\mathcal{L}_{ft}$  – объединение замыканий всех трехмерных инвариантных многообразий седловых состояний равновесия,  $\mathcal{D}_{ft}$  – множество всех компонент связности пространства  $M^4 \setminus \mathcal{L}_{ft}$ .

Потоку  $f^t \in G_{g,k}(M^4)$  поставим в соответствие двухцветный граф  $\Gamma_{ft}$  со следующими свойствами:

1. существует взаимно однозначное соответствие  $\xi_0$  между множеством  $V(\Gamma_{ft})$  вершин графа  $\Gamma_{ft}$  и множеством  $\mathcal{D}_{ft}$ ;
2. существует взаимно однозначное соответствие  $\xi_1$  между множеством  $E(\Gamma_{ft})$  ребер графа  $\Gamma_{ft}$  и множеством  $\mathcal{L}_{ft}$ ;
3. вершины  $v_i, v_j \in V(\Gamma_{ft})$  инцидентны ребру  $e_{i,j} \in E(\Gamma_{ft})$  тогда и только тогда, когда множество  $\xi_1(e_{i,j}) \in \mathcal{L}_{ft}$  находится на границе обеих областей  $\xi_0(v_i), \xi_0(v_j) \in \mathcal{D}_{ft}$ ;
4. ребро  $e \in E(\Gamma_{ft})$  имеет цвет  $s$ , если  $\xi_1(e)$  – замыкание устойчивой сепаратрисы, и цвет  $u$  – если неустойчивой.

В силу утверждения 2 в замыкании каждой области из  $\mathcal{D}_{ft}$  содержится ровно один источник и ровно один сток. Пусть  $D$  – область, содержащая седла  $\sigma_2^1, \dots, \sigma_2^r$  типа  $(2, 2)$ ,  $\alpha, \omega \subset \text{cl}D$  – источник и сток, соответственно, и  $S_\omega \subset W_\omega^s \setminus \{\omega\}, S_\alpha \subset W_\alpha^u \setminus \{\alpha\}$  – гладко вложенные трехмерные сферы, трансверсальные траекториям  $f^t$ . Пересечения  $B_\alpha, B_\omega$  сфер  $S_\alpha, S_\omega$  с дополнением области  $D$  до всех одномерных инвариантных многообразий седловых состояний равновесия – это открытые трехмерные подмногообразия в  $S_\alpha, S_\omega$ , а инвариантные многообразия  $W_{\sigma_2^i}^s, W_{\sigma_2^i}^u$ , соответственно, пересекают их по узлам  $l_i^s, l_i^u$ . Пусть  $R_\omega, R_\alpha$  – дополнения до объединения этих узлов на многообразиях  $B_\alpha, B_\omega$ , соответственно. Обозначим

за  $\eta_D : R_\alpha \rightarrow R_\omega$  гомеоморфизм, ставящий в соответствие точке  $x \in R_\alpha$  точку пересечения ее траектории  $\mathcal{O}_x$  с  $R_\omega$ . Обозначим за  $\mu_i \subset R_\alpha$  меридиан  $l_i^s$  (гладкая замкнутая кривая, ограничивающая диск  $B^2 \subset B_\alpha$ , который трансверсально пересекает  $l_i^s$  в одной точке), положим  $\tilde{l}_i^u = \eta_D(\mu_i)$ .

Объединение  $L_D = \bigcup_{i=1}^r (l_i^u \cup \tilde{l}_i^u) \subset B_\omega$  будем называть *диаграммой Кирби области  $D$* . Вершину  $v \in V(\Gamma_{ft})$ , соответствующую области  $D = \xi_0(v)$  с седлами типа  $(2, 2)$ , назовем *отмеченной*. К каждой отмеченной вершине  $v$  графа  $\Gamma_{ft}$  добавим диаграмму Кирби  $L_D$  соответствующей области и назовем граф  $\Gamma_{ft}$  с диаграммами Кирби *оснащенным графом потока  $f^t$* . Для оснащенного графа потока  $f^t$  сохраним обозначение  $\Gamma_{ft}$ .

### 3.1 Взаимосвязь оснащенного графа и диаграммы Кирби потока $f^t \in G_{g,k}(M^4)$

Так как  $B_{ft}^4$  содержит все стоковые состояния равновесия, то каждая область  $D \in \mathcal{D}_{ft}$  пересекает сферу  $S_{ft}^3$  по подмногообразию  $d$ . Обозначим за  $d_{ft}$  множество, элементы которого есть пересечения  $d$  со сферой  $S_{ft}^3$ . С каждой областью  $D_* \in \mathcal{D}_{ft}$ , содержащей хотя бы одно седловое состояние равновесия типа  $(2, 2)$  потока  $f^t$ , связано два оснащенных зацепления: на  $d_* = D_* \cap S_{ft}^3$  и на  $B_\omega$ . Из построений следует, что они эквивалентны в смысле следующего предложения.

**Предложение 9.** *Существует гомеоморфизм  $h_{D_*} : B_\omega \rightarrow d_*$  такой, что  $h_{D_*}(L_{D_*}) = (L_{ft}^1 \cup \tilde{L}_{ft}^1) \cap d_*$ .*

Итак, двумерные сферы из объединения  $L_{ft}^{2,s} \cup L_{ft}^{2,u}$  разбивают трехмерную сферу  $S_{ft}^3$  на трехмерные связные подмногообразия, содержащие диаграммы Кирби соответствующих областей из  $\mathcal{D}_{ft}$ .

Напомним, что характеристическая секущая  $\Sigma_{ft}^3$  потока  $f^t$  – это граница объединения  $B_{ft}^4 \bigcup_{\sigma^1 \in \tilde{\Omega}_{ft}^1} V_{\sigma^1}$ , гомеоморфная  $g_\alpha(S^2 \times S^1)$ . Обозначим за  $P_{ft}^{2,s}$  пересечение всех устойчивых трехмерных многообразий с  $\Sigma_{ft}^3$ , за  $b_{ft}$  – множество компонент связности  $\Sigma_{ft}^3 \setminus (P_{ft}^{2,s} \cup L_{ft}^{2,u})$ .

**Лемма 4.** *Оснащенный граф  $\Gamma_{ft}$  потока  $f^t \in G_{g,k}(M^4)$  можно вложить в характеристическую секущую  $\Sigma_{ft}^3$  так, что:*

1. *каждое ребро цвета  $s(u)$  пересекает след соответствующего инвариантного многообразия на  $\Sigma_{ft}^3$  по одной точке;*
2. *вершины  $v_i, v_j$ , инцидентные ребру  $e_{i,j}$  из множества  $P_{ft}^{2,s}$  лежат на сфере  $\partial\Pi_{\sigma^1}^u$ ;*
3. *все вершины, оснащенные диаграммой Кирби соответствующей области, лежат в пересечении этой области со сферой  $S_{ft}^3$ .*

**Доказательство.** Каждой трехмерной сфере из множества  $\mathcal{L}_{ft}$  соответствует единственная двумерная сфера из  $P_{ft}^{2,s} \cup L_{ft}^{2,u}$ , являющаяся следом первой на секущей  $\Sigma_{ft}^3$ . Так определена биекция  $\zeta_1 : \mathcal{L}_{ft} \rightarrow P_{ft}^{2,s} \cup L_{ft}^{2,s}$ . По построению, секущая  $\Sigma_{ft}^3$  ограничивает тело  $Q_{ft}^4$

в  $M^4$ , в котором содержатся все стоковые состояния равновесия потока  $f^t$ , а по утверждению 2 замыкание каждая область из  $\mathcal{D}_{f^t}$  содержит ровно один сток. При этом нет таких стоковых состояний равновесия, которые не содержатся ни в каком замыкании области из  $\mathcal{D}_{f^t}$ , иначе  $M^4$  несвязно. Тогда определим взаимно однозначное соответствие  $\zeta_0 : \mathcal{D}_{f^t} \rightarrow b_{f^t}$  по правилу  $\zeta_0(D) = D \cap \Sigma_{f^t}^3$ . Тогда определены биекции:  $\zeta_0 \xi_0 : V(\Gamma_{f^t}) \rightarrow \mathcal{D}_{f^t} \rightarrow b_{f^t}$  и  $\zeta_1 \xi_1 : E(\Gamma_{f^t}) \rightarrow \mathcal{L}_{f^t} \rightarrow P_{f^t}^{2,s} \cup L_{f^t}^{2,u}$ .

Выберем по одной произвольной точке в каждой области из множества  $b_{f^t}$ , причем в областях, содержащих сферы  $\partial\Pi_{\sigma_1}^u$ , точки выберем именно на этих сферах. Эти точки будем считать вершинами графа, соответствующими областям, которым эти точки принадлежат. Так как  $\Sigma_{f^t}^3$  линейно связна, то точки  $p_i, p_j$  в областях  $d_i, d_j$ , соответствующих смежным вершинам  $v_i, v_j$ , можно соединить путем  $\alpha_{i,j}$ , проходящим через сферу  $S \in P_{f^t}^{2,s}$ . При этом путь  $\alpha_{i,j}$  можно рассматривать, как вложение отрезка в  $\Sigma_{f^t}^3$  такое, что  $\alpha_{i,j} \cap \Pi_{\sigma_1}^s$  – гладкое одномерное подмногообразие в  $\Pi_{\sigma_1}^s$ , трансверсальное к сфере  $S$ , пересекающее ее по одной точке. Прделаав это со всеми точками в областях на  $\Sigma_{f^t}^3$ , соответствующих смежным вершинам, рассматривая эти пути, как ребра графа  $\Gamma_{f^t}$ , получим вложение этого графа, как топологического пространства, в  $\Sigma_{f^t}^3$ . Из конструкции следует, что вложение удовлетворяет условиям леммы.  $\diamond$

Будем отождествлять граф  $\Gamma_{f^t}$  с его образом относительно вложения в  $\Sigma_{f^t}^3$ , построенного в лемме 4. Обозначим  $\gamma_{f^t} = \Gamma_{f^t} \cap S_{f^t}^3$ . Граф  $\gamma_{f^t}$  содержит все отмеченные вершины с диаграммами Кирби соответствующих областей, но он, вообще говоря, не изоморфен графу  $\Gamma_{f^t}$ , так как получен из второго удалением  $g_a$  ребер цвета  $s$ , соответствующих устойчивым многообразиям седел из множества  $\widehat{\Omega}_{f^t}^1$ . При помощи теоремы об однородности [30, Лемма 3.33, Глава 3] вершины графа  $\gamma_{f^t}$ , инцидентные ребрам графа  $\Gamma_{f^t} \setminus \gamma_{f^t}$  можно поместить в  $L_{f^t}^0$  гомеоморфизмом многообразия  $S_{f^t}^3$ , тождественным вне окрестностей шаров  $\Pi_{\sigma_1}^u$ . Будем считать  $\gamma_{f^t}$  уже модифицированным таким образом подграфом графа  $\Gamma_{f^t}$ .

### 3.2 Оснащенный граф – полный инвариант в классе $G_*(M^4)$

**Доказательство теоремы 1.** Необходимость условий теоремы следует из определения. Пусть  $f^t, f'^t \in G_{g,k}(M^4)$  – потоки,  $\Gamma_{f^t}, \Gamma_{f'^t}$  – их изоморфные графы в смысле такого определения:

1. существует изоморфизм  $I_* : \Gamma_{f^t} \rightarrow \Gamma_{f'^t}$  сохраняющий цвета ребер и отмеченные вершины;
2. для любой пары отмеченных вершин  $v \in V(\Gamma_{f^t})$  и  $v' = \zeta(v) \in V(\Gamma_{f'^t})$  существует гомеоморфизм  $h_D : S_\omega \rightarrow S_{\omega'}$  такой, что  $h_D(L_D) = L'_{D'}$ , и существует нумерация узлов  $L_D$  такая, что  $h_D(l_i^u) = l_i'^u$  и  $h_D(\tilde{l}_i^u) = \tilde{l}_i'^u$  для любого  $i \in \{1, \dots, r_D\}$ .

Изоморфизм  $I_*$  индуцирует взаимно однозначное соответствие  $J_*$  между множествами  $\Omega_{f^t}^1$  и  $\Omega_{f'^t}^1$ . Пусть  $K_{f^t}$  – диаграмма Кирби потока  $f^t$  на сфере  $S_{f^t}^3$ . Тогда определено множество

$\widehat{\Omega}_{f^{it}}^1$ . В качестве множества  $\widehat{\Omega}_{f^{it}}^1$  выберем образ  $J_*(\widehat{\Omega}_{f^{it}}^1)$  и рассмотрим сферу  $S_{f^{it}}^3$ , построенную в лемме 3 для потока  $f^{it}$ . Ограничение  $i_*$  изоморфизма  $I_*$  на подграф  $\gamma_{f^{it}}$  графа  $\Gamma_{f^{it}}$  является изоморфизмом  $\gamma_{f^{it}}$  и подграфа  $\gamma_{f^{it}} = \Gamma_{f^{it}} \cap S_{f^{it}}^3$ .

Аналогично доказательству [32, Теорема 5.5] можно построить гомеоморфизм  $h' : S_{f^{it}}^3 \rightarrow S_{f^{it}}^3$ , сохраняющий выбранную ориентацию на сферах, такой, что  $h'(L_{f^{it}}^0) = L_{f^{it}}^0$  и  $h'(L_{f^{it}}^{2,s} \cup L_{f^{it}}^{2,u}) = L_{f^{it}}^{2,s} \cup L_{f^{it}}^{2,u}$ . В силу предложения 9 из гомеоморфизмов  $h_D$  следует, что существует сохраняющий ориентацию гомеоморфизм  $h : S_{f^{it}}^3 \rightarrow S_{f^{it}}^3$  такой, что  $h(L_{f^{it}}^1 \cup \widetilde{L}_{f^{it}}^1) = L_{f^{it}}^1 \cup \widetilde{L}_{f^{it}}^1$ . Тогда зацепления  $h'(L_{f^{it}}^1 \cup \widetilde{L}_{f^{it}}^1)$  и  $L_{f^{it}}^1 \cup \widetilde{L}_{f^{it}}^1$  объемлемо изотопны в  $S_{f^{it}}^3$  и изотопию  $h_t$  можно осуществить тождественной в окрестности множества  $L_{f^{it}}^0 \cup L_{f^{it}}^{2,s} \cup L_{f^{it}}^{2,u}$ . Тогда  $h_1 h'$  – эквивалентность диаграмм Кирби  $K_{f^{it}}, K_{f^{it}}$  по определению. По теореме 2 потоки  $f^t, f^{it}$  топологически эквивалентны.  $\square$

### Список литературы

- [1] Майер А.Г. *Грубые преобразования окружности*, Ученые записки ГГУ, 1939, Т. 12, С. 215-229.
- [2] Леонтович Е.А., Майер А.Г. *О траекториях, определяющих качественную структуру разбиения сферы на траектории*, Докл. АН СССР, 1937, Т. 14(5), С. 251–257.
- [3] Леонтович Е.А., Майер А.Г. *О схеме, определяющей топологическую структуру разбиения на траектории*, Докл. АН СССР, 1955, Т. 103(4), С. 557–560.
- [4] Peixoto M. M. *On the classification of flows on 2-manifolds*, in: Dynamical Systems, Proc. Sympos. Univ., Bahia, Salvador, 1971, p. 389-419.
- [5] Уманский Я. Л. *Необходимые и достаточные условия топологической эквивалентности трехмерных динамических систем Морса–Смейла с конечным числом особых траекторий*, Математический сборник, 1990, Т. 181(2), С. 212-239.
- [6] Fleitas G.M. *Classification of gradient-like flows in dimension two and three*, Bol. Soc. Mat. Brasil, 1975, V. 6, p. 155-183.
- [7] Пилюгин С. Ю. *Фазовые диаграммы, определяющие системы Морса–Смейла без периодических траекторий на сферах*, Дифференциальные уравнения, 1978, Т. 14(2), С. 245–254.
- [8] Гринес В.З., Гуревич Е.Я. *Комбинаторный инвариант градиентно-подобных потоков на связной сумме  $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$* , Математический сборник, 2023, Т. 214(5), С. 97-127.
- [9] Гринес В.З., Гуревич Е.Я. *Индекс Морса седловых состояний равновесия градиентно-подобных потоков на связной сумме  $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$* , Математические заметки, 2022, Т. 111(4), С. 616-619.

- [10] Гуревич Е.Я., Сараев И.А. *Диаграмма Кирби полярных потоков на четырехмерных многообразиях*, Математические заметки. 2024. Т. 116 (1) (в печати).
- [11] Zhuzhoma E. V., Medvedev V. S., *Morse-Smale systems with few non-wandering points*, Topology and its Applications, 2013, V. 160(3), P. 498 - 507.
- [12] Жужома Е. В., Медведев В. С. *Непрерывные потоки Морса–Смейла с тремя состояниями равновесия*, Математический сборник, 2016, Т. 207(5), С. 702-723.
- [13] R. Kirby. *A Calculus for Framed Links in  $S^3$* , Invent math., 1978, V. 45(1), P. 35–56.
- [14] de Sa E.C. *A link calculus for 4-manifolds*, in: Fenn R. *Topology of Low-Dimensional Manifolds*, Lecture Notes in Mathematics, 1979, Springer, Berlin, Heidelberg, p. 16-31.
- [15] Гринес В.З., Жужома Е. В., Медведев В. С. *О структуре несущего многообразия для систем Морса Смейла без гетероклинических пересечений*, Труды Математического института им. В.А. Стеклова РАН, 2017, Т. 297, С. 201-210.
- [16] Freedman M.H. *The topology of four-dimensional manifolds*, J. Diff. Geom., 1982, V. 17, P. 357–453.
- [17] Рохлин В.А. Новые результаты теории четырехмерных многообразий, *Докл. АН СССР*, 1952, Т. 84, С. 221 – 224.
- [18] Donaldson S. *An application of gauge theory to four-dimensional topology*, J. Diff. Geom., 1983, V. 18, P. 279 – 315.
- [19] Furuta M. *Monopole equation and the  $\frac{11}{8}$ -conjecture*, Math. Res. Lett., 2001, V. 8(3), P. 279 – 291.
- [20] И.А. Сараев *О сведении проблемы топологической классификации градиентно-подобных потоков к классификации полярных потоков*, Журнал Средневолжского математического общества. 2023. Т. 25 (2). С. 62-75.
- [21] Гринес В. З., Гуревич Е. Я. *О классификации потоков Морса–Смейла на проективно-подобных многообразиях*, Известия РАН. Серия математическая. 2022. Т. 86 (5). С. 43-72.
- [22] R.H.Bing, *Locally Tame Sets are Tame*, Annals of Mathematics , Jan., 1954, Second Series, V. 59, No. 1, pp. 145-158.
- [23] E.E.Moise, *Affine structures in 3-manifolds. V. The triangulation theorem and Hauptvermutung*. Ann. of Math., 1952, V. 56, p. 96-114.
- [24] Hatcher A. *Algebraic topology*, Cambridge University Press, 2002, 544 p.
- [25] Lee J. *Introduction to Smooth Manifolds*, Springer, NY, 2000.

- [26] Kervaire M.A., Milnor J.W. *Groups of Homotopy Spheres: I*, The Annals of Mathematics, 2nd Ser., May, 1963, V. 77(3), P. 504–537.
- [27] Прасолов В. В., *Элементы теории гомологий*, М.: МЦНМО, 2006.
- [28] Gompf R.E., Stipsicz A. I. *4-manifolds and Kirby Calculus*, Graduate Studies in Mathematics, 1999, V. 20. 553 p.
- [29] Гринес В.З., Левченко Ю.А., Починка О. В. *О топологической классификации диффеоморфизмов на 3-многообразиях с поверхностными двумерными аттракторами и репеллерами*, Нелинейная динамика. 2014. Т. 10 (1). С. 17-33.
- [30] Рурк К., Сандерсон Б. *Введение в кусочно линейную топологию*, Мир, Москва, 1974.
- [31] Brown M. A proof of the generalised Schoenflies theorem // Bull. Amer. Math. Soc. 1960. Vol. 66. №2. P. 74–76. (Перевод: Математика. 1961. Т. 5. С. 13–15.)
- [32] Гринес В. З., Гуревич Е. Я., *Проблемы топологической классификации многомерных систем Морса–Смейла*, Ижевск : Ижевский институт компьютерных исследований, 2022.
- [33] Rolfsen D. *Knots and links*, University of British Columbia, 1990 (Math. Lecture Series 7).
- [34] Grines V.Z., Gurevich E. Y., Maksimenko S. I. *Morse index of saddle equilibria of gradient-like flows on connected sums of  $S^{n-1} \times S^1$* , Working papers by Cornell University. Series math «arxiv.org». 2021
- [35] Gordon C. McA., Luecke J. *Knots are determined by their complements*, Journal of the American Mathematical Society, 1989, V. 2, P. 371 - 415.
- [36] Brody, E. J. (1960). The Topological Classification of the Lens Spaces. The Annals of Mathematics, 71(1), 163.
- [37] F. Laudenbach, V. Penaru *A note on 4-dimensional handlebodies*, Bull. Soc. Math., 1972, France, V. 100., P. 337–347.
- [38] В. В. Прасолов *Элементы теории гомологий*, МЦНМО, Москва, 2006.
- [39] Skorpan A. *The Wild World of 4-Manifolds*, American Mathematical Society, 2005.
- [40] Smale S. *On gradient dynamical systems*, Annals of Mathematics, 1961, V. 74, p. 391-406.
- [41] Meyer K. R. *Energy functions for Morse-Smale systems*, Amer. J. Math., 1968, V. 90, P. 1031 - 1040.
- [42] Palis J., de Melo W. *Geometric theory of dynamical systems. An introduction*, Translation from english – М.: Mir, 1986, – 301 p.
- [43] Hempel J. *3-manifolds*, Princeton, N.J. : Princeton University Press, 1976.

Заявление о новизне

Сообщаю, что новыми в моей представленной на Смотри выпускной квалификационной работе (далее - работа) под названием «Построение гладких дуг «источник-сток» на двумерной сфере» являются: леммы 5.1-5.4, лемма 6.1.

Также сообщаю, что для проверки новизны мною было проделано следующее:

- Проведена серия консультаций с моим научным руководителем – Ноздриновой Еленой Вячеславовной – доцентом кафедры фундаментальной математики НИУ ВШЭ Нижний Новгород;
- Проведена серия консультаций с Починкой Ольгой Витальевной, профессором кафедры фундаментальной математики НИУ ВШЭ Нижний Новгород.

Подтверждаю, что являюсь автором предоставляемой на Смотри работы и прошу принять её для участия в Смотре. Принимаю на себя обязательство соблюдать правила Смотра. Также (в соответствии с п. 4 Положения о Смотре) принимаю на себя обязательство оценить 5 работ участников Смотра, выданных мне Оргкомитетом в результате жеребьёвки и сверх того оценить 2-5 работ других участников Смотра на мой выбор. Я понимаю правила оценки работ, приведённые в п. 4.3 Положения о Смотре. Даю согласие на публикацию адреса моей электронной почты.

Защита работы состоится \_\_\_\_\_. На Смотри представлен окончательный текст работы.

Подпись

Цаплина Екатерина Вадимовна  
15.06.2024  
Нижний Новгород, Россия

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ»

**Факультет информатики, математики и компьютерных наук**

**Программа подготовки бакалавров по направлению  
01.03.01 Математика**

*Цаплина Екатерина Вадимовна*

**ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА**

Построение гладких дуг “источник-сток” на двумерной сфере

Рецензент  
к. физ.-мат. наук  
В. А. Кибкало

Руководитель работы  
к. физ.-мат. наук, доцент

---

Е. В. Ноздринова

Нижний Новгород, 2024 г.

## Содержание

1	Аннотация	2
2	Введение и формулировка результатов	3
3	Вспомогательные факты	4
4	Группы классов отображений	5
5	Локально модельные диффеоморфизмы	6
6	Доказательство основного результата	11

## 1 Аннотация

Хорошо известно, что группа классов отображений двумерной сферы  $\mathbb{S}^2$  изоморфна группе  $\mathbb{Z}_2 = \{-1, +1\}$ . При этом, класс  $+1$  ( $-1$ ) содержит все сохраняющие (меняющие) ориентацию диффеоморфизмы и любые два диффеоморфизма одного класса соединяются дугой диффеоморфизмов того же класса. С другой стороны, каждый класс отображений содержит, так называемые, диффеоморфизмы “источник-сток”, неблуждающее множество которых состоит из двух гиперболических точек: источника и стока. Очевидно, в общем случае дуга, соединяющая два таких диффеоморфизма, претерпевает бифуркации, разрушающие динамику “источник-сток”, что делает дугу неустойчивой, в смысле чувствительности к малым шевелениям. Однако, в настоящей работе изложено конструктивное доказательство существования устойчивой дуги, соединяющей любые два диффеоморфизма “источник-сток” из одного класса отображений. Также установлено, что такую дугу можно построить целиком состоящей из диффеоморфизмов “источник-сток”.

## 2 Введение и формулировка результатов

Рассмотрим двумерную сферу  $\mathbb{S}^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$  и обозначим через  $Diff(\mathbb{S}^2)$  множество всех ее диффеоморфизмов.

Пусть  $f \in Diff(\mathbb{S}^2)$ . Напомним, что точка  $x \in \mathbb{S}^2$  называется *блуждающей точкой диффеоморфизма  $f$* , если она обладает окрестностью  $U_x \subset \mathbb{S}^2$  такой, что  $f^n(U_x) \cap U_x = \emptyset$  для любого  $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ . Точка  $x \in \mathbb{S}^2$  называется *неподвижной точкой диффеоморфизма  $f$* , если  $f(x) = x$ .

Неподвижная точка  $x$  диффеоморфизма  $f$  называется *гиперболическим источником (стоком)*, если некоторое локальное представление диффеоморфизма  $f$  в точке  $x$  является линейным отображением, заданным матрицей с собственными значениями по модулю большими (меньшими) единицы.

Диффеоморфизм  $f$  называется *диффеоморфизмом “источник-сток”*, если все точки 2-сферы являются для него блуждающим, кроме двух точек, которые являются гиперболическими источником и стоком, соответственно.

Пусть  $\Phi : \mathbb{S}^2 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^2$  – гладкое отображение, при каждом фиксированном  $t \in [0, 1]$  являющееся диффеоморфизмом  $\Phi(x, t) = \phi_t(x)$  сферы  $\mathbb{S}^2$ . Однопараметрическое семейство диффеоморфизмов  $\phi_t : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2, t \in [0, 1]$  называется *гладкой дугой*, соединяющей диффеоморфизмы  $\phi_0, \phi_1 \in Diff(\mathbb{S}^2)$ .

Отношение связности гладкой дугой определяет отношение эквивалентности на множестве  $Diff(\mathbb{S}^2)$  и разбивает это множество на два класса эквивалентности, состоящие из сохраняющих, меняющих ориентацию диффеоморфизмов, соответственно [1]. При этом в каждом классе существуют диффеоморфизмы “источник-сток”. Более того, все такие сохраняющие (меняющие) ориентацию диффеоморфизмы попарно топологически, но не гладко, сопряжены (см., например, [2]). Поэтому, в общем случае дуга, соединяющая два диффеоморфизма “источник-сток”, претерпевает бифуркации, в том числе и разрушающие динамику “источник-сток”. В силу чего такая дуга может оказаться *неустойчивой*, в смысле чувствительности к малым шевелениям [3].

Основным результатом настоящей работы является конструктивное доказательство следующей теоремы.

**Теорема 1.** *Любые два сохраняющих (меняющих) ориентацию диффеоморфизма “источник-сток” соединяются гладкой дугой, состоящей из диффеоморфизмов “источник-сток”.*

В силу структурной устойчивости диффеоморфизмов “источник-сток”, построенная дуга является устойчивой. Тем самым полученный результат представляет собой частичное решение 33 проблемы Дж. Палисом и Ч. Пью [4] о существовании устойчивых дуг, соединяющих две структурно устойчивые динамические системы.

Аналогичный результат для сохраняющих ориентацию 3-диффеоморфизмов “источник-сток” получен Хр. Бонатти, В. Гринесом, В. Медведевым и О. Починкой [5]. Заметим, что по-

лученный результат не допускает непосредственного обобщения на сферы размерности большей трех, ввиду возможного существования на таких сферах нескольких гладких структур. Так, в работе [5] показано, что при  $n = 6$  существуют диффеоморфизмы рассматриваемого класса, которые не могут быть соединены устойчивой дугой.

### 3 Вспомогательные факты

Для любого подмножества  $X$  топологического пространства  $Y$  будем обозначать через  $i_X : X \rightarrow Y$  отображение включения.

Для любого непрерывного отображения  $\phi : X \rightarrow Y$  линейно связных топологических пространств  $X, Y$  будем обозначать через  $\phi_* : \pi_1(X) \rightarrow \pi_1(Y)$  – индуцированный отображением  $\phi$  гомоморфизм.

$C^r$ -вложением ( $r \geq 0$ ) многообразия  $X$  в многообразие  $Y$  называется отображение  $\lambda : X \rightarrow Y$  такое, что  $\lambda : X \rightarrow \lambda(X)$  –  $C^r$ -диффеоморфизм. При этом  $C^0$ -вложение называют топологическим вложением, а  $C^r$ -вложение ( $r > 0$ ) – гладким вложением.

Два непрерывных отображения  $\phi_0 : X \rightarrow Y$  и  $\phi_1 : X \rightarrow Y$  называются гомотопными, если существует непрерывное отображение  $\Phi : X \times [0, 1] \rightarrow Y$  такое, что  $\Phi(x, 0) = \phi_0(x)$ ,  $\Phi(x, 1) = \phi_1(x)$ . Отображение  $\Phi$  называется гомотопией отображений  $\phi_0$  и  $\phi_1$ . Если для каждого  $t \in [0, 1]$  отображение  $\phi_t(x) = \Phi(x, t)$  является вложением топологического пространства  $X$  в топологическое пространство  $Y$ , то вложения  $\phi_0$  и  $\phi_1$  называются изотопными, отображение  $\Phi$  – изотопией, а однопараметрическое семейство вложений  $\{\phi_t\}$  – дугой, соединяющей вложение  $\phi_0$  с вложением  $\phi_1$ . Если  $X$  и  $Y$  – гладкие многообразия, и изотопия  $\Phi$  является гладким отображением, то  $\Phi$  называют диффеотопией, а дугу  $\{\phi_t\}$  называют гладкой.

Носителем изотопии  $\Phi$  (дуги  $\{\phi_t\}$ ) называется множество

$$\text{supp } \{\phi_t\} = \text{cl}\{x \in X : \phi_t(x) \neq \phi_0(x) \text{ для некоторого } t \in (0, 1]\}.$$

Гладкая дуга  $\{\varphi_t\}$  называется гладким произведением гладких дуг  $\{\phi_t\}$  и  $\{\psi_t\}$  таких, что  $\phi_1 = \psi_0$ , если  $\varphi_t = \begin{cases} \phi_{\tau(2t)}, & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ \psi_{\tau(2t-1)}, & \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases}$  где  $\tau : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  – гладкое монотонное отображение такое, что  $\tau(s) = 0$  для  $0 \leq s \leq \frac{1}{3}$  и  $\tau(s) = 1$  для  $\frac{2}{3} \leq s \leq 1$ . Будем писать

$$\varphi_t = \phi_t * \psi_t.$$

Обозначим через  $\text{Diff}(X)$  множество всех диффеоморфизмов гладкого многообразия  $X$ . Если  $X$  – ориентируемое многообразие, то обозначим через  $\text{Diff}_+(X)$ ,  $\text{Diff}_-(X)$  множество всех сохраняющих и меняющих ориентацию диффеоморфизмов, соответственно, и для любого подмножества  $A(X) \subset \text{Diff}(X)$  положим  $A_{\pm}(X) = A(X) \cap \text{Diff}_{\pm}(X)$ .

**Предложение 3.1** (Теорема Тома о продолжении изотопии, [6], Theorem 5.8). Пусть  $Y$  – гладкое многообразие без края,  $X$  – гладкое компактное подмногообразие многообразия  $Y$  и  $\{\phi_t : X \rightarrow Y, t \in [0, 1]\}$  – гладкая дуга такая, что  $\phi_0$  – отображение включения  $X$  в  $Y$ . Тогда для любого компактного множества  $Z \subset Y$ , содержащего множество  $\bigcup_{t \in [0, 1]} \phi_t(X)$ , существует гладкая дуга  $\{\varphi_t\} \subset \text{Diff}(Y)$  такая, что  $\varphi_0 = id$ ,  $\varphi_t|_X = \phi_t|_X$  для каждого  $t \in [0, 1]$  и  $\varphi_t|_{Y \setminus Z} = id$ .

**Предложение 3.2** ([7], Lemma de fragmentation). Пусть  $U = \{U_j\}$  – открытое покрытие замкнутого многообразия  $X$  и  $\varphi : X \rightarrow X$  – диффеотопный тождественному отображению диффеоморфизм. Тогда существует разложение диффеоморфизма  $\varphi$  в композицию конечного числа диффеотопных тождественному отображению диффеоморфизмов

$$\varphi = \phi_q \dots \phi_2 \phi_1$$

таких, что  $\text{supp} \{\phi_{i,t}\} \subset U_{j(i)}$ ,  $i \in \{1, \dots, q\}$ , где  $U_{j(i)} \in U$  и  $\{\phi_{i,t}\}$  – гладкая дуга, соединяющая тождественное отображение с диффеоморфизмом  $\varphi_i$ .

#### 4 Группы классов отображений

Группой классов отображений (*mapping class group*) топологического пространства  $X$  называется группа классов эквивалентности гомеоморфизмов  $X$  с точностью до изотопии. Если  $X$  – гладкое многообразие, то – группу классов эквивалентности диффеоморфизмов  $X$  с точностью до диффеотопии обозначим через  $\pi_0(\text{Diff}(X))$ .

**Предложение 4.1** ([1]). Группа классов отображений сферы  $\pi_0(\text{Diff}(\mathbb{S}^2)) \cong \mathbb{Z}_2$ . При этом, классы совпадают с множествами  $\text{Diff}_+(\mathbb{S}^2)$  и  $\text{Diff}_-(\mathbb{S}^2)$ , соответственно.

Для доказательства основного результата нам также понадобятся группы классов отображений двумерного тора  $\mathbb{T}^2$  и бутылки Клейна  $\mathbb{K}^2$ .

**Предложение 4.2** ([8]). Группа классов отображений двумерного тора  $\pi_0(\text{Diff}(\mathbb{T}^2)) \cong GL(2, \mathbb{Z})$ . При этом классы совпадают с множествами  $\{h \in \text{Diff}(\mathbb{T}^2) : h_* = A \in GL(2, \mathbb{Z})\}$ .

Для описания представителя в каждом классе  $\pi_0(\text{Diff}(\mathbb{K}^2))$  представим  $\mathbb{K}^2$ , как фактор-пространство  $C/\sim$ , где  $C = \{(e^{i2\pi\theta}, t) : \theta \in [0, 1], 0 \leq t \leq 1\}$  и  $\sim$  – минимальное отношение эквивалентности, удовлетворяющее условию:

$$(e^{i2\pi\theta}, 0) \sim (e^{i2\pi(1-\theta)}, 1).$$

Пусть  $p : C \rightarrow \mathbb{K}^2$  – естественная проекция. Определим диффеоморфизмы  $\bar{\alpha}, \bar{\beta} : C \rightarrow C$  формулами

$$\bar{\alpha}(e^{i2\pi\theta}, t) = (e^{i2\pi\theta}, 1 - t),$$

$$\bar{\beta}(e^{i2\pi\theta}, t) = \begin{cases} (e^{i2\pi\theta}, t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ (e^{i(2\pi\theta+4\pi t)}, t), & \frac{1}{2} < t \leq 1. \end{cases} \quad (1)$$

Положим  $\alpha = p\bar{\alpha}p^{-1}, \beta = p\bar{\beta}p^{-1} : \mathbb{K}^2 \rightarrow \mathbb{K}^2$ .

**Предложение 4.3** ([9]). *Группа классов отображений бутылки Клейна  $\pi_0(Diff(\mathbb{K}^2)) \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ . При этом, представителями в каждом из четырех классов являются диффеоморфизмы  $id, \alpha, \beta, \alpha\beta$ , соответственно.*

## 5 Локально модельные диффеоморфизмы

Напомним, что через  $Diff(\mathbb{S}^2)$  мы обозначили множество всех диффеоморфизмов двумерной сферы

$$\mathbb{S}^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}.$$

В силу предложения 4.1 группа  $\pi_0(Diff(\mathbb{S}^2))$  состоит из двух классов эквивалентности  $Diff_+(\mathbb{S}^2)$  и  $Diff_-(\mathbb{S}^2)$  – сохраняющих и меняющих ориентацию диффеоморфизмов 2-сферы, соответственно.

Обозначим через  $J(\mathbb{S}^2) \subset Diff(\mathbb{S}^2)$  множество всех диффеоморфизмов “источник-сток” и через  $NS(\mathbb{S}^2) \subset J(\mathbb{S}^2)$  – те из них, которые имеют источник и сток, соответственно в северном  $N(0, 0, 1)$  и южном  $S(0, 0, -1)$  полюсах.

Определим *модельный* диффеоморфизм  $g_{\pm} \in NS_{\pm}(\mathbb{S}^2)$  формулой:

$$g_{\pm}(x_1, x_2, x_3) = \left( \frac{4x_1}{5 - 3x_3}, \frac{4x_2}{\pm(5 - 3x_3)}, \frac{5x_3 - 3}{5 - 3x_3} \right).$$

Заметим, что на  $\mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$  диффеоморфизм  $g_{\pm}$  гладко сопряжен линейному диффеоморфизму плоскости  $\bar{g}_{\pm} \in Diff_{\pm}(\mathbb{R}^2)$ , заданному формулой:

$$\bar{g}_{\pm}(x_1, x_2) = \left( \frac{x_1}{2}, \pm \frac{x_2}{2} \right).$$

Именно,  $\bar{g}_{\pm} = \vartheta_N g_{\pm} \vartheta_N^{-1}$ , где  $\vartheta_N : \mathbb{S}^2 \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^2$  – стереографическая проекция, определенная формулой

$$\vartheta_N(x_1, x_2, x_3) = \left( \frac{x_1}{1 - x_3}, \frac{x_2}{1 - x_3} \right). \quad (2)$$

Назовем диффеоморфизм  $h \in NS(\mathbb{S}^2)$  *локально модельным* диффеоморфизмом сферы  $\mathbb{S}^2$ , если существуют окрестности  $U_h^N, U_h^S$  точек  $N, S$ , для которых  $h|_{U_h^N \cup U_h^S} = g|_{U_h^N \cup U_h^S}$ , где  $g \in \{g_+, g_-\}$ . Обозначим через  $E_g \subset NS(\mathbb{S}^2)$  множество локально модельных диффеоморфизмов 2-сферы.

**Лемма 5.1.** *Для любого диффеоморфизма  $h \in E_g$  существует единственный гомеоморфизм  $\gamma_h : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$  со следующими свойствами:*

- $\gamma_h h = g \gamma_h$ ;

- $\gamma_h|_{U_h^N} = id$ ;
- $\gamma_h|_{\mathbb{S}^2 \setminus S}$  – диффеоморфизм.

*Доказательство.* Поскольку любой диффеоморфизм  $h \in E_g$  совпадает с диффеоморфизмом  $g$  в окрестности  $U_h^N$  точки  $N$ , то положим  $\gamma_h|_{U_h^N} = id$ . Так как  $\gamma_h$  должен сопрягать диффеоморфизм  $h$  с диффеоморфизмом  $g$  на всей сфере  $\mathbb{S}^2$ , то

$$\gamma_h h^k(x) = g^k \gamma_h(x), \quad x \in \mathbb{S}^2, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (3)$$

Поскольку для любой точки  $x \in \mathbb{S}^2 \setminus \{S\}$  существует  $k \in \mathbb{Z}$  такое, что  $h^{-k}(x) \in U_h^N$ , то

$$\gamma_h(x) = g^k h^{-k}(x), \quad x \in \mathbb{S}^2 \setminus \{S\}. \quad (4)$$

По непрерывности построенный диффеоморфизм продолжается на точку  $S$  условием  $\gamma_h(S) = S$ .  $\square$

Положим  $V = \mathbb{S}^2 \setminus \{N, S\}$ . Обозначим через  $\hat{V}_g$  пространство орбит действия диффеоморфизма  $g$  на  $V$  и через  $p_g : V \rightarrow \hat{V}_g$  естественную проекцию. По построению поверхность  $\hat{V}_g$  гомеоморфна бутылке Клейна  $\mathbb{K}^2$ , если  $g = g_-$  и гомеоморфна тору  $\mathbb{T}^2$ , если  $g = g_+$ . Пусть  $a = \vartheta_N^{-1}(Ox_1)$  и  $b = \vartheta_N^{-1}(\mathbb{S}^1)$  кривые на  $V$ . По построению замкнутая кривая  $b$  является образующей фундаментальной группы  $\pi_1(V)$ . Определим образующие фундаментальной группы  $\pi_1(\hat{V}_g)$  формулами

$$\hat{a}_g = p_g(a), \quad \hat{b}_g = p_g(b). \quad (5)$$

Естественная проекция  $p_g : V \rightarrow \hat{V}_g$  индуцирует эпиморфизм  $\eta_g : \pi_1(\hat{V}_g) \rightarrow \mathbb{Z}$  следующим образом. Пусть  $\hat{c}$  – некоторая петля в  $\hat{V}_g$  такая, что  $\hat{c}(0) = \hat{c}(1) = \hat{x}_0$ . Согласно теореме о монодромии (см., например, [10]), существует единственный путь  $c$  в  $V$  с началом в точке  $x_0 = c(0) \in p_g^{-1}(\hat{x}_0)$ , являющийся поднятием пути  $\hat{c}$ . Поэтому существует единственное  $k \in \mathbb{Z}$  такое, что  $x_1 = c(1) = g^k(x_0)$  и корректно определено (то есть не зависит от выбора петли в классе  $[\hat{c}]$ ) отображение  $\eta_g$ , заданное формулой  $\eta_g([\hat{c}]) = k$ . По построению

$$\eta_g([\hat{a}_g]) = 1, \quad \eta_g([\hat{b}_g]) = 0. \quad (6)$$

Для любого  $r \in \mathbb{R}$  положим  $\bar{B}_r = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq r^2\}$ ,  $\bar{K}_r = cl(\bar{B}_r \setminus \bar{B}_{\frac{r}{2}})$ ,  $B_r = \vartheta_N^{-1}(\bar{B}_r)$ ,  $K_r = \vartheta_N^{-1}(\bar{K}_r)$ . Тогда для любого диффеоморфизма  $h \in E_g$  существует действительное число  $r_h > 0$ , такое что  $h|_{B_{r_h}} = g|_{B_{r_h}}$ . Откуда следует, что

$$\gamma_h g|_{B_{r_h}} = g \gamma_h|_{B_{r_h}}. \quad (7)$$

Из соотношения (7) единственным образом определяется диффеоморфизм  $\nu_h : V \rightarrow V$ , коммутирующий с диффеоморфизмом  $g$

$$\nu_h g = g \nu_h \quad (8)$$

и совпадающий с  $\gamma_h$  на  $B_{r_h}$ , то есть

$$\nu_h|_{B_{r_h}} = \gamma_h|_{B_{r_h}}. \quad (9)$$

Тогда (см., например, [10, Теорема 5.5]), существует единственный сохраняющий ориентацию диффеоморфизм  $\hat{\nu}_h : \hat{V}_g \rightarrow \hat{V}_g$ , для которого диффеоморфизм  $\nu_h$  является накрывающим, то есть

$$\hat{\nu}_h p_g = p_g \nu_h. \quad (10)$$

В следующей лемме описывается действие полученного диффеоморфизма на образующих.

**Лемма 5.2.** *Диффеоморфизм  $\hat{\nu}_h$  индуцирует изоморфизм  $\hat{\nu}_{h*} : \pi_1(\hat{V}_g) \rightarrow \pi_1(\hat{V}_g)$  со следующими свойствами:*

1.  $\eta_g \hat{\nu}_{h*}([\hat{a}_g]) = 1$ ;
2.  $\hat{\nu}_{h*}([\hat{b}_g]) = [\hat{b}_g]$ .

*Доказательство.* Непосредственно из определения эпиморфизма  $\eta_g$  и формулы (10) получаем, что

$$\eta_g \hat{\nu}_{h*}([\hat{c}]) = \eta_g([\hat{c}]). \quad (11)$$

Тогда  $\eta_g \hat{\nu}_{h*}([\hat{a}_g]) = \eta_g([\hat{a}_g])$  и, следовательно, в силу (6),  $\eta_g \hat{\nu}_{h*}([\hat{a}_g]) = 1$ . Поскольку  $\pi_1(V) = \langle b \rangle = \{b^n : n \in \mathbb{Z}\}$ , то  $\nu_{h*}([b]) = [b]$ . Откуда, в силу (5) и (11),  $\hat{\nu}_{h*}[\hat{b}_g] = [\hat{b}_g]$ .  $\square$

Пусть  $h \in E_g$  и  $w : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$  – диффеоморфизм сферы, тождественный вне некоторого кольца  $K_r$ ,  $r < \frac{r_h}{2}$ . Положим

$$\hat{w} = p_g w (p_g|_{K_r \setminus \partial B_r})^{-1}(\hat{x}). \quad (12)$$

По построению  $wh \in E_g$  и следующая лемма выражает связь между диффеоморфизмами  $\hat{\nu}_{wh}$  и  $\hat{\nu}_h$ .

**Лемма 5.3.**  $\hat{\nu}_{wh} = \hat{\nu}_h \hat{w}^{-1}$ .

*Доказательство.* Из формулы (10) следует, что

$$\hat{\nu}_{wh}(\hat{x}) = p_g \nu_{wh} (p_g|_{K_r \setminus \partial B_r})^{-1}(\hat{x}), \quad \hat{x} \in \hat{V}_g. \quad (13)$$

Тогда  $x = (p_g|_{K_r \setminus \partial B_r})^{-1}(\hat{x}) \in K_r$ . Непосредственно проверяется, что диффеоморфизмы  $wh$  и  $h$  совпадают на всей сфере  $\mathbb{S}^2$ , за исключением внутренности кольца  $K_{2r}$  и, следовательно,  $r_{wh} = r_h$ ,  $U_{wh}^N = U_h^N$ . Тогда из формул (9) и (13) следует, что

$$\hat{\nu}_{wh}(\hat{x}) = p_g \gamma_{wh}(x). \quad (14)$$

Пусть  $k \in \mathbb{Z}$  такое число, что  $(wh)^{-k}(x) \in U_h^N$ . Тогда из формулы (4) следует, что

$$\gamma_{wh}(x) = g^k (wh)^{-k}(x). \quad (15)$$

Поскольку диффеоморфизмы  $(wh)^{-1}$  и  $h^{-1}$  совпадают на всей сфере  $\mathbb{S}^2$ , за исключением внутренности кольца  $K_r$ , то

$$(wh)^{-k} = h^{-k}w^{-1} \quad (16)$$

Подставляя (16) в (15), учитывая формулу (9), получим, что

$$\gamma_{wh}(x) = g^k h^{-k} w^{-1}(x) = \gamma_h w^{-1}(x) = \nu_h w^{-1}(x). \quad (17)$$

Подставляя (17) в (14), учитывая формулы (10) и (12), получаем, что

$$\hat{\nu}_{wh}(\hat{x}) = p_g \nu_h w^{-1}(x) = p_g \nu_h (p_g|_{K_r \setminus \partial B_r})^{-1} p_g w^{-1} (p_g|_{K_r \setminus \partial B_r})^{-1}(\hat{x}) = \hat{\nu}_h \hat{w}^{-1}(\hat{x}).$$

□

**Лемма 5.4.** *Любой диффеоморфизм  $h \in E_g$  соединяется гладкой дугой  $\{\phi_t\} \subset NS(\mathbb{S}^2)$  с диффеоморфизмом  $g$ .*

*Доказательство.* Из леммы 5.1 следует, что гомеоморфизм  $\gamma_h$ , совпадающий на  $B_{r_h}$  с диффеоморфизмом  $\nu_h : V \rightarrow V$ , является диффеоморфизмом всюду, кроме, возможно, точки  $S$ . Тогда, если  $\nu_h$  гладко продолжается на точку  $S$  так, что  $\nu_h(S) = S$ , то, в силу предложения 4.1, существует гладкая дуга  $\{\rho_t\} \subset Diff_+(\mathbb{S}^2)$  такая, что  $\rho_0 = \nu_h, \rho_1 = id$ . Тогда искомая дуга  $\phi_t$  определяется формулой

$$\phi_t = \rho_t^{-1} g \rho_t.$$

Случай, когда отображение  $\nu_h$  не является гладким в точке  $S$  разобьем на два подслучая, в зависимости от класса диффеотопии отображения  $\hat{\nu}_h : \hat{V}_g \rightarrow \hat{V}_g$ : I)  $\hat{\nu}_h$  диффеотопен тождественному отображению, II)  $\hat{\nu}_h$  не диффеотопен тождественному отображению.

В случае I), используя рассуждения выше достаточно построить дугу  $h_t$ , соединяющую диффеоморфизм  $h$  с диффеоморфизмом  $h_1$  таким, что  $\nu_{h_1}$  – диффеоморфизм.

Выберем открытое покрытие  $U = \{U_1, \dots, U_q\}$  пространства орбит  $\hat{V}_g$  такое, что  $p_g^{-1}(U_i) \subset K_{r_i}$  для некоторого  $r_i \in \mathbb{R}$ . По лемме о фрагментации 3.2, существует разложение диффеоморфизма  $\hat{\nu}_h$  в композицию конечного числа диффеотопных тождественному отображению диффеоморфизмов

$$\hat{\nu}_h = \hat{w}_q \dots \hat{w}_2 \hat{w}_1$$

таких, что  $supp \{\hat{w}_{i,t}\} \subset U_{j(i)}$ ,  $i \in \{1, \dots, q\}$ , где  $U_{j(i)} \in U$  и  $\{\hat{w}_{i,t}\}$  – гладкая дуга, соединяющая тождественное отображение с диффеоморфизмом  $\hat{w}_i$ .

Пусть  $w_{i,t} : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$  – диффеоморфизм сферы, тождественный вне кольца  $K_{r_{j(i)}}$  и определенный на кольце  $K_{r_{j(i)}}$  формулой  $w_{i,t}(x) = (p_g|_{K_{r_{j(i)}} \setminus \partial B_{r_{j(i)}}})^{-1} \hat{w}_{i,t} p_g(x)$ . При этом, не уменьшая общности, будем считать, что значения  $r_{j(i)}$  выбраны так, что  $r_{j(i+1)} < \frac{r_{j(i)}}{2}$ ,  $i = 1, \dots, q$  и  $r_{j(1)} < \frac{r_h}{2}$ . Покажем, что  $h_t = w_{q,t} \dots w_{1,t} h : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$  – искомая дуга.

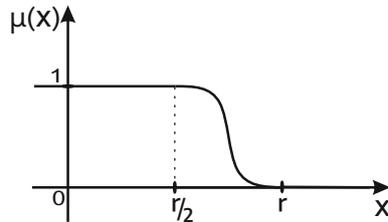
Действительно, по построению  $h_t \in E_g$  для любого  $t \in [0, 1]$ . В силу леммы 5.3,  $\hat{\nu}_{h_1} = \hat{\nu}_h \hat{w}_1^{-1} \hat{w}_2^{-1} \dots \hat{w}_q^{-1} = id$ . Из чего вытекает, что  $\nu_{h_1} = g^n$  для некоторого  $n \in \mathbb{N}$  и, следовательно,  $\nu_{h_1}$  – диффеоморфизм.

В случае II), используя рассуждения выше достаточно построить дугу  $h_t$ , соединяющую диффеоморфизм  $h$  с диффеоморфизмом  $h_1$  таким, что  $\hat{\nu}_{h_1}$  диффеотопен тождественному отображению. Рассмотрим два возможных случая: 1)  $g = g_+$ , 2)  $g = g_-$ .

В случае 1)  $\hat{V}_g \cong \mathbb{T}^2$ . Из предложения 4.2 и леммы 5.2 вытекает, что изоморфизм, индуцированный диффеоморфизмом  $\hat{\nu}_h$  задан матрицей  $\begin{pmatrix} 1 & n_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{Z})$ , где  $n_0 \neq 0$ . Зафиксируем  $r < \frac{rh}{2} \in \mathbb{R}$  и зададим диффеоморфизм  $\mu : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  формулой

$$\mu(x) = \begin{cases} 0, & x \geq r, \\ 1 - \left( 1 + e^{\frac{r^3(\frac{3r}{4}-x)}{8(x-\frac{r}{2})^2(x-r)^2}} \right)^{-1}, & \frac{r}{2} < x < r, \\ 1, & x \leq \frac{r}{2} \end{cases} .$$

Рассмотрим на плоскости  $\mathbb{R}^2$  полярные координаты  $(\rho, \varphi)$  и зададим диффеоморфизм  $\bar{\theta}_{n_0,t} :$

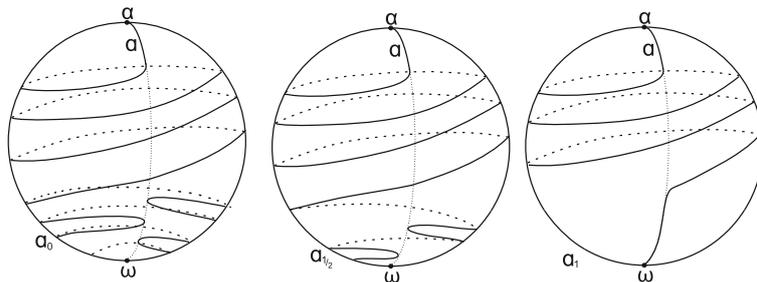


$\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  формулой

$$\bar{\theta}_{n_0,t}(\rho e^{i\varphi}) = \rho e^{i(\varphi + 2n_0\pi t\mu(\rho))} .$$

Пусть  $\theta_{n_0,t} = \vartheta_N^{-1} \bar{\theta}_{n_0,t} \vartheta_N : \mathbb{S}^2 \setminus \{S\} \rightarrow \mathbb{S}^2 \setminus \{S\}$ . Тогда  $\theta_{n_0,t}$  гладко продолжается на  $\mathbb{S}^2$  условием  $\theta_{n_0,t}(S) = S$  и  $h_t = \theta_{n_0,t}h$  – искомая дуга.

»



В случае 2)  $\hat{V}_g \cong \mathbb{K}^2$ . Тогда из предложения 4.3 и леммы 5.2 следует, что изоморфизм, индуцированный диффеоморфизмом  $\hat{\nu}_h$  принадлежит классу отображения  $\beta$ . Тогда  $h_t = \theta_{1,t}h$  – искомая дуга (на рисунке изображены кривые  $a_t = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} h_t^n(a \cap U_h^N)$  для  $t = 0, \frac{1}{2}, 1$ ).  $\square$

## 6 Доказательство основного результата

Рассмотрим сохраняющие (меняющие) ориентацию диффеоморфизмы “источник-сток”  $f, f' \in J(\mathbb{S}^2)$ . Покажем, что существует дуга, которая целиком состоит из диффеоморфизмов класса  $J(\mathbb{S}^2)$ , их соединяющая. Для этого в лемме ниже мы построим дуги, соединяющие диффеоморфизмы  $f, f'$  с локально модельными диффеоморфизмами  $h_f, h_{f'} \in E_{g_+}$  ( $h_f, h_{f'} \in E_{g_-}$ ). Тогда искомая дуга будет являться произведением построенных гладких дуг с дугами, соединяющими диффеоморфизмы  $h_f, h_{f'}$  с модельным диффеоморфизмом  $g_+$  ( $g_-$ ), существование последних следует из леммы 4.

**Лемма 6.1.** *Любой диффеоморфизм  $f \in J(\mathbb{S}^2)$  соединяется гладкой дугой  $\{\phi_t\} \subset NS(\mathbb{S}^2)$  с диффеоморфизмом  $h \in E_g$ .*

*Доказательство.* Пусть  $f \in J(\mathbb{S}^2)$  и неблуждающее множество диффеоморфизма  $f$  состоит из источника  $\alpha$  и стока  $\omega$ . Согласно [11] существует гладкая дуга  $\{H_t \in Diff_+(\mathbb{S}^2)\}$  со следующими свойствами:  $H_0 = id, H_1(N) = \alpha$  и  $H_1(S) = \omega$ . Тогда  $H_t^{-1}fH_t$  – гладкая дуга, соединяющая диффеоморфизм  $f$  с диффеоморфизмом  $H_1^{-1}fH_1 \in NS(\mathbb{S}^2)$ .

В силу вышесказанного, не уменьшая общности будем считать, что  $f \in NS(\mathbb{S}^2)$ . Тогда, для доказательства леммы, достаточно построить дугу  $\{\phi_t\} \subset NS(\mathbb{S}^2)$ , соединяющую диффеоморфизм  $f \in NS(\mathbb{S}^2)$  с диффеоморфизмом  $h \in E_g$ . Мы покажем, как построить дугу  $\{\phi_t^S\} \subset NS(\mathbb{S}^2)$ , соединяющую диффеоморфизм  $f \in NS(\mathbb{S}^2)$  с диффеоморфизмом  $h_S \in NS(\mathbb{S}^2)$ , совпадающим с  $f$  в окрестности полюса  $N$  и с  $g$  – в окрестности полюса  $S$ . Аналогично строится дуга  $\{\phi_t^N\} \subset NS(\mathbb{S}^2)$ , соединяющая диффеоморфизм  $h_S$  с диффеоморфизмом  $h \in E_g$ . Тогда искомая дуга –  $\{\phi_t = \phi_t^S * \phi_t^N\}$ .

Для построения дуги  $\{\phi_t^S\}$  положим  $\bar{f} = \vartheta_N f \vartheta_N^{-1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Тогда диффеоморфизм  $\bar{f}$  является сжатием к гиперболической точке  $O$ . В силу леммы Фрэнкса [12], [13] можно считать, что диффеоморфизм  $\bar{f}$  в некоторой окрестности точки  $O$  совпадает с линейным отображением  $\bar{Q} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , заданным матрицей  $Q$ , которая либо является диагональной, либо имеет вид  $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$ , где  $0 < \alpha^2 + \beta^2 < 1$ . Если  $\bar{Q} = \bar{g}$ , то лемма доказана. В противном случае, в силу [15, Предложение 5.4] существует дуга  $\bar{Q}_t : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  из линейных сжатий к гиперболической точке  $O$ , заданных матрицами  $Q_t$  такая, что  $\bar{Q}_t(\bar{B}_r) \subset int \bar{B}_r$  для любого  $r > 0$  и  $\bar{Q}_0 = \bar{Q}, \bar{Q}_1 = \bar{g}$ . Рассмотрим дугу  $\{\xi_t = \bar{Q}_t \bar{Q}^{-1}\} \subset Diff_+(\mathbb{R}^2)$ , которая соединяет тождественное отображение  $\xi_0 = id$  с диффеоморфизмом  $\xi_1 = \bar{g} \bar{Q}^{-1}$ , соответственно. Выберем положительные числа  $r_1 > r_2$  так, что

$$\bar{f}|_{\bar{B}_{r_1}} = \bar{Q}|_{\bar{B}_{r_1}}, \bar{Q}(\bar{B}_{r_1}) \subset \bar{B}_{r_2}.$$

Тогда, в силу предложения 3.1, существует дуга  $\{\Xi_t\} \subset Diff_+(\mathbb{R}^2)$  такая, что  $\Xi_0 = id, \Xi_t|_{\bar{Q}(\bar{B}_{r_1})} = \xi_t|_{\bar{Q}(\bar{B}_{r_1})}$  и  $\Xi_t|_{\mathbb{R}^2 \setminus \bar{B}_{r_1}} = id|_{\mathbb{R}^2 \setminus \bar{B}_{r_1}}$ . Тогда  $\{\bar{\phi}_t^S = \Xi_t \bar{f}\}$  – искомая дуга.  $\square$

## Список литературы

- [1] *Munkres J.* Differentiable isotopies on the 2-sphere // Michigan Mathematical Journal. – 1960. – Т. 7. – №. 3. – С. 193-197.
- [2] *Grines V. Z., Medvedev T. V., Pochinka O. V.* Dynamical systems on 2-and 3-manifolds // Cham : Springer, 2016. – Т. 46.
- [3] *S. Newhouse, J. Palis, F. Takens, Stable arcs of diffeomorphisms*, Bull. Amer. Math. Soc., 82:3 (1976), 499–502.
- [4] *Palis J., Pugh C.* Fifty problems in dynamical systems // Dynamical Systems—Warwick 1974: Proceedings of a Symposium Held at the University of Warwick 1973/74. – Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 2006. – С. 345-353.
- [5] *Bonatti, C., Grines, V. Z., Medvedev, V. S., Pochinka, O. V.* Bifurcations of Morse-Smale diffeomorphisms with wildly embedded separatrices // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. – 2007. – Т. 256. – С. 47-61.
- [6] *Дж, Милнор* Теорема об  $h$ -кобордизме. – 1969.
- [7] *Banyaga A.* On the structure of the group of equivariant diffeomorphisms // Topology. – 1977. – Т. 16. – №. 3. – С. 279-283.
- [8] *Rolfsen D.* Knots and links. – American Mathematical Soc., 2003. – Т. 346.
- [9] *Lickorish W. B. R.* Homeomorphisms of non-orientable two-manifolds // Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. – Cambridge University Press, 1963. – Т. 59. – №. 2. – С. 307-317.
- [10] *Косневски Ч.* Начальный курс алгебраической топологии // М.: Изд-во Мир. – 1983. – Т. 304.
- [11] *Hirsch M. W.* Differential topology. – Springer Science Business Media, 2012. – Т. 33.
- [12] *Franks J.* Necessary conditions for stability of diffeomorphisms // Transactions of the American Mathematical Society. – 1971. – Т. 158. – №. 2. – С. 301-308.
- [13] *Gourmelon N.* A Franks' lemma that preserves invariant manifolds // Ergodic Theory and Dynamical Systems. – 2016. – Т. 36. – №. 4. – С. 1167-1203
- [14] *Милнор Д., Уоллес А.* Дифференциальная топология. – 1973.
- [15] *Палис Ж.* Геометрическая теория динамических систем. – 1986.

## References

- [1] *Munkres J.* Differentiable isotopies on the 2-sphere // Michigan Mathematical Journal. – 1960. – Т. 7. – №. 3. – С. 193-197.
- [2] *Grines V. Z., Medvedev T. V., Pochinka O. V.* Dynamical systems on 2-and 3-manifolds // Cham : Springer, 2016. – Т. 46.
- [3] *S. Newhouse, J. Palis, F. Takens, Stable arcs of diffeomorphisms*, Bull. Amer. Math. Soc., 82:3 (1976), 499–502.
- [4] *Palis J., Pugh C.* Fifty problems in dynamical systems // Dynamical Systems—Warwick 1974: Proceedings of a Symposium Held at the University of Warwick 1973/74. – Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 2006. – С. 345-353.
- [5] *Bonatti, C., Grines, V. Z., Medvedev, V. S., Pochinka, O. V.* Bifurcations of Morse-Smale diffeomorphisms with wildly embedded separatrices // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. – 2007. – Т. 256. – С. 47-61.
- [6] *Дж, Милнор* Теорема об  $h$ -кобордизме. – 1969.
- [7] *Banyaga A.* On the structure of the group of equivariant diffeomorphisms // Topology. – 1977. – Т. 16. – №. 3. – С. 279-283.
- [8] *Rolfsen D.* Knots and links. – American Mathematical Soc., 2003. – Т. 346.
- [9] *Lickorish W. B. R.* Homeomorphisms of non-orientable two-manifolds // Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. – Cambridge University Press, 1963. – Т. 59. – №. 2. – С. 307-317.
- [10] *Косневски Ч.* Начальный курс алгебраической топологии // М.: Изд-во Мир. – 1983. – Т. 304.
- [11] *Hirsch M. W.* Differential topology. – Springer Science Business Media, 2012. – Т. 33.
- [12] *Franks J.* Necessary conditions for stability of diffeomorphisms // Transactions of the American Mathematical Society. – 1971. – Т. 158. – №. 2. – С. 301-308.
- [13] *Gourmelon N.* A Franks' lemma that preserves invariant manifolds // Ergodic Theory and Dynamical Systems. – 2016. – Т. 36. – №. 4. – С. 1167-1203
- [14] *Милнор Д., Уоллес А.* Дифференциальная топология. – 1973.
- [15] *Палис Ж.* Геометрическая теория динамических систем. – 1986.

В Оргкомитет Смотра дипломных работ математиков России  
от Чиркова Михаила Анатольевича

Заявление о новизне

Сообщаю, что новыми в моей представленной на Смотр выпускной квалификационной работе (далее - работа) под названием «**Решения локального уравнения тетраэдров Замолодчикова**» являются: Теоремы 1 и 2 (с доказательствами), Определения 1 и 5, Следствия 1-4 (с доказательствами), Замечание 1 (с доказательством), Гипотеза 3, Утверждение 1 (с доказательством).

Также сообщаю, что для проверки новизны мною было проделано следующее:

1. В период с 9 февраля по 15 марта 2024 г. мною был произведён поиск в следующих поисковых системах: Google, Web of Science, arxiv.org по следующим ключевым словам: отображения  $n$ -симплексов, уравнение Янга–Бакстера, представление Лакса, свойство трехмерной совместимости, дискретные интегрируемые системы, уравнение нулевой кривизны, в выдаче поисковиков были исследованы 20 статей, 2 монографии и 2 препринта. Ссылки на эти работы содержатся в списке литературы дипломной работы. Данные научные работы не содержали материала, заявляемого автором в качестве нового. При поиске не было встречено работ или упоминаний работ, позволяющих усомниться в новизне материала. При этом в работах [1], [11] были найдены конструкции, похожие на излагаемые в настоящей работе. Они содержали частичную классификацию отображений Янга-Бакстера и отображений тетраэдров. Таким образом, классификация (частичная) отображений  $n$ -симплексов является актуальной задачей математической физики, что подтверждает актуальность настоящей работы.

2. Проведена серия консультаций с моим научным руководителем Сотирисом Константиному-Ризосом, доцентом кафедры нелинейной динамики Ярославского государственного университета.

3. Проведено выступление с данной работой или отдельными главами на конференциях ISND-2023 (диплом за лучший доклад), «Путь в науку 2024», «Нелинейные дни в Саратове для молодых 2023» и «10-ая молодежная школа-конференция по геометрическим методам математической физики».

4. Была принята к печати статья «On the solutions of the local Zamolodchikov tetrahedron equation» в журнале «Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical», индексируемом в WoS и Scopus (Q2). Данная статья основана на результатах одной из глав дипломной работы. Таким образом текст прошел peer review от двух независимых рецензентов и был признан значимым.

Таким образом, по результатам поиска в сети Интернет и тематических научных базах, а также обсуждений с указанными выше специалистами следует, что, по-видимому, представленный в моей выпускной квалификационной работе указанный выше математический материал действительно является новым.

Подтверждаю, что являюсь автором предоставляемой на Смотр работы и прошу принять её для участия в Смотре. Принимаю на себя обязательство соблюдать правила

Смотра. Также (в соответствии с п. 4 Положения о Смотре) принимаю на себя обязательство оценить 5 работ участников Смотра, выданных мне Оргкомитетом в результате жеребьёвки и сверх того оценить 2-5 работ других участников Смотра на мой выбор. Я понимаю правила оценки работ, приведённые в п. 4.3 Положения о Смотре. Даю согласие на публикацию адреса моей электронной почты.

Защита работы состоится 17 июня 2024 года. На Смотр представлен окончательный текст работы.



Чирков Михаил  
Анатольевич

27 мая 2024  
Ярославль, Россия

Министерство науки и высшего образования  
Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова»  
Кафедра нелинейной динамики

Сдано на кафедру  
«\_\_\_» июня 2024 г.  
Заведующий кафедрой  
Академик РАН, д.ф.-м.н., профессор  
\_\_\_\_\_ Козлов В.В.

Выпускная квалификационная работа  
**Решения локального уравнения тетраэдров Замолодчикова**  
направление подготовки

01.03.02 Прикладная математика и информатика

Научный руководитель  
PhD по математике (University of Leeds, UK),  
Доцент  
\_\_\_\_\_ С. Константину-Ризос

«\_\_\_» июня 2024 г.

Студент группы ПМИ-43БО  
\_\_\_\_\_ Чирков М.А.

«\_\_\_» июня 2024 г.

Ярославль 2024 г.

# Реферат

Объем 42 с., 4 гл., 1 рис., 24 источника.

**Отображения  $n$ -симплекса, уравнение Янга–Бакстера, представление Лакса, базис Грёбнера, некоммутативное тело.**

**Объектом исследования** являются решения локального уравнения тетраэдров и генерируемые ими отображения 4-симплекса.

**Предметом исследования** являются решения локального уравнения тетраэдров в случае конкретной зависимости от переменных среди матриц  $3 \times 3$ .

**Цель работы** – построение классификации определенного класса матриц, которые решают локальное уравнение тетраэдров. В процессе работы были исследованы методы получения новых отображений Янга–Бакстера, отображений тетраэдров и отображений 4-симплекса.

**В результате** исследования впервые была получена классификация матриц-генераторов отображений 4-симплекса, изучена интересная внутренняя структура класса этих матриц. Работа была проделана как в коммутативном случае, так и в случае переменной из произвольного некоммутативного тела. Следствием стало развитие новых методов получения уже изученных, а также новых отображений 4-симплекса. Был введен класс «условных отображений  $n$ -симплекса», а также получены отображения 4-симплекса на произвольной группе. Результаты интересны с точки зрения алгебраической структуры, но также их можно применять для непосредственного получения новых отображений 4-симплекса. Во время работы над ВКР написаны две статьи в журналах, индексируемых в WoS и Scopus [6], [5].

# Содержание

<b>Введение</b>	<b>4</b>
<b>1 Теоретические сведения</b>	<b>7</b>
1.1 Представление Лакса . . . . .	8
1.2 Уравнение N-симплексов . . . . .	8
1.3 Локальное уравнение N-симплексов . . . . .	10
<b>2 Получение новых отображений Янга–Бакстера</b>	<b>14</b>
2.1 Метод вариации спектрального параметра . . . . .	14
2.2 Отображение Шварца–Бузинека . . . . .	15
<b>3 Классификация решений локального уравнения тетраэдров</b>	<b>18</b>
3.1 Основной результат в коммутативном случае . . . . .	18
3.2 Способ получения новых отображений 4-симплекса . . . . .	24
3.3 Получение известных отображений 4-симплексов . . . . .	25
3.4 Процедура сечения базовых соответствий . . . . .	27
<b>4 Структура некоммутативных решений локального уравнения тетраэдров</b>	<b>30</b>
4.1 Применение базиса Грёбнера . . . . .	30
4.2 Получение отображений 4-симплексов на произвольной группе . . . . .	34
4.3 Условные отображения 4-симплексов . . . . .	35
<b>Заключение</b>	<b>37</b>
<b>Список литературы</b>	<b>40</b>

# Введение

Данная выпускная работа посвящена исследованию структуры решений уравнения 4-симплекса, которые можно получить при помощи локального уравнения тетраэдров Замолодчикова:

$$L_{123}(u)L_{145}(v)L_{246}(w)L_{356}(r) = L_{356}(t)L_{246}(z)L_{145}(y)L_{123}(x). \quad (1)$$

В данной работе мы представляем четыре матрицы  $3 \times 3$ , которые выступают базовыми генераторами всех отображений 4-симплекса, получаемых из решения локального уравнения тетраэдров для матриц определенного вида. Более того, мы демонстрируем, что из некоторых наших решений мы можем восстановить 4-симплекс расширения уже известных отображений тетраэдров типа Кашаева–Корепанова–Сергеева и Хироты. Наконец, мы демонстрируем методы построения новых отображений 4-симплекса и показываем интересный результат об инвариантности множества генераторов под действием отражения относительно побочной диагонали.

Интерес также представляют отображения 4-симплекса, определенные на некоммутативном теле  $\mathcal{S}$ . Для этого мы проводим аналогичную процедуру и показываем классификационные результаты. Важным отличием от коммутативного случая служит пример матриц, которые при замене переменной на нуль перестают быть потенциальными генераторами отображений 4-симплекса. Для некоммутативного случая использовалась другая методика решения систем алгебраических уравнений – метод базиса Грёбнера. Благодаря ней можно свести САУ к более простой системе уравнений, где «старшие» мономы выражаются через «младшие».

Теоретико-множественное уравнение Янга–Бакстера [7] появилось во многих областях математики и физики, здесь можно прочитать обзор данной темы [24]. В последние десятилетия большой интерес вызывает изучение и применение решений теоретико-множественного уравнения

Янга–Бакстера (так называемые отображения Янга–Бакстера [23]), более подробно изучить возможные применения и способы получения можно по следующему ссылке [1, 4, 10, 12, 13, 14, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24]. В современной теории интегрируемых систем существует связь между свойством трехмерной совместимости, которое признано очень важным свойством дискретных интегрируемых систем, и уравнением Янга–Бакстера [1, 3, 12, 19, 20]. Более того, существуют решения, которые могут быть связаны с задачей матричной рефакторизации и, кроме того, могут быть связаны с преобразованиями Дарбу и Бэклунда [14] солитонных решений.

Уравнение 4-симплексов является представителем более широкого семейства уравнений, а именно уравнений  $N$ -симплекса. Наиболее известными представителями семейства уравнений является уравнение Янга–Бакстера ( $N = 2$ ) и уравнение тетраэдров Замолотчикова ( $N = 3$ ).

Существует несколько методов, связывающих отображения  $N$ -симплекса с интегрируемыми системами. Таким образом, разработка методов построения нетривиальных в некотором смысле отображений  $N$ -симплекса является задачей, которая может привести к важным интегрируемым моделям.

В связи с важностью отображений  $n$ -симплексов существует необходимость в разработке методов их построения и классификации. Известные результаты, полученные в области классификации отображений  $n$ -симплексов, включают классификацию [1] отображений Янга–Бакстера Адлером, Бобенко и Сурисом, а также классификацию [11] отображений тетраэдров Замолотчикова Кашаевым, Корепановым и Сергеевым. Здесь и далее под классификацией мы понимаем лишь описание ограниченного набора решений, так как описание всех решений уравнений  $n$ -симплекса на данном этапе развития математики кажется невозможной задачей. В литературе существуют несколько методов построения отображений  $n$ -симплексов; известны способы построения новых отображений

$n$ -симплексов при помощи симметрии разностных уравнений на решетке, построение с помощью задачи матричной факторизации и их построение с помощью преобразований Дарбу для интегрируемых уравнений в частных производных.

Результаты данной работы, а также отдельно результаты главы 3 уже были представлены на конференциях ISND-2023, «Путь в науку 2024», «Нелинейные дни в Саратове для молодых 2023» и «10-ая молодежная школа-конференция по геометрическим методам математической физики».

Работа организована следующим образом. В следующем разделе мы приводим весь предварительный материал и определения, а также закрепляем обозначения. В частности, мы даем определение отображения Янга–Бакстера и объясняем, что такое представление Лакса для такого отображения. В разделе 2 мы объясняем метод вариации переменных для построения новых отображений Янга–Бакстера большей размерности. Кроме того, мы используем этот метод для получения нового отображения Янга–Бакстера, связанного с системой Шварца–Бузинека. В разделе 3 мы покажем некоторую классификацию решений локального уравнения тетраэдров, которые порождают некоторые отображения 4-симплексов. В разделе 4 мы проведем похожую процедуру, но для переменных, принадлежащих некоммутативному телу.

# 1 Теоретические сведения

Пусть  $Y^{ij} : A \times A \times A \rightarrow A \times A \times A$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ ,  $i \neq j$ , где  $A$  алгебраическое многообразие в  $K^N$ , а  $K$  — алгебраически замкнутое поле нулевой характеристики, например,  $\mathbb{C}$ . В частности, мы определяем  $Y^{ij}$  следующими уравнениями

$$Y^{12}(x, y, z) = (u(x, y), v(x, y), z), \quad (2a)$$

$$Y^{13}(x, y, z) = (u(x, z), y, v(x, z)), \quad (2b)$$

$$Y^{23}(x, y, z) = (x, u(y, z), v(y, z)), \quad (2c)$$

где  $x, y, z \in A$ .

Теперь, пусть  $Y : A \times A \rightarrow A \times A$  — это отображение  $(x, y) \xrightarrow{Y} (u(x, y), v(x, y))$ , и  $\tilde{Y} = \pi \circ Y \circ \pi$ , где  $\pi : A \times A \rightarrow A \times A$  — это перестановка  $\pi(x, y) = (y, x)$ . Назовем отображение  $Y$  *отображением Янга–Бакстера*, если оно удовлетворяет следующему уравнению

$$Y^{12} \circ Y^{13} \circ Y^{23} = Y^{23} \circ Y^{13} \circ Y^{12}, \quad (3)$$

которое называют *уравнением Янга–Бакстера*. Кроме того, отображение  $Y$  называют *обратимым*, если композиция  $\tilde{Y}$  и  $Y$  это тождественное отображение, то есть

$$\tilde{Y} \circ Y = Id. \quad (4)$$

Мы используем термин *параметрическое отображение Янга–Бакстера*, если параметры  $a, b \in K$  участвуют в определении отображения Янга–Бакстера, а именно имеем отображение следующего вида  $Y_{a,b} : ((x, a), (y, b)) \mapsto ((u((x, a), (y, b)), a), (v((x, a), (y, b)), b))$ , которое мы запишем в коротком виде

$$Y_{a,b} : (x, y) \mapsto (u(x, y; a, b), v(x, y; a, b)), \quad (5)$$

которое удовлетворяет *параметрическому уравнению Янга–Бакстера*

$$Y_{a,b}^{12} \circ Y_{a,c}^{13} \circ Y_{b,c}^{23} = Y_{b,c}^{23} \circ Y_{a,c}^{13} \circ Y_{a,b}^{12}. \quad (6)$$

## 1.1 Представление Лакса

Ссылаясь на Суриса и Веселова в [22], мы назовем *матрицей Лакса* параметрического отображения Янга–Бакстера квадратную матрицу,  $L = L(x; a, \lambda)$ , зависящую от переменной  $x$ , параметра  $a$  и спектрального параметра  $\lambda$ , таких, что уравнение Лакса

$$L(u; a, \lambda)L(v; b, \lambda) = L(y; b, \lambda)L(x; a, \lambda) \quad (7)$$

верно, когда  $(u, v) = Y_{a,b}(x, y)$ . Уравнение (7) так же называют *задачей матричной рефакторизации*. Если зависимости от спектрального параметра нет, то пишут  $L = L(x; a)$ . Заметим, что  $u, v, x, y$  не обязательно должны быть скалярными величинами – они вполне могут быть конечным набором переменных, то есть  $A \subset X^N$ .

Для того, чтобы проверить, является ли отображение  $(x, y) \xrightarrow{Y_{a,b}} (u(x, y; a, b), v(x, y; a, b))$  отображением Янга–Бакстера, мы используем следующее утверждение. Можно и непосредственно проверять вычислением, но такой способ эффективнее, например, в случае некоммутативных переменных.

**Предложение 1.** (Кулукас-Папагеоргиу [17]) Если задача матричной трифакторизации  $L(x; a, \lambda)L(y; b, \lambda)L(z; c, \lambda) = L(x'; a, \lambda)L(y'; b, \lambda)L(z'; c, \lambda)$  имеет единственное решение  $x = x', y = y', z = z'$ , тогда отображение  $R_{a,b}$ , определенное из задачи матричной рефакторизации (7) является параметрическим отображением Янга–Бакстера.

## 1.2 Уравнение N-симплексов

Уравнения  $N$ -симплексов — это семейство уравнений, которые являются обобщением уравнения Янга–Бакстера (случай  $N = 2$ ). Отображения  $N$ -симплексов — это решения теоретико-множественного уравнения  $N$ -симплексов.

Покажем определения для  $N = 3$  и  $N = 4$ . Пусть  $\mathcal{X}$  — произвольное множество. Отображение  $T : \mathcal{X}^3 \rightarrow \mathcal{X}^3$ , имеющее вид

$$T : (x, y, z) \mapsto (u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z)), \quad (8)$$

называют отображением тетраэдров, если оно удовлетворяет функциональному уравнению тетраэдров Замолодчикова

$$T^{123} \circ T^{145} \circ T^{246} \circ T^{356} = T^{356} \circ T^{246} \circ T^{145} \circ T^{123}, \quad (9)$$

где  $T^{ijk}$  — это функции  $:\mathcal{X}^6 \rightarrow \mathcal{X}^6$ ,  $i, j, k = 1, \dots, 6$ ,  $i < j < k$ . Верхние индексы  $ijk$  обозначают, что  $T^{ijk}$  действует на  $i, j$  и  $k$  компоненты элемента  $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \in \mathcal{X}^6$ , как отображение (8), а на остальные — тривиально. Например,

$$T^{145}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (u(x_1, x_4, x_5), x_2, x_3, v(x_1, x_4, x_5), w(x_1, x_4, x_5), x_6).$$

Пример отображения тетраэдров — преобразование Кашаева электрической сети

$$(x, y, z) \xrightarrow{T} \left( \frac{xy}{x + z + xyz}, x + z + xyz, \frac{yz}{x + z + xyz} \right).$$

Пусть  $\mathcal{X}$  — множество. Отображение  $S : \mathcal{X}^4 \rightarrow \mathcal{X}^4$ , т.е.

$S : (x, y, z, t) \mapsto (u(x, y, z, t), v(x, y, z, t), w(x, y, z, t), r(x, y, z, t))$ , называется *отображением 4-симплексов* если оно удовлетворяет *теоретико-множественному уравнению 4-симплексов*

$$S^{1234} \circ S^{1567} \circ S^{2589} \circ S^{368,10} \circ S^{479,10} = S^{479,10} \circ S^{368,10} \circ S^{2589} \circ S^{1567} \circ S^{1234}.$$

Функции  $S^{ijkl} : \mathcal{X}^{10} \rightarrow \mathcal{X}^{10}$ ,  $i, j, k, l = 1, \dots, 10$ ,  $i < j < k < l$ , — это отображения, которые действуют как  $S$  на  $i, j, k, l$  компоненты  $\mathcal{X}^{10}$  и тривиально на другие.

Дадим определения для общего случая. Напомним, что топологическим  $n$ -симплексом называют множество гомеоморфное стандартному

симплексу в  $\mathbb{R}^n$ . Стандартным симплексом в  $\mathbb{R}^n$  называют аффинная оболочка точек  $O, e_1, \dots, e_n$ , где  $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$  – стандартный базис в  $\mathbb{R}^n$ . От симплекса нам потребуется только комбинаторная структура, то есть вершины и ребра. Пусть также  $\mathcal{X}$  – это множество (дополнительные структуры добавляются по мере необходимых для описания отображения операций). Отображение  $R : \mathcal{X}^n \rightarrow \mathcal{X}^n$  называется *отображением  $n$ -симплексов*, если оно удовлетворяет *теоретико-множественному уравнению  $n$ -симплексов*

$$R^{I_1} \circ \dots \circ R^{I_{n+1}} = R^{I_{n+1}} \circ \dots \circ R^{I_1}.$$

Обозначим  $m = \binom{n+1}{2}$  – количество ребер у  $n$ -симплекса. Прямые, на которых лежат ребра можно произвольным образом пронумеровать от 1 до  $m$ .  $I_k \subset \{1, \dots, m\}^n$  – это набор  $n$  различных упорядоченных индексов прямых, пронумерованных в лексикографическом порядке. Таким образом  $I_1 = (1, 2, 3, \dots, n)$ . Каждому набору индексов соответствует единственная точка пересечения. Если каждой вершине сопоставить отображение  $R^{I_k}$ , которое действует на компоненты из  $I_k$  как  $R$ , а на оставшиеся индексы тождественно, то выполнение уравнения  $n$ -симплексов эквивалентно тому, что проход вершин с применением соответствующих операторов в одном порядке и в обратном даёт один и тот же результат.

### 1.3 Локальное уравнение $N$ -симплексов

Локальное уравнения  $N$ -симплексов является обобщение задачи матричной рефакторизации (7), которая позволяла получать отображения Янга–Бакстера (предложение (1)). Покажем определения для случая  $N = 2$  и  $N = 3$ . Пусть  $L = L(x)$  — это  $2 \times 2$  матрица, зависящая от  $x \in \mathcal{X}$  (по умолчанию считаем, что зависимость от переменной рациональная):

$$L(x) = \begin{pmatrix} A(x) & B(x) \\ C(x) & D(x) \end{pmatrix},$$

где  $A, B, C, D : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ . Определим  $3 \times 3$  расширения  $L(x)$ :

$$L_{12} = \begin{pmatrix} A(x) & B(x) & 0 \\ C(x) & D(x) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad L_{13} = \begin{pmatrix} A(x) & 0 & B(x) \\ 0 & 1 & 0 \\ C(x) & 0 & D(x) \end{pmatrix}, \quad L_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & A(x) & B(x) \\ 0 & C(x) & D(x) \end{pmatrix}$$

**Гипотеза 1** (Maillet-Nijhoff, 1989). *Если локальное уравнение Янга–Бакстера*

$$L_{12}(u)L_{13}(v)L_{23}(w) = L_{23}(z)L_{13}(y)L_{12}(x) \quad (10)$$

*имеет единственное решение, то оно задает отображение*

$(x, y, z) \xrightarrow{T} (u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z))$ , *которое является отображением тетраэдров.*

Продemonстрируем то, как мы используем идею гипотезы **1**.

Например,

$$L(x) = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & k \end{pmatrix}.$$

Подставим эту матрицу в локальное уравнение Янга–Бакстера (**10**) и получим систему:

$$u = x, \quad kv + uw = y, \quad w = z,$$

у которой есть единственное решение  $u = x, v = \frac{y-xz}{k}, w = z$ . Получившееся отображение

$$T : (x, y, z) \rightarrow \left( x, \frac{y - xz}{k}, z \right),$$

является отображением тетраэдров.

Важное замечание состоит в том, что не только системы, имеющие единственное решение дают возможность получить отображение тетраэдров.

Рассмотрим матрицу  $L(x) = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & \frac{1}{x} \end{pmatrix}, x \in \mathbb{C} \setminus 0$ .

Получим систему

$$u = \frac{xy}{v}, \quad w = \frac{yz}{v}.$$

Мы можем добавить некоторое количество ограничений (дополнительных уравнений), чтобы получить единственное решение, а затем проверить, что полученное отображение является отображением тетраэдров. Добавим уравнение  $v = x$ , таким образом получим отображение

$$T_1(x, y, z) = \left( y, x, \frac{yz}{x} \right),$$

которое является отображением тетраэдров (проверяется подстановкой в уравнение тетраэдров (9)).

На самом деле эта гипотеза была выдвинута в общем случае:

**Гипотеза 2** (Maillet-Nijhoff, 1989). *Единственное решение локального уравнения  $(N - 1)$ -симплексов генерирует решение уравнения  $N$ -симплексов.*

То есть процедуру, которую мы продемонстрировали для  $N = 3$  можно обобщить. Пусть  $L = L(x)$  — это  $3 \times 3$  матрица, зависящая от  $x \in \mathcal{X}$ :

$$L(x) = \begin{pmatrix} a(x) & b(x) & c(x) \\ d(x) & e(x) & f(x) \\ k(x) & l(x) & m(x) \end{pmatrix}.$$

Аналогично определим  $L_{ijk}(x)$  —  $6 \times 6$  расширения  $L(x)$ . Например,

$$L_{145}(x) = \begin{pmatrix} a(x) & 0 & 0 & b(x) & c(x) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ d(x) & 0 & 0 & e(x) & f(x) & 0 \\ k(x) & 0 & 0 & l(x) & m(x) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Локальное уравнение тетраэдров:

$$L_{123}(u)L_{145}(v)L_{246}(w)L_{356}(r) = L_{356}(t)L_{246}(z)L_{145}(y)L_{123}(x). \quad (11)$$

В общем случае матрица  $L = L(x)$  – это  $n \times n$  матрица, зависящая от  $x \in \mathcal{X}$ , а именно

$$L(x) = \begin{pmatrix} a_{1,1}(x) & \dots & a_{1,n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1}(x) & \dots & a_{n,n}(x) \end{pmatrix}.$$

Расширения матрицы  $L_{I_k}(x)$  теперь определяются как  $m \times m$  единичная матрица, у которой на пересечении строк и столбцов из  $I_k$  находятся элементы матрицы  $L(x)$ . Локальное уравнение  $n$ -симплекса:

$$L_{I_1}(x_1) \dots L_{I_{n+1}}(x_{n+1}) = L_{I_{n+1}}(y_{n+1}) \dots L_{I_1}(y_1). \quad (12)$$

Решение локального уравнения  $n$ -симплекса состоит в нахождение такой зависимости  $y_1(x_1, \dots, x_{n+1}), \dots, y_{n+1}(x_1, \dots, x_{n+1})$ , что при подстановке в уравнение (12) оно обращается в равенство. Нас будет интересовать случай наличия соответствия, то есть мы не накладываем требования единственности решения задачи. В дальнейшем, если существует некоторая зависимость  $y$  от  $x$ , которая обращает (12) в равенство, то будем говорить, что матрица  $L$  является *потенциальным генератором отображения  $(n + 1)$ -симплекса*.

Локальное уравнение  $n$ -симплекса можно интерпретировать как равенство применения линейных операторов с одинаковой функциональной зависимостью в одном порядке обхода вершин  $n$ -симплекса и в обратном.

## 2 Получение новых отображений Янга–Бакстера

В этом разделе мы объясняем метод вариации спектрального параметра и используем его для построения новых отображений Янга–Бакстера.

### 2.1 Метод вариации спектрального параметра

Пусть  $L_a(x; \lambda) \equiv L(x; a, \lambda)$  —  $n \times n$  квадратная матрица, рассмотрим задачу матричной рефакторизации (7). Матричное уравнение (7) эквивалентно системе полиномиальных уравнений  $Q_i(x, y, u, v, a, b) = 0, i = 1, \dots, n^2$ . Пусть эта система полиномиальных уравнений имеет единственное решение, которое определяет отображение Янга–Бакстера  $(x, y) \xrightarrow{Y_{a,b}} (u(x, y; a, b), v(x, y; a, b))$ .

Чтобы получить новые иерархии отображений Янга–Бакстера, используя (7), мы заменим  $(x, \lambda)$  на  $(x_1, \sigma(x_2))$  в  $L_a(x; \lambda)$ , то есть, мы рассмотрим матрицу  $L_a(x_1; \sigma(x_2))$  и подставим ее в уравнение

$$L_a(u_1; \sigma(u_2))L_b(v_1; \sigma(v_2)) = L_b(y_1; \sigma(y_2))L(x_1; \sigma(x_2)). \quad (13)$$

Если уравнение (7) имеет единственное решение, которое задает отображение Янга–Бакстера размерности  $2n$ , тогда уравнение (13) задаст соответствие между  $x$  и  $y$ . Затем нам нужно найти некоторые значения свободных переменных этого соответствия, для которых мы можем получить отображение Янга–Бакстера размерности  $2(n + 1)$ . Мы можем использовать ту же идею даже в том случае, когда (7) задает соответствие. Теперь, замена  $(x, \lambda) \rightarrow (x_1, \sigma(x_2))$  приведет нас к другому соответствию с большим числом свободных переменных.

Мы продемонстрируем этот метод на примерах в следующем разделе.

## 2.2 Отображение Шварца–Бузинека

Рассмотрим следующую матрицу

$$L(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, a; \lambda) = \begin{pmatrix} \frac{ax_3x_2}{x_1x_4} & -\frac{\lambda}{x_1} & \frac{\lambda x_5}{x_1} \\ -\frac{x_6}{x_4} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{x_4} & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

которая порождает дискретную систему Шварца–Бузинека [2], [9]. Более подробно, задача матричной рефакторизации

$$L(u_{11}, u_{10}, b; \lambda)L(u_{10}, u_{00}, a; \lambda) = L(u_{11}, u_{01}, a; \lambda)L(u_{01}, u_{00}, b; \lambda)$$

порождает дискретную систему Шварца–Бузинека в квад–графах, где  $u(n, m) = (x(n, m), y(n, m), z(n, m))$ , а  $u_{ij} = u(n + i, m + j)$ :

$$\begin{aligned} z_{10} - yx_{10} - z &= 0, \\ z_{01} - yx_{01} - z &= 0, \\ xy_{11}(y_{10} - y_{01}) - y(ax_{10}y_{01} - bx_{01}y_{10}) &= 0. \end{aligned}$$

Связь между оригинальным интегрируемым уравнением в частных производных и его дискретной версией осуществляется при помощи матрицы преобразования Дарбу [14]. Оригинальное дифференциальное уравнение в частных производных может быть получено обратной процедурой, которая называется «непрерывный предел» и описана в учебнике [8]:

$$3\partial_y \left( \frac{z_y}{z_x} \right) + \partial_x \left( \frac{z_{xxx}}{z_x} - \frac{3z_{xx}^2 - z_y^2}{2z_x^2} \right) = 0.$$

Теперь покажем способ получать новые отображения Янга–Бакстера размерности 14 при помощи матрицы  $L(x, a; \lambda)$ :

$$\begin{aligned} L(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, a; \lambda)L(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, b; \lambda) = & \quad (14) \\ L(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, b; \lambda)L(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, a; \lambda). \end{aligned}$$

Эта задача матричной рефакторизации может быть решена для  $u_i$  и  $v_i, i = 1, \dots, 6$ , и мы получим следующее соответствие

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1 = y_1, \\ u_3 = \frac{by_2y_3}{au_2}, \\ u_5 = y_5, \\ u_6 = y_6, \\ v_1 = \frac{x_1y_4}{u_4}, \\ v_3 = \frac{ax_2x_3}{bv_2}, \\ v_4 = x_4, \\ v_5 = x_5, \\ v_6 = x_6, \end{array} \right.$$

со свободными переменными  $u_2, u_4$  и  $v_2$ .

Выбор  $v_2 = x_2, u_4 = y_4, u_2 = y_5$  определяет отображение:

$$\begin{aligned} & (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6) \mapsto \\ & \left( y_1, y_5, \frac{by_2y_3}{ay_5}, y_4, y_5, y_6, x_1, x_2, \frac{ax_3}{b}, x_4, x_5, x_6 \right) \end{aligned}$$

Теперь заменим  $\lambda$  на  $x_7$ . Получаем недоопределенную систему:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_3 = \frac{bu_1y_2y_3(av_4x_2x_3 + x_4x_7(x_5 - y_6) + v_4x_7(-x_6 + y_6)) + u_1x_1(v_4 - x_4)y_4(-y_5 + y_6)y_7}{au_2y_1(av_4x_2x_3 + x_4x_5x_7 - v_4x_6x_7 + v_4x_1y_4 - x_1x_4y_4 + (v_4 - x_4)x_7y_6)}, \\ u_5 = \frac{b(v_4 - x_4)x_5x_7y_2y_3 + (av_4x_2x_3 + v_4(x_5 - x_6)x_7 + x_1(v_4 - x_4)y_4)y_5y_7 + (v_4 - x_4)x_7(-x_5 + y_5)y_6y_7}{b(v_4 - x_4)x_7y_2y_3 + (av_4x_2x_3 + x_4x_5x_7 - v_4x_6x_7 + v_4x_1y_4 - x_1x_4y_4 + (v_4 - x_4)x_7y_5)y_7}, \\ u_6 = y_6, \\ u_7 = \frac{bu_1(v_4 - x_4)x_7y_2y_3 + u_1(av_4x_2x_3 + x_4x_5x_7 - v_4x_6x_7 + v_4x_1y_4 - x_1x_4y_4 + (v_4 - x_4)x_7y_5)y_7}{y_1(av_4x_2x_3 + x_4x_5x_7 - v_4x_6x_7 + v_4x_1y_4 - x_1x_4y_4 + (v_4 - x_4)x_7y_6)}, \\ v_3 = \frac{u_4v_1(av_4x_2x_3 + x_1(v_4 - x_4)y_4)}{bv_2x_1x_4y_4}, \\ v_5 = x_5, \\ v_6 = \frac{v_4x_6 - v_4y_6 + x_4y_6}{x_4}, \\ v_7 = \frac{u_4v_1x_7}{x_1y_4}. \end{array} \right.$$

Выбираем  $v_1 = x_1, v_2 = x_2, u_4 = y_4, u_2 = y_5, u_5 = y_5, u_1 = y_5$  и получаем отображение:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7) \mapsto (y_5, y_5, \frac{by_2y_3}{ay_1}, y_4, y_5, y_6, \frac{y_5y_7}{y_1}, x_1, x_2, \frac{ax_3}{b}, x_4, x_5, x_6, x_7).$$

Используя определение легко проверить, что приведенные выше отображения удовлетворяют уравнению Янга–Бакстера с параметрами  $(a, b)$ . В большинстве случаев выбор, который мы совершали был близок к тривиальному отображению  $x \mapsto u, y \mapsto v$ . Универсального правила тут нет. Наиболее простой, но в некоторых местах отличный от тривиального выбор довольно часто оказывается правильным.

### 3 Классификация решений локального уравнения тетраэдров

Опишем класс матриц, которые дают решение при подстановке в локальное уравнение тетраэдров (11) для того, чтобы использовать идею гипотезы (1) находить новые отображения 4-симплексов.

#### 3.1 Основной результат в коммутативном случае

Ограничим рассмотрение матриц  $L(x)$  конкретным типом и для него найдем все матрицы, которые дают решение локального уравнения тетраэдров (11). Будем рассматривать конечное множество матриц с самой простой зависимостью от переменных:

$$L(x_1, \dots, x_N) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad (15)$$

где на месте  $a_{i,j}$  может стоять либо нуль, либо переменная  $x_k$ ,  $k = 1, \dots, N$ . Причем одна переменная не может стоять на двух позициях. Существенно в данном построении только выбор мест, на которых будут стоять переменные. Поэтому матрице из класса можно сопоставить матрицу из  $Mat_3(\mathbb{Z}_2)$ , например:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \dots$$

Приведем примеры матриц из класса (15), соответствующие своим бинарным записям.

$$\begin{aligned}
L(x_1, x_2) &= \begin{pmatrix} 0 & x_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_2 \end{pmatrix}, \\
L(x_1, x_2, x_3, x_4) &= \begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 \\ 0 & x_2 & x_3 \\ 0 & x_4 & 0 \end{pmatrix}, \\
L(x_1, \dots, x_9) &= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{pmatrix}, \\
&\dots
\end{aligned}$$

В дальнейшем будет полезно закрепить следующую терминологию.

**Определение 1.** Матрицу  $X$  вида (15) будем называть матрицей-генератором, если при подстановке ее в локальное уравнение тетраэдров мы получаем непустое соответствие  $(x, y, z, t) \rightarrow (u, v, w, r)$ . Также будем говорить, что матрица  $X$  решает локальное уравнение тетраэдров.

Верно следующее утверждение, которое проверяется полным перебором всех матриц вида (15):

**Теорема 1.** Локальное уравнение тетраэдров имеет решение (необязательно единственное!) для следующих матриц:

$$A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & 0 \\ x_3 & x_4 & 0 \\ 0 & 0 & x_5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & 0 \\ x_3 & x_4 & x_5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & x_1 & 0 \\ x_2 & 0 & x_3 \\ 0 & x_4 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ x_1 & 0 & 0 \\ 0 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}.$$

Причем для всех остальных матриц вида (15) имеется решение тогда и только тогда, когда матрицу можно получить из данных набором следующих операций:

- Переставить переменные между собой
- Занулить некоторое  $x_i$
- Отобразить матрицу относительно побочной диагонали

*Доказательство.* Покажем на примере базовой матрицы  $A$ , что при подстановке в локальное уравнение тетраэдров получается непустое соответствие:

$$A_{123}^6(u_1, \dots, u_5)A_{145}^6(v_1, \dots, v_5)A_{246}^6(w_1, \dots, w_5)A_{356}^6(r_1, \dots, r_5) = \\ A_{356}^6(t_1, \dots, t_5)A_{246}^6(z_1, \dots, z_5)A_{145}^6(y_1, \dots, y_5)A_{123}^6(x_1, \dots, x_5).$$

Указанная выше задача матричной четыре-факторизации эквивалентна системе алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} u_1v_1 = x_1y_1, \quad u_2w_1 + u_1v_2w_3 = x_2y_1 \quad u_2w_2 + u_1v_2w_4 = y_2, \quad u_3v_1 = x_3z_1 + x_1y_3z_2, \\ u_4w_1 + u_3v_2w_3 = x_4z_1 + x_2y_3z_2, \quad u_4w_2 + u_3v_2w_4 = y_4z_2, \quad r_1u_5 = t_1x_5, \quad r_2u_5 = t_2y_5, \\ v_3 = x_3z_3 + x_1y_3z_4, \quad v_4w_3 = x_4z_3 + x_2y_3z_4, \quad v_4w_4 = y_4z_4, \\ r_3v_5 = t_3x_5, \quad r_4v_5 = t_4y_5, \quad r_5w_5 = t_5z_5. \end{aligned} \quad (16)$$

У этой системы бесконечно много решений для  $u_i, v_i, w_i$  и  $r_i, i = 1, \dots, 5$ . Например, ее можно решить для следующих зависимых переменных:  $u_1, u_3, u_4, v_1, v_4, w_1, w_2, w_4, r_1, r_2, r_3, r_4, r_5$ . Для этого можно выразить их в терминах  $u_5, v_2, v_3, v_5, w_3$  и  $w_5$ , а также свободных переменных  $x, y, z, t$ . Таким образом, система (16) определяет непустое соответствие между  $\mathbb{C}^{20}$  и  $\mathbb{C}^{20}$ . Аналогичные рассуждения можно проделать и для остальных базовых матриц.

Для матрицы  $B$  получаем систему алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} u_1v_1 = x_1y_1, \quad u_2w_1 + u_1v_2w_3 = x_2y_1, \quad u_2w_2 + u_1v_2w_4 = y_2, \quad u_3v_1 = x_3z_1 + x_1y_3z_2, \\ u_4w_1 + u_3v_2w_3 = x_4z_1 + x_2y_3z_2, \quad u_4w_2 + u_3v_2w_4 = y_4z_2, \quad r_1u_5 = x_5z_1, \quad r_2u_5 = y_5z_2 \\ v_3 = x_3z_3 + x_1y_3z_4, \quad v_4w_3 = x_4z_3 + x_2y_3z_4, \quad v_4w_4 = y_4z_4, \\ r_3v_5 = x_5z_3, \quad r_4v_5 = y_5z_4, \quad r_5v_5 = z_5. \end{aligned} \quad (17)$$

Эта система может быть решена для  $u_1, u_3, u_4, v_1, v_4, w_1, w_2, w_4, r_1, r_2, r_3, r_4, r_5$  в терминах  $u_5, v_2, v_3, v_5, w_3$  и  $w_5$  и независимых переменных  $x, y, z, t$ . Таким образом, эта система (17) также определяет непустое соответствие  $\mathbb{C}^{20}$  и  $\mathbb{C}^{20}$ . Важно указать, что (16) и (17) не эквивалентны с точки зрения того, что они порождают различные идеалы в  $\mathbb{C}^{40}$ .

Для матрицы  $C$  получаем систему алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} u_1 w_1 = y_1, \quad u_2 v_1 w_2 = x_1 y_2 z_1, \quad r_1 u_3 + r_4 u_2 v_1 w_3 = y_3 z_1, \quad u_4 w_1 = t_1 y_4, \quad v_2 = x_2 z_2, \\ r_2 v_3 = x_3 z_2, \quad r_3 v_3 = z_3, \quad v_4 w_2 = t_2 x_4 + t_3 x_1 y_2 z_4, \quad r_4 v_4 w_3 = t_3 y_3 z_4, \quad w_4 = t_4 y_4 \end{aligned} \quad (18)$$

У этой системы есть бесконечно много решения для  $u_i, v_i, w_i$  и  $r_i, i = 1, \dots, 4$ . Например, она может быть решена для  $u_1, u_4, v_2, v_4, w_2, w_4, r_1, r_2, r_3, r_4$  в терминах  $u_2, u_3, v_1, v_3, w_1$  и  $w_3$ , а также свободных переменных  $x, y, z, t$ , а именно

$$\begin{aligned} u_1 = \frac{y_1}{w_1}, \quad u_4 = \frac{t_1 y_4}{w_1}, \quad v_2 = x_2 z_2, \quad v_4 = \frac{u_2 v_1 (t_2 x_4 + t_3 x_1 y_2 z_4)}{x_1 y_2 z_1}, \quad w_2 = \frac{x_1 y_2 z_1}{u_2 v_1}, \quad w_4 = t_4 y_4, \\ r_1 = \frac{t_2 x_4 y_3 z_1}{u_3 (t_2 x_4 + t_3 x_1 y_2 z_4)}, \quad r_2 = \frac{x_3 z_2}{v_3}, \quad r_3 = \frac{z_3}{v_3}, \quad r_4 = \frac{t_3 x_1 y_2 y_3 z_1 z_4}{u_2 v_1 w_3 (t_2 x_4 + t_3 x_1 y_2 z_4)}. \end{aligned}$$

Таким образом, система (18) определяет непустое соответствие между  $\mathbb{C}^{16}$  и  $\mathbb{C}^{16}$ .

Наконец, для матрицы  $D$  получаем систему:

$$v_1 = x_1 z_1, \quad v_2 w_1 = t_1 x_2, \quad r_1 v_3 = t_1 x_3, \quad w_2 = t_2 y_2, \quad r_2 w_3 = t_2 y_3, \quad r_3 w_3 = t_3 z_3. \quad (19)$$

У этой системы есть бесконечное число решения для  $u_i, v_i, w_i$  и  $r_i, i = 1, 2, 3$ . Более конкретно, она может быть решена для  $v_1, w_1, w_2, r_1, r_2, r_3$  в терминах  $v_2, v_3, w_3$ , а также свободных переменных  $x, y, z, t$ , а именно

$$v_1 = x_1 z_1, \quad w_1 = \frac{t_1 x_2}{v_2}, \quad w_2 = t_2 y_2, \quad r_1 = \frac{t_1 x_3}{v_3}, \quad r_2 = \frac{t_2 y_3}{w_3}, \quad r_3 = \frac{t_3 z_3}{w_3}.$$

Таким образом система (19) определяет непустое соответствие между  $\mathbb{C}^{12}$  и  $\mathbb{C}^{12}$ .

Далее покажем, что если заменить некоторую переменную  $x_i$  на нуль в какой-либо из матриц  $A, B, C, D$ , то это отразится на системе алгебраических уравнений как замена  $x_i, y_i, z_i, t_i, u_i, v_i, w_i$  и  $r_i$  на нуль. Тем не менее,

система все еще будет разрешима. В общем случае утверждать, что при любой такой замене произвольная система останется разрешимой нельзя, например уравнение  $x_1 y_2 + y_1 = 1$  при замене  $x_1 = y_1 = 0$  будет иметь вид  $0 = 1$ . В случае матриц вида (15) в уравнениях отсутствуют ненулевые константы, благодаря чему не появляется подобный эффект. Кроме того, в общем случае может произойти вырождение одного из уравнений системы, например,  $y_i = 0$ , что тоже влечет отсутствие общего соответствия (так как накладываются условия на независимую переменную). В нашем случае, мы можем явно перебрать все матрицы, которые дают непустое соответствие при подстановке в локальное уравнение тетраэдров и убедиться в том, что все матрицы, которые получаются из  $A, B, C, D$  при помощи «удаления» некоторых переменных тоже дают непустое соответствие, то есть вырожденных уравнений не возникает. В дальнейшем, можно рассмотреть случай локального уравнения  $n$ -симплекса и попробовать без явной проверки доказать это свойство.

Более того, существует и более занятное свойство базовых матриц – отражение относительно побочной диагонали оставляет системы уравнений (16), (17), (18) и (19) ковариантными. Под «ковариантностью» здесь и далее мы понимаем, что получается система уравнений, которая эквивалентна исходной с точностью до согласованной замены переменных. Выразить эту замену можно при помощи формул

$$\tilde{A} = PA^T P, \quad \tilde{B} = PB^T P, \quad \tilde{C} = PC^T P, \quad \tilde{D} = PD^T P, \quad \text{где } P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Наконец, можно непосредственно убедиться в том, что матрицы, полученные из  $A, B, C, D$  последовательностью операций удаления переменной и отражения относительно побочной диагонали совпадают со всем мно-

жеством матриц-генераторов, что и завершает доказательство утверждения.  $\square$

Кроме того, верно, что при отражении матрицы относительно побочной диагонали уравнения остаются такими же с точностью до замены  $u \leftrightarrow r, v \leftrightarrow w, x \leftrightarrow t, y \leftrightarrow z$ . Наглядно это правило приведено на рис. 1:

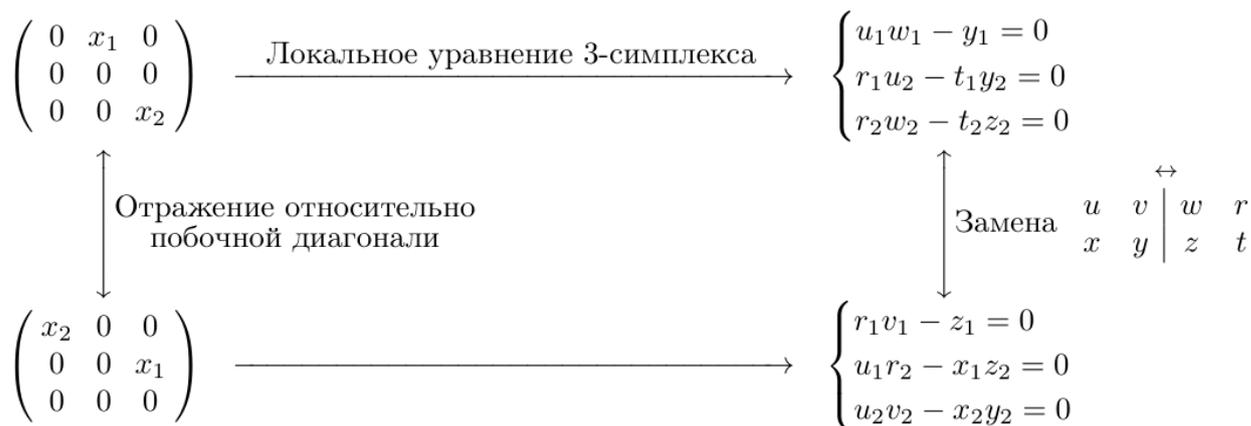


Рис. 1: Иллюстрация соответствия между отражением и заменой

Приведем некоторые следствия из утверждения.

**Определение 2.** Размерностью отображения 4-симплекса  $R : \mathcal{X}^4 \rightarrow \mathcal{X}^4$  назовем  $\dim R = 4 \cdot \dim \mathcal{X}$ .

**Следствие 1.** Размерность отображения 4-симплекса, генерируемого матрицей типа (15) из локального уравнения тетраэдров Замолодчикова не может превышать 20. Для размерности 20 есть примеры, которые получаются при помощи матриц  $A$  и  $B$ .

**Замечание 1.** Множество матриц-генераторов не сохраняется относительно преобразований подобия при помощи произвольной матрицы перестановок. Например, матрица

$$\begin{pmatrix} x_4 & x_5 & x_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ x_2 & 0 & x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & 0 \\ x_3 & x_4 & x_5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

не решает локальное уравнение тетраэдров.

Таким образом интересно наличие единственного преобразования

$$PX^T P,$$

которое не выводит из класса матриц-генераторов. Интересно, что обычная транспозиция матрицы также выводит матрицу из класса, например, базовая матрица  $B$  при транспозиции даст матрицу

$$B^T = \begin{pmatrix} x_1 & x_3 & 0 \\ x_2 & x_4 & 0 \\ 0 & x_5 & 0 \end{pmatrix},$$

которая не является решением локального уравнения тетраэдров.

### 3.2 Способ получения новых отображений 4-симплекса

Приведем некоторые примеры отображений 4-симплексов, которые получаются из «базисных матриц»:

- Для матрицы

$$\begin{pmatrix} 0 & x_1 & 0 \\ x_2 & 0 & x_3 \\ 0 & x_4 & 0 \end{pmatrix}$$

Получим отображение при помощи выбора  $w_3 = t_3 y_3, v_1 = x_1 z_1, u_2 = y_2, u_3 = y_3, v_3 = x_3, w_1 = t_1$ :

$$u(x, y, z, t) = \left( \frac{y_1}{t_1}, y_2, y_3, y_4 \right),$$

$$v(x, y, z, t) = (x_1 z_1, x_2 z_2, x_3, t_2 x_4 + t_3 x_1 y_2 z_4),$$

$$w(x, y, z, t) = (t_1, 1, t_3 y_3, t_4 y_4),$$

$$r(x, y, z, t) = \left( \frac{t_2 x_4 z_1}{t_2 x_4 + t_3 x_1 y_2 z_4}, z_2, \frac{z_3}{x_3}, \frac{z_4}{t_2 x_4 + t_3 x_1 y_2 z_4} \right).$$

- Для матрицы

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ x_1 & 0 & 0 \\ 0 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}$$

Можем получить следующее отображение 4-симплексов если добавим уравнения

$$v_2 = y_2, u_1 = x_1, u_2 = x_2, u_3 = x_3, v_3 = y_3, w_3 = z_3:$$

$$u(x, y, z, t) = (x_1, x_2, x_3),$$

$$v(x, y, z, t) = (x_1 z_1, y_2, y_3),$$

$$w(x, y, z, t) = \left( \frac{t_1 x_2}{y_2}, t_2 y_2, z_3 \right),$$

$$r(x, y, z, t) = \left( \frac{t_1 x_3}{y_3}, \frac{t_2 y_3}{z_3}, t_3 \right).$$

### 3.3 Получение известных отображений 4-симплексов

Воспользуемся нашими матрицами для получения уже известных отображений 4-симплекса.

**Пример 1.** (Отображение типа Кашаева-Сергеева-Корепанова) Совершим следующую замену в системе (16)

$$(x_1, y_1, z_1, t_1, u_1, v_1, w_1, r_1) \rightarrow (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1),$$

$$(x_2, y_2, z_2, t_2, u_2, v_2, w_2, r_2) \rightarrow (x_1, y_1, z_1, t_1, u_1, v_1, w_1, r_1),$$

$$(x_3, y_3, z_3, t_3, u_3, v_3, w_3, r_3) \rightarrow \left( \frac{k}{x_1}, \frac{k}{y_1}, \frac{k}{z_1}, \frac{k}{t_1}, \frac{k}{u_1}, \frac{k}{v_1}, \frac{k}{w_1}, \frac{k}{r_1} \right),$$

$$(x_4, y_4, z_4, t_4, u_4, v_4, w_4, r_4) \rightarrow (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0),$$

$$(x_5, y_5, z_5, t_5, u_5, v_5, w_5, r_5) \rightarrow (x_2, y_2, z_2, t_2, u_2, v_2, w_2, r_2),$$

и проведем ее решение для  $u_i, v_i, w_i$  и  $r_i, i = 1, 2$ , мы получим следующее соответствие между  $\mathbb{C}^8$  и  $\mathbb{C}^8$ :

$$u_1 = \frac{x_1 y_1}{y_1 + x_1 z_1}, \quad u_2 = x_2, \quad v_1 = \frac{x_1 z_1}{k}, \quad v_2 = y_2, \quad w_1 = \frac{y_1 + x_1 z_1}{x_1}, \quad r_1 = \frac{t_1 y_2}{x_2},$$

Если выберем  $w_2 = t_2$  или  $w_2 = y_2$ , то мы получим следующие отображения

$$S_1 : (x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2, t_1, t_2) \rightarrow \left( \frac{x_1 y_1}{y_1 + x_1 z_1}, x_2, \frac{x_1 z_1}{k}, y_2, \frac{y_1 + x_1 z_1}{x_1}, t_2, \frac{t_1 y_2}{x_2}, z_2 \right),$$

$$S_2 : (x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2, t_1, t_2) \rightarrow \left( \frac{x_1 y_1}{y_1 + x_1 z_1}, x_2, \frac{x_1 z_1}{k}, y_2, \frac{y_1 + x_1 z_1}{x_1}, y_2, \frac{t_1 y_2}{x_2}, \frac{t_2 z_2}{y_2} \right),$$

которые мы могли найти в [15].

**Пример 2.** (Отображение типа Хироты) Проведем следующие замены переменных в системе (16)  $(x_2, y_2, z_2, t_2, u_2, v_2, w_2, r_2) \rightarrow (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$ , и затем

$$(x_1, y_1, z_1, t_1, u_1, v_1, w_1, r_1) \rightarrow \left( \frac{x_1}{x_2}, \frac{y_1}{y_2}, \frac{z_1}{z_2}, \frac{t_1}{t_2}, \frac{u_1}{u_2}, \frac{v_1}{v_2}, \frac{w_1}{w_2}, \frac{r_1}{r_2} \right),$$

$$(x_3, y_3, z_3, t_3, u_3, v_3, w_3, r_3) \rightarrow (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1),$$

$$(x_4, y_4, z_4, t_4, u_4, v_4, w_4, r_4) \rightarrow (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0),$$

$$(x_5, y_5, z_5, t_5, u_5, v_5, w_5, r_5) \rightarrow (x_2, y_2, z_2, t_2, u_2, v_2, w_2, r_2).$$

Теперь можем решить полученную систему для  $u_i, v_i, w_i$  и  $r_i, i = 1, 2$ , мы получим непустое соответствие между  $\mathbb{C}^8$  и  $\mathbb{C}^8$ :

$$u_1 = \frac{x_1 y_1 z_2}{x_2 z_1 + x_1 z_2}, \quad u_2 = y_2, \quad v_1 = \frac{x_2 z_1 + x_1 z_2}{z_2}, \quad v_2 = x_2,$$

$$w_1 = \frac{w_2 x_2 y_1 z_1}{y_2 (x_2 z_1 + x_1 z_2)}, \quad r_1 = \frac{t_1 x_2 z_2}{w_2 y_2}, \quad r_2 = \frac{t_2 z_2}{w_2}.$$

Если выбрать  $w_2 = t_2$  и  $w_2 = z_2$ , то данное соответствие определяет отображение 4-симплекса типа Хироты:

$$S_1 : (x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2, t_1, t_2) \rightarrow \left( \frac{x_1 y_1 z_2}{x_2 z_1 + x_1 z_2}, y_2, \frac{x_2 z_1 + x_1 z_2}{z_2}, x_2, \frac{t_2 x_2 y_1 z_1}{y_2 (x_2 z_1 + x_1 z_2)}, t_2, \frac{t_1 x_2 z_2}{t_2 y_2}, z_2 \right),$$

$$S_2 : (x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2, t_1, t_2) \rightarrow \left( \frac{x_1 y_1 z_2}{x_2 z_1 + x_1 z_2}, y_2, \frac{x_2 z_1 + x_1 z_2}{z_2}, x_2, \frac{x_2 y_1 z_1 z_2}{y_2 (x_2 z_1 + x_1 z_2)}, z_2, \frac{t_1 x_2}{y_2}, t_2 \right),$$

которое можно найти в работах [16], [6].

### 3.4 Процедура сечения базовых соответствий

Известна общая конструкция, благодаря которой можно из отображения  $n$ -симплекса получать отображение  $(n + 1)$ -симплекса, если изначальное отображение получалось из решения локального уравнения  $(n - 1)$ -симплекса. Для этого матрицу  $L(x)$  нужно расширить следующим образом:

$$\tilde{L}(x) = \begin{pmatrix} L(x) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, можно пойти и в обратную сторону. Можно ограничить матрицы-генераторы до вида

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & 0 \\ x_3 & x_4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

чтобы получить генератор отображения тетраэдров Замолодчикова. Покажем, как при помощи нашей матрицы общего вида можно получить отображения из классификации Сергеева. Для иллюстрации этого метода мы получим отображение тетраэдров, которое получается при помощи локального уравнения Янга-Бакстера с использованием матрицы

$$\begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 - x & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{local YB}} (x, y, z) \mapsto \left( \frac{xy}{x + z - xz}, x + z - xz, \frac{(x - 1)yz}{xz + xy - x - z} \right).$$

Чтобы этого добиться, нужно к системе уравнений, которая получается из матрицы  $A$  добавить условия  $x_5 = y_5 = z_5 = t_5 = 1$  и уравнения  $u_5 = v_5 = w_5 = r_5 = 1$ . Замечу, что на независимые переменные  $(x, y, z, t)$  в системе мы заменяем по таким правилам, а на зависимые  $(u, v, w, r)$  просто накладываем дополнительные уравнения. Это требуется для того, чтобы в итоговом решении получалось для любых значений независимых переменных, просто за счет замены их станет меньше. В дальнейшем мы будем писать только условия на  $x_i$ , так как для остальных зависимых и независимых переменных все аналогично дублируется. Далее нужно добавить

$x_4 = 0, x_2 = 1, x_3 = 1 - x_1$ . В итоге получится следующая система уравнений:

$$\begin{aligned} u_1 v_1 &= x_1 y_1, u_2 w_1 = -u_1 v_2 w_3 + y_1, u_2 w_2 + u_1 v_2 w_4 = 1, \\ u_3 v_1 &= z_1 - x_1(-1 + y_1 + z_1), u_4 w_1 + u_3 v_2 w_3 + y_1 = 1, u_4 w_2 = -u_3 v_2 w_4, t_1 = r_1 u_5, \\ r_2 u_5 &= 1, x_1 z_1 + 1 = v_3 + x_1 + z_1, v_4 w_3 = 0, v_4 w_4 = 0, t_1 + r_3 v_5 = 1, r_4 v_5 = 0, r_5 w_5 = 1, \\ u_5 &= 1, v_5 = 1, w_5 = 1, r_5 = 1, u_4 = v_4 = w_4 = r_4 = 0, u_2 = 1, v_2 = 1, w_2 = 1, r_2 = 1, \\ 1 &= u_1 + u_3, v_1 + v_3 = 1, w_1 + w_3 = 1, r_1 + r_3 = 1. \end{aligned}$$

Ее можно решить для  $(u, v, w, r)$ , в итоге получим следующее отображение 4-симплекса (что можно проверить непосредственно):

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= \left( \frac{x_1 y_1}{x_1 + z_1 - x_1 z_1}, 1, \frac{x_1 - x_1 y_1 + z_1 - x_1 z_1}{x_1 + z_1 - x_1 z_1}, 0, 1 \right), \\ v(x, y, z, t) &= (x_1 + z_1 - x_1 z_1, 1, (-1 + x_1)(-1 + z_1), 0, 1), \\ w(x, y, z, t) &= \left( \frac{(-1 + x_1) y_1 z_1}{-x_1 + x_1 y_1 - z_1 + x_1 z_1}, 1, -\frac{(-1 + y_1)(-x_1 - z_1 + x_1 z_1)}{-x_1 + x_1 y_1 - z_1 + x_1 z_1}, 0, 1 \right), \\ r(x, y, z, t) &= (t_1, 1, 1 - t_1, 0, 1). \end{aligned}$$

В итоге, если из полученного отображения взять только часть отображения  $(x_1, y_1, z_1) \mapsto (u_1, v_1, w_1)$ , которая отвечает оставшимся независимым переменным  $x_1, y_1, z_1$ , то получим

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= \frac{xy}{x + z - xz}, \\ v(x, y, z) &= x + z - xz, \\ w(x, y, z) &= \frac{(-1 + x)yz}{-x + xy - z + xz} \end{aligned} \tag{20}$$

именно то отображение тетраэдров (3.4), которое и хотели. В дальнейшем мы будем называть данную процедуру «сечение базового соответствия». Анализ этого и остальных случаев из классификации Сергеева дает возможность предположить, что при помощи подобной работы только с четырьмя базовыми соответствиями (16), (17), (18), (19) можно получить все рациональные отображения тетраэдров и 4-симплекса, которые получаются соответственно из локального уравнения Янга-Бакстера и локального уравнения тетраэдров.

**Гипотеза 3.** Благодаря сечениям базовых соответствий можно получить любое рациональное решение уравнения тетраэдров и 4-симплекса, которые можно получить из локального уравнения Янга-Бакстера и локального уравнения тетраэдров соответственно.

Кроме того, можно получать новые отображения 4-симплекса, которые получаются из матриц, которые в пределе дают  $3 \times 3$  матрицы из списка Сергеева. Например, удалось получить новое обратимое отображение 4-симплекса при помощи расширения матрицы  $\alpha$  из классификации (при  $x_2 \rightarrow 1$ ) и накладывания условия  $w_2 = t_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 x_2 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & x_2 \end{pmatrix}, k = const$$

$$u(x, y, z, t) = (x_1, x_2),$$

$$v(x, y, z, t) = \left( \frac{y_1 y_2 - x_1 x_2 z_1 z_2}{k y_2}, y_2 \right),$$

$$w(x, y, z, t) = \left( \frac{z_1 z_2}{t_2}, t_2 \right),$$

$$r(x, y, z, t) = \left( \frac{t_1 t_2 y_2}{x_2 z_2}, z_2 \right).$$

Для того, чтобы обратно получить известное отображение тетраэдров достаточно положить  $x_2 = y_2 = z_2 = t_2 = 1$ .

$$u(x, y, z) = x,$$

$$v(x, y, z) = \frac{y - xz}{k},$$

$$w(x, y, z) = z.$$

## 4 Структура некоммутативных решений локального уравнения тетраэдров

Основным инструментом решения аналогичной задачи в случае  $x_i \in \mathcal{S}$  некоммутативного тела является решение системы алгебраических уравнений при помощи базиса Грёбнера.

### 4.1 Применение базиса Грёбнера

Введем понятие базиса Грёбнера и все сопутствующие определения.

Пусть  $k$  – некоторое алгебраически замкнутое поле нулевой характеристики,  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  – набор переменных, тогда  $k[X]$  – свободная алгебра, порожденная мономами по переменным из  $X$ . Пусть также на мономах  $T$  введен полный порядок. Будем говорить, что порядок мультипликативен, если из  $x^\alpha \prec x^\beta$  следует  $x^{\alpha+\gamma} \prec x^{\beta+\gamma} \forall \gamma \geq 0$ . Таким образом в случае свободной алгебры достаточно определить порядок на мономах первой степени, мы для удобства будем считать, что  $x_1 \prec x_2 \prec \dots \prec x_n$ . Будем говорить, что единица минимальна, если  $1 \prec x^\alpha \forall \alpha > 0$ . Введем дополнительные обозначения:  $l_t(f)$  – это старший моном, входящий в  $f$ , а  $l_c(f)$  – это коэффициент при старшем мономе,  $T$  – это множество мономов свободной алгебры  $k[X]$ .

Теперь мы готовы ввести понятие базиса Грёбнера.

**Определение 3.** Пусть  $I$  – ненулевой двусторонний идеал свободной алгебры  $k[X]$ , на которой введен полный порядок мономов, обладающий свойством мультипликативности и минимальности единицы. Тогда конечное подмножество, порождающее идеал  $G \subset I$  называется базисом Грёбнера идеала  $I$ , если  $\forall f \in I \exists s \in T, g \in G : l_t(f) = s \cdot l_t(g)$

**Определение 4.** Базис Грёбнера называется минимальным, если  $\forall g \in G$ , множество  $G \setminus \{g\}$  не является базисом Грёбнера.

Базис Грёбнера называется редуцированным, если  $\forall g \in G$  ни один моном из  $g$  не делится на  $l_t(G \setminus \{g\})$ .

Мы будем использовать среду разработки Wolfram Mathematica и вычислительный пакет NCAAlgebra, который позволяет вычислять минимальный редуцированный базис Грёбнера по системе уравнений.

Примерный план работы с локальным уравнением тетраэдров следующий.

- По виду матрицы  $L(x)$  получаем систему алгебраических уравнений, где  $(x, y, z, t)$  – это независимые переменные, через которые нам надо выразить  $(u, v, w, r)$ .
- В некоммутативном случае решить системы мы не можем. Применяется метод некоммутативного базиса Грёбнера, для которого необходимо задать порядок  $x \prec y \prec z \prec t \ll u \prec v \prec w \prec r$ .
- Если в базисе есть соотношение на независимые переменные (или противоречивое соотношение  $1 = 0$ ), то не существует соответствия для произвольного значения переменных – значит решений нет и матрица не входит в класс генераторов.

Таким образом после анализа всех матриц класса (15) мы сначала получаем следующее утверждение, которое является отличительной чертой от коммутативного случая.

**Утверждение 1.** *В некоммутативном случае операция замены  $x_i$  на 0 может выводить из класса генераторов потенциальных решений. При отражении относительно побочной диагонали матрица остается в классе генераторов.*

Примером служит матрица

$$\begin{pmatrix} 0 & x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 & x_5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В базисе Грёбнера до замены  $x_1$  на нуль были соотношения

$$u_2 r_1 = y_2.$$

Как мы уже поняли в коммутативном случае, при обнулении некоторой переменной  $x_i$  в матрице  $L(x)$  все переменные  $x_i, y_i, z_i, t_i, u_i, v_i, w_i, r_t$  с этим индексом в системе обращаются в нуль. Кроме того, индексы следующих переменных уменьшатся на единицу. Таким образом получаются следующие соотношения в базисе Грёбнера, противоречащие наличию общего решения

$$y_1 = 0.$$

Значит матрица

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & x_1 \\ x_2 & x_3 & x_4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

не является потенциальным генератором.

В дальнейшем будем говорить, что множество матриц  $S$  порождает класс  $\mathcal{L} = \langle S \rangle$ , если  $\mathcal{L}$  состоит из матриц, которые получаются применением к  $S$  операций перестановки переменных, замены переменной на нуль, отражение относительно побочной диагонали. Непосредственной проверкой можно удостовериться в верности следующего утверждения для матриц с некоммутативными переменными.

**Теорема 2.** Множество генераторов является подмножеством класса матриц, порожденного следующими базовыми матрицами:

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ 0 & 0 & x_7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & 0 \\ x_3 & x_4 & 0 \\ 0 & x_5 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & x_1 & 0 \\ x_2 & x_3 & x_4 \\ 0 & x_5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Приведем несколько мгновенных следствий из данного классификационного результата.

**Следствие 2.** Множество матриц-генераторов в коммутативном случае является подмножеством матриц-генераторов в случае переменных из некоммутативного тела.

**Следствие 3.** Размерность отображения 4-симплекса, генерируемого матрицей типа (15) из локального уравнения тетраэдров Замолодчикова не может превышать 28 в том случае, если переменные принадлежат некоммутативному телу  $\mathcal{X}$ .

**Следствие 4.** Матрица  $3 \times 3$ , которая имеет ненулевую компоненту на позиции  $(3-1)$  не может являться генератором отображения 4-симплекса. Результат не зависит от того, принадлежат ли переменные некоммутативному телу или полю.

Как мы видим, в случае некоммутативных переменных базовых матриц не четыре, а три. Причем все матрицы-генераторы из коммутативного случая также дают непустое соответствие в некоммутативном случае. Интересно в дальнейшем рассмотреть конкретные классы некоммутативных тел, так как это наложит дополнительные ограничения на переменные. Например, можно рассмотреть тело кватернионов  $\mathbb{H}$ . Еще один важный пример – это кольцо эндоморфизмов простого модуля. Таким образом блочные матрицы специального вида тоже можно в будущем принять во внимание.

## 4.2 Получение отображений 4-симплексов на произвольной группе

Одним из применений полученного результата будет нахождение новых отображений 4-симплексов на произвольной группе. Напомним, что группа  $G$  – это множество с ассоциативной бинарной операцией умножения, выделенным элементом – единица и обратным элементом к каждому элементу группы. Здесь мы считаем, что операция умножения некоммутативна. Отображения на группе можно получить, если отображения, которые мы получим на теле не будут содержать операцию сложения и заранее не предполагается ничего о наличии центра некоммутативного тела.

Благодаря структурному результату из предыдущего раздела мы можем искать новые отображения 4-симплексов из локального уравнения тетраэдров, используя одну из матриц-генераторов.

Для получения единственного решения необходимо добавить дополнительные соотношения к имеющемуся базису Грёбнера, а затем прямой проверкой убедиться, что выполнено уравнение 4-симплекса

• Для матрицы  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_1 & 0 \\ 0 & x_2 & 0 \end{pmatrix}$  получим базис Грёбнера:

$$S = \{w_2 - t_2 y_2, v_1 w_1 - z_1 y_1, v_2 w_1 - t_1 y_2\}.$$

После добавления соотношений

$$u_1 = x_1, u_2 = x_2, v_1 = y_1, r_1 = t_1, r_2 = t_2$$

получим следующее отображение

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= (x_1, x_2), \\ v(x, y, z, t) &= (y_1, t_1 y_2 (z_1 y_1)^{-1} y_1), \\ w(x, y, z, t) &= ((y_1)^{-1} z_1 y_1, t_2 y_2), \\ r(x, y, z, t) &= (t_1, t_2). \end{aligned}$$

• Для матрицы  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ x_1 & 0 & 0 \\ 0 & x_2 & 0 \end{pmatrix}$  получим базис Грёбнера:

$$S = \{v_1 - z_1 x_1, w_2 - t_2 y_2, v_2 w_1 - t_1 x_2\}.$$

После добавления соотношений

$$u_1 = x_1, u_2 = x_2, v_2 = y_2, r_1 = t_1, r_2 = t_2$$

получим следующее отображение

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= (x_1, x_2), \\ v(x, y, z, t) &= (z_1 x_1, y_2), \\ w(x, y, z, t) &= ((y_2)^{-1} t_1 x_1, t_2 y_2), \\ r(x, y, z, t) &= (t_1, t_2). \end{aligned}$$

### 4.3 Условные отображения 4-симплексов

**Определение 5.** Пусть  $A \subset \mathcal{S}^4$  – это алгебраическое многообразие, которое задается при помощи соотношений на  $x, y, z, t$ . Пусть также отображение  $Y : \mathcal{S}^4 \rightarrow \mathcal{S}^4$  сохраняет алгебраическое многообразие  $A$ , то есть  $S(A) \subset A$ . Причем ограничение отображения  $S$  на  $A$  является отображением 4-симплексов  $\tilde{S} : A \rightarrow A$ . Тогда назовем отображение  $S$  условным отображением 4-симплексов.

Для поиска таких отображений нам помогут матрицы, которые не являются генераторами, потому что содержат некоторые соотношения на независимые переменные  $x, y, z, t$ . Простой пример получается при рассмотрении матрицы

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_1 & 0 \\ x_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Получим базис Грёбнера

$$S = \{t_2x_2, v_2, w_2, v_1w_1 - z_1y_1\}.$$

После добавления соотношений

$$u_1 = x_1, u_2 = y_2, v_1 = y_1, r_1 = t_1, r_2 = t_2x_2$$

получим отображение

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= (x_1, y_2), \\ v(x, y, z, t) &= (y_1, 0), \\ w(x, y, z, t) &= ((y_1)^{-1}z_1y_1, 0), \\ r(x, y, z, t) &= (t_1, t_2x_2). \end{aligned}$$

Оно не является отображением 4-симплексов в общем случае, но если ограничить на алгебраическое многообразие  $A = \{(x, y, z, t) \in \mathcal{S}^4 \mid t_2x_2 = 0\}$ , то во-первых равенство сохраняется после отображения, а во-вторых при ограничении на  $A$  получаем отображение 4-симплексов.

## Заключение

Главным результатом данной работы мы считаем классификационный результат в коммутативном и некоммутативном случае для  $3 \times 3$  матриц конкретного типа, которые дают непустое соответствие при подстановке в локальное уравнение тетраэдров. Мы выделили базовые матрицы, из которых можно получить все остальные при помощи операций зануления переменных и отражения относительно побочной диагонали. Нахождение свойства отражения относительно побочной диагонали оставлять систему уравнений ковариантной мы считаем очень ценным замечанием. Кроме того, мы поняли, как отражение действует на систему алгебраических уравнений, получаем через локальное уравнение тетраэдров, а именно при помощи «центрального отражения», описаного на примере в рис. 1. В дальнейшем будет проведен анализ  $n \times n$  матриц, которые решают локальное уравнение  $n$ -симплексов на наличие похожих симметрий. Мы считаем важным наличие определенной структуры внутри классов матриц, которые решают локальные уравнения Янга–Бакстера (в этом случае транспозиция и отражение относительно побочной диагонали оставляют систему ковариантной) и локальное уравнение тетраэдров (в этом случае остается только отражение относительно побочной диагонали, которое оставляет систему ковариантной). Кажется, что при повышении размерности класс матриц-генераторов станет все более разреженным и сохранит все меньше интересных связей. Кажется, что «плотность» множества матриц-генераторов для локального уравнения  $n$ -симплекса будет лишь уменьшаться. Интересно будет обнаружить связи с условием многомерной совместности дискретных систем на решетке, по аналогии с условием 3D-совместности в случае уравнений в квад-графах.

Вторым важным результатом является создание метода «сечения базовых соответствий» для получения многих отображений тетраэдров и 4-

симплекса на основе всего лишь четырех базовых соответствий. Он основан на том, что при замене переменной  $x_i$  в матрице это соответствует аналогичным заменам  $x_i, y_i, z_i, t_i, u_i, v_i, w_i, r_i$  в системе уравнений. Как побочный продукт такого метода, мы не только получаем новое отображение, составленное из независимых компонент (отображение [20](#)), но и отображение в терминах тех переменных, на которые мы уже наложили условие – оно тоже оказывается отображением 4-симплекса. Данный подход развивает и дополняет известный метод соответствий, который позволяет получать новые отображения  $n$ -симплекса из не обязательно единственного решения уравнения  $(n - 1)$ -симплекса.

Третьим важным результатом мы считаем нахождение приложений полученной классификации. Удалось не только получить уже известные отображения 4-симплексов типа Хироты и типа Кашаева-Сергеева-Корепанова, но и новые. Получилось найти отображение 4-симплекса, которое в пределе дает уже известное отображение тетраэдров. Мы считаем, что благодаря полученной классификации поиск новых отображений 4-симплексов (а как «частный случай» – и отображения тетраэдров) можно существенно упростить, так как известно какие матрицы заведомо не смогут дать новое отображение.

Наконец, последним важным результатом является нахождение способа удобной и быстрой работы по нахождению и проверке новых некоммутативных отображений 4-симплекса. Благодаря библиотеке NCAlgebra и программе Wolfram Mathematica был разработан набор функций, основанный на вычислении некоммутативного базиса Грёбнера, который позволяет делать на компьютере то, что до этого приходилось делать руками, а именно решать системы алгебраических уравнений с некоммутативными переменными и проверять свойство отображения быть отображением 4-симплекса. Надеемся, что в дальнейшем можно будет доработать этот пакет функций и выложить его в общий доступ на GitHub. По нашему мне-

нию, это ценная работа, множество исследователей из сферы дискретных интегрируемых систем и отображений  $n$ -симплекса должны оценить этот вклад в сообщество.

Кроме того, в результате проделанной работы мы показали, как при помощи метода вариации спектрального параметра получать новые отображения Янга–Бакстера.

В дальнейшем, продолжение работы состоит в рассмотрении классификации в случае локального уравнения  $n$ -симплекса при сохранении структуры матриц. Другой вариант развития темы – усложнение зависимости между компонентами матриц, добавление параметров (чтобы получать решения параметрического уравнения 4-симплекса), а также рассмотрение локального уравнения  $n$ -гона. Развитие введенных понятий «сечение базового соответствия» и «условное отображение  $n$ -симплекса» видится как еще один путь продолжения исследования.

Еще одной возможностью продолжения исследований является попытка найти некоторые инварианты, общие для всех отображений 4-симплекса, получаемых при помощи сечения одного и того же соответствия. Таким образом можно будет опять же свести изучение таких отображений 4-симплекса к изучению алгебро-геометрической структуры полученных соответствий.

Наконец, нам кажется перспективным развитие метода исследования соответствий при помощи соотношений из базиса Грёбнера. Как мы уже увидели в некоммутативном случае, некоторые соотношения на независимые переменные позволяют получить «условные отображения 4-симплекса». Мы в дальнейшем хотим применить этот метод и к системам с коммутативными переменными.

## Список литературы

- [1] Adler V, Bobenko A, and Suris Y 2004 Geometry of Yang-Baxter maps: pencils of conics and quadrirational mappings *Comm. Anal. Geom.* **12** 967–1007.
- [2] Bridgman T, Hereman W, Quispel G R W and van der Kamp P H 2013 Symbolic computation of Lax pairs of partial difference equations using consistency around the cube *Found. Comput. Math.* **13** 517–544.
- [3] Caudrelier V, Crampé N, Zhang C 2014 Integrable Boundary for Quad-Graph Systems: Three-Dimensional Boundary Consistency *SIGMA* **014** (24 pp).
- [4] Caudrelier V and Zhang C 2014 Yang–Baxter and reflection maps from vector solitons with a boundary *Nonlinearity* **27** 1081–1103.
- [5] Chirkov M. On growth function of  $n$ -valued dynamics *Mathematical Notes* 2024 **115** 03 421–427
- [6] Chirkov M. and Konstantinou-Rizos S. On the solutions of the local Zamolodchikov tetrahedron equation *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* IOP Publishing 2024
- [7] Drinfel'd V 1992 On some unsolved problems in quantum group theory *Lecture Notes in Math.* **1510** 1–8.
- [8] Hietarinta J, Joshi N, Nijhoff FW. 2016 Discrete Systems and Integrability. *Cambridge University Press.*
- [9] Fokas A.S., Gelfand I.M. 1997 Algebraic Aspects of Integrable Systems *Birkhäuser Boston.*
- [10] Fordy A and Kassotakis A 2013 Integrable Maps which Preserve Functions with Symmetries *J. Phys. A* **46** 205201.

- [11] Kashaev R.M., Korepanov I.G., Sergeev S.M. Functional Tetrahedron Equation. arXiv:solv-int/9801015 (1998)
- [12] Kassotakis P and Nieszporski M 2012 On non-multiaffine consistent-around-the-cube lattice equations *Phys. Lett. A* **376** 3135–3140.
- [13] Kassotakis P 2019 Invariants in Separated Variables: Yang–Baxter, Entwining and Transfer Maps *SIGMA* **15** 048.
- [14] Konstantinou-Rizos S and Mikhailov A 2013 Darboux transformations, finite reduction groups and related Yang-Baxter maps *J. Phys. A* **46** 425201, 16.
- [15] Konstantinou-Rizos S. Birational solutions to the set-theoretical 4-simplex equation. *Physica D* 448 (2023) 133696
- [16] Konstantinou-Rizos S. Hirota type Bazhanov–Stroganov maps. arXiv:2303.13333 (2024)
- [17] Kouloukas T and Papageorgiou V 2009 Yang-Baxter maps with first-degree-polynomial  $2 \times 2$  Lax matrices *J. Phys. A* **42** 404012.
- [18] Kouloukas T and Papageorgiou V 2011 Poisson yang-baxter maps with binomial lax matrices *J. Math. Phys.* **52** 073502.
- [19] Papageorgiou V and Tongas A 2007 Yang-Baxter maps and multi-field integrable lattice equations *J. Phys. A* **40** 12677.
- [20] Papageorgiou V, Tongas A, and Veselov A 2006 Yang-Baxter maps and symmetries of integrable equations on quad-graphs *J. Math. Phys.* **47** 083502, 16.
- [21] Papageorgiou V, Suris Y, Tongas A, and Veselov A 2010 On quadrirational Yang–Baxter maps *Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications* **6**.

- [22] Suris Y and Veselov A 2003 Lax matrices for Yang-Baxter maps *J. Nonlinear Math. Phys.* **10** 223–230.
- [23] Veselov A. P. 2003 Yang-Baxter maps and integrable dynamics *Phys. Lett. A* **314** no. 3 214–221.
- [24] Veselov A. P. 2007 Yang-Baxter maps: dynamical point of view *J. Math. Soc. Japan* **17** 145–167.

В Оргкомитет Смотра дипломных работ математиков России  
от Чугунова Валентина Евгеньевича

Заявление о новизне

Сообщаю, что новыми в моей представленной на Смотри выпускной квалификационной работе (далее - работа) под названием «Цилиндрические бегущие волны в рамках уравнений типа Эйлера-Дарбу-Пуассона» являются главы 3-5 (сведение цилиндрического волнового уравнения с переменными коэффициентами к волновому уравнению с постоянными коэффициентами, уравнению Клейна-Гордона с постоянными коэффициентами и уравнению Эйлера-Дарбу-Пуассона).

Также сообщаю, что для проверки новизны было проделано следующее:

- Проведена серия консультаций с моим научным руководителем кандидатом физ.мат. наук Диденкуловой Екатериной Геннадьевной, доцентом кафедры фундаментальной математики ВШЭ-НН.

- Проведено выступление на VIII Всероссийской научной студенческой конференции НИУ ВШЭ — Нижний Новгород 2024.

Таким образом, по результатам поиска в сети Интернет и тематических научных базах, а также обсуждений с указанными выше специалистами следует, что, по-видимому, представленный в моей выпускной квалификационной работе указанный выше математический материал действительно является новым.

Подтверждаю, что являюсь автором предоставляемой на Смотри работы и прошу принять её для участия в Смотре. Принимаю на себя обязательство соблюдать правила Смотра. Также (в соответствии с п. 4 Положения о Смотре) принимаю на себя обязательство оценить 5 работ участников Смотра, выданных мне Оргкомитетом в результате жеребьёвки и сверх того оценить 2-5 работ других участников Смотра на мой выбор. Я понимаю правила оценки работ, приведённые в п. 4.3 Положения о Смотре. Даю согласие на публикацию адреса моей электронной почты.

Защита работы состоится 11 июня 2024 года. На Смотри представлен окончательный текст работы.

*Подпись* Чугунов Валентин Евгеньевич  
16 июня 2024 г. Нижний Новгород, Россия

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ»

Факультет информатики, математики и компьютерных наук

Программа подготовки бакалавров по направлению  
01.03.01 Математика

*Чугунов Валентин Евгеньевич*

**ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА**

Цилиндрические бегущие волны в рамках уравнений типа Эйлера-Дарбу-Пуассона

Рецензент  
д. физ.-мат. наук

---

Т. Г. Талипова

Руководитель работы  
Доцент, к.ф.-м.н., PhD, НН Кафедра  
фундаментальной математики

---

Е. Г. Диденкулова

Нижний Новгород, 2024 г.

## Содержание

1	Введение	2
2	Математическая модель	3
3	Сведение к волновому уравнению с постоянными коэффициентами	5
3.1	Случай амплитуды $A = 1$	5
3.2	Случай $A \neq const$	10
4	Сведение к уравнению Клейна-Гордона с постоянными коэффициентами	16
5	Сведение к уравнению Эйлера-Дарбу-Пуассона	22
6	Заключение	30

## Аннотация

Исследование динамики цилиндрических или радиально-симметричных волн является актуальной проблемой в связи с их распространенностью в различных физических системах. Падение метеоритов в воду, подводные землетрясения, взрывы в атмосфере, распространение акустических или электромагнитных волн, возбуждаемых в ограниченном плоскопараллельными пластинами пространстве, - лишь некоторые задачи, для которых типично применение волновых решений в цилиндрических координатах. В настоящей работе рассматривается распространение кольцевых волн в среде с неоднородной скоростью распространения (звука) вдоль радиального направления. Показано, что при наложении определенных условий на среду распространения, то исходное цилиндрическое волновое уравнение с переменным коэффициентом сводится к одномерному волновому уравнению с постоянными коэффициентами, уравнению Клейна-Гордона с постоянными коэффициентами и уравнению Эйлера-Дарбу-Пуассона с постоянными коэффициентами. В рамках этих уравнений получены решения в элементарных функциях. Свойства волн в такой неоднородной среде отличаются от известных для однородной среды. Рассмотрены примеры распространения одиночной волны в такой среде.

## 1 Введение

В области математической физики существует важный класс решений, известный как бегущие волны, которые могут быть представлены в виде функции  $f(x + t)$ , где  $f$  - произвольная функция,  $x$  - координата, а  $t$  - время. Присутствие таких решений указывает на то, что волна распространяется без отражения, что позволяет сохранить энергию и передаваться на большие расстояния.

В данной работе исследуется цилиндрическое волновое уравнение с переменной по радиусу скоростью распространения. Основная идея заключается в трансформировании этого уравнения с переменными коэффициентами к уравнениям, в рамках которых наличие бегущих волн становится очевидным. Эта модель с использованием "одноточечной" трансформацией кратко описана в разделе 3. Возможен и другой путь трансформационных преобразований, когда уравнения с постоянными коэффициентами получаются в рамках "двойной" или более сложной трансформации (факторизации). В частности, исходное цилиндрическое волновое уравнение с переменной скоростью сводится к уравнению Клейна-Гордона с постоянными коэффициентами (раздел 4). Такой же подход можно применить, сводя цилиндрическое волновое уравнение к уравнению Эйлера-Дарбу-Пуассона (раздел 5). В данной работе используются свойства волнового уравнения и уравнения Эйлера-Дарбу-Пуассона, которые имеют точные аналитические решения для счетного множества параметров. В результате получен широкий класс изменчивых скоростей распространения, обеспечивающих безотражательное распространение волн на большие расстояния. Полученные результаты подведены в заключении.

## 2 Математическая модель

Рассмотрим классическое двумерное волновое уравнение для волновой функции  $u(x, t)$  с переменной скоростью распространения волны:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2(x, y) \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (1)$$

Известны случаи, когда волна распространяется как цилиндрическая, и скорость распространения волны также является функцией только расстояния [11], [12]. Заменяем декартовые координаты  $x, y$  на полярные:  $x = \rho \cos \phi$ ,  $y = \rho \sin \phi$ , откуда

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \operatorname{tg} \phi = \frac{y}{x}. \end{cases} \quad (2)$$

Перейдем к отысканию частных производных по декартовым координатам.

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{x}{\rho} = \cos \phi \quad \text{и} \quad \frac{\partial \rho}{\partial y} = \sin \phi. \quad (3)$$

Зная  $\operatorname{tg} \phi = \frac{y}{x}$ , находим

$$\frac{1}{\cos^2 \phi} \frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{y}{x^2} \quad \text{и} \quad \frac{1}{\cos^2 \phi} \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{1}{x}$$

Заменяя  $x$  и  $y$  по формулам (2), получим

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{\sin \phi}{\rho}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\cos \phi}{\rho}. \quad (4)$$

Перейдем к отысканию частных производных по правилу дифференцирования сложной функции

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial y}. \quad (5)$$

Подставив выражения (3) и (4) в (5) получаем:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \rho} \cos \phi - \frac{\partial u}{\partial \phi} \frac{\sin \phi}{\rho}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \rho} \sin \phi + \frac{\partial u}{\partial \phi} \frac{\cos \phi}{\rho}. \quad (6)$$

Перейдем к отысканию вторых производных. Для этого также применим правило дифференцирования сложной функции к выражения (5)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

Из равенств (6) находим

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} \cos \phi - \frac{\partial^2 u}{\partial \phi \partial \rho} \frac{\sin \phi}{\rho} + \frac{\partial u}{\partial \phi} \frac{\sin \phi}{\rho^2},$$

$$\frac{\partial}{\partial \phi} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial \rho \partial \phi} \cos \phi - \frac{\partial u}{\partial \rho} \sin \phi - \frac{\partial^2 u \sin \phi}{\partial \phi^2 \rho} - \frac{\partial u \cos \phi}{\partial \phi \rho}.$$

Домножим первое равенство на  $\frac{\partial \rho}{\partial x} = \cos \phi$ , второе на  $\frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{\sin \phi}{\rho}$  и сложим. Приведем подобные члены и получим:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} \cos^2 \phi - 2 \frac{\partial^2 u \sin \phi \cos \phi}{\partial \rho \partial \phi \rho} + 2 \frac{\partial u \sin \phi \cos \phi}{\partial \phi \rho^2} + \frac{\partial u \sin^2 \phi}{\partial \rho \rho} + \frac{\partial^2 u \sin^2 \phi}{\partial \phi^2 \rho^2}. \quad (7)$$

Аналогично, воспользовавшись соотношением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) \frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial \phi}{\partial y},$$

находим, что

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} \sin^2 \phi + 2 \frac{\partial^2 u \sin \phi \cos \phi}{\partial \rho \partial \phi \rho} - 2 \frac{\partial u \sin \phi \cos \phi}{\partial \phi \rho^2} + \frac{\partial u \cos^2 \phi}{\partial \rho \rho} + \frac{\partial^2 u \cos^2 \phi}{\partial \phi^2 \rho^2}. \quad (8)$$

Складывая (7) и (8) получаем правую часть волнового уравнения в полярных координатах

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2}. \quad (9)$$

Окончательно приходим к волновому уравнению в полярных координатах:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2(\rho, \phi) \left( \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} \right) \quad (10)$$

Мы будем предполагать, что скорость распространения зависит только от радиуса и волна возбуждается как цилиндрическая. В этом случае зависимостью от угла можно пренебречь и свести уравнение (10) к одномерному уравнению:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2(\rho) \left( \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) \quad (11)$$

где  $c(\rho)$  – переменная скорость.

Для поиска решений в виде бегущих волн будем использовать трансформационную технику сведения волнового уравнения с переменными коэффициентами к уравнениям с постоянными коэффициентами, точные решения которых уже известны [8, 10]. Для этого произведем следующую замену в уравнении (11):

$$u = A(\rho)G(t, \tau(\rho)), \quad (12)$$

где  $A(\rho)$ ,  $G(t, \tau(\rho))$ ,  $\tau(\rho)$  - три неизвестные функции подлежащие определению. Тогда уравнение (11) преобразуется к уравнению Клейна–Гордона с переменными коэффициентами:

$$A \left[ \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} - c^2(\rho) \left( \frac{d\tau}{d\rho} \right)^2 \frac{\partial^2 G}{\partial \tau^2} \right] - c^2(\rho) \left[ 2 \frac{dA}{d\rho} \frac{d\tau}{d\rho} + A \frac{d^2 \tau}{d\rho^2} + A \frac{1}{\rho} \frac{d\tau}{d\rho} \right] \frac{\partial G}{\partial \tau} - c^2(\rho) \left[ \frac{d^2 A}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dA}{d\rho} \right] G = 0 \quad (13)$$

### 3 Сведение к волновому уравнению с постоянными коэффициентами

#### 3.1 Случай амплитуды $A = 1$

Уравнение (13) будет сводиться к волновому уравнению с постоянными коэффициентами. Для этого должны выполняться следующие три условия:

$$c^2(\rho) \left( \frac{d\tau}{d\rho} \right)^2 = 1, \quad (14)$$

$$2 \frac{dA}{d\rho} \frac{d\tau}{d\rho} + A \frac{d^2\tau}{d\rho^2} + A \frac{1}{\rho} \frac{d\tau}{d\rho} = 0, \quad (15)$$

$$\frac{d^2A}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dA}{d\rho} = 0. \quad (16)$$

Тогда уравнение (13) преобразуется к классическому одномерному волновому уравнению:

$$\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 G}{\partial \tau^2}. \quad (17)$$

Решение уравнения (17) тривиально выражается в элементарных функциях и представляет собой сумму волн, бегущих в противоположные стороны. Поэтому наша задача решить (14)-(16), чтобы перейти к (17). Рассмотрим частное решение системы уравнений (14)-(16), положив амплитуду волны равной константе ( $A = 1$ ), что всегда можно сделать в линейной задаче. Тогда условие (16) выполняется автоматически, а условие (15) преобразуется к виду:

$$\frac{d^2\tau}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d\tau}{d\rho} = 0. \quad (18)$$

Решение этого уравнения есть

$$\tau(\rho) = B_0 \ln \rho + B_1. \quad (19)$$

где  $B_0, B_1$ - размерные константы. С учетом (19) решение уравнения (14) есть

$$c(\rho) = \frac{\rho}{B_0}, \quad (20)$$

так что скорость распространения волны пропорциональна расстоянию. Для удобства безразмерим полученные решения на их значения на некоторой поверхности  $\rho = \rho_0$ :

$$c(\rho) = c_0 \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right), \quad (21)$$

$$\tau(\rho) = \tau_0 \ln \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right), \quad (22)$$

где  $\tau_0 = \frac{\rho_0}{c_0}$ ,  $B_1 = -\tau_0 \ln \rho_0$ . Знак в формуле (22) выбран плюсом, что соответствует расходящейся волне. Для сходящейся волны надо выбрать знак минус. Зависимости, соответствующие формулам (21) и (22), представлены на рис. 1.

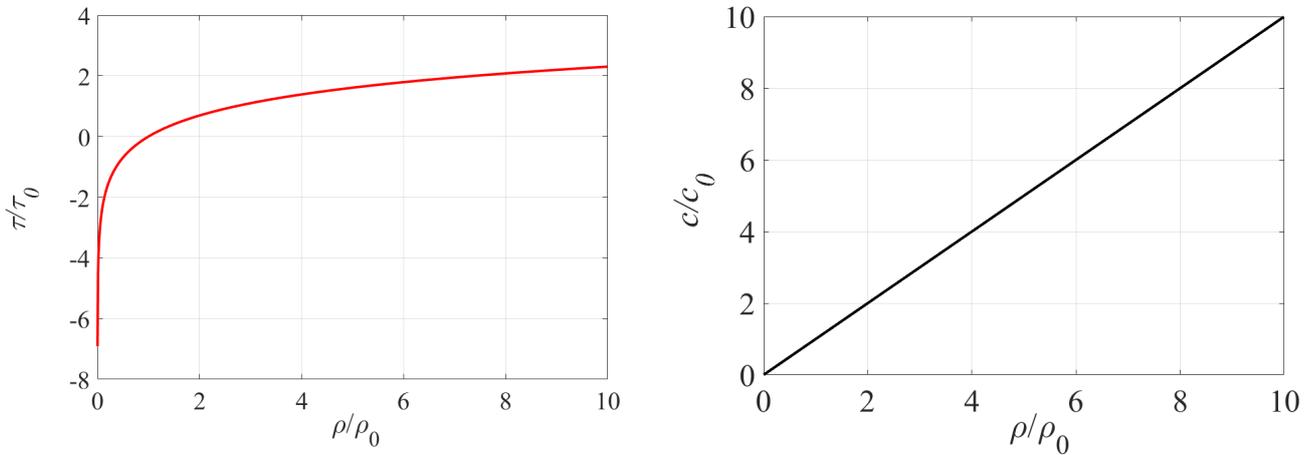


Рис. 1: Зависимости, соответствующие формулам (21) и (22).

В таком случае решением линейного уравнения с постоянными коэффициентами (17) будет являться сумма двух произвольных функций:

$$u = u_1(t + \tau) + u_2(t - \tau), \quad (23)$$

представляющих собой две волны, распространяющиеся в противоположных направлениях.

Рассмотрим сначала сходящую волну гауссовой формы. Тогда решение для волнового поля в любой момент времени и на любом расстоянии будет иметь вид:

$$u_1(t, \rho) = e^{-\frac{(t + \tau_0 \ln(\frac{\rho}{\rho_0}))^2}{\lambda^2}}, \quad (24)$$

где  $\lambda$  – характерная длительность волны. Безразмерный параметр  $\frac{\tau_0}{\lambda}$  влияет на форму волны: чем он меньше, тем волна шире (рис. 2).

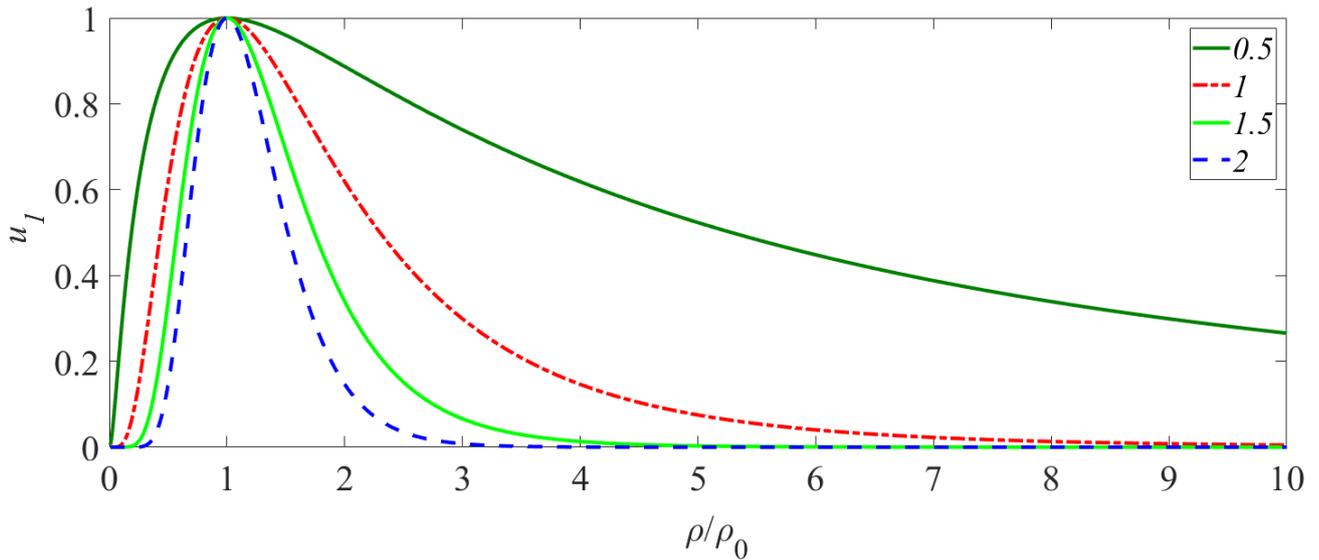


Рис. 2: Форма волны для разных значений безразмерного параметра  $\frac{t_0}{\lambda}$  (при  $T = \frac{t}{\lambda} = 0$ ).

Во времени на любом расстоянии волна имеет гауссовую форму с неизменной амплитудой и длительностью. В пространстве же бегущая волна имеет более сложную форму, представленную на рис. 3. Волна замедляется с уменьшением  $\frac{\rho}{\rho_0}$ , что видно из формулы (20). Длина волны уменьшается с течением времени. Более того, волна не доходит до центра, в отличие от цилиндрических волн в однородной среде, где возможна сильная фокусировка волн.

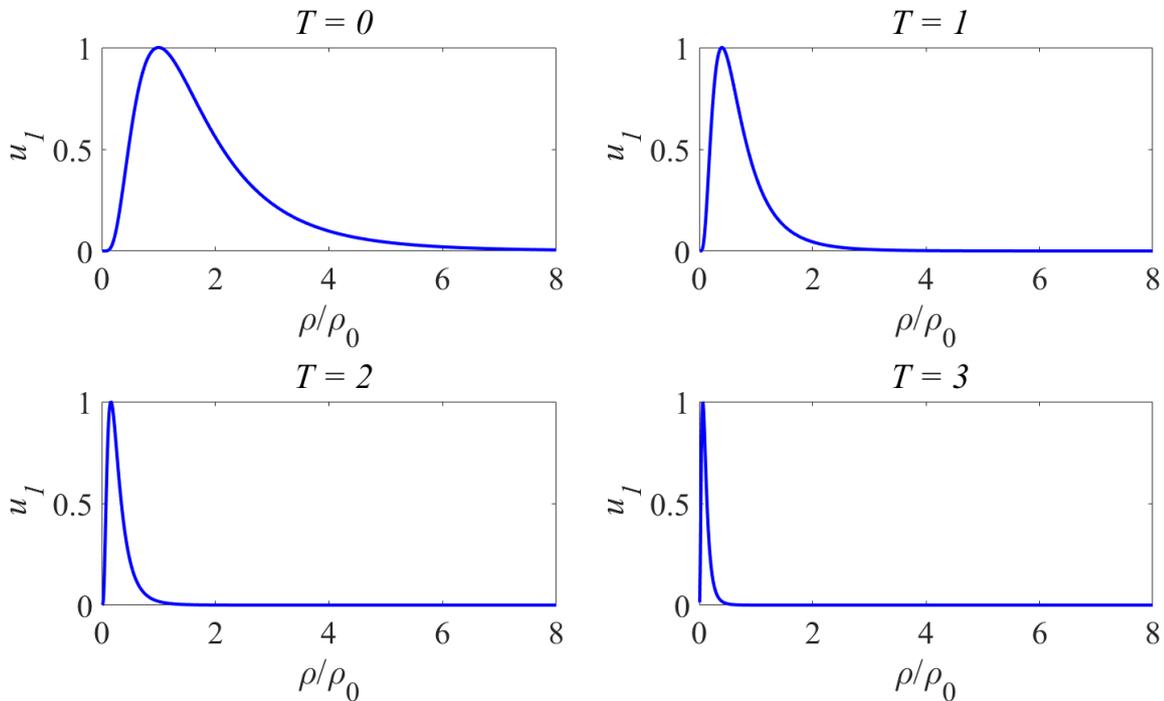


Рис. 3: Профили волны, заданной уравнением (24), в разные моменты безразмерного времени  $T = \frac{t}{\lambda}$  при безразмерном параметре  $\frac{t_0}{\lambda} = 1.1$ .

Трехмерная эволюция волны (24) представлена на рис. 4. Справа даны диаграммы направленности распространения волны (то есть проекции  $XU$ ). Как было сказано ранее, волна с течением времени стремится к центру, сохраняя свою амплитуду.

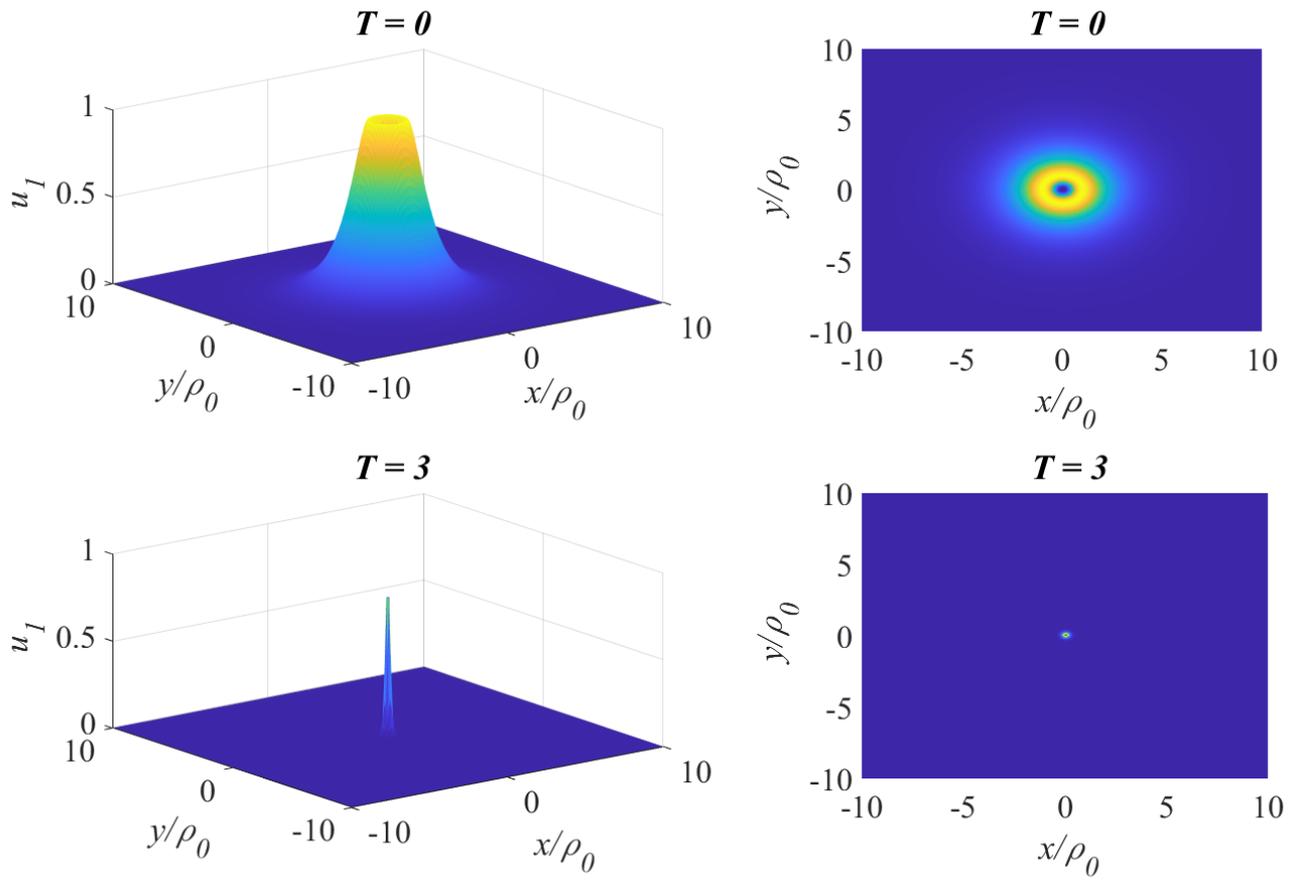


Рис. 4: Трехмерные графики распространения волны к центру в моменты безразмерного времени  $T = 0$  и  $T = 3$ . Справа – проекция  $XY$ .

Теперь рассмотрим волну, бегущую от центра, заданной формой:

$$u_2(t, \rho < \rho_0) = e^{-\frac{(t - \tau_0 \ln(\frac{\rho}{\rho_0}))^2}{\lambda^2}} \quad (25)$$

с параметром  $\frac{\tau_0}{\lambda} = 2.5$ . Здесь происходит обратный только что описанному процесс: изначально узкая волна движется вправо (рис. 5) и по мере своего движения расширяется, сохраняя амплитуду. Трехмерные графики процесса представлены на рис. 6.

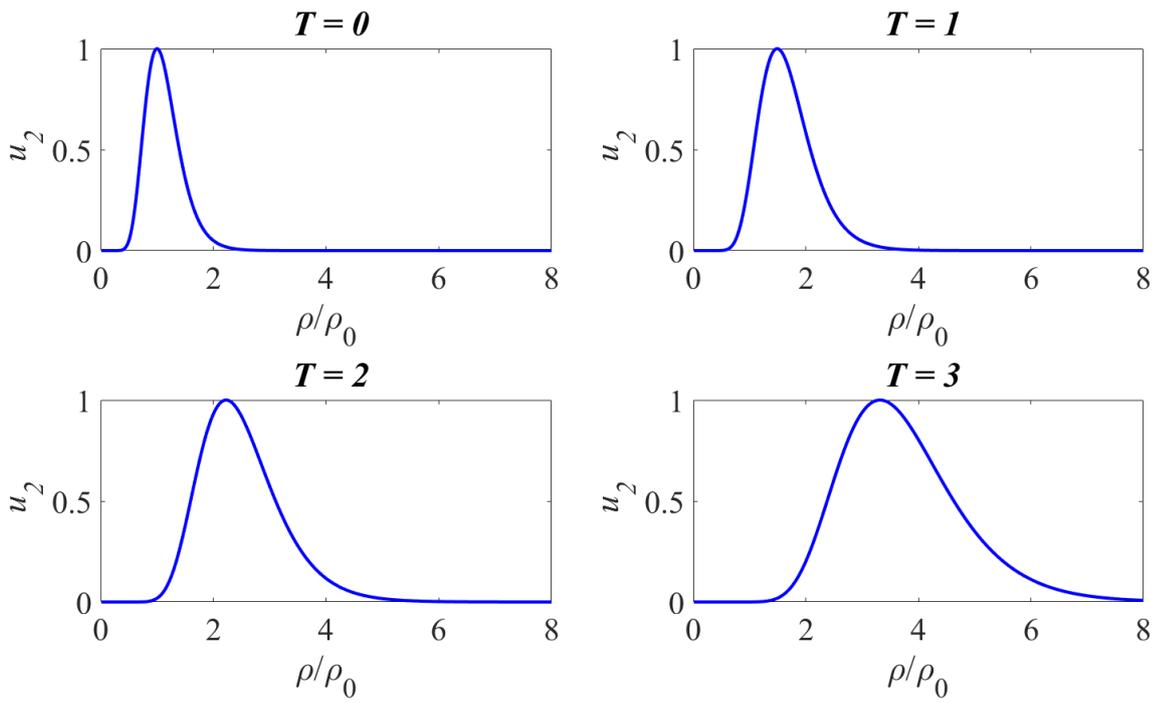


Рис. 5: Эволюция волны, движущейся в направлении от центра.

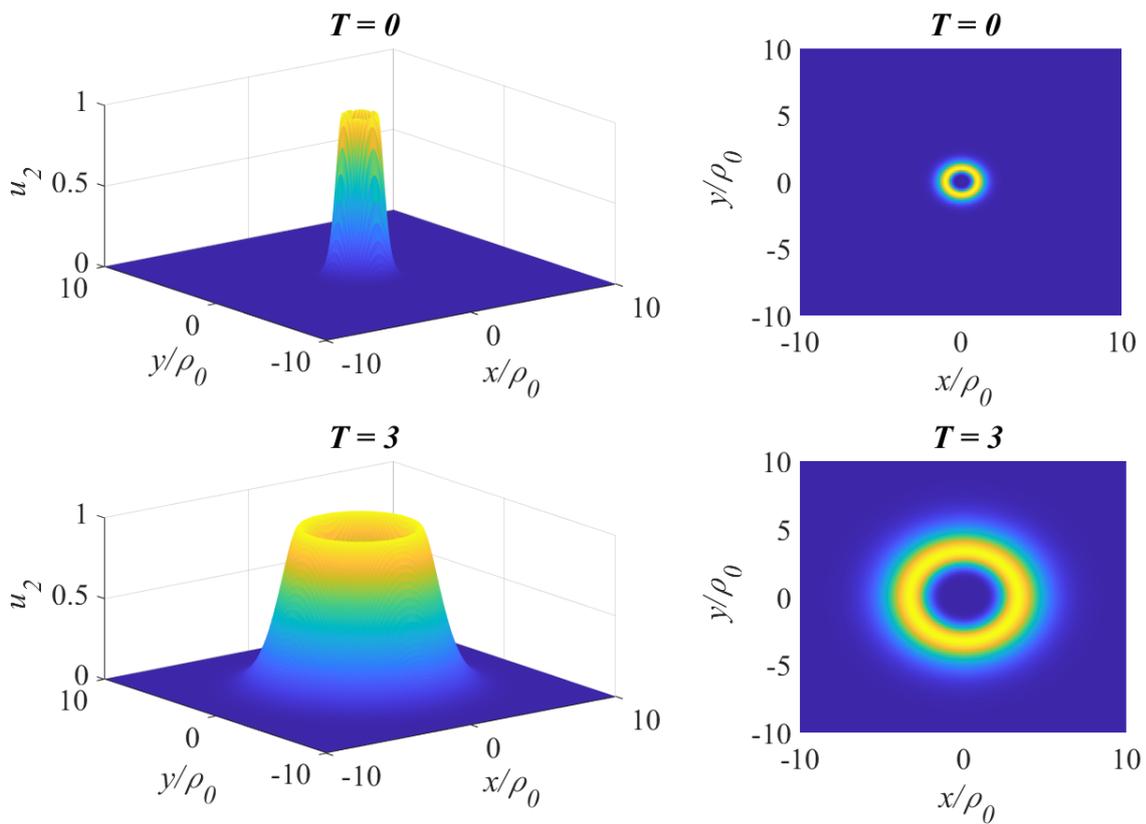


Рис. 6: Трёхмерные графики распространения волны, движущейся от центра, в моменты времени  $T = 0$  и  $T = 3$ . Справа – проекция  $XU$ .

### 3.2 Случай $A \neq \text{const}$

Теперь перейдем к рассмотрению общего случая. Система (14) - (16) является переопределенной для функций  $A(\rho)$  и  $\tau(\rho)$ , поэтому мы будем считать скорость волны  $c(\rho)$  также неизвестной функцией. Это позволит сформулировать условия на класс функций  $c(\rho)$ , при которых существуют бегущие волны. Уравнение (14) определяет фазу:

$$\tau = \int \frac{d\rho}{c(\rho)}. \quad (26)$$

Для определенности мы выбираем положительный знак в (26), чтобы оно соответствовало времени движения волны. Функция  $A(\rho)$  легко находится из (16):

$$A(\rho) = A_0 \ln \frac{\rho}{L} \quad (27)$$

где  $A_0$  и  $L$  - константы, подлежащие определению из начальных или граничных условий. Зависимость, соответствующая формуле (27) представлена на рис.8.

Перейдем к разрешению уравнения (15)

$$2 \frac{dA}{d\rho} \frac{d\tau}{d\rho} + A \frac{d^2\tau}{d\rho^2} + A \frac{1}{\rho} \frac{d\tau}{d\rho} = 0.$$

Домножим обе части на  $A$  и сгруппируем

$$2A \frac{dA}{d\rho} \frac{d\tau}{d\rho} + A^2 \frac{d^2\tau}{d\rho^2} + A^2 \frac{1}{\rho} \frac{d\tau}{d\rho} = 0.$$

Занесем первые два члена под дифференциал и домножим обе части на  $\rho$

$$\rho \frac{d}{d\rho} \left( A^2 \frac{d\tau}{d\rho} \right) + A^2 \frac{d\tau}{d\rho} = 0.$$

Заметим, что это есть полный дифференциал

$$\frac{d}{d\rho} \left( \rho A^2 \frac{d\tau}{d\rho} \right) = 0.$$

Откуда

$$\rho A^2 \frac{d\tau}{d\rho} = B_1.$$

Поользуясь соотношением (26).

$$\rho A^2 \frac{1}{B_1} = c(\rho)$$

Сразу получаем выраение на скорость.

$$c(\rho) = c_0 \frac{\rho}{L} \ln^2 \frac{\rho}{L}, \quad c_0 - \text{const}. \quad (28)$$

Тем самым, мы нашли класс функций  $c(\rho)$ , допускающих существование безотражательных решений исходного волнового уравнения. Наличие констант в (28) делает этот класс достаточно широким. Эта функция представлена на рис. 7.

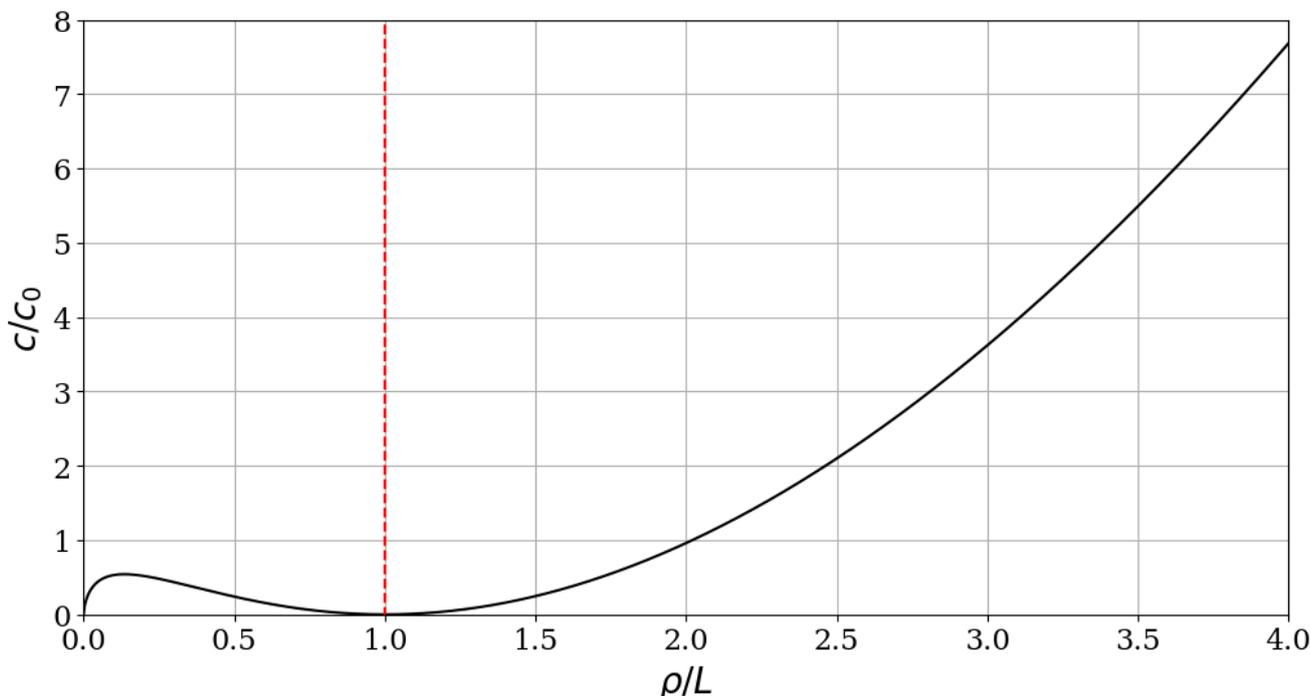


Рис. 7: Зависимость скорости распространения от расстояния, соответствующая формуле (28).

Как видим, скорость распространения дважды обращается в ноль: во-первых, в фокусе  $\rho = 0$ , а во-вторых, в точке  $\frac{\rho}{L} = 1$ . Обе эти точки являются особыми для волнового уравнения, нарушающими его гиперболичность. В рамках линейной теории решение должно исследоваться вне особых точек, поэтому фактически мы имеем две независимые области существования решения, разделенные на рис. 7 вертикальной штриховой линией.

В первой области  $0 < \frac{\rho}{L} < 1$  функция  $c(\rho)$  немонотонна и имеет локальный максимум в точке  $\frac{\rho}{L} = \frac{1}{e^2}$ , ее максимум есть  $\frac{c_{max}}{c_0} = \frac{1}{e^2} \ln^2\left(\frac{1}{e^2}\right) \approx 0.54$ .

Во второй области  $\frac{\rho}{L} > 1$  функция  $c(\rho)$  является монотонно возрастающей и неограниченной на бесконечности.

Аналогичное разделение должно быть сделано для функций  $A(\rho)$  и  $\tau(\rho)$ . Рис. 3 показывает изменение функции  $A(\rho)$  с расстоянием. Знак этой функции не важен, поскольку он управляется константой  $A_0$ . В первой области эта функция монотонно убывает (по модулю) от фокуса к правой границе, а на второй - монотонно возрастает с расстоянием. Обратим внимание, что в особой точке ( $\rho = L$ ) функция  $A(\rho)$  стремится к нулю (а не к бесконечности, как это было естественно ожидать). К этой особенности мы вернемся несколько позже.

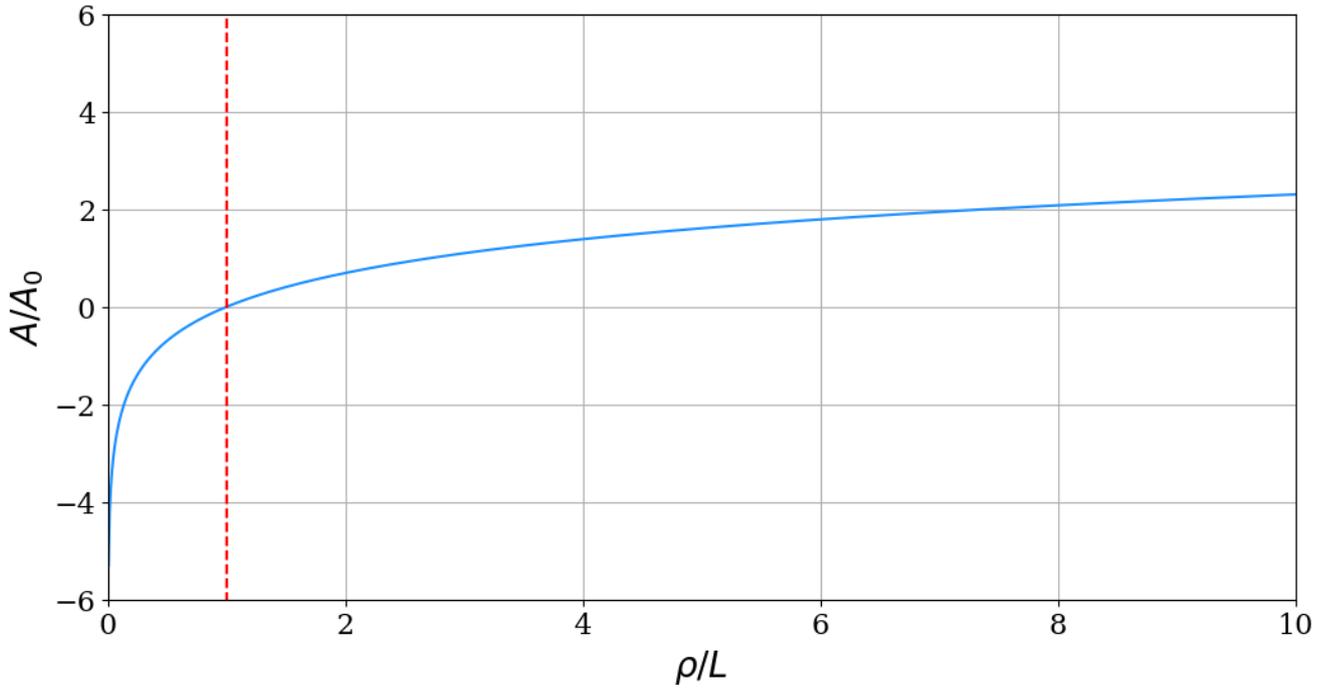


Рис. 8: Зависимость амплитуды от  $\rho$ .

Для вычисления фазы или времени движения волны мы должны задать граничные условия на некотором расстоянии  $\rho_{gr}$ , где генерируются волны. Тогда из (26) находится явное выражение для фазы:

$$\tau(\rho) = \int_{\rho_{gr}}^{\rho} \frac{d\rho}{c(\rho)} = \frac{L}{c_0} \left( \frac{1}{\ln \frac{\rho_{gr}}{L}} - \frac{1}{\ln \frac{\rho}{L}} \right). \quad (29)$$

Обозначая  $\frac{L}{c_0}$  за  $\tau_0$ , получаем условие на безразмерную фазу волны, которую мы, как уже говорилось выше, определяем как положительную функцию:

$$\frac{\tau(\rho)}{\tau_0} = \left( \frac{1}{\ln \frac{\rho_{gr}}{L}} - \frac{1}{\ln \frac{\rho}{L}} \right). \quad (30)$$

Зависимость фазы волны от расстояния представлена на рис. 9 для областей  $0 < \frac{\rho}{L} < 1$  и  $\frac{\rho}{L} > 1$ .

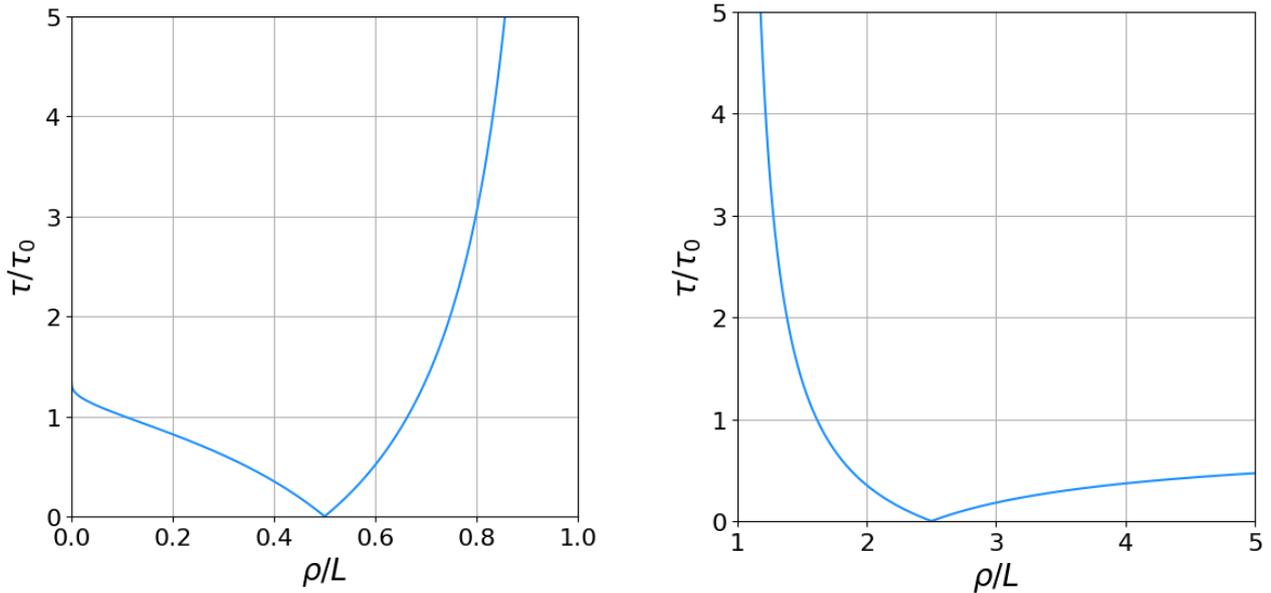


Рис. 9: Зависимость фазы волны от дистанции для промежутков а)  $0 < \frac{\rho}{L} < 1$ , б)  $\frac{\rho}{L} > 1$ .

Левая часть графиков на рис. 9 соответствует сходящейся волне, а правая – расходящейся. В точке фокуса ( $\rho = 0$ ) фаза оказывается конечной, так что волна подходит к фокусу за конечное время, увеличиваясь по амплитуде ( $A(\rho)$  стремится к бесконечности). Напротив, в другой особой точке ( $\rho = L$ ) фаза стремится к бесконечности (в обеих областях), так что волна не доходит до этой особой точки. Именно поэтому не важна особенность в функции  $A(\rho)$ , о которой говорилось выше. Отметим, что подобные особые точки возникают в двумерном волновом уравнении, описывающем волны на воде, где особая точка соответствует линии берега [13-15]. Решение уравнения (17) есть сумма двух произвольных функций, так что, возвращаясь к исходному уравнению (10), его общее решение записывается в виде:

$$u = \eta_1 + \eta_2 = A_{0_1} \ln\left(\frac{\rho}{L}\right) \tilde{\eta}_1(t - \tau) + A_{0_2} \ln\left(\frac{\rho}{L}\right) \tilde{\eta}_2(t + \tau), \quad (31)$$

представляющих собой волны, распространяющиеся в противоположных направлениях с амплитудами  $A_{0_1}$  и  $A_{0_2}$ . Соотношение между волнами определяется начальными и граничными условиями. Уже из приведенных выше рассуждений следует, что волны должны рассматриваться отдельно в областях  $\frac{\rho}{L} < 1$  и  $\frac{\rho}{L} > 1$  (рис. 10).

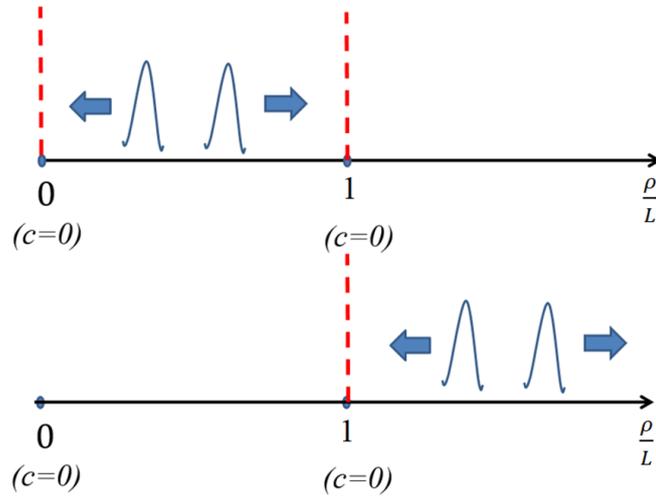


Рис. 10: Схема задачи.

Рассмотрим, например, сходящуюся волну гауссовой формы, которая задается на расстоянии  $\frac{\rho_{gr}}{L}$  как функция времени:

$$\frac{\eta_0}{A_0} \left( t, \frac{\rho_{gr}}{L} \right) = \ln \left( \frac{\rho_{gr}}{L} \right) e^{-\left( \frac{t-t_0}{\lambda} \right)^2}. \quad (32)$$

Тогда на расстоянии меньшем  $\frac{\rho_{gr}}{L}$  (неважно в первой или второй области) волновое поле есть  $\frac{\eta_1}{A_0}$ :

$$\frac{\eta_1}{A_0} \left( t, \frac{\rho}{L} < \frac{\rho_{gr}}{L} \right) = \ln \left( \frac{\rho}{L} \right) e^{-\left( \frac{t-t_0 + \tau_0 \ln(\frac{\rho}{L})}{\lambda^2} \right)^2}. \quad (33)$$

Для области  $0 < \frac{\rho}{L} < 1$  форма сходящейся волны на различных расстояниях представлена на рис. 11 ( $\frac{\tau_0}{\lambda} = 0.1$ ,  $\frac{t_0}{\lambda} = 3$ ). При приближении к фокусу амплитуда волны увеличивается, как и задержка во времени. Это согласуется с анализом функций  $A(\rho)$  и  $\tau(\rho)$ , сделанному выше.

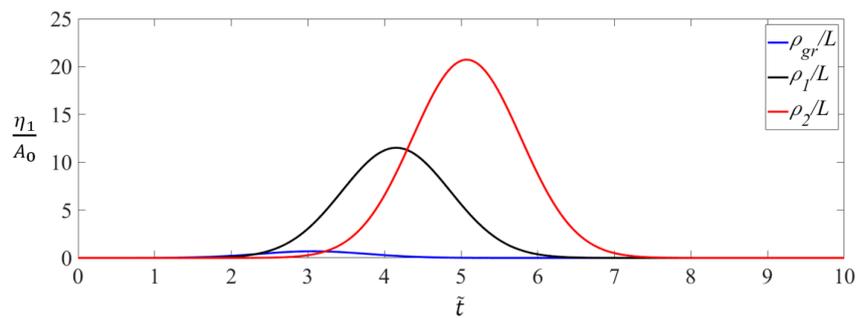


Рис. 11: Форма сходящейся волны на различных расстояниях в области  $0 < \frac{\rho}{L} < 1$ ,  $\rho_{gr} > \rho_1 > \rho_2$  (по горизонтали – безразмерное время  $\tilde{t} = \frac{t-t_0}{\lambda}$ )

Формы сходящейся волны для области  $\frac{\rho}{L} > 1$  представлены на рис. 12 ( $\frac{\tau_0}{\lambda} = 1$ ,  $\frac{t_0}{\lambda} = 8$ ). При уменьшении  $\rho$  и движении к  $\frac{\rho}{L} \rightarrow 1$  амплитуда волны уменьшается. Но фаза волны стремится к бесконечности, поэтому волна не доходит до особой точки  $\frac{\rho}{L} = 1$ .

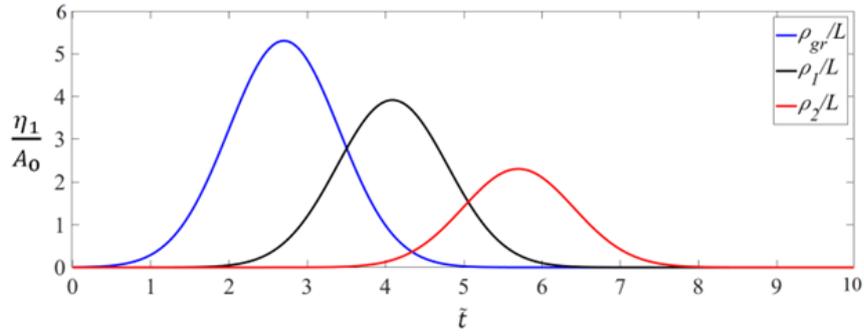


Рис. 12: Форма сходящейся волны на различных расстояниях в области  $\frac{\rho}{L} > 1$ ,  $\rho_{gr} > \rho_1 > \rho_2$ .

Расходящаяся волна на расстоянии большем  $\frac{\rho_{gr}}{L}$  (для обеих областей) представима выражением:

$$\frac{\eta_2}{A_0}(t, \frac{\rho}{L} > \frac{\rho_{gr}}{L}) = \ln(\frac{\rho}{L}) e^{-\left(\frac{(t-t_0-\tau_0 \ln(\frac{\rho}{L}))^2}{\lambda^2}\right)}, \quad (34)$$

и ее формы на разной дистанции в области  $0 < \frac{\rho}{L} < 1$  представлены на рис. 13 ( $\frac{\tau_0}{\lambda} = 1$ ,  $\frac{t_0}{\lambda} = 5$ ).

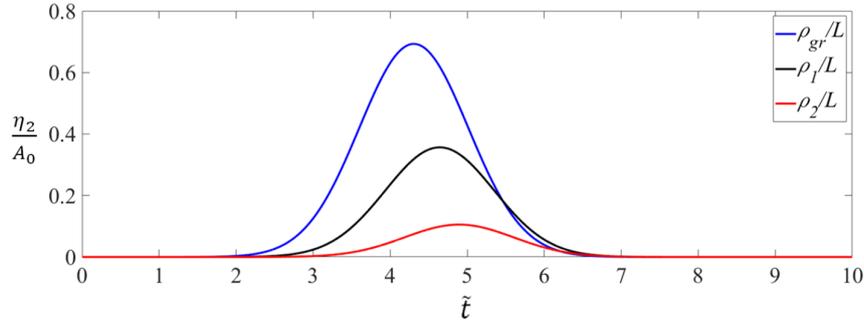


Рис. 13: Формы расходящейся волны в области  $0 < \frac{\rho}{L} < 1$ ,  $\rho_{gr} < \rho_1 < \rho_2$ .

По мере увеличения дистанции и приближении к точке  $\frac{\rho}{L} = 1$  амплитуда волны спадает и стремится к нулю. Однако фаза ее стремятся к бесконечности (как и в случае сходящейся волны в области  $\frac{\rho}{L} > 1$ ), и волна не доходит до точки  $\frac{\rho}{L} = 1$ .

Для области  $\frac{\rho}{L} > 1$  формы расходящейся волны представлены на рис. 14 ( $\frac{\tau_0}{\lambda} = 0.1$ ,  $\frac{t_0}{\lambda} = 3$ ). При удалении от  $\rho_{gr}$  вправо амплитуда и фаза волны нарастает.

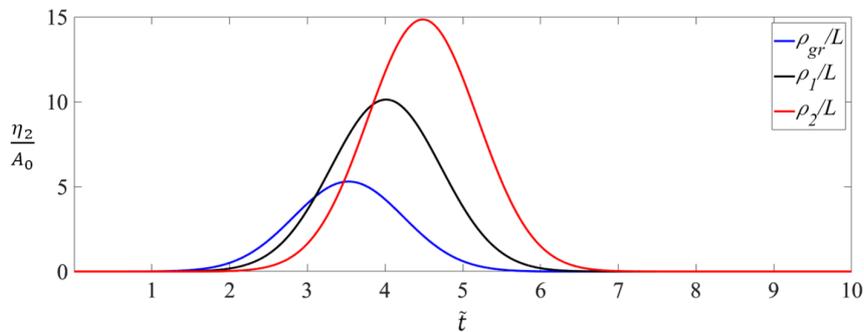


Рис. 14: Формы расходящейся волны в области  $\frac{\rho}{L} > 1$ ,  $\rho_{gr} < \rho_1 < \rho_2$ .

Рассмотрим движение сходящейся и расходящейся волны гауссовой формы в пространстве. Для области  $0 < \frac{\rho}{L} < 1$  формы волн изображены на рис. 15 для трех времен  $t_0 < t_1 < t_2$ .

Амплитуда сходящейся волны с течением времени безгранично увеличивается, и волна становится уже. Расходящаяся волна, наоборот, расширяется при движении к точке  $\frac{\rho}{L} = 1$ , которую он не достигает, а амплитуда ее падает с течением времени.

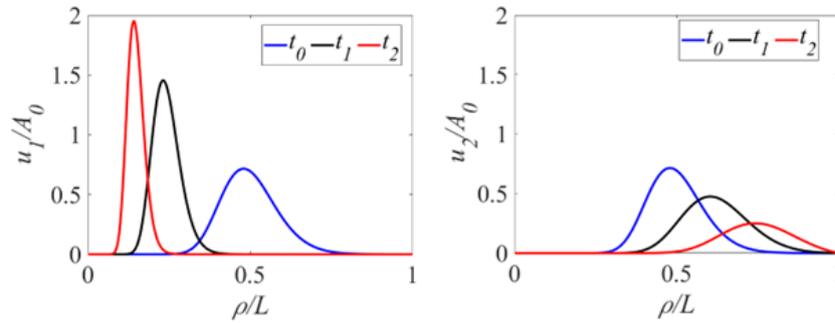


Рис. 15: Формы сходящейся (слева) и расходящейся (справа) волн в области  $0 < \frac{\rho}{L} < 1$ .

Для второй области  $\frac{\rho}{L} > 1$  формы волн в пространстве представлены на рис. 16. Сходящаяся волна сужается, и ее амплитуда уменьшается при движении к точке  $\frac{\rho}{L} = 1$ , которую она не достигает. Расходящаяся волна с течением времени расширяется, и амплитуда ее безгранично растет.

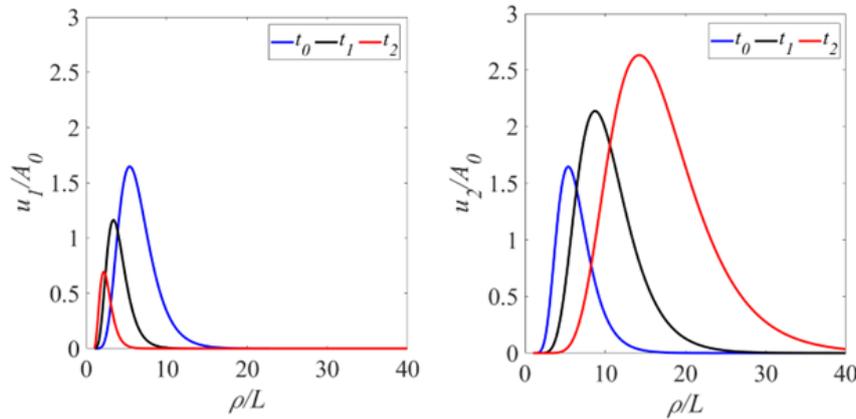


Рис. 16: Формы сходящейся (слева) и расходящейся (справа) волн в области  $\frac{\rho}{L} > 1$ .

#### 4 Сведение к уравнению Клейна-Гордона с постоянными коэффициентами

Теперь уравнение (13) будет сводиться к уравнению Клейна-Гордона с постоянными коэффициентами. Потребовав, условия следующие условия:

$$c^2(\rho) \left( \frac{d\tau}{d\rho} \right)^2 = 1 \quad (35)$$

$$c^2(\rho) \left( 2 \frac{dA}{d\rho} \frac{d\tau}{d\rho} + A \frac{d^2\tau}{d\rho^2} + A \frac{1}{\rho} \frac{d\tau}{d\rho} \right) = 0 \quad (36)$$

$$c^2(\rho) \left( \frac{d^2A}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dA}{d\rho} \right) = PA \quad (37)$$

уравнение (13) сводится к уравнению Клейна-Гордона с постоянными коэффициентами, где  $P$  - константа.

$$\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 G}{\partial \tau^2} - PG = 0 \quad (38)$$

Для того, чтобы перейти к уравнению (38) рассмотрим решения системы (35) - (37). Уравнение (36) точно такое же как и в системе (14)-(16). Интегрируется точно также и, с использованием условия (35), получаем

$$\frac{A^2 \rho}{c(\rho)} = B \quad (39)$$

где  $B$  - размерная константа.

Перейдем к уравнению (37). Домножим обе стороны на  $\rho$  и разделим на  $c^2$ .

$$\rho \frac{d^2 A}{d\rho^2} + \frac{dA}{d\rho} = \frac{PA\rho}{c^2}$$

Избавимся от  $c$  в правой части, пользуясь соотношением (35)

$$\rho \frac{d^2 A}{d\rho^2} + \frac{dA}{d\rho} = \frac{PB^2}{\rho A^3}$$

Домножим обе стороны на  $\rho$ , полученное уравнение решим:

$$\rho^2 \frac{d^2 A}{d\rho^2} + \rho \frac{dA}{d\rho} = \frac{PB^2}{A^3} \quad (40)$$

Сделаем замену  $\rho = e^\xi$ .  $\rho'_\xi = e^\xi$ .

$$e^{2\xi} e^{-2\xi} (A''_{\xi\xi} - A'_\xi) + e^\xi e^{-\xi} A'_\xi = \frac{PB^2}{A^3}$$

$$A''_{\xi\xi} = \frac{PB^2}{A^3}$$

Далее сделаем замену  $h(A) = A'_\xi$ , тогда уравнение интегрируется и получаем

$$h^2 = -\frac{PB^2}{A^2} + C_1 \quad C_1 \in \mathbf{R}$$

Произведём обратную замену  $h = A'_\xi$

$$(A'_\xi)^2 = -\frac{PB^2}{A^2} + C_1$$

$$A^2 (A'_\xi)^2 + PB^2 - C_1 A^2 = 0$$

Далее произведем замену  $g = A^2$ , откуда  $g' = 2AA'_\xi$ .

$$\frac{(g')^2}{4} + PB^2 - C_1 g = 0$$

$$g = \frac{(g')^2}{4C_1} + \frac{PB^2}{C_1} \quad (41)$$

Далее производим замену  $v = g' = \frac{dg}{d\xi}$ , откуда

$$g = \frac{v^2}{4C_1} + \frac{PB^2}{C_1} \quad (42)$$

Возьмем дифференциал от левой и правой части и получим:

$$dg = \frac{2v dv}{4C_1}$$

Где  $dg = v d\xi$ ,

$$v d\xi = \frac{2v dv}{4C_1}$$

Находим  $v$

$$v = 2C_1(\xi + C_2) \quad C_2 \in \mathbf{R}$$

Подставляя  $v$  в формулу (42), находим  $g$

$$g = \frac{(2C_1(\xi + C_2))^2}{4C_1} + \frac{PB^2}{C_1}$$

Производя обратную замену находим  $A$

$$A^2 = \frac{(2C_1(\xi + C_2))^2}{4C_1} + \frac{PB^2}{C_1}$$

Обезразмерим полученное решение. Сделаем обратную замену  $\xi = \ln \rho$  и положим  $C_2 = -\ln L$

$$A^2 = C_1 \left( \ln \frac{\rho}{L} \right)^2 + \frac{PB^2}{C_1} \quad (43)$$

Положим амплитуду на расстоянии  $\rho = L$  равной  $A = A_0$ . Тогда  $C_1$  выразится

$$C_1 = P \left( \frac{B}{A_0} \right)^2$$

Тогда

$$\left( \frac{A}{A_0} \right)^2 = 1 + Q \left[ \ln \frac{\rho}{L} \right]^2, \quad \text{где } Q = \frac{PB^2}{A_0^4} = P \frac{L^2}{c_0^2} \quad (44)$$

При этом, используя уравнение (39), получаем выражение для скорости:

$$\frac{c(\rho)}{c_0} = \frac{\rho}{L} \left[ 1 + Q \ln^2 \frac{\rho}{L} \right], \quad \text{где } c_0 = L \sqrt{\frac{P}{Q}} \quad (45)$$

При этом если  $T$  - масштаб по времени (то есть  $c_0 = \frac{L}{T}$ ), то  $Q = PT^2$ . Профили скоростей при разных значениях параметра  $P$  можно наблюдать на рисунке 17.

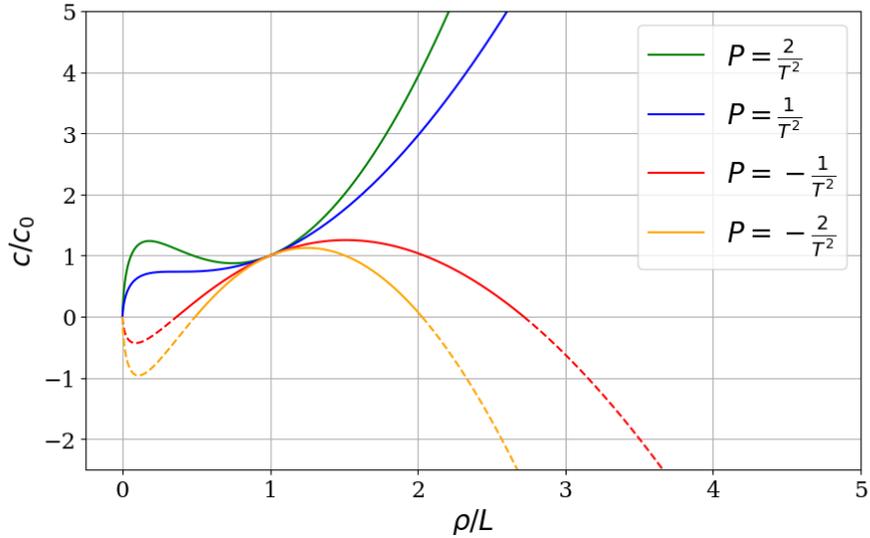


Рис. 17: Профили скоростей

Понятно, что для отрицательных  $P$ , скорость будет определена не на всей прямой, в силу того, что скорость определена положительно, и выражение в скобках в уравнении (45) также должно быть положительно. То есть на отрезке  $[e^{-\frac{1}{\sqrt{-Q}}}, e^{\frac{1}{\sqrt{-Q}}}]$ . Ясно, что рост функции  $c(\rho)$  сверху можно оценить  $\rho^2$  (а снизу  $\rho$ ) для  $\forall P > 0$ . Поскольку  $\lim_{\rho \rightarrow +\infty} \frac{c(\rho)}{\rho^2} = \lim_{\rho \rightarrow +\infty} \frac{\rho[1+Q \ln^2 \rho]}{\rho^2} = \lim_{\rho \rightarrow +\infty} \frac{[1+Q \ln^2 \rho]}{\rho} = 0$ . Также покажем зависимость амплитуды от разных  $P$ .

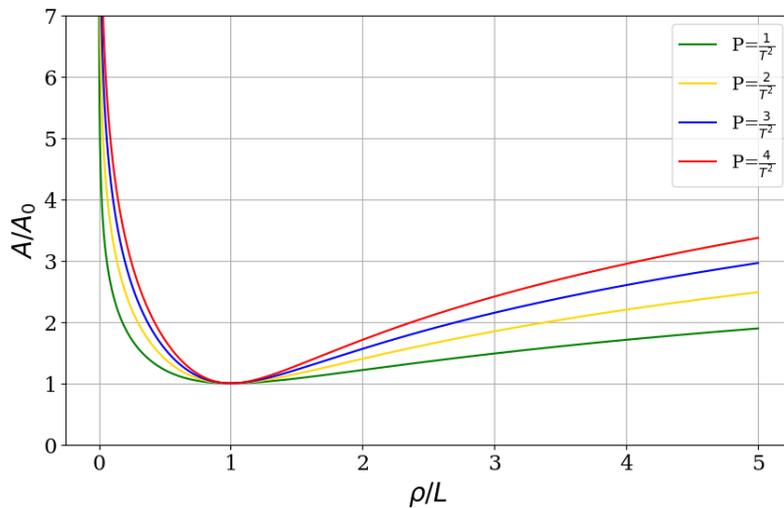


Рис. 18: Амплитуда для положительных  $P$

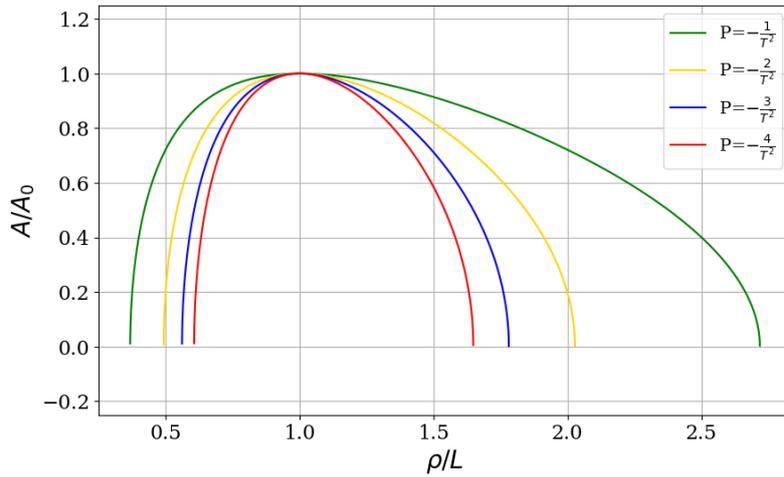


Рис. 19: Амплитуда для отрицательных  $P$

Видим, что для положительных и отрицательных  $P$  ситуации координанльно отличаются друг от друга. Для отрицательных значений  $P$ , амплитуда определена не на всей прямой, а только там где определена скорость для аналогичных  $P$ . Рассмотрим асимптотическое поведение скорости на бесконечности.  $\lim_{\rho \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + Q \ln^2 \rho} = \lim_{\rho \rightarrow +\infty} \ln \rho \sqrt{\frac{1}{\ln^2 \rho} + Q} \sim \ln \rho \sqrt{Q}$ . А значит, скорость роста амплитуды на бесконечности можно ограничить сверху  $\rho^\varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$ . Теперь, зная  $c(\rho)$  можно легко найти выражение для фазы  $\tau$ :

$$\frac{\tau(\rho)}{T} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{Q}} \arctan(\sqrt{Q} \ln \frac{\rho}{L}) & \text{при } P > 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{-Q}} \ln \frac{|1 + \sqrt{-Q} \ln \frac{\rho}{L}|}{|1 - \sqrt{-Q} \ln \frac{\rho}{L}|} & \text{при } P < 0 \end{cases} \quad (46)$$

Для определенности была выбрана константа интегрирования, равная 0, для того, чтобы в точке  $\rho = L$ , фаза равнялась 0.

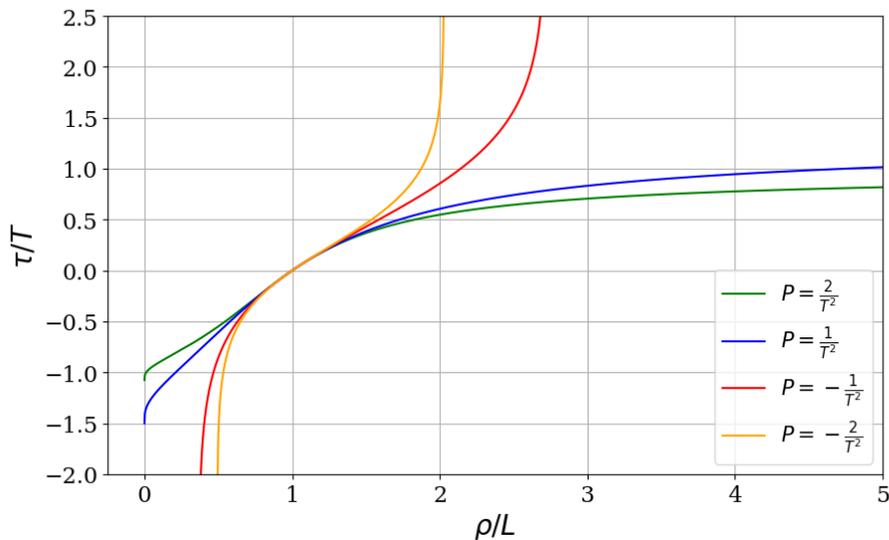


Рис. 20: Фаза для различных  $P$

$\tau(\rho)$  - это временная задержка (фаза) прихода импульса из точки  $\rho = L$  в точку  $\rho$ . При

$P < 0$   $\tau(\rho) \rightarrow \infty$  на краях области определения  $c(\rho)$ , а следовательно импульс будет замедляться при подходе к краям области определения и никогда их не достигнет.

Для положительных  $P$  имеется другая особенность. Импульс достигнет точки  $\rho = \infty$  за конечное время, поскольку  $\tau(\rho) \rightarrow \frac{\pi}{2\sqrt{Q}}$ , при  $\rho \rightarrow \infty$ .

Рассмотрим элементарное решение уравнения Клейна-Гордона с постоянными коэффициентами в виде плоской волны:

$$G = e^{i(k\tau - \omega t)}.$$

Подставляя это элементарное решение в уравнение (38) получим дисперсионное соотношение

$$\omega^2 - k^2 = -P \quad (47)$$

Тогда действительное решение в силу линейности уравнения Клейна-Гордона можно представить в виде

$$G = \text{Re}[e^{i(k\tau - \omega t)}] = \cos(\pm\sqrt{\omega^2 + P}\tau - \omega t). \quad (48)$$

Выберем в (48) волну, движущуюся вправо. Возвращаясь к исходной замене,  $u = A(\rho)G(t, \tau(\rho))$ , получаем:

$$u = A(\rho) \cos(\sqrt{\omega^2 + P}\tau - \omega t). \quad (49)$$

Для  $A(\rho)$  используем выражение из (44):  $(\frac{A}{A_0})^2 = 1 + Q[\ln \frac{\rho}{L}]^2$ , где  $Q$  выберем равным, например, 1. Тогда  $A(\rho) = A_0\sqrt{1 + [\ln \frac{\rho}{L}]^2}$ . Выражение для  $\tau(\rho)$  берем из системы (46) для положительных  $P$ . Тогда с учетом всего вышесказанного выражение (49) примет вид:

$$\frac{u}{A_0} = \sqrt{1 + [\ln \frac{\rho}{L}]^2} \cos(T \arctan(\ln \frac{\rho}{L})\sqrt{\omega^2 + 1} - \omega t) \quad (50)$$

Рассмотрим эволюцию волны (50) на промежутке  $0 < \frac{\rho}{L} < 1$  при  $\omega = 10$  (рис. 21). При движении волны вправо, амплитуда головной волны уменьшается. Волна расширяется, а ее подошва опускается. При увеличении значения параметра  $\omega$  число осцилляций в волновом пакете увеличивается. На промежутке  $1 < \frac{\rho}{L} < \infty$  волна имеет широкий профиль, и при движении максимум его возрастает.

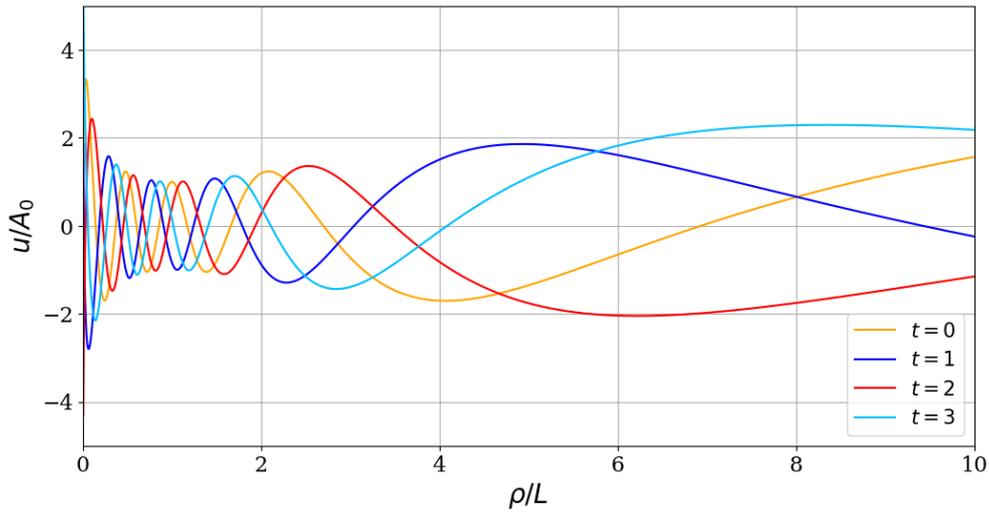


Рис. 21: Эволюция волны (50) для  $\omega = 10$

Форма сходящейся волны на различных расстояниях представлена на рис. 22.

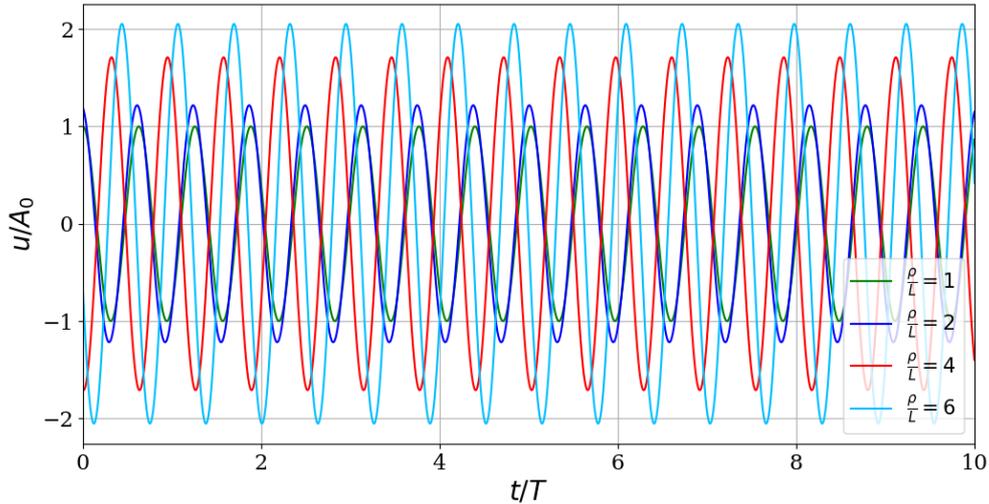


Рис. 22: Форма сходящейся волны на различных расстояниях (по горизонтали – безразмерное время  $\frac{t}{T}$ )

## 5 Сведение к уравнению Эйлера-Дарбу-Пуассона

Далее наше уравнение будем сводить к уравнение Эйлера-Дарбу-Пуассона:

$$\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 G}{\partial \tau^2} - \frac{k}{\tau} \frac{\partial G}{\partial \tau} = 0 \quad (51)$$

в котором коэффициент  $k$  изменяется от минус до плюс бесконечности. В литературе известно, что для случае когда этот коэффициент принимает целые четные значения  $k = 2m$ , то решением этого уравнения является линейная комбинация произвольных функций и их производных, зависящих от времени  $t$  и фазы  $\tau$ . Мы можем использовать это свойство для нахождения бегущих волн в неоднородной среде.

Так принимая условия с целочисленными  $m$ , получаем:

$$\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 G}{\partial \tau^2} - \frac{2m}{\tau} \frac{\partial G}{\partial \tau} = 0 \quad (52)$$

Для того, чтобы уравнение (3) свелось к уравнению (52) должны выполняться следующие условия:

$$c^2(\rho) \left( \frac{d\tau}{d\rho} \right)^2 = 1 \quad (53)$$

$$c^2(\rho) \left( 2 \frac{dA}{d\rho} \frac{d\tau}{d\rho} + A \frac{d^2\tau}{d\rho^2} + A \frac{1}{\rho} \frac{d\tau}{d\rho} \right) = \frac{2mA}{\tau} \quad (54)$$

$$c^2(\rho) \left( \frac{d^2A}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dA}{d\rho} \right) = 0 \quad (55)$$

Если принять значение амплитуды равное  $A = 1$ , то условие (55) выполняется автоматически, а условие (54) переписется в виде:

$$\frac{d^2\tau}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d\tau}{d\rho} = \frac{2m}{\tau c^2(\rho)} \quad (56)$$

Используя условие (53), получаем:

$$\frac{d^2\tau}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d\tau}{d\rho} = \frac{2m}{\tau} \left( \frac{d\tau}{d\rho} \right)^2$$

Далее решение проводится аналогично случаю сведения к уравнению Клейна-Гордона с постоянными коэффициентами. Производя  $\rho = e^\xi$ .  $\rho'_\xi = e^\xi$ , переведем в виде производных  $\tau'_\xi$ :

$$e^{-2\xi} (\tau''_{\xi\xi} - \tau'_\xi) + e^{-2\xi} \tau'_\xi = \frac{2m}{\tau} e^{-2\xi} (\tau'_\xi)^2$$

Домножив обе части на  $e^\xi$ , получаем:

$$\tau''_{\xi\xi} = \frac{2m}{\tau} (\tau'_\xi)^2$$

Делая замену  $\tau'_\xi = h(\tau)$ ,  $\tau''_{\xi\xi} = h'_\tau \tau'_\xi = h'_\tau h$ , получим:

$$h'_\tau h = \frac{2m}{\tau} h^2$$

$$\frac{h'}{h} = \frac{2m}{\tau}$$

$$\frac{1}{h} \frac{dh}{d\tau} = \frac{2m}{\tau}$$

$$\frac{dh}{h} = \frac{2m d\tau}{\tau}$$

$$\ln h = 2m \ln(\tau C_0)$$

Откуда:

$$h = (\tau C_0)^{2m}$$

Делая обратную замену получаем:

$$\frac{d\tau}{d\xi} = (\tau C_0)^{2m}$$

Зная, что  $m$  - целые, получаем:

$$\frac{(\tau C_0)^{-2m+1}}{C_0(-2m+1)} = x + C_1$$

Откуда:

$$\tau = \frac{(C_0(1-2m)x + C_2)^{\frac{1}{1-2m}}}{C_0}$$

где  $C_2 = C_0 C_1 (1-2m)$ .

Делая обратную замену  $\xi = \ln \rho$ , получаем:

$$\tau = \frac{(C_0(1-2m) \ln \rho + C_2)^{\frac{1}{1-2m}}}{C_0}$$

где  $C_0, C_2$  - размерные константы. Перепишем выражение в более удобных константах и получим окончательное выражение для фазы:

$$\frac{\tau}{\tau_0} = \left( \ln \frac{\rho}{L} \right)^{\frac{1}{1-2m}} \quad (57)$$

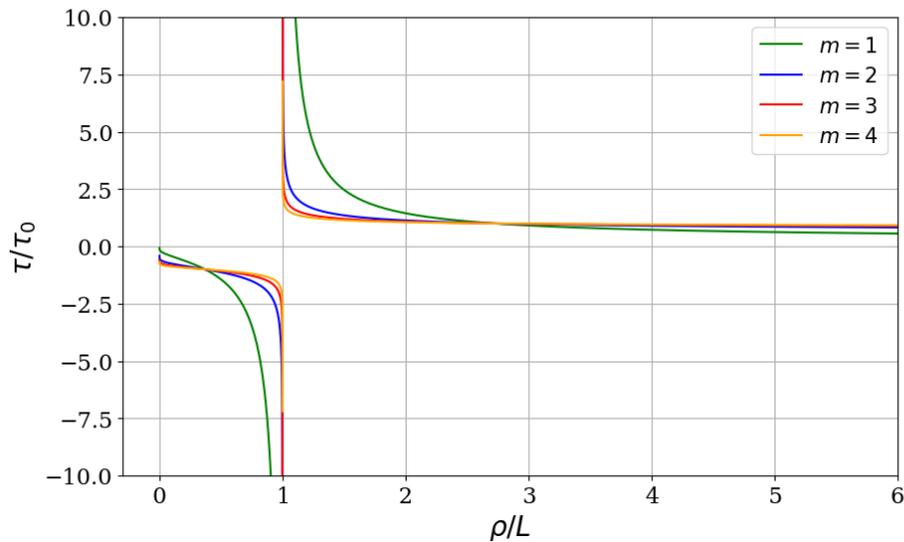


Рис. 23: Фазы для положительных  $m$ .

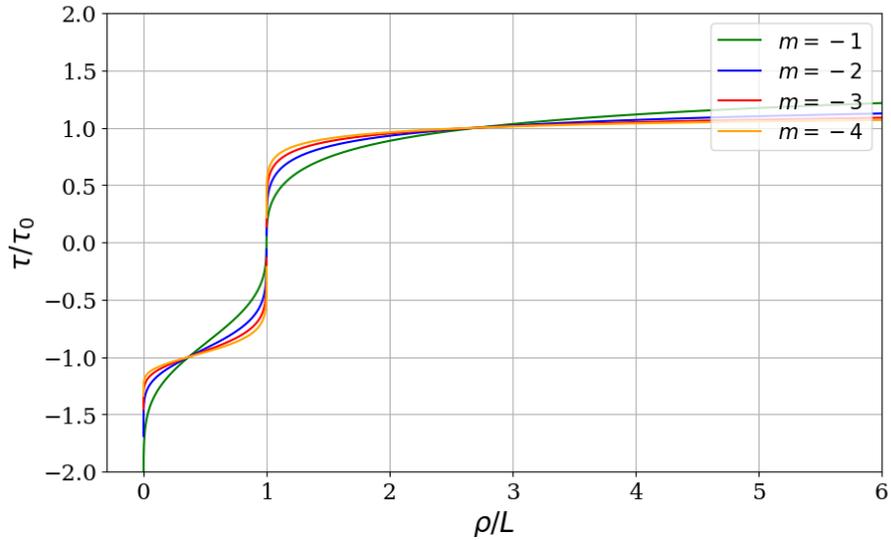


Рис. 24: Фазы для отрицательных  $m$ .

В точке  $\rho = L$  наблюдается сингулярность для любого параметра  $m$ , то есть до данной точки импульс никогда не достигнет, а при  $\rho \rightarrow \infty$  импульс достигает бесконечность за конечное время. С другой стороны до точки  $\rho = 0$  импульс доходит до любой точки за конечное время для  $m > 0$ , а для  $m < 0$  никогда не достигнет. Подставляя выражение (57) в условие (53), находим

$$c(\rho) = \frac{\rho(1 - 2m)(\ln \frac{\rho}{L})^{\frac{2m}{2m-1}}}{\tau_0} \quad (58)$$

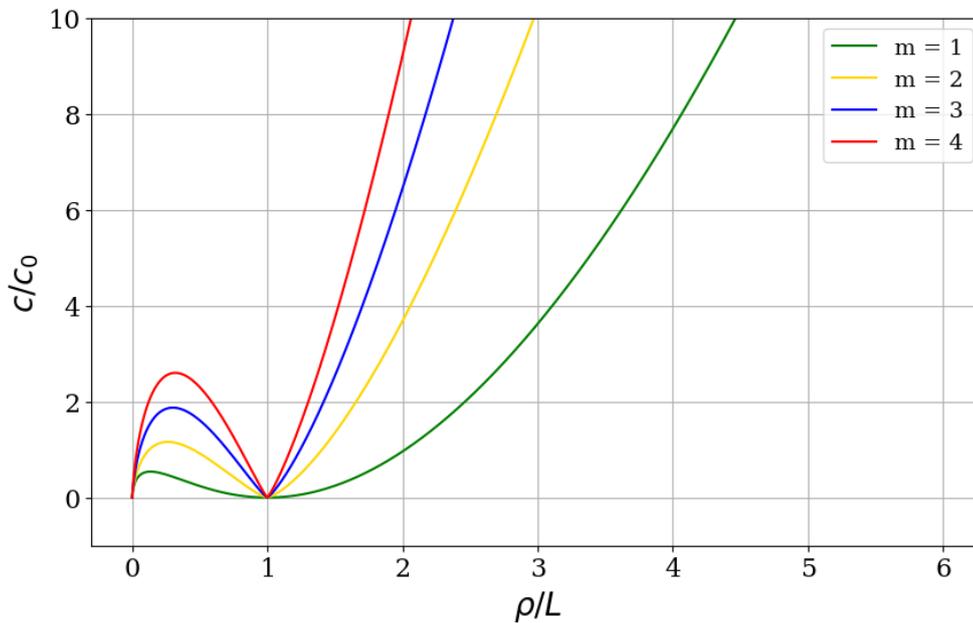


Рис. 25: Конфигурации безотражательных  $c(\rho)$  для положительных  $m$ .

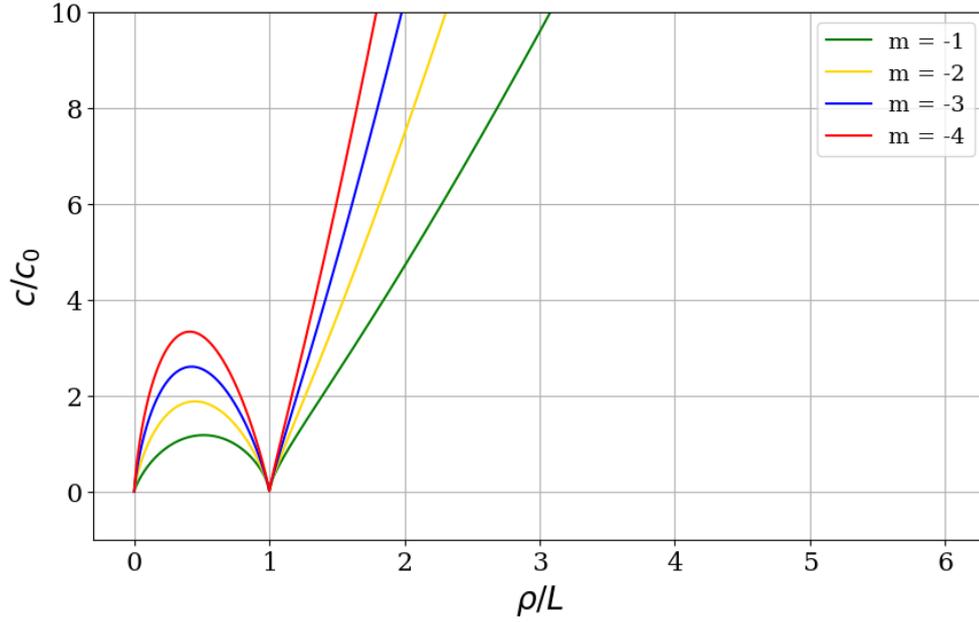


Рис. 26: Конфигурации безотражательных  $c(\rho)$  для отрицательных  $m$ .

Тем самым мы нашли счетное число таких  $c(\rho)$ , что распространение происходит безотражательно. И решение уравнения (52) запишется в виде

$$G(t, \tau) = \frac{1}{\tau^{2m-1}} \sum_{k=0}^{m-1} a_k \tau^k (f^{(k)}(\tau + t) + g^{(k)}(\tau - t)), \quad (59)$$

где коэффициенты

$$a_k = (-1)^k \frac{2^{k-1} A_{m-2}^{k-1}}{k! A_{2m-3}^{k-1}}, \quad \text{где } A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}, \quad m > 2. \quad (60)$$

Рассмотрим поведение волн при решении частного случая уравнения Эйлера-Дарбу-Пуассона, при  $m = 1$ . Решение уравнения тогда запишется в виде:

$$G(t, \tau) = \frac{f(t + \tau) + g(t - \tau)}{\tau} \quad (61)$$

В качестве примера рассмотрим волну, которая бежит к точке  $\rho = 0$ , в данном случае  $f(t + \tau)$ . Возьмем Гауссовский импульс  $f(t + \tau) = e^{-(t+\tau-a)^2}$ , где  $a$  - сдвиг. Тогда одно из решений:

$$G_1(t, \tau) = \frac{e^{-(t+\tau-a)^2}}{\tau} \quad (62)$$

$$G_1(t, \rho) = \frac{e^{-(t+\frac{\tau_0}{\ln \frac{\rho}{L}}-a)^2}}{\tau_0} \ln \frac{\rho}{L} \quad (63)$$

Так же как и в случае сведения к волновому уравнению мы наблюдаем сингулярность в точке  $\rho = L$ . Поэтому разобьем решение на 2 области определения (1)  $[0, L]$ , 2)  $[L, +\infty]$  и приведем визуализации для этих областей.

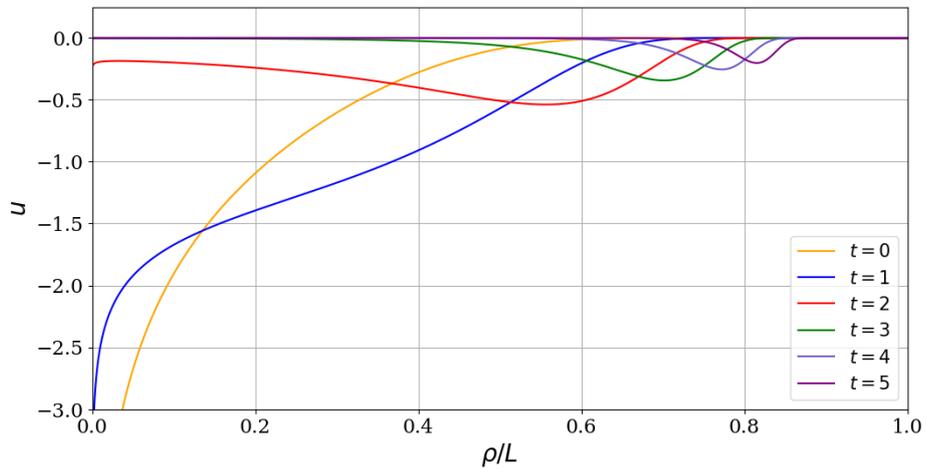


Рис. 27: Эволюция волны с параметрами  $m = 1$ ,  $a = 0$  в области  $[0, L]$ .

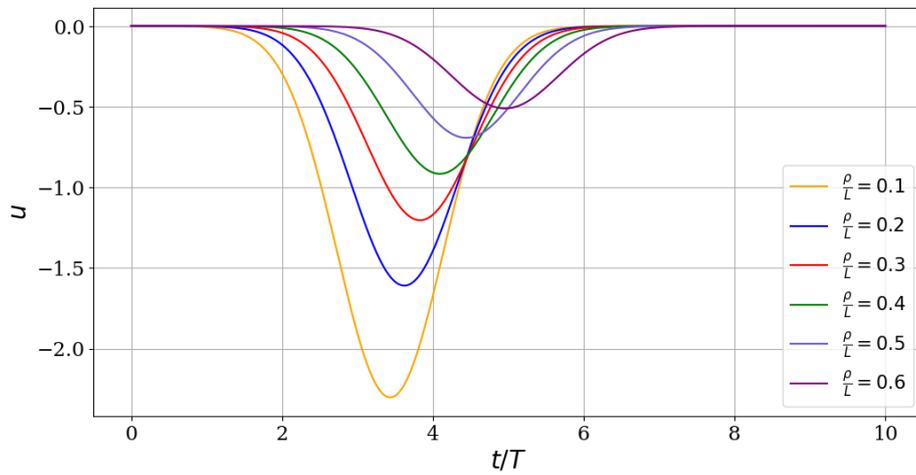


Рис. 28: Форма волны с параметрами  $m = 1$ ,  $a = 3$  на различных расстояниях (по горизонтали безразмерное время  $\frac{t}{T}$ ).

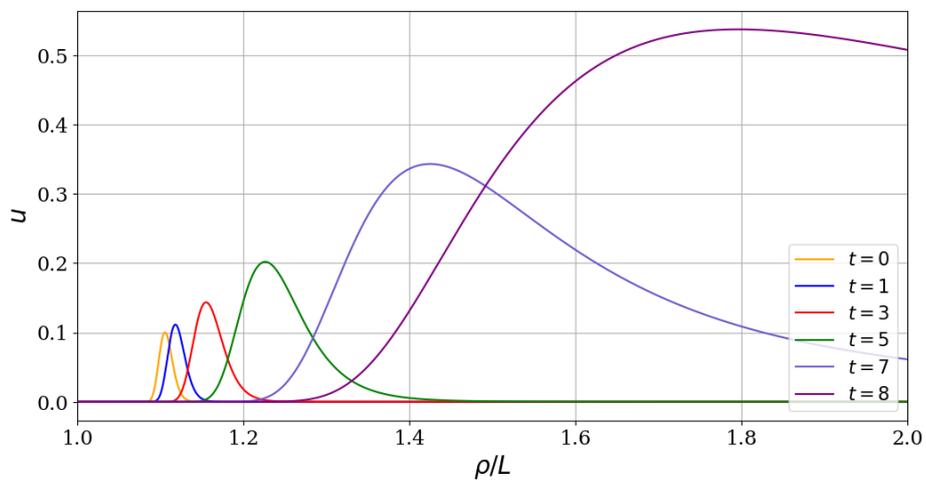


Рис. 29: Эволюция волны с параметрами  $m = 1$ ,  $a = 10$  в области  $[1, +\infty]$ .

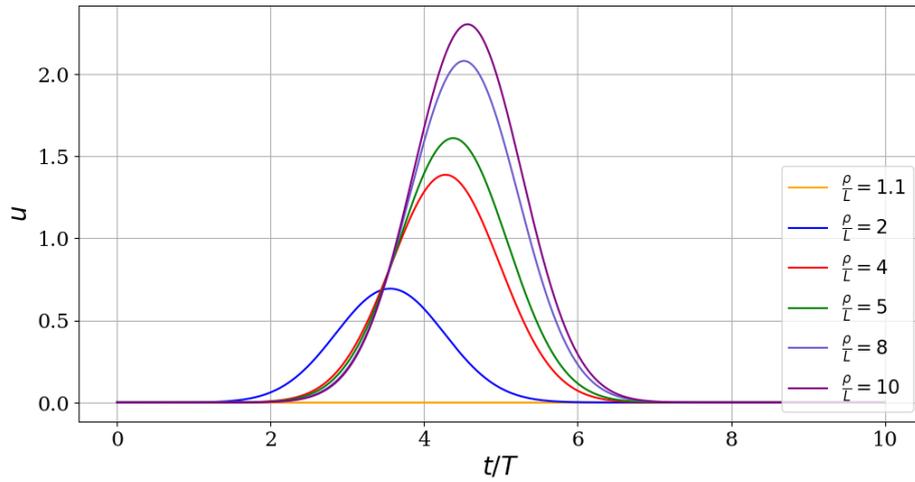


Рис. 30: Форма волны с параметрами  $m = 1$ ,  $a = 5$  на различных расстояниях (по горизонтали безразмерное время  $\frac{t}{T}$ ).

Для отрицательных  $m$  решения уравнения (52) запишутся в виде:

$$G(t, \tau) = \sum_{k=0}^{|m|} a_k \tau^k (f^{(k)}(\tau + t) + g^{(k)}(\tau - t)), \quad (64)$$

где коэффициенты

$$a_k = (-1)^k \frac{2^{k-1} A_{|m|-1}^{k-1}}{k! A_{2|m|-1}^{k-1}}, \quad \text{где } A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}. \quad (65)$$

Тогда решение для  $m = -1$ :

$$G(t, \tau) = (f(t + \tau) + g(t - \tau)) - \tau(\rho)(f'(t + \tau) + g'(t - \tau)). \quad (66)$$

Рассмотрим волну бегущую к берегу

$$G_1(t, \tau) = f(t + \tau) - \tau(\rho)f'(t + \tau) \quad (67)$$

В качестве примера также возьмем Гауссовский импульс  $f(t + \tau) = e^{-(t+\tau-a)^2}$

$$G_1(t, \rho) = e^{-(t+\tau-a)^2} - \tau(\rho)(e^{-(t+\tau-a)^2})' \quad (68)$$

$$G_1(t, \rho) = e^{-(t+\tau_0 \sqrt[3]{\ln \frac{\rho}{L}} - a)^2} (1 + 2\tau_0 \sqrt[3]{\ln \frac{\rho}{L}} (t + \tau_0 \sqrt[3]{\ln \frac{\rho}{L}} - a)) \quad (69)$$

Аналогично продемонстрируем эволюцию волны для двух областей.

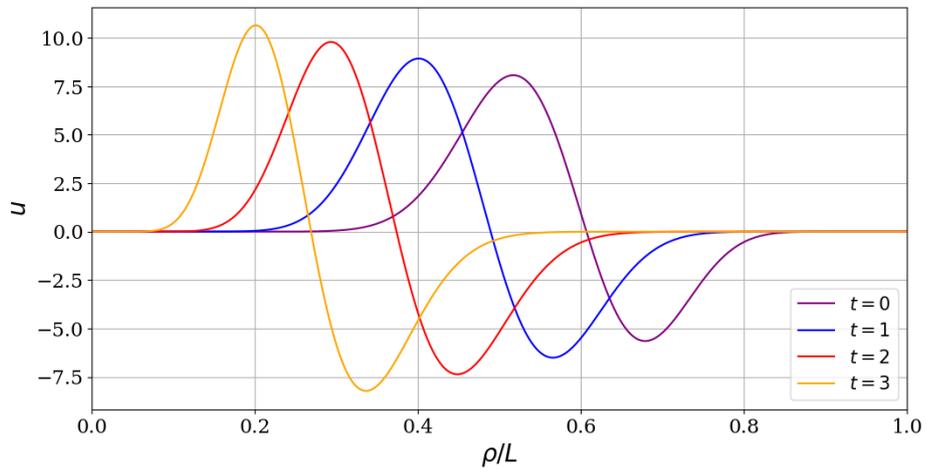


Рис. 31: Эволюция волны с параметрами  $m = -1$ ,  $a = -8$  в области  $[0, L]$ .

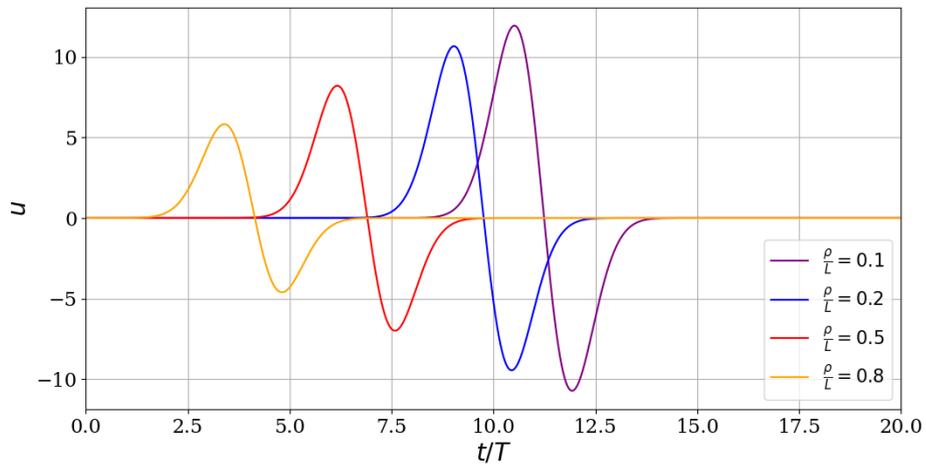


Рис. 32: Форма волны с параметрами  $m = 1$ ,  $a = -2$  на различных расстояниях (по горизонтали безразмерное время  $\frac{t}{T}$ ).

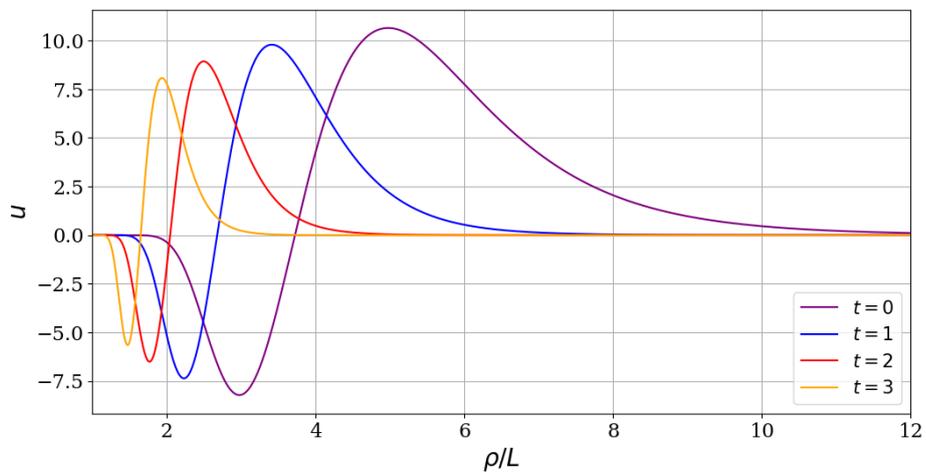


Рис. 33: Эволюция волны с параметрами  $m = -1$ ,  $a = 11$  в области  $[L, +\infty)$ .

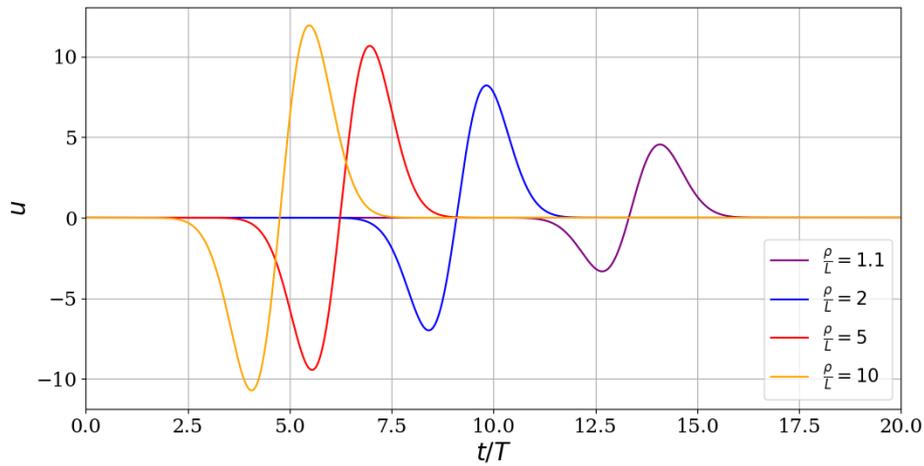


Рис. 34: Форма волны с параметрами  $m = 1$ ,  $a = 18$  на различных расстояниях (по горизонтали безразмерное время  $\frac{t}{T}$ ).

## 6 Заключение

В данной работе предложен и развит метод сведения волнового уравнения в цилиндрических координатах с переменными коэффициентами к другим уравнениям, с известными точными решениями. Этот метод позволил получить новый класс решений в виде бегущих волн волнового уравнения, описывающего эволюцию радиально симметричных волн в среде с переменной по радиусу скоростью распространения. Безотражательные решения получены в результате сведения исходного уравнения в цилиндрических координатах с переменной скоростью распространения волны к классическому волновому уравнению с постоянными коэффициентами, уравнению Клейна-Гордона с постоянными коэффициентами и уравнению Эйлера-Дарбу-Пуассона.

В случае сведения к волновому уравнению показано, что в решении на скорость волны помимо точки фокуса присутствует сингулярная точка  $\frac{\rho}{L} = 1$ , в которой скорость волны обращается в ноль. Поэтому решение волнового уравнения, представимое в виде двух волн, движущихся в противоположных направлениях, необходимо рассматривать отдельно в двух областях – справа и слева от этой точки. Показано, что в области  $0 < \frac{\rho}{L} < 1$  амплитуда сходящейся волны бесконечно нарастает, а расходящейся – наоборот, стремится к нулю. Обратный процесс происходит в области  $\frac{\rho}{L} > 1$ : амплитуда сходящейся волны затухает при приближении к  $\frac{\rho}{L} = 1$ , а расходящейся – увеличивается по мере удаления. В обеих областях в точке  $\frac{\rho}{L} = 1$  фаза волн стремится к бесконечности, так что волна не доходит до этой особой точки. Данные эффекты рассмотрены на примере эволюции гауссовых импульсов во времени и в пространстве. Очевидно, что результаты, полученные в данной работе, справедливы для импульсов любой формы.

В случае сведения к уравнению Клейна-Гордона произведен анализ монохроматической волны, получено дисперсионное соотношение. Для параметра  $P > 0$  сингулярных точек не наблюдалось и скорость не обращалась в ноль. Также из анализа фазы выяснено, что волна

доходит до точки  $\rho = \infty$  за конечное время. Результаты проиллюстрированы на примере синусоидальной волны. Для параметра  $P < 0$  обнаружено 3 сингулярные точки, в которых скорость обращается в ноль. Поэтому, аналогично, случаю сведения к волновому уравнению, решения необходимо рассматривать в трёх разных областях  $0 < \frac{\rho}{L} < e^{-\frac{1}{\sqrt{-Q}}}$ ,  $e^{-\frac{1}{\sqrt{-Q}}} < \frac{\rho}{L} < e^{\frac{1}{\sqrt{-Q}}}$ ,  $e^{\frac{1}{\sqrt{-Q}}} < \frac{\rho}{L} < +\infty$ . Такое разбиение следует сделать и для амплитуды и фазы.

В случае сведения к уравнению Эйлера-Дарбу-Пуассона наблюдались две точки сингулярности  $\frac{\rho}{L} = 0$ ,  $\frac{\rho}{L} = 1$ , а значит, решения также стоит рассматривать в двух различных областях определения. Скорость распространения ведет себя схожим образом для параметров  $m > 0$  и  $m < 0$ . Фаза в обоих случаях стретится к бесконечности в сингулярной точке  $\frac{\rho}{L} = 1$ . В точке  $\frac{\rho}{L} = 0$  для  $m > 0$  фаза стремится к 0, что говорит нам, что импульс дойдет до 0 за конечное время, для  $m < 0$  фаза стремиться к бесконечности. Данные эффекты рассмотрены на примере гауссовых импульсов.

Часть первой главе данной работы уже оформлена в статью под названием "Безотражательное распространение цилиндрических волн в сильно неоднородной среде" и отослана в "Журнал Средневолжского математического общества другая часть этой же главы, которая является развитием исследования предыдущей статьи также оформлена под названием "Цилиндрические бегущие волны в сильно неоднородной среде" и отослана в "Russian journal of mathematical physics". По материалам данной работы сделан постерный доклад, с которым выступал на "VIII Всероссийской научной студенческой конференции НИУ ВШЭ — Нижний Новгород" и занял первое место в разделе "Математические науки (постеры)".

В дальнейшем планируется перейти к рассмотрению системы уравнений мелкой воды в цилиндрических координатах и поиску безотражательных профилей дна, а так же продолжить модифицирование данных преобразований в рамках нелинейных задач.

## Список литературы

- [1] Петухов Ю. В. О возможности безотражательного распространения плоских акустических волн в непрерывно-стратифицированных средах // Акустический журнал. – 2022. – Т. 68. – №. 2. – С. 129-138.
- [2] Didenkulova I., Pelinovsky E., Soomere T. Long surface wave dynamics along a convex bottom // Journal of Geophysical Research: Oceans. – 2009. – Т. 114. – №. C7.
- [3] Pelinovsky E. et al. Nonlinear wave dynamics in self-consistent water channels // Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. – 2017. – Т. 50. – №. 50. – С. 505501.
- [4] Churilov S. M., Stepanyants Y. A. Reflectionless wave propagation on shallow water with variable bathymetry and current // Journal of Fluid Mechanics. – 2022. – Т. 931. – С. A15.
- [5] Pelinovsky E. et al. Interfacial long traveling waves in a two-layer fluid with variable depth // Studies in applied mathematics. – 2019. – Т. 142. – №. 4. – С. 513-527.

- [6] Петрухин Н. С., Пелиновский Е. Н., Талипова Т. Г. Безотражательное вертикальное распространение акустической волны в сильно неоднородной атмосфере // Известия Российской академии наук. Физика атмосферы и океана. – 2012. – Т. 48. – №. 2. – С. 189-189.
- [7] Петрухин Н. С., Пелиновский Е. Н., Бацына Е. К. Безотражательное распространение акустических волн в атмосфере Солнца // Письма в Астрономический журнал. – 2012. – Т. 38. – №. 6. – С. 439-439.
- [8] Пелиновский Е. Н., Капцов О. В. Бегущие волны в недиспергирующих сильно неоднородных средах // Доклады Российской академии наук. Физика, технические науки (ранее - Доклады Академии Наук. Физика). 2022. Т. 506. № 2. С. 46-51.
- [9] Melnikov I., Pelinovsky E. Euler–Darboux–Poisson Equation in Context of the Traveling Waves in a Strongly Inhomogeneous Media // Mathematics. – 2023. – Т. 11. – №. 15. – С. 3309.
- [10] Pelinovsky E., Kaptsov O. Traveling Waves in Shallow Seas of Variable Depths // Symmetry. – 2022. – Т. 14. – №. 7. – С. 1448.
- [11] Кадомцев Б. Б., Рыдник В. И. Волны вокруг нас. – 1981.
- [12] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика: Учебное пособие. В 10 т. VI. Гидродинамика. 3-е изд., перераб. – 1986.
- [13] Смирнов В. И. Курс высшей математики: Том третий. Часть вторая. – Издательство "Наука Главная редакция физико-математической литературы, 1974.
- [14] Grimshaw R., Pelinovsky D., Pelinovsky E. Homogenization of the variable-speed wave equation // Wave Motion. – 2010. – Т. 47. – №. 8. – С. 496-507.

## Приложение

В Оргкомитет Смотра дипломных работ математиков России  
от Шустовой Е. К

### Заявление о новизне

Сообщаю, что новыми в моей представленной на Смотр выпускной квалификационной работе под названием «Динамические свойства прямых и косых произведений дискретных динамических систем» являются все теоремы, следствия и утверждения за исключением утверждений, использованных в части «Вспомогательные утверждения».

Также сообщаю, что для проверки новизны было проделано следующее:

- В период с 30 января по 1 марта 2021 г. мною был произведен поиск в следующих поисковых системах: Яндекс, Google, arxiv.org по следующим ключевым словам: косые произведения, прямые произведения, все обнаруженные не содержали материала, заявляемого автором выпускной квалификационной работы в качестве нового. При поиске не было встречено работ или упоминаний работ, позволяющих усомниться в новизне материала, за исключением собственных публикаций автора в соавторстве с научным руководителем в журнале Средневолжского математического общества.
- Проведена серия консультаций с моим научным руководителем Бариновой Мариной Константиновной, доцентом кафедры фундаментальной математики факультета информатики, математики и компьютерных наук НИУ ВШЭ - Нижний Новгород.

Таким образом, по результатам поиска в сети Интернет и тематических научных базах, обсуждений с указанными выше специалистами, а также проверки антиплагиата НИУ ВШЭ следует, что, представленный в моей выпускной квалификационной работе указанный выше математический материал является новым.

Подтверждаю, что являюсь автором предоставляемой на Смотр работы и прошу принять её для участия в Смотре. Принимаю на себя обязательство соблюдать правила Смотра. Также (в соответствии с п. 4 Положения о Смотре) принимаю на себя обязательство оценить 5 работ участников Смотра, выданных мне Оргкомитетом в результате жеребьёвки и сверх того оценить 2-5 работ других участников Смотра на мой выбор. Я понимаю правила оценки работ, приведённые в п. 4.3 Положения о Смотре. Даю согласие на публикацию адреса моей электронной почты.

Защита работы состоялась 11.06.2024. На Смотр представлен проект текста работы.

Шустова Евгения Константиновна  
16.06.2024  
Нижний Новгород, Российская Федерация

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ»

**Факультет информатики, математики и компьютерных наук**

**Программа подготовки бакалавров по направлению  
01.03.01 Математика**

*Шустова Евгения Константиновна*

**ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА**

Динамические свойства прямых и косых произведений каскадов

Рецензент  
д. физ.-мат. наук, профессор

---

В. В. Ведюшкина

Руководитель работы  
канд. физ.-мат. наук, доцент

---

М. К. Барина

Нижний Новгород, 2024 г.

## Содержание

<b>1</b>	<b>Аннотация</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Введение и формулировка результатов</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Основные определения и вспомогательные утверждения</b>	<b>9</b>
3.1	Основные определения . . . . .	9
3.2	Вспомогательные утверждения . . . . .	10
<b>4</b>	<b>Динамические свойства косых произведений динамических систем</b>	<b>11</b>
4.1	Структура неблуждающего множества гомеоморфизмов из множества $\mathcal{H}$ . .	11
4.2	Структура цепно рекуррентного множества гомеоморфизмов из множества $\mathcal{H}$	15
<b>5</b>	<b>Примеры</b>	<b>17</b>
<b>6</b>	<b>Заключение</b>	<b>18</b>
	<b>Список литературы</b>	<b>20</b>

## 1 Аннотация

Одним из способов создания новых динамических систем является рассмотрение прямых произведений уже существующих систем, так, например, для прямых произведений можно показать сохранение таких свойств, как гиперболичность, омега и структурная устойчивость, исследовать структуру неблуждающего и цепно рекуррентного множеств, а также существование энергетических функций. Однако, если рассматривать группу произведения (группу гомеоморфизмов пространства слоя), состоящую не только из тождественного отображения, что является эквивалентным определению прямого произведения, то можно получить новые классы динамических систем, называемых косыми произведениями. В данной работе будут рассматриваться некоторые свойства косых произведений гомеоморфизмов, заданных на многообразии  $M_J$ , которое является факторпространством замкнутого топологического многообразия  $X \times \mathbb{R}$  по действию группы  $\Gamma$  степеней гомеоморфизма  $\gamma: X \times \mathbb{R} \rightarrow X \times \mathbb{R}$ , определенного формулой  $\gamma(x, r) = (J(x), r - 1)$ , где  $J: X \rightarrow X$  - гомеоморфизм, действующий на многообразии  $X$ , с естественной проекцией  $p_J: X \times \mathbb{R} \rightarrow M_J$ , а именно показано, что неблуждающее множество гомеоморфизмов из данного класса гомеоморфно прямому произведению неблуждающих множеств гомеоморфизма  $J^l P^k: X \rightarrow X$  и некоторого гомеоморфизма окружности, кроме того, показано, что такая структура сохраняется не только для неблуждающих, но и для цепно рекуррентных множеств.

## 2 Введение и формулировка результатов

Впервые термин прямое или «декартово» произведение для двух множеств ввел Георг Кантор. Однако понятие прямого произведения можно естественно обобщить на произведение множеств с дополнительной топологической структурой, поскольку прямое произведение множеств часто наследует строение исходных. Топология на таких множествах впервые была введена А. Тихоновым в 1926 году [1]. В работе Д. Вайзмена [2] были изучены некоторые динамические свойства прямых произведений непрерывных отображений и диффеоморфизмов. В частности, было доказано, что цепно рекуррентное множество прямого произведения непрерывных отображений является прямым произведением их цепно рекуррентных множеств соответственно, но данное свойство не может быть распространено на неблуждающее.

Первый результат настоящей работы, полученный автором независимо от Д. Вайзмена [2], опубликованный в [3], касается структуры цепно рекуррентного и неблуждающего множеств прямого произведения гомеоморфизмов.

**Теорема 1.** *Цепно рекуррентное множество прямого произведения  $f \times g$  гомеоморфизмов  $f$  и  $g$  совпадает с прямым произведением их цепно рекуррентных множеств, причем каждая цепная компонента гомеоморфизма  $f \times g$  является прямым произведением некоторых цепных компонент  $f$  и  $g$ .*

Любая неблуждающая точка, очевидно, является цепно рекуррентной для любой метрики, однако структура цепно рекуррентного и неблуждающего множеств для прямого произведения является различной.

**Теорема 2.** *Неблуждающее множество прямого произведения гомеоморфизмов является подмножеством прямого произведения их неблуждающих множеств.*

Следующая теорема касается гиперболичности прямого произведения гиперболических множеств.

**Теорема 3.** *Прямое произведение гиперболических множеств  $\Lambda_f$  и  $\Lambda_g$  диффеоморфизмов  $f$  и  $g$  является гиперболическим множеством диффеоморфизма  $f \times g$ .*

Условие гиперболичности цепно рекуррентного множества диффеоморфизма эквивалентно  $\Omega$ -устойчивости системы (см., например, [4]). Тогда результат, сформулированный ниже, является непосредственным следствием теорем 1 и 3.

**Следствие 2.1.** *Если диффеоморфизмы  $f$  и  $g$  являются  $\Omega$ -устойчивыми, то их прямое произведение  $f \times g$  также будет  $\Omega$ -устойчивым диффеоморфизмом.*

В свою очередь гиперболичность неблуждающего множества диффеоморфизма является одним из условий аксиомы А, введенной С. Смейлом в 1967 году [5]. Полная ее формулировка звучит следующим образом: пусть  $f : M^n \rightarrow M^n$  – диффеоморфизм, заданный на гладком замкнутом  $n$ -многообразии.  $f$  удовлетворяет аксиоме А, если

- неблуждающее множество  $NW(f)$  гиперболично;
- множество периодических точек  $Per(f)$  плотно в  $NW(f)$ .

Выполнение условий аксиомы А для прямого произведения А-диффеоморфизмов также было доказано в данной работе, а значит имеет место следующая теорема.

**Теорема 4.** *Прямое произведение А-диффеоморфизмов является А-диффеоморфизмом.*

Согласно теореме о структурной устойчивости [6][Теорема 1.2.4], диффеоморфизм  $f : M^n \rightarrow M^n$  является структурно устойчивым тогда и только тогда, когда он удовлетворяет аксиоме А и сильному условию трансверсальности, то есть устойчивые и неустойчивые многообразия точек неблуждающего множества А-диффеоморфизма имеют только трансверсальные пересечения. Следующий результат показывает, что свойство структурной устойчивости сохраняется для прямого произведения диффеоморфизмов.

**Теорема 5.** *Если диффеоморфизмы  $f$  и  $g$  являются структурно устойчивыми, то их прямое произведение  $f \times g$  также будет структурно устойчивым диффеоморфизмом.*

Еще один вопрос, который был исследован в настоящей работе, касается существования энергетической функции – гладкой функции Ляпунова, множество критических точек которой совпадает с цепно рекуррентным множеством системы – для прямого произведения диффеоморфизмов  $f$  и  $g$ , уже обладающих энергетическими функциями, а также, если у одного из множителей энергетическая функция отсутствует.

Согласно результатам Ч. Конли [7], функция Ляпунова существует для любой динамической системы, а сам факт существования носит название «Фундаментальная теорема динамических систем». Дж. Фрэнкс в 1985 [8] доказал, что у любого гладкого потока на компактном многообразии есть энергетическая функция. Таким образом, вопрос о существовании такой функции для непрерывных динамических систем был решен, однако открытым оставался вопрос, какие дискретные системы допускают энергетические функции.

Первые результаты в этой области были получены Д. Пикстоном: в 1977 году [9] он доказал существование энергетической функции Морса у любого диффеоморфизма Морса-Смейла на поверхности. Однако даже регулярные диффеоморфизмы на многообразиях размерности  $n \geq 3$  не обязательно обладают такой функцией. Именно Пикстон в 1977 году первым построил пример диффеоморфизма на 3-сфере, не имеющего энергетической функции. Этот эффект связан с диким вложением сепаратрис седловых точек в объемлющее многообразие. В.З. Гринес, Ф. Лауденбах и О.В. Починка в 2012 году [10] нашли достаточные условия существования энергетической функции для 3-диффеоморфизмов Морса-Смейла. Кроме того, в настоящее время активно изучается вопрос существования энергетических функций для омега-устойчивых диффеоморфизмов с хаотической динамикой, заданных на 2- и 3-многообразиях. В работе В.З Гринеса, М.К Бариновой, О.В Починки был доказан такой факт, как существование энергетической функции для трехмерных каскадов с гиперболической хаотической динамикой [11].

Сформулируем теорему о существовании энергетической функции для прямого произведения диффеоморфизмов.

**Теорема 6.** *Если диффеоморфизмы  $f$  и  $g$  обладают энергетической функцией, причем хотя бы у одного из них конечное число цепных компонент, то их прямое произведение  $f \times g$  будет иметь энергетическую функцию в виде взвешенной суммы энергетических функций для диффеоморфизмов  $f$  и  $g$ .*

В силу теоремы о спектральном разложении [5] у любого  $\Omega$ -устойчивого диффеоморфизма конечное число цепных компонент, тогда имеет место следствие:

**Следствие 2.2.** *Если  $\Omega$ -устойчивые диффеоморфизмы  $f$  и  $g$  обладают энергетической функцией, то их прямое произведение  $f \times g$  будет иметь энергетическую функцию в виде взвешенной суммы энергетических функций для диффеоморфизмов  $f$  и  $g$ .*

Рассмотрим прямое произведение структурно устойчивого диффеоморфизма  $f_1 : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ , заданного на двумерном торе  $\mathbb{T}^2$ , неблуждающее множество которого содержит нульмерное нетривиальное базисное множество без пар сопряженных точек, и тождественного диффеоморфизма  $f_2 = Id : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Из работы [12] следует факт отсутствия энергетической функции у диффеоморфизма  $f_1$ , а энергетическая функция для диффеоморфизма  $f_2$  — константа на  $\mathbb{R}$ . Таким образом, в настоящей работе была получена следующая теорема, опубликованная в [13].

**Теорема 7.** *Существует пример, показывающий, что если допустить, что один из каскадов (например,  $f_1$ ) не имеет энергетической функции, то можно подобрать каскад  $f_2$  таким образом, что их прямое произведение будет обладать энергетической функцией.*

Однако другая динамика возникает при рассмотрении более сложной структуры произведения динамических систем, а именно косых. Первые общие определения, касающиеся теории косых произведений, были даны Уитнеем [14], а затем данная теория была более подробно развита Хопфом [15], который определил новое направление в изучении топологических вопросов дифференциальной геометрии.

Термин «косое произведение» был впервые введен в статье [16], а затем в [17], [18] была выявлена взаимосвязь косых произведений и марковских процессов, имеющих устойчивое распределение, тем самым была показана применимость данной теории в нескольких разделах математики.

К 1980 году произошло полное формирование одномерной динамики косых произведений и ее оформление в самостоятельный раздел теории динамических систем [19]. Благодаря этому, с одной стороны, стали рассматриваться динамические системы на одномерных континуумах с более сложной топологической структурой, чем структура окружности или отрезка, а с другой стороны, стал возможен переход к изучению динамических систем на простейших многообразиях. Первой работой, в которой началось исследование данного направления, является [20], где классическая теорема А. Н. Шарковского [21] обобщена на

случай косых произведений на  $n$ -мерных клетках для  $n > 2$ . Сложности исследования динамических систем на многообразиях связаны с влиянием на динамику рассматриваемой системы свойств отображений в слоях, например, Ю. С. Ильяшенко установил [22], что переход от простых динамических систем к сложным обратимым системам в размерностях  $> 3$  может сопровождаться, в частности, появлением странных аттракторов, частично гиперболических инвариантных множеств, изучение которых связано с различными аспектами динамики обратимых косых произведений, заданных на многообразиях размерности  $n > 3$ .

Ранее в работах В.З. Гринеса, Ю.А. Левченко, В.С. Медведева и О.В. Починки [23], [24] была изучена динамика  $A$ -диффеоморфизмов трёхмерных многообразий в предположении, что их неблуждающее множество состоит из поверхностных двумерных базисных множеств. Доказано, что диффеоморфизмы такого класса объемлюще  $\Omega$ -сопряжены косым произведениям аносовского диффеоморфизма двумерного тора и грубого преобразования окружности. Для структурно устойчивых диффеоморфизмов рассматриваемого класса доказана их топологическая сопряженность с косыми произведениями, а также в работе [25] были обобщены результаты работ [23], [24] на более широкий класс отображений.

В данной работе рассматриваются отображения, заданные на косых произведениях многообразий, определенные следующим образом:

Рассмотрим наборы чисел  $n, k, l$ , таких, что  $n, k \in \mathbb{N}$  и  $l = 0$ , если  $k = 1$ , и  $l \in \{1, \dots, k-1\}$  и является взаимно простым с  $k$ , если  $k > 1$ . Для каждого набора  $n, k, l$  определим диффеоморфизм  $\bar{\varphi}_{n,k,l} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  формулой

$$\bar{\varphi}_{n,k,l}(r) = r + \frac{1}{4\pi nk} \sin(2\pi nkr) + \frac{l}{k}. \quad (1)$$

(см. рисунок 1).

Представим окружность как подмножество комплексной плоскости  $\mathbb{S}^1 = \{e^{i2\pi\phi} \mid 0 \leq \phi < 1\}$ . Зададим накрытие  $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$  формулой  $p(r) = s$ , где  $s = e^{i2\pi r}$ .

Определим на полуинтервале  $[0, 1)$  и окружности  $\mathbb{S}^1$  метрики  $d_r$  и  $d_s$ , соответственно, формулами

$$d_r(r_1, r_2) = \min(|r_1 - r_2|, 1 - |r_1 - r_2|), \quad (2)$$

$$d_s(s_1, s_2) = d_r(r_1, r_2), \quad (3)$$

$$\text{где } r_1 = p^{-1}(s_1) \cap [0, 1), r_2 = p^{-1}(s_2) \cap [0, 1).$$

Так как  $\bar{\varphi}_{n,k,l}(r) + 1 = \bar{\varphi}_{n,k,l}(r + 1)$ , то диффеоморфизм  $\bar{\varphi}_{n,k,l}$  является поднятием отображения окружности  $\varphi_{n,k,l}(s) = p(\bar{\varphi}_{n,k,l}(p^{-1}(s)))$ , где  $p^{-1}(s)$  – полный прообраз точки  $s \in \mathbb{S}^1$  (см. [27, Утверждение 10.2.26]). Положим  $b_i = p(\frac{i}{2nk}) \in \mathbb{S}^1$  ( $i \in \{0, \dots, 2nk - 1\}$ ). Непосредственно проверяется, что неблуждающее множество  $NW(\varphi_{n,k,l})$  отображения  $\varphi_{n,k,l} : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$  совпадает с его цепно рекуррентным множеством  $CR(\varphi_{n,k,l})$  и состоит из  $2nk$  периодических точек  $b_0, \dots, b_{2nk-1}$  периода  $k$ , при этом каждая точка  $b_i$  с нечётным индексом  $i$  является стоковой точкой диффеоморфизма  $\varphi_{n,k,l}^k$ , а с чётным – источниковой. Положим  $\mathcal{T}_{nk} = p^{-1}(NW(\varphi_{n,k,l}))$ . Тогда  $\mathcal{T}_{nk} = \left\{ \frac{i}{2nk}, i \in \mathbb{Z} \right\}$ .

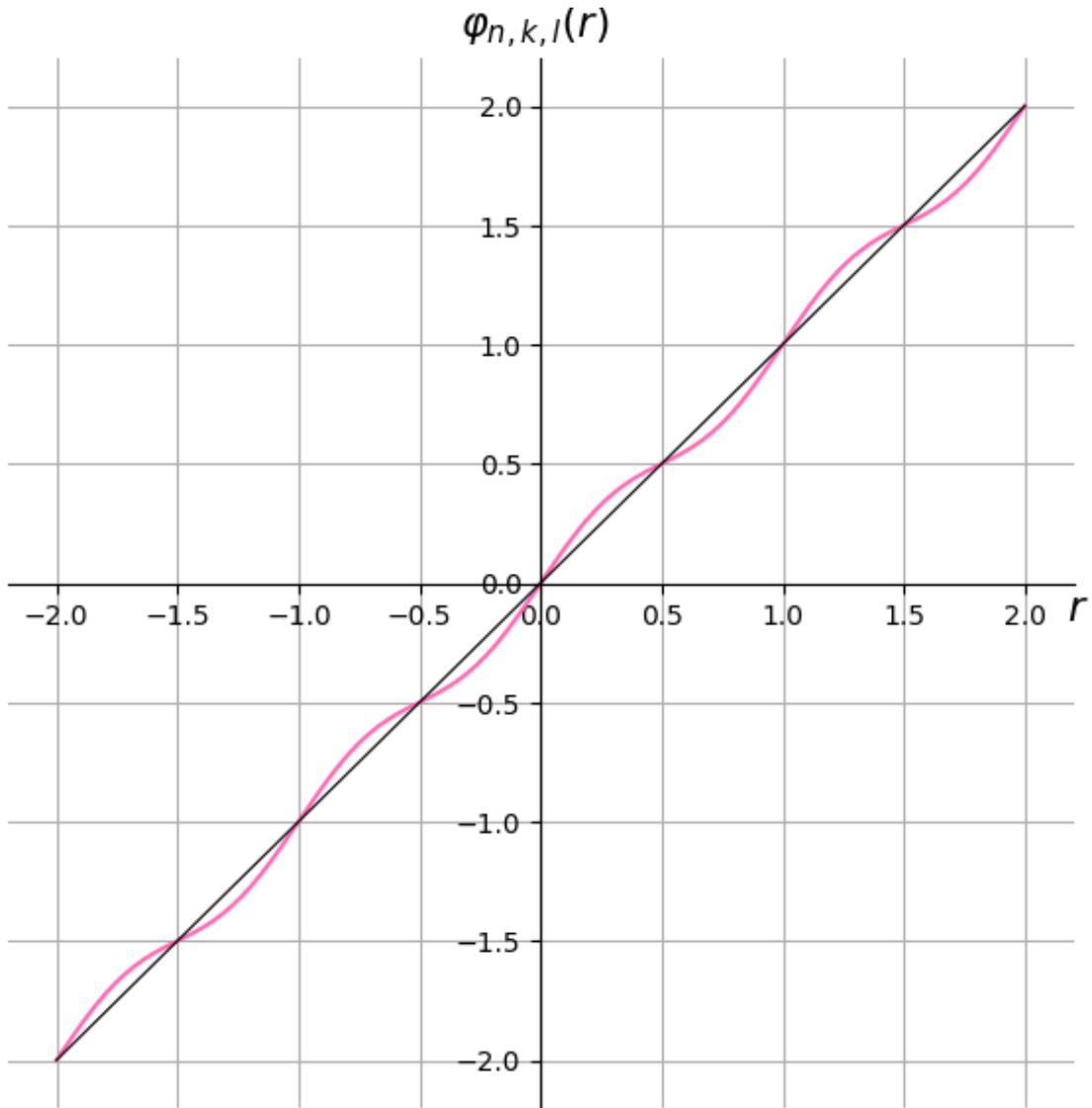


Рис. 1: График диффеоморфизма  $\bar{\varphi}_{n,k,l}$  для набора  $(n, k, l) = (1, 1, 0)$

Обозначим через  $X$  замкнутое топологическое многообразие размерности  $n \in \mathbb{N}$  с метрикой  $d_x$ .

Для гомеоморфизма  $P: X \rightarrow X$  обозначим через  $Z(P)$  его централизатор  $Z(P) = \{J: X \rightarrow X \mid PJ = JP\}$ .

Представим многообразие  $M_J$  как факторпространство многообразия  $X \times \mathbb{R}$  по действию группы  $\Gamma = \{\gamma^i, i \in \mathbb{Z}\}$  степеней гомеоморфизма  $\gamma: X \times \mathbb{R} \rightarrow X \times \mathbb{R}$ , заданного формулой

$$\gamma(x, r) = (J(x), r - 1), \quad (4)$$

с естественной проекцией  $p_J: X \times \mathbb{R} \rightarrow M_J$ .

Для гомеоморфизмов  $P, J: X \rightarrow X$  и  $\bar{\varphi}_{n,k,l}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  определим отображение  $\bar{\varphi}_{P,J,n,k,l}: X \times \mathbb{R} \rightarrow X \times \mathbb{R}$  формулой

$$\bar{\varphi}_{P,J,n,k,l}(x, r) = (P(x), \bar{\varphi}_{n,k,l}(r)). \quad (5)$$

Тогда сформулируем утверждение, корректность которого будет доказываться в 4.1.

**Утверждение 1. Формула**

$$\varphi_{P,J,n,k,l}(w) = p_J(\bar{\varphi}_{P,J,n,k,l}(p_J^{-1}(w))), \quad (6)$$

где  $w \in M_J$  и  $p_J^{-1}(w)$  – полный прообраз точки  $w \in M_J$ , корректно определяет гомеоморфизм  $\varphi_{P,J,n,k,l}: M_J \rightarrow M_J$  тогда и только тогда, когда выполняется равенство  $\bar{\varphi}_{P,J,n,k,l}\gamma = \gamma\bar{\varphi}_{P,J,n,k,l}$ .

Множество всех гомеоморфизмов вида  $\varphi_{P,J,n,k,l}$  обозначим через  $\Phi$ .

**Теорема 8.** Пусть  $\varphi_{P,J,n,k,l} \in \Phi$ . Тогда неблуждающее множество  $NW(\varphi_{P,J,n,k,l})$  гомеоморфизма  $\varphi_{P,J,n,k,l}$  совпадает с множеством  $p_J(NW(J^l P^k) \times \mathcal{T}_{nk})$  и гомеоморфно прямому произведению  $NW(J^l P^k) \times NW(\varphi_{n,k,l})$  неблуждающих множеств гомеоморфизмов  $J^l P^k$  и  $\varphi_{n,k,l}$ .

Определим на пространстве  $X \times [0, 1)$  и многообразии  $M_J$  метрики  $d_{\bar{w}}$  и  $d_w$ , соответственно, формулами

$$d_{\bar{w}}(\bar{w}_1, \bar{w}_2) = \max(d_x(x_1, x_2), d_r(r_1, r_2)), \quad (7)$$

где  $\bar{w}_1 = (x_1, r_1)$ ,  $\bar{w}_2 = (x_2, r_2)$ ;  $(x_i, r_i) \in X \times \mathbb{R}$ ;

$$d_w(w_1, w_2) = d_{\bar{w}}(\bar{w}_1, \bar{w}_2), \quad (8)$$

где  $\bar{w}_1 = p_J^{-1}(w_1) \cap (X \times [0, 1))$ ,  $\bar{w}_2 = p_J^{-1}(w_2) \cap (X \times [0, 1))$ .

**Теорема 9.** Пусть  $\varphi_{P,J,n,k,l} \in \Phi$ . Тогда цепно рекуррентное множество  $CR(\varphi_{P,J,n,k,l})$  гомеоморфизма  $\varphi_{P,J,n,k,l}$  совпадает с множеством  $p_J(CR(J^l P^k) \times \mathcal{T}_{nk})$  и гомеоморфно прямому произведению  $CR(J^l P^k) \times CR(\varphi_{n,k,l})$  цепно рекуррентных множеств гомеоморфизмов  $J^l P^k$  и  $\varphi_{n,k,l}$ .

### 3 Основные определения и вспомогательные утверждения

#### 3.1 Основные определения

В теории динамических систем широко используется такой тип возвращаемости, как цепно рекуррентные точки, определяемый с помощью  $\varepsilon$ -цепей.  $\varepsilon$ -цепью длины  $\kappa = \kappa(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ , соединяющей точку  $w \in M$  с точкой  $w' \in M$  для гомеоморфизма  $f: M \rightarrow M$  называется последовательность  $w = w_0, \dots, w_n = w'$  точек в  $M$  такая, что  $d(f(w_{i-1}), w_i) < \varepsilon$  для  $1 \leq i \leq n$ . Точка  $x \in M$  называется *цепно рекуррентной* для каскада  $f$ , если для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\varepsilon$ -цепь  $C(x, \varepsilon, n)$  длины  $n$ , соединяющая её с самой собой. Обозначим через  $C(w, \varepsilon, \kappa(\varepsilon))$  множество всех точек, входящих в произвольную  $\varepsilon$ -цепь длины  $\kappa(\varepsilon)$  цепно рекуррентной точки  $w \in M$ . Множество всех цепно рекуррентных точек называется *цепно рекуррентным множеством* и обозначается через  $CR(f)$ .

Точка  $w \in M$  называется *блуждающей* для гомеоморфизма  $f: M \rightarrow M$ , если существует открытая окрестность  $U_w$  точки  $w$  такая, что  $f^n(U_w) \cap U_w = \emptyset$  для всех  $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ . В противном случае говорят, что  $w$  – *неблуждающая* точка, т.е. для любой открытой окрестности  $U_w$  точки  $w$  существует  $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  такое, что  $f^n(U_w) \cap U_w \neq \emptyset$ . Множество всех неблуждающих точек гомеоморфизма  $f$  называется *неблуждающим множеством* гомеоморфизма  $f$  и обозначается через  $NW(f)$ .

Пусть  $M_1$  и  $M_2$  – метрические пространства с метриками  $d_1$  и  $d_2$  соответственно. Тогда  $M = M_1 \times M_2$  с метрикой  $d$ , введенной следующим образом:

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{d_1^2(x_1, x_2) + d_2^2(y_1, y_2)}, \quad \text{где } (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in M,$$

также является метрическим пространством. *Прямым произведением гомеоморфизмов*  $f: M_1 \rightarrow M_1$  и  $g: M_2 \rightarrow M_2$  называют гомеоморфизм  $f \times g$ , который действует на  $M = M_1 \times M_2$  следующим образом: если  $(x, y) \in M$ , то  $(f \times g)(x, y) = (f(x), g(y))$ .

Прямое произведение  $B = X \times Y$  называется *косым произведением*, которое включает в себя:

1. топологическое пространство  $B$ , которое называется пространством произведения;
2. топологическое пространство  $X$ , которое называется базисным пространством;
3. непрерывное отображение  $p: B \rightarrow X$  пространства  $B$  на пространство  $X$ , называемое проекцией;
4. пространство  $Y_x = p^{-1}(x)$ , которое называется слоем над точкой  $x$  пространства  $X$ ;
5.  $G$  - группа гомеоморфизмов пространства  $Y$ .

Требуется чтобы каждый  $Y_x$  был гомеоморфен слою  $Y$ . Наконец, для каждой точки  $x \in$

$X$ , должна существовать такая окрестность  $V$  и такой гомеоморфизм

$$\varphi : V \times Y \rightarrow p^{-1}(V),$$

что

$$p\varphi(x', y) = x', x' \in V, y \in Y.$$

Пусть  $f : M^n \rightarrow M^n$  – диффеоморфизм, заданный на гладком многообразии размерности  $n$ . Компактное  $f$ -инвариантное множество  $\Lambda \subset \text{int } M^n$  называется *гиперболическим*, если для каждого  $x \in \Lambda$  касательное пространство  $T_x M^n$  представляется в виде прямой суммы подпространств  $E_x^s, E_x^u, T_x M^n = E_x^s \oplus E_x^u$  такой, что

а)  $Df(E_x^s) = E_{f(x)}^s, Df(E_x^u) = E_{f(x)}^u$ ;

б) для некоторых фиксированных  $c > 0$  и  $0 < \lambda < 1$

$$\|Df^k(v)\| \leq c\lambda^k \|v\|, v \in E_x^s, k > 0,$$

$$\|Df^{-k}(v)\| \leq c\lambda^k \|v\|, v \in E_x^u, k > 0;$$

в)  $E_x^s, E_x^u$  меняются непрерывно при изменении  $x \in \Lambda$ .

Диффеоморфизм  $f : M^n \rightarrow M^n$  называется  $\Omega$ -устойчивым, если  $C^1$ -близкие к  $f$  диффеоморфизмы топологически сопряжены на неблуждающих множествах, то есть, если существует  $\varepsilon > 0$  такое, что для любого диффеоморфизма  $g : M^n \rightarrow M^n : \|f - g\|_{C^1} < \varepsilon$  существует гомеоморфизм  $\varphi : NW(f) \rightarrow NW(g)$  такой, что  $\varphi \circ f_{NW(f)} = g \circ \varphi$ .

*Функцией Ляпунова* [7] для гомеоморфизма  $f : M^n \rightarrow M^n$  называется непрерывная функция  $\varphi : M^n \rightarrow \mathbb{R}$  со следующими свойствами:

1) если  $x \notin R_f$ , то  $\varphi(f(x)) < \varphi(x)$ ;

2) если  $x, y \in R_f$ , то  $\varphi(x) = \varphi(y)$  тогда и только тогда, когда  $x$  и  $y$  лежат в одной цепной компоненте;

3)  $\varphi(R_f)$  – компактное нигде не плотное подмножество прямой  $\mathbb{R}$ .

В гладкой категории часто используют понятие энергетической функции. *Энергетическая функция* для диффеоморфизма  $f : M^n \rightarrow M^n$  – это гладкая функция Ляпунова, множество критических точек которой совпадает с цепно рекуррентным множеством системы.

### 3.2 Вспомогательные утверждения

**Утверждение 2.** [25, Лемма 4.1] Пусть  $f_1 : X \rightarrow X, f_2 : Y \rightarrow Y$  – гомеоморфизмы топологических пространств  $X$  и  $Y$  такие, что  $f_2$  является фактором  $f_1$  с полусопряжением  $h : X \rightarrow Y$ . Тогда  $h(NW(f_1)) \subset NW(f_2)$ .

**Утверждение 3.** [29, Theorem B] Пусть  $X$  локально связно и  $x \in X$ ,  $f : X \rightarrow X$  - гомеоморфизм. Тогда следующие утверждения эквивалентны.

1.  $x \notin CR(f)$
2. Существует открытое связное множество  $U$  и целые положительные числа  $p$  и  $q$ , такие что  $x \notin U$ ,  $f^p(\text{cl } U) \subset U$ , и  $f^{pq}(x) \in U$

**Утверждение 4.** [28, Statement 10.35] Пусть циклические группы  $G, G'$  с образующими  $g, g'$  действуют свободно и разрывно на  $G, G'$ -пространстве  $X$ . Тогда, если  $\bar{h} : X \rightarrow X$  - гомеоморфизм такой, что  $\bar{h}(g(\bar{x})) = g'(\bar{h}(\bar{x}))$  для любого  $\bar{x} \in X$ , то отображение  $h : X/G \rightarrow X/G'$ , заданное формулой  $h = p_{X/G'}(\bar{h}(p_{X/G}^{-1}(x)))$ , является гомеоморфизмом.

## 4 Динамические свойства косых произведений динамических систем

### 4.1 Структура неблуждающего множества гомеоморфизмов из множества $\mathcal{H}$

Настоящий раздел содержит доказательство теоремы 8 и вспомогательных лемм.

Докажем, что формула из утверждения 1

$$\varphi_{P,J,n,k,l}(w) = p_J(\bar{\varphi}_{P,J,n,k,l}(p_J^{-1}(w))),$$

корректно определяет гомеоморфизм  $\varphi_{P,J,n,k,l} : M_J \rightarrow M_J$  тогда и только тогда, когда выполняется равенство  $\bar{\varphi}_{P,J,n,k,l}\gamma = \gamma\bar{\varphi}_{P,J,n,k,l}$ .

*Доказательство.* Обозначим через  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  диффеоморфизм, заданный формулой:

$$\alpha(r) = r - 1 \tag{9}$$

Тогда

$$\gamma(x, r) = (J(x), \alpha(r)) \tag{10}$$

Напомним, что диффеоморфизм  $\bar{\varphi}_{P,J,n,k,l} : X \times \mathbb{R} \rightarrow X \times \mathbb{R}$  задается формулой:

$$\bar{\varphi}_{P,J,n,k,l}(x, r) = (P(x), \bar{\varphi}_{n,k,l}(r)), \tag{11}$$

а диффеоморфизм  $\varphi_{n,k,l} : R \rightarrow R$  формулой:

$$\bar{\varphi}_{n,k,l}(r) = r + \frac{1}{4\pi nk} \sin(2\pi nkr) + \frac{l}{k}. \tag{12}$$

Согласно (4), диффеоморфизм  $\varphi_{n,k,l}$  проецируется с помощью естественной проекции  $p_J : X \times R \rightarrow M_J$  в диффеоморфизм  $\varphi_{P,J,n,k,l}(w) = p_J(\bar{\varphi}_{P,J,n,k,l}(p_J^{-1}(w)))$ ,  $w \in M_J$  при выполнении следующего условия:

$$\bar{\varphi}_{P,J,n,k,l}\gamma = \gamma^m \bar{\varphi}_{P,J,n,k,l}, m \in \{-1, 1\} \quad (13)$$

Подставляя (10) и (11) в (13), получим:

$$(P(J(x)), \bar{\varphi}_{n,k,l}(\alpha(r))) = (J^m(P(x)), \alpha^m(\varphi_{n,k,l}(r))), \quad (14)$$

откуда

$$\varphi_{n,k,l}\alpha = \alpha^m \varphi_{n,k,l} \quad (15)$$

Из формул (9), (12) и (15) следует, что:  $m = 1$ , а значит  $PJ = JP$  и

$$\bar{\varphi}_{P,J,n,k,l}\gamma = \gamma \bar{\varphi}_{P,J,n,k,l}. \quad (16)$$

□

Напомним, что отображение  $f_2: Y \rightarrow Y$  топологического пространства  $Y$  называется *фактором* отображения  $f_1: X \rightarrow X$  топологического пространства  $X$ , если существует сюръективное непрерывное отображение  $h: X \rightarrow Y$  такое, что  $hf_1 = f_2h$ . Отображение  $h$  называется *полусопряжением*.

Обозначим через  $h_J: M_J \rightarrow \mathbb{S}^1$  отображение, заданное формулой  $h_J(w) = p(r)$ , где  $w = p_J(x, r) \in M_J$ .

**Лемма 4.1.** Пусть  $\varphi_{P,J,n,k,l} \in \Phi$ . Тогда гомеоморфизм  $\varphi_{n,k,l}$  является фактором гомеоморфизма  $\varphi_{P,J,n,k,l}$  с полусопряжением  $h_J$ , то есть

$$h_J \varphi_{P,J,n,k,l} = \varphi_{n,k,l} h_J. \quad (17)$$

*Доказательство.* Формула (6) эквивалентна формуле

$$p \bar{\varphi}_{n,k,l} = \varphi_{n,k,l} p. \quad (18)$$

Рассмотрим правую часть равенства (17):  $\varphi_{n,k,l}(h_J(w)) = \varphi_{n,k,l}(h_J(p_J(x, r))) = \varphi_{n,k,l}(p(r))$ .

Рассмотрим левую часть равенства (17):  $h_J(\varphi_{P,J,n,k,l}(w)) = h_J(\varphi_{P,J,n,k,l}(p_J(x, r))) = h_J(p_J(\bar{\varphi}_{P,J,n,k,l}(x, r))) = h_J(p_J(P(x), \bar{\varphi}_{n,k,l}(r)))$ .

Таким образом,  $h_J \varphi_{P,J,n,k,l} = \varphi_{n,k,l} p_J$ .

□

Пусть  $\varphi_{P,J,n,k,l} \in \Phi$ . Для  $i \in \{0, \dots, 2nk - 1\}$  положим  $\mathcal{B}_i = p_J(X \times \{\frac{i}{2nk}\}) \subset M_J$ .

**Утверждение 5.** Пусть  $\varphi_{P,J,n,k,l} \in \Phi$ . Тогда компонента  $\mathcal{B}_i$  с нечётным индексом  $i$  является аттрактором гомеоморфизма  $\varphi_{P,J,n,k,l}^k$ , а с чётным – репеллером.

*Доказательство.* Покажем, что компонента  $\mathcal{B}_i$  с чётным индексом  $i$  принадлежит множеству репеллеров гомеоморфизма  $\varphi_{P,J,n,k,l}$ . Точка  $b_i$  с чётным индексом  $i$  являются источниковой

точкой диффеоморфизма  $\varphi_{n,k,l}^k$ . Следовательно, для окрестности  $u_i = h_J(U_i) = p([\frac{i}{2nk} - \frac{i}{4nk}, \frac{i}{2nk} + \frac{i}{4nk}])$  точки  $b_i$  с чётным индексом  $i$  выполняется  $\varphi_{P,J,n,k,l}^k(u_i) \subset \text{int } u_i$ ,  $\bigcap_{j \geq 0} \varphi_{n,k,l}^{jk}(u_i) = b_i$ . Так как  $h_J^{-1}(p[a, b]) = p_J(S_g \times [a, b])$  для любых  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $h_J \varphi^{jk} = \varphi_{n,k,l}^{jk} h_J$  и  $h_J^{-1}(b_i) = \mathcal{B}_i$ , то  $\varphi_{P,J,n,k,l}^k(U_i) \subset \text{int } U_i$ ,  $\bigcap_{j \geq 0} \varphi_{P,J,n,k,l}^{jk}(U_i) = \mathcal{B}_i$ . Следовательно, компонента  $\mathcal{B}_i$  с чётным индексом  $i$  является репеллером отображения  $\varphi_{P,J,n,k,l}^k$ .

Аналогично доказывается, что компонента  $\mathcal{B}_i$  с нечётным индексом  $i$  принадлежит множеству аттракторов.  $\square$

Обозначим через  $\rho$  естественную проекцию  $\rho: X \times \mathbb{R} \rightarrow X$ . Пусть  $\varphi_{P,J,n,k,l} \in \Phi$ . Для  $i \in \{0, \dots, 2nk - 1\}$  определим гомеоморфизм  $H_i: X \times \{\frac{i}{2nk}\} \rightarrow \mathcal{B}_i$  формулой

$$H_i = p_J|_{X \times \{\frac{i}{2nk}\}} \rho^{-1}|_{X \times \{\frac{i}{2nk}\}}. \quad (19)$$

**Лемма 4.2.** Пусть  $\varphi_{P,J,n,k,l} \in \Phi$ . Тогда гомеоморфизм  $\varphi_{P,J,n,k,l}^k|_{\mathcal{B}_i}: \mathcal{B}_i \rightarrow \mathcal{B}_i$  топологически сопряжен с отображением  $J^l P^k: X \rightarrow X$  посредством гомеоморфизма  $H_i$  для любого  $i \in \{0, \dots, 2nk - 1\}$ .

*Доказательство.* Пусть  $\varphi_{P,J,n,k,l} \in \Phi$ . Тогда  $\varphi_{P,J,n,k,l}^k|_{\mathcal{B}_i} = p_J|_{X \times \{\frac{i}{2nk}\}} \gamma^l \bar{\varphi}_{P,J,n,k,l}^k p_J^{-1}|_{X \times \{\frac{i}{2nk}\}} = p_J|_{X \times \{\frac{i}{2nk}\}} \rho^{-1}|_{X \times \{\frac{i}{2nk}\}} J^l P^k \rho|_{X \times \{\frac{i}{2nk}\}} p_J^{-1}|_{X \times \{\frac{i}{2nk}\}}$ . Следовательно, гомеоморфизм  $\varphi_{P,J,n,k,l}^k|_{\mathcal{B}_i}$  топологически сопряжен с гомеоморфизмом  $J^l P^k$  посредством гомеоморфизма  $H_i = p_J|_{X \times \{\frac{i}{2nk}\}} \rho^{-1}|_{X \times \{\frac{i}{2nk}\}}$ .  $\square$

Докажем, что неблуждающее множество  $NW(\varphi_{P,J,n,k,l})$  гомеоморфизма  $\varphi_{P,J,n,k,l} \in \Phi$  совпадает с множеством  $p_J(NW(J^l P^k) \times \mathcal{T}_{nk})$  и гомеоморфно прямому произведению  $NW(J^l P^k) \times NW(\varphi_{n,k,l})$  неблуждающих множеств гомеоморфизмов  $J^l P^k$  и  $\varphi_{n,k,l}$ .

*Доказательство.* Пусть  $\varphi_{P,J,n,k,l} \in \Phi$ . Так как, согласно Утверждению 4.1, отображение  $\varphi_{P,J,n,k,l}$  полусопряжено  $\varphi_{n,k,l}$  посредством  $h_J$ , то есть  $h_J \varphi_{P,J,n,k,l} = \varphi_{n,k,l} h_J$ , то из Утверждения 2 следует, что  $NW(\varphi_{P,J,n,k,l}) \subset h_J^{-1}(NW(\varphi_{n,k,l})) = p_J(X \times \mathcal{T}_{nk})$ . Представим множество  $h_J^{-1}(NW(\varphi_{n,k,l}))$  в виде  $h_J^{-1}(NW(\varphi_{n,k,l})) = \mathcal{N}_1 \cup \mathcal{N}_2$ , где  $\mathcal{N}_1 = p_J(NW(J^l P^k) \times \mathcal{T}_{nk})$  и  $\mathcal{N}_2 = p_J((X \setminus NW(J^l P^k)) \times \mathcal{T}_{nk})$ .

**Шаг 1.** Докажем, что  $\mathcal{N}_1 \subset NW(\varphi_{P,J,n,k,l})$ .

Рассмотрим точку  $w \in p_J(NW(J^l P^k) \times \mathcal{T}_{nk}) \cap \mathcal{B}_i$ . Так как, согласно Лемме 4.2, ограниченное отображение  $\varphi_{P,J,n,k,l}^k|_{\mathcal{B}_i}$  на множество  $\mathcal{B}_i$  для любого  $i \in \{0, \dots, 2nk - 1\}$  топологически сопряжено с гомеоморфизмом  $J^l P^k$  посредством гомеоморфизма  $H_i$  и  $w \in H_i^{-1}(NW(J^l P^k))$ , то  $w \in NW(\varphi_{P,J,n,k,l}^k|_{\mathcal{B}_i})$ . Следовательно, для любой окрестности  $U_w^i \subset \mathcal{B}_i$  точки  $w$  на многообразии  $\mathcal{B}_i$  существует  $m \in \mathbb{N}$  такое, что  $\varphi_{P,J,n,k,l}^{km}|_{\mathcal{B}_i}(U_w^i) \cap U_w^i \neq \emptyset$ . Тогда и для любой окрестности  $U_w \subset M_J$  точки  $w$  на многообразии  $M_J$ , где  $U_w \cap \mathcal{B}_i = U_w^i$ , существует  $m \in \mathbb{N}$  такое, что  $\varphi_{P,J,n,k,l}^{km}(U_w) \cap U_w \supset \varphi_{P,J,n,k,l}^{km}|_{\mathcal{B}_i}(U_w^i) \cap U_w^i \neq \emptyset$ . Следовательно, если  $w \in \mathcal{N}_1$ , то  $w \in NW(\varphi_{P,J,n,k,l})$ .

**Шаг 2.** Докажем, что  $\mathcal{N}_2 \cap NW(\varphi_{P,J,n,k,l}) = \emptyset$ .

Предположим противное. Пусть существует точка  $w \in M_J$  такая, что  $w \in \mathcal{N}_2 \cap NW(\varphi_{P,J,n,k,l})$ . Рассмотрим точку  $\bar{w} = (x, r)$  из прообраза  $p_J^{-1}(w)$  точки  $w$ . Тогда  $(x, r) \in (X \setminus NW(J^l P^k)) \times \mathcal{T}_{nk}$ . Следовательно,  $x$  – блуждающая точка гомеоморфизма  $J^l P^k$  и существует окрестность  $U_x \subset X$  точки  $x$  такая, что

$$(J^l P^k)^q(U_x) \cap U_x = \emptyset \quad (20)$$

для любого  $q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ . Положим  $U_{\bar{w}} = U_x \times [r - \frac{1}{4nk}, r + \frac{1}{4nk}]$  и  $U_w = p_J(U_{\bar{w}})$ . Так как  $w \in NW(\varphi_{P,J,n,k,l})$ , то существует  $m \in \mathbb{N}$  такое, что

$$\varphi_{P,J,n,k,l}^m(U_w) \cap U_w \neq \emptyset. \quad (21)$$

Так как  $w \in \mathcal{B}_i$ , где  $i \in \{0, \dots, 2nk - 1\}$  и гомеоморфизм  $\varphi_{P,J,n,k,l}$  отображает аттракторы в аттракторы, репеллеры в репеллеры и  $U_w \cap B_j = \emptyset$  для любого  $i \neq j$ , то  $\varphi_{P,J,n,k,l}^{\tilde{m}}(U_w) \cap (U_w) = \emptyset$  для любого  $\tilde{m} \neq kb$ ,  $b \in \mathbb{Z}$ . Следовательно,  $m = kb$ ,  $b \in \mathbb{Z}$ .

Положим  $\bar{V} = X \times (r - \frac{1}{2nk}, r + \frac{1}{2nk})$  и  $V = p_J(\bar{V})$ . Из формул (1), (5) и (4) следует, что  $\bar{\varphi}_{P,J,n,k,l}^{kb}(x, r) = (P^{kb}(x), r + lb)$ ,  $\gamma^{lb}(\bar{\varphi}_{P,J,n,k,l}^{kb}(x, r)) = (J^{lb} P^{kb}(x), r)$  и

$$\gamma^{lb}(\bar{\varphi}_{P,J,n,k,l}^{kb}(\bar{V})) = \bar{V}. \quad (22)$$

Из формул (6) и (16) получим, что

$$p_J \gamma = p_J. \quad (23)$$

Тогда

$$\varphi_{P,J,n,k,l}^{kb}(U_w) \stackrel{(6)}{=} p_J|_{\bar{V}}(\gamma^{lb}(\bar{\varphi}_{P,J,n,k,l}^{kb}(p_J^{-1}|_{\bar{V}}(U_w)))) \quad (24)$$

и

$$\gamma^{lb} \bar{\varphi}_{P,J,n,k,l}^{kb}(U_{\bar{w}}) = p_J^{-1}|_{\bar{V}}(\varphi_{P,J,n,k,l}^{kb}(p_J|_{\bar{V}}(U_{\bar{w}}))). \quad (25)$$

$$\text{Докажем, что } \gamma^{lb} \bar{\varphi}_{P,J,n,k,l}^{kb}(U_{\bar{w}}) \cap U_{\bar{w}} = \emptyset : \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \gamma^{lb} \bar{\varphi}_{P,J,n,k,l}^{kb}(U_{\bar{w}}) \cap U_{\bar{w}} &= ((J^{lb} P^{kb})(U_x) \times [\bar{\varphi}_{n,k,l}(r - \frac{1}{4nk}), \bar{\varphi}_{n,k,l}(r + \frac{1}{4nk})]) \cap (U_x \times [r - \frac{1}{4nk}, r + \frac{1}{4nk}]) = \\ &= ((J^l P^k)^b(U_x) \cap U_x) \times ([\bar{\varphi}_{n,k,l}(r - \frac{1}{4nk}), \bar{\varphi}_{n,k,l}(r + \frac{1}{4nk})] \cap [r - \frac{1}{4nk}, r + \frac{1}{4nk}]) \stackrel{(20)}{=} \emptyset \times ([\bar{\varphi}_{n,k,l}(r - \frac{1}{4nk}), \bar{\varphi}_{n,k,l}(r + \frac{1}{4nk})] \cap [r - \frac{1}{4nk}, r + \frac{1}{4nk}]) = \emptyset. \end{aligned}$$

Тогда  $p_J^{-1}|_{\bar{V}}(\varphi_{P,J,n,k,l}^{kb}(U_w) \cap U_w) = p_J^{-1}|_{\bar{V}}(\varphi_{P,J,n,k,l}^{kb}(U_w)) \cap p_J^{-1}|_{\bar{V}}(U_w) \stackrel{(24)}{=} \gamma^{lb} \bar{\varphi}_{P,J,n,k,l}^{kb}(U_{\bar{w}}) \cap U_{\bar{w}} \stackrel{(26)}{=} \emptyset$ . Так как  $p_J|_{\bar{V}}$  гомеоморфизм и прообраз пустого множества относительно гомеоморфизма является пустым множеством, то  $\varphi_{P,J,n,k,l}^m(U_w) \cap U_w = \emptyset$ , где  $m = kb$ . Получили противоречие с соотношением (21). Следовательно,  $\mathcal{N}_2 \cap NW(\varphi_{P,J,n,k,l}) = \emptyset$ .

Таким образом,  $NW(\varphi_{P,J,n,k,l}) = p_J(NW(J^l P^k) \times \mathcal{T}_{nk})$ .

**Шаг 3.** Докажем, что множество  $p_J(NW(J^l P^k) \times \mathcal{T}_{nk})$  гомеоморфно прямому произведению  $NW(J^l P^k) \times NW(\varphi_{n,k,l})$  неблуждающих множеств гомеоморфизмов  $J^l P^k$  и  $\varphi_{n,k,l}$ .

Так как  $JJ^l P^k J^{-1} = J^l P^k$ , то гомеоморфизм  $J$  отображает неблуждающее множество  $NW(J^l P^k)$  гомеоморфизма  $J^l P^k$  в себя же, то есть  $J(NW(J^l P^k)) = NW(J^l P^k)$ . Следовательно,  $\gamma(NW(J^l P^k) \times \frac{i}{2nk}) \stackrel{(4)}{=} J(NW(J^l P^k)) \times \{\frac{i}{2nk} - 1\} = NW(J^l P^k) \times \{\frac{i}{2nk} - 1\}$  для любого  $i \in \mathcal{T}_{nk}$  и

$$\gamma^j(NW(J^l P^k) \times \frac{i}{2nk}) = NW(J^l P^k) \times \{\frac{i}{2nk} - j\} \quad (27)$$

для любого  $i \in \mathcal{T}_{nk}, j \in \mathbb{Z}$ . Таким образом,  $p_J(NW(J^l P^k) \times \mathcal{T}_{nk}) = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} p_J(NW(J^l P^k) \times \frac{i}{2nk}) = \bigcup_{i \in \{0, \dots, 2nk-1\}} \left( \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} p_J(NW(J^l P^k) \times \{\frac{i}{2nk} - j\}) \right) \stackrel{(27)}{=} \bigcup_{i \in \{0, \dots, 2nk-1\}} \left( \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} p_J(\gamma^j(NW(J^l P^k) \times \{\frac{i}{2nk}\})) \right) \stackrel{(23)}{=} \bigcup_{i \in \{0, \dots, 2nk-1\}} p_J(NW(J^l P^k) \times \{\frac{i}{2nk}\}) = \bigcup_{i \in \{0, \dots, 2nk-1\}} p_J|_{X \times \{\frac{i}{2nk}\}}(NW(J^l P^k) \times \{\frac{i}{2nk}\}) \stackrel{(19)}{=} \bigcup_{i \in \{0, \dots, 2nk-1\}} H_i(\rho|_{X \times \frac{i}{2nk}}(NW(J^l P^k))) = \bigcup_{i \in \{0, \dots, 2nk-1\}} H_i(\rho|_{X \times \frac{i}{2nk}}(NW(J^l P^k))) \times \{b_i\}$ . Так как отображение  $H_i \rho|_{X \times \frac{i}{2nk}}$  является гомеоморфизмом, то множество  $p_J(NW(J^l P^k) \times \mathcal{T}_{nk})$  гомеоморфно множеству  $\bigcup_{i \in \{0, \dots, 2nk-1\}} NW(J^l P^k) \times \{b_i\} = NW(J^l P^k) \times (\bigcup_{i \in \{0, \dots, 2nk-1\}} \{b_i\}) = NW(J^l P^k) \times NW(\varphi_{n,k,l})$ . □

## 4.2 Структура цепно рекуррентного множества гомеоморфизмов из множества $\mathcal{H}$

Настоящий раздел содержит доказательство теоремы 9 и вспомогательных лемм.

**Лемма 4.3.** Пусть  $w_1, w_2 \in M_J$  и  $d_w(w_1, w_2) < \varepsilon$ . Тогда  $d_s(h_J(w_1), h_J(w_2)) < \varepsilon$ .

*Доказательство.* Пусть  $w_1, w_2 \in M_J$  и  $d_w(w_1, w_2) < \varepsilon$ . Для точек  $\bar{w}_1 = p_J^{-1}(w_1) \cap (X \times [0, 1))$  и  $\bar{w}_2 = p_J^{-1}(w_2) \cap (X \times [0, 1))$  положим  $\bar{w}_1 = (x_1, r_1)$  и  $\bar{w}_2 = (x_2, r_2)$ . Тогда  $d_w(w_1, w_2) \stackrel{(8)}{=} d_{\bar{w}}(\bar{w}_1, \bar{w}_2) \stackrel{(7)}{=} \max(d_x(x_1, x_2), d_r(r_1, r_2))$ . Следовательно,  $d_r(r_1, r_2) < \varepsilon$ . Тогда  $d_s(h_J(w), h_J(w')) \stackrel{(3)}{=} d_r(r, r') < \varepsilon$ . □

**Лемма 4.4.** Пусть  $\varphi_{P,J,n,k,l} \in \Phi$ . Тогда  $h_J(CR(\varphi_{P,J,n,k,l})) \subset CR(\varphi_{n,k,l})$ .

*Доказательство.* Пусть  $\varphi_{P,J,n,k,l} \in \Phi$ . Рассмотрим точку  $w \in CR(\varphi_{P,J,n,k,l})$ , произвольное  $\varepsilon > 0$  и  $\varepsilon$ -цепь  $C(w, \varepsilon, \kappa(\varepsilon)) = \{w_0 = w, w_1, \dots, w = w_\kappa\}$  точки  $w$ , соединяющую её с самой собой.

Положим  $s = h_J(w) \in \mathbb{S}^1$  и  $h_J(w_i) = s_i, s_i \in \mathbb{S}^1$ , для любого  $i \in \{1, \dots, m\}$ .

Докажем, что последовательность  $(s_0 = s, s_1, \dots, s = s_\kappa)$  является  $\varepsilon$ -цепью длины  $\kappa = \kappa(\varepsilon)$ , соединяющей точку  $s$  с самой собой. Так как  $\varphi_{n,k,l}(s) = \varphi_{n,k,l}(h_J(w)) \stackrel{(17)}{=} h_J(\varphi_{P,J,n,k,l}(w))$  и  $d_w(\varphi_{P,J,n,k,l}(w), w_1) < \varepsilon$ , то, согласно Лемме 4.4,  $d_s(h_J(\varphi_{P,J,n,k,l}(w)), h_J(w_1)) = d_s(\varphi_{n,k,l}(s), s_1) < \varepsilon$ . Аналогично, для любого  $i \in \{2, \dots, \kappa\}$  из соотношения  $d_w(\varphi_{P,J,n,k,l}(w_{i-1}), w_i) < \varepsilon$  следует, что  $d_s(h_J(\varphi_{P,J,n,k,l}(w_{i-1})), h_J(w_i)) \stackrel{(17)}{=} d_s(\varphi_{n,k,l}(s_{i-1}), s_i) < \varepsilon$ . Тогда для любого  $\varepsilon > 0$  образ  $h_J(C(w, \varepsilon, \kappa(\varepsilon)))$   $\varepsilon$ -цепи длины  $\kappa(\varepsilon)$  точки  $w \in CR(\varphi_{P,J,n,k,l})$ , соединяющей её с самой собой, является  $\varepsilon$ -цепью длины  $\kappa(\varepsilon)$  точки  $s = h_J(w)$ , соединяющей её с самой собой.

Таким образом,  $s \in CR(\varphi_{n,k,l})$ .

□

Докажем, что цепно рекуррентное множество  $CR(\varphi_{P,J,n,k,l})$  гомеоморфизма  $\varphi_{P,J,n,k,l} \in \Phi$  совпадает с множеством  $p_J(CR(J^l P^k) \times \mathcal{T}_{nk})$  и гомеоморфно прямому произведению  $CR(J^l P^k) \times CR(\varphi_{n,k,l})$  цепно рекуррентных множеств гомеоморфизмов  $J^l P^k$  и  $\varphi_{n,k,l}$ .

*Доказательство.* Пусть  $\varphi_{P,J,n,k,l} \in \Phi$ .

Согласно Лемме 4.4,  $CR(\varphi_{P,J,n,k,l}) \subset h_J^{-1}(CR(\varphi_{n,k,l})) = p_J(X \times \mathcal{T}_{nk})$ . Представим множество  $h_J^{-1}(CR(\varphi_{n,k,l}))$  в виде  $h_J^{-1}(CR(\varphi_{n,k,l})) = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$ , где  $\mathcal{C}_1 = p_J(CR(J^l P^k) \times \mathcal{T}_{nk})$  и  $\mathcal{C}_2 = p_J((X \setminus CR(J^l P^k)) \times \mathcal{T}_{nk})$ .

**Шаг 1.** Докажем, что  $\mathcal{C}_1 \subset CR(\varphi_{P,J,n,k,l})$ .

Рассмотрим точку  $w \in p_J(CR(J^l P^k) \times \mathcal{T}_{nk}) \cap \mathcal{B}_i$ . Так как, согласно Лемме 4.2, ограничение отображения  $\varphi_{P,J,n,k,l}^k|_{\mathcal{B}_i}$  на множество  $\mathcal{B}_i$  для любого  $i \in \{0, \dots, 2nk - 1\}$  топологически сопряжено с гомеоморфизмом  $J^l P^k$  посредством гомеоморфизма  $H_i$  и  $w \in H_i^{-1}(CR(J^l P^k))$ , то  $w \in CR(\varphi_{P,J,n,k,l}^k|_{\mathcal{B}_i})$ . Тогда для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\varepsilon$ -цепь  $C(w, \varepsilon, \kappa(\varepsilon)) = (w_0 = w, w_1, \dots, w_\kappa = w)$  длины  $\kappa(\varepsilon)$ , соединяющая точку  $w$  с самой собой.

Тогда последовательность

$$\begin{aligned} & (w_0 = w, w_1, \varphi_{P,J,n,k,l}(w_1), \dots, \varphi_{P,J,n,k,l}^{k-1}(w_1), \\ & \quad w_2, \varphi_{P,J,n,k,l}(w_2), \dots, \varphi_{P,J,n,k,l}^{k-1}(w_2), \\ & \quad w_3, \dots, w_{\kappa-1}, \varphi_{P,J,n,k,l}(w_{\kappa-1}), \dots, \varphi_{P,J,n,k,l}^{k-1}(w_{\kappa-1}), w_\kappa = w) \end{aligned}$$

является  $\varepsilon$ -цепью длины  $k \cdot \kappa$ , соединяющей точку  $w$  с самой собой. Следовательно,  $w \in CR(\varphi_{P,J,n,k,l})$ .

Таким образом,  $\mathcal{C}_1 \subset CR(\varphi_{P,J,n,k,l})$ .

**Шаг 2.** Докажем, что  $\mathcal{C}_2 \cap CR(\varphi_{P,J,n,k,l}) = \emptyset$ .

Рассмотрим точку  $w \in \mathcal{C}_2 \cap \mathcal{B}_i$ . Докажем, что  $w \notin CR(\varphi_{P,J,n,k,l})$ . Возможны 2 случая: 1)  $\mathcal{B}_i$  – аттрактор гомеоморфизма  $\varphi_{P,J,n,k,l}^k$ , 2)  $\mathcal{B}_i$  – репеллер гомеоморфизма  $\varphi_{P,J,n,k,l}^k$ .

**Шаг 2.1.** Докажем, что если  $\mathcal{B}_i$  – аттрактор  $\varphi_{P,J,n,k,l}^k$ , то  $w \notin CR(\varphi_{P,J,n,k,l})$ .

Рассмотрим произвольную точку  $\bar{w} \in p_J^{-1}(w)$  из прообраза точки  $w$ . Положим  $\bar{w} = (x, r)$ . Тогда  $x \notin CR(J^l P^k)$ . Согласно утверждению 3, существует открытое связное множество  $U$  и положительные целые числа  $p$  и  $q$ , такие что  $x \notin U$ ,  $J^{lp}(P^{kp}(cl U)) \subset U$ , и  $J^{lpq}(P^{kpq}(x)) \in U$ .

Положим  $\bar{V} = U \times (r - \frac{1}{4nk}, r + \frac{1}{4nk})$  и  $V = p_J(\bar{V})$ . Тогда  $(\gamma^{lp}(\bar{\varphi}_{P,J,n,k,l}^{kp}(\bar{V}))) = (J^{lp}(P^{kp}(U))) \times (\varphi_{n,k,l}^k(r - \frac{1}{4nk}) - l, \varphi_{n,k,l}^k(r + \frac{1}{4nk}) + l)$ .

Так как  $\mathcal{B}_i$  – аттрактор  $\varphi_{P,J,n,k,l}^k$ , то  $b_i$  – стоковая точка диффеоморфизма  $\varphi_{n,k,l}^k$  и непосредственно проверяется, что  $cl(\varphi_{n,k,l}^k(r - \frac{1}{4nk}) - l, \varphi_{n,k,l}^k(r + \frac{1}{4nk}) + l) \subset (r - \frac{1}{4nk}, r + \frac{1}{4nk})$ . С учётом  $J^{lp}(P^{kp}(cl U)) \subset U$ , получаем, что  $cl(\gamma^{lp}(\bar{\varphi}_{P,J,n,k,l}^{kp}(\bar{V}))) \subset \bar{V}$ . Следовательно,  $cl \varphi_{P,J,n,k,l}^{kp}(V) = cl p_J(\gamma^{lp}(\bar{\varphi}_{P,J,n,k,l}^{kp}(\bar{V}))) = cl p_J(\bar{\varphi}_{P,J,n,k,l}^{kp}(\bar{V})) \subset cl p_J(\bar{V})$ . Тогда  $\varphi_{P,J,n,k,l}^{kpq}(w) = p_J(\gamma^{lpq}(\bar{\varphi}_{P,J,n,k,l}^{kpq}(\bar{w}))) = p_J(\bar{\varphi}_{P,J,n,k,l}^{kpq}(\bar{w})) \in p_J(\bar{V}) = V$ .

Таким образом, существует открытое и связное множество  $V$  и положительные целые числа  $p$  и  $q$ , такие что  $\varphi_{P,J,n,k,l}^{kp}(cl V) \subset V$ , и  $\varphi_{P,J,n,k,l}^{kpq}(w) \in V \rightarrow$ . Следовательно, согласно Утверждению 3,  $w \notin CR(\varphi_{P,J,n,k,l})$ .

**Шаг 2.2.** Докажем, что если  $\mathcal{B}_i$  – репеллер  $\varphi_{P,J,n,k,l}^k$ , то  $w \notin CR(\varphi_{P,J,n,k,l})$ .

Так как множество  $\mathcal{B}_i$  является аттрактором для отображения  $\varphi_{P,J,n,k,l}^{-k}$  и цепно рекуррентное множество  $CR(J^l P^k)$  гомеоморфизма  $J^l P^k$  совпадает с цепно рекуррентным множеством  $CR((J^l P^k)^{-1})$  гомеоморфизма  $(J^l P^k)^{-1}$ , то аналогично доказывается, что  $w \notin CR(\varphi_{P,J,n,k,l}^{-1})$ . Следовательно,  $w \notin CR(\varphi_{P,J,n,k,l})$ .

Таким образом,  $\mathcal{C}_2 \cap CR(\varphi_{P,J,n,k,l}) = \emptyset$ .

□

## 5 Примеры

1. **Пример диффеоморфизмов  $P, J: X \rightarrow X$  с гиперболическими неблуждающими множествами  $NW(P), NW(J)$ , для которых гомеоморфизм  $\varphi_{P,J,n,k,l}$  корректно определен и имеет не гиперболическое неблуждающее множество  $NW(\varphi_{P,J,n,k,l})$ .**

Пусть  $\hat{A}: \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  – диффеоморфизм Аносова двумерного тора. Тогда его неблуждающее множество  $NW(\hat{A})$  гиперболично и совпадает со всем двумерным тором  $\mathbb{T}^2$ .

Положим  $P = \hat{A}^l, J = \hat{A}^{-k}$ . Тогда  $J^l P^k = \hat{A}^{-kl} \hat{A}^{lk} = id$ . Следовательно, согласно теореме 8, неблуждающее множество  $NW(\varphi_{P,J,n,k,l})$  отображения  $\varphi_{P,J,n,k,l}$  гомеоморфно множеству  $NW(id) \times NW(\varphi_{n,k,l}) = \mathcal{B}_0 \cup \dots \cup \mathcal{B}_{2nk-1}$ .

Покажем, что множество  $NW(\varphi_{P,J,n,k,l})$  не является гиперболическим. Предположим противное. Пусть неблуждающее множество  $NW(\varphi_{P,J,n,k,l})$  отображения  $\varphi_{P,J,n,k,l}$  гиперболично. Тогда неблуждающее множество  $NW(\varphi_{P,J,n,k,l}^k)$  отображения  $\varphi_{P,J,n,k,l}$  в степени  $k$  тоже гиперболично. Согласно лемме 4.2, отображение  $\varphi_{P,J,n,k,l}^k|_{\mathcal{B}_i}$  топологически сопряжено с отображением  $J^l P^k = id$  для любого  $i \in \{0, \dots, 2nk - 1\}$ . Так как точки двумерного тора  $\mathbb{T}^2$  не являются гиперболическими для тождественного отображения, то получили противоречие с тем, что множество  $NW(\varphi_{P,J,n,k,l})$  гиперболично.

2. **Пример диффеоморфизмов  $P, J: X \rightarrow X$  с конечными неблуждающими множествами  $NW(P), NW(J)$ , для которых гомеоморфизм  $\varphi_{P,J,n,k,l}$  корректно определен и имеет несчётное неблуждающее множество  $NW(\varphi_{P,J,n,k,l})$ .**

Пусть  $F: X \rightarrow X$  – диффеоморфизм Морса-Смейла. Тогда его неблуждающее множество  $NW(F)$  конечно.

Положим  $P = F^l, J = F^{-k}$ , тогда  $J^l P^k = F^{-kl} F^{lk} = id$ .

Тогда, согласно теореме 8, неблуждающее множество  $NW(\varphi_{P,J,n,k,l})$  отображения  $\varphi_{P,J,n,k,l}$  гомеоморфно несчётному множеству  $NW(id) \times NW(\varphi_{n,k,l}) = \mathcal{B}_0 \cup \dots \cup \mathcal{B}_{2nk-1}$ .

3. **Пример диффеоморфизмов  $P, J: X \rightarrow X$  таких, что неблуждающее множество  $NW(P)$  отображения  $P$  несчётно, неблуждающее множество  $NW(J)$  отображения  $J$  конечно, гомеоморфизм  $\varphi_{P,J,n,k,l}$  корректно определен и имеет конечное неблуждающее множество  $NW(\varphi_{P,J,n,k,l})$ .**

Пусть  $P = id: X \rightarrow X$ ,  $J: X \rightarrow X$  - диффеоморфизм Морса-Смейла. Тогда неблуждающее множество  $NW(P)$  диффеоморфизма  $P$  совпадает со всем многообразием  $X$ , и, следовательно, является несчётным. Так как  $J^l P^k = id^l J^l = J^l$  и неблуждающее множество диффеоморфизма Морса-Смейла  $J$  конечно, то неблуждающее множество  $NW(J^l P^k)$  отображения  $J^l P^k = id^l J^l = J^l$  также конечно.

Согласно теореме 8, неблуждающее множество  $NW(\varphi_{P,J,n,k,l})$  отображения  $\varphi_{P,J,n,k,l}$  гомеоморфно прямому произведению  $NW(J^l P^k) \times NW(\varphi_{n,k,l})$  конечных множеств  $NW(J^l P^k)$  и  $NW(\varphi_{n,k,l})$ . Следовательно, неблуждающее множество  $NW(\varphi_{P,J,n,k,l})$  тоже конечно.

4. **Пример гомеоморфизмов  $P, J: X \rightarrow X$  таких, что неблуждающие множества  $NW(P)$  и  $NW(J)$  гомеоморфизмов  $P$  и  $J$  конечны, цепно рекуррентные множества  $CR(P)$  и  $CR(J)$  несчётны, гомеоморфизм  $\varphi_{P,J,n,k,l}$  корректно определен и имеет несчётное неблуждающее множество  $NW(\varphi_{P,J,n,k,l})$ , которое совпадает с его цепно рекуррентным множеством  $CR(\varphi_{P,J,n,k,l})$ .**

Пусть  $X = \mathbb{S}^1$  и  $F: X \rightarrow X$  - гомеоморфизм окружности с неблуждающим множеством, состоящим из единственной точки, которая является нейтральной (не является ни стоком, ни источником). Тогда его цепно рекуррентное множество  $CR(F)$  совпадает со всей окружностью  $\mathbb{S}^1$  и, следовательно, является несчётным.

Положим  $P = F^l$ ,  $J = F^{-k}$ , тогда  $J^l P^k = F^{-k^l} F^{l^k} = id$ .

Согласно теореме 8, неблуждающее множество  $NW(\varphi_{P,J,n,k,l})$  отображения  $\varphi_{P,J,n,k,l}$  гомеоморфно несчётному множеству  $NW(id) \times NW(\varphi_{n,k,l}) = \mathcal{B}_0 \cup \dots \cup \mathcal{B}_{2nk-1}$  и при этом совпадает с его цепно рекуррентным множеством  $CR(\varphi_{P,J,n,k,l})$ .

## 6 Заключение

В ходе работы были доказаны следующие утверждения для прямых произведений дискретных динамических систем, опубликованные в статьях [3] и [13] :

- Цепно рекуррентное множество прямого произведения  $f \times g$  гомеоморфизмов  $f$  и  $g$  совпадает с прямым произведением их цепно рекуррентных множеств
- Неблуждающее множество прямого произведения гомеоморфизмов является подмножеством прямого произведения их неблуждающих множеств.
- Прямое произведение гиперболических множеств  $\Lambda_f$  и  $\Lambda_g$  диффеоморфизмов  $f$  и  $g$  является гиперболическим множеством диффеоморфизма  $f \times g$ .

- Прямое произведение  $f \times g$   $\Omega$ -устойчивых диффеоморфизмов  $f$  и  $g$  также будет  $\Omega$ -устойчивым диффеоморфизмом.
- Прямое произведение  $A$ -диффеоморфизмов является  $A$ -диффеоморфизмом.
- Прямое произведение  $f \times g$  структурно устойчивых диффеоморфизмов  $f$  и  $g$  также будет структурно устойчивым диффеоморфизмом.
- Существование энергетической функции для прямого произведения диффеоморфизмов, обладающих энергетическими функциями, в случае, когда хотя бы один из них имеет конечное число цепных компонент, причем это верно и для  $\Omega$ -устойчивых диффеоморфизмов
- Существование примера, показывающего, что если допустить, что один из каскадов (например,  $f_1$ ) не имеет энергетической функции, то можно подобрать каскад  $f_2$  таким образом, что их прямое произведение будет обладать энергетической функцией

Для отображений, являющихся косыми произведениями отображений окружности на произвольный гомеоморфизм, было доказано:

- Неблуждающее множество  $NW(\varphi_{P,J,n,k,l})$  гомеоморфизма  $\varphi_{P,J,n,k,l} \in \Phi$  совпадает с множеством  $p_J(NW(J^l P^k) \times \mathcal{T}_{nk})$  и гомеоморфно прямому произведению  $NW(J^l P^k) \times NW(\varphi_{n,k,l})$  неблуждающих множеств гомеоморфизмов  $J^l P^k$  и  $\varphi_{n,k,l}$ .
- Цепно рекуррентное множество  $NW(\varphi_{P,J,n,k,l})$  гомеоморфизма  $\varphi_{P,J,n,k,l} \in \Phi$  совпадает с множеством  $p_J(NW(J^l P^k) \times \mathcal{T}_{nk})$  и гомеоморфно прямому произведению  $NW(J^l P^k) \times NW(\varphi_{n,k,l})$  цепно рекуррентных множеств гомеоморфизмов  $J^l P^k$  и  $\varphi_{n,k,l}$ .

Данные результаты могут быть в дальнейшем обобщены на более широкие классы косых произведений дискретных динамических систем.

## Список литературы

- [1] A. N. Tikhonov, Uber einen Metrisationssatz von P. Urysohn, *Math. Ann.*, 95 (1925), 139–142.
- [2] Wiseman J., Generalized recurrence and the nonwandering set for products. *Topology and its Applications*, 219(2017), 111-121.
- [3] M. K. Barinova, E. K. Shustova, Dynamical properties of direct products of discrete dynamical systems. *Zhurnal SVMO*, 24:1 (2022), 21–30.
- [4] Robinson C., *Dynamical Systems: stability, symbolic dynamics, and chaos*. Studies in Adv. Math., (1999), 506.
- [5] Smale S., Differentiable dynamical systems. *Bull. Amer. Math. Soc.*, (1967).
- [6] Grines V., Medvedev T., Pochinka O. *Dynamical Systems on 2- and 3-Manifolds*. Switzerland : Springer, (2016).
- [7] Conley C., *Isolated Invariant Sets and Morse Index*. Amer. Math. Soc., Providence, (1978).
- [8] Franks J., Nonsingular Smale flow on  $S^3$ . *Topology*, 24:3 (1985), 265-282.
- [9] Pixton D. Wild unstable manifolds. *Topology*, 16(1977), 167-172.
- [10] Grines V. Z., Laudenbach F., Pochinka O. V. Dynamically ordered energy function for Morse-Smale diffeomorphisms on 3-manifolds. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, (2012).
- [11] Barinova M., Grines V., Pochinka O., Yu B. Existence of an energy function for three-dimensional chaotic “sink-source” cascades. *Chaos*, 31:6(2021)
- [12] Barinova M., On Existence of an Energy Function for  $\Omega$ -stable Surface Diffeomorphisms. *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 42:14 (2021), 3317-3323.
- [13] Barinova M. K., Shustova E. K., On existence of an energy function for discrete dynamical systems. *Zhurnal SVMO*, 25:2 (2023), 11-21.
- [14] Whitney, H., Topological properties of differentiable manifolds. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 43 (1937), 785-805.
- [15] Alexandroff, P., Hopf, H., *Topologie*. Springer, 46:80 (1935).
- [16] Anzai, H., Ergodic skew product transformations on the torus, *Osaka Math. J.*, 3:1 (1951), 83–99.

- [17] Kakutani, S., Random ergodic theorems and Markoff processes with a stable distribution, Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, Univ. of California Press, Berkeley–Los Angeles, (1951), 247–261.
- [18] V. I. Oseledets, Markov chains, skew products and ergodic theorems for ‘general’ dynamic systems, Theory Probab. Appl., 10:3 (1965), 499–504.
- [19] A. N. Sharkovsky, Yu. L. Maistrenko, E. Yu. Romanenko, Difference equations and their applications, Math. Appl., 250, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1993, xii+358 pp.
- [20] P. E. Kloeden, “On Sharkovsky’s cycle coexistence ordering”, Bull. Austral. Math. Soc., 20:2 (1979), 171–177.
- [21] A. N. Sharkovsky, Coexistence of cycles of continuous transformation of a straight line into itself, Ukr. math. journal., 16:1 (1964), 61–71.
- [22] A. S. Gorodetski, Yu. S. Ilyashenko, “Certain properties of skew products over a horseshoe and a solenoid”, Proc. Steklov Inst. Math., 231 (2000), 90–112
- [23] Grines V., Levchenko Yu., Medvedev V., Pochinka O., On the Dynamical Coherence of Structurally Stable 3-diffeomorphisms. Regular and Chaotic Dynamics, 19:4 (2014), 506–512.
- [24] Grines, V., Levchenko, Y., Medvedev, V., Pochinka, O., The topological classification of structurally stable 3-diffeomorphisms with two-dimensional basic sets. Nonlinearity, 28:11 (2015), 4081.
- [25] Grines, V., Pochinka, O., Chilina, E., On Homeomorphisms of Three-Dimensional Manifolds with Pseudo-Anosov Attractors and Repellers. Regular and Chaotic Dynamics, 29:1 (2024), 156-173.
- [26] Mayer, A. G., Rough transformation of a circle into a circle. *Scientific notes GSU*, 12(1939), 215-229 (In Russ.).
- [27] Grines, V., Pochinka, O., Introduction to the topological classification of cascades on manifolds of dimensions two and three. Research Center “Regular and Chaotic Dynamics. Institute of Computer Research, M.–Izhevsk, (2011), 424.
- [28] V. Z. Grines, T. V. Medvedev, O. V. Pochinka, Introduction. Dynamical systems on 2-and 3-manifolds, Developments in Mathematics, Springer, Cham, 46(2016), 17–26
- [29] Block, L., Franke, J. E., The chain recurrent set, attractors, and explosions. Ergodic Theory and Dynamical Systems, 5:3(1985), 321-327.

В Оргкомитет Смотра дипломных работ математиков России  
от Якубив Юлии Андреевны  
Заявление о новизне

Сообщаю, что новыми в моей представленной на Смотр выпускной квалификационной работе (далее - работа) под названием «Динамика уравнения нейтрального типа с запаздыванием и разрывной правой частью» являются: Леммы 1, 2, 3, Доказательства Лемм 1, 2, 3, Теоремы 1, 2, Замечание к Теореме 1, Доказательство Теоремы 2.

Также сообщаю, что для проверки новизны мною было проделано следующее:

- В период с 01 ноября 2023 г. по 20 апреля 2024 г. мною был произведён поиск в следующих поисковых системах: Google, Web of Science, arXiv.org, APS.org по следующим ключевым словам: уравнение нейтрального типа, метод шагов, дифференциальное уравнение с запаздыванием, разрывная запаздывающая обратная связь, в выдаче поисковиков было исследовано 20 статей и все они не содержали материала, заявляемого автором выпускной квалификационной работы в качестве нового. При поиске не было встречено работ или упоминаний работ, позволяющих усомниться в новизне материала.

- Проведена серия консультаций с моим научным руководителем Кащенко Ильёй Сергеевичем, доктором физико-математических наук, заведующим кафедрой математического моделирования Ярославского государственного университета им. П.Г. Демидова.

- Проведено выступление на студенческой школе-конференции «Математическая весна» 2024 (НИУ ВШЭ - Нижний Новгород), а также на международной конференции ISND-23.

- Таким образом, по результатам поиска в сети Интернет и тематических научных базах, а также обсуждений с указанным выше специалистом следует, что, по-видимому, представленный в моей выпускной квалификационной работе указанный выше математический материал действительно является новым.

Подтверждаю, что являюсь автором предоставляемой на Смотр работы и прошу принять её для участия в Смотре. Принимаю на себя обязательство соблюдать правила Смотра. Также (в соответствии с п. 4 Положения о Смотре) принимаю на себя обязательство оценить 5 работ участников Смотра, выданных мне Оргкомитетом в результате жеребьёвки и сверх того оценить 2-5 работ других участников Смотра на мой выбор. Я понимаю правила оценки работ, приведённые в п. 4.3 Положения о Смотре. Даю согласие на публикацию адреса моей электронной почты.

Защита работы состоялась 17.06.2024г. На Смотр представлен окончательный текст работы.

Якубив Юлия Андреевна  
17.06.2024г. Ярославль, Россия

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования

«Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова»

Кафедра математического моделирования

Сдано на кафедру  
«6» июня 2024 г.  
Заведующий кафедрой  
д. ф.-м. н., доцент  
\_\_\_\_\_Кащенко И.С.

Выпускная квалификационная работа

Динамика уравнения нейтрального типа с запаздыванием и  
разрывной правой частью

направление подготовки  
01.03.02 Прикладная математика и информатика

Научный руководитель  
д. ф.-м. н., доцент  
\_\_\_\_\_Кащенко И.С.  
«6» июня 2024 г.

Студент группы ПМИ-41БО  
\_\_\_\_\_Якубив Ю.А.  
«6» июня 2024 г.

Ярославль, 2024 г.

## Реферат

Работа состоит из 16 страниц. В работе 3 главы, 7 изображений, 17 источников.

**Уравнение нейтрального типа, метод шагов, дифференциальное уравнение с запаздыванием, разрывная запаздывающая обратная связь, периодические решения, устойчивость.**

Объектом исследования является дифференциальное уравнение с разрывной запаздывающей обратной связью нейтрального типа.

Цель работы — изучить периодические решения этого уравнения.

В процессе работы в фазовом пространстве были описаны классы начальных функций, зависящие от ряда параметров.

В результате было показано, что решения через определенное время возвращаются в аналогичный класс, возможно, с другими параметрами. Анализ изменения параметров позволил описать периодические решения и их устойчивость. Было показано существование бесконечно большого числа устойчивых периодических решений.

# Содержание

<b>Введение</b>	4
<b>1 Постановка задачи</b>	5
<b>2 Построение решений</b>	7
2.1 <b>Случай <math>\alpha &gt; 0</math> и <math>k</math> чётно</b> . . . . .	10
2.2 <b>Случай <math>\alpha &lt; 0</math> и <math>k</math> нечётно</b> . . . . .	10
<b>3 Результаты</b>	12
<b>Заключение</b>	14
<b>Список литературы</b>	15

## Введение

Дифференциальное уравнение вида

$$\dot{x}(t) + x(t) = F(x(t - T)),$$

где  $T$  положительно,  $x \in \mathbb{R}^n$ , и  $F$  — это функция обратной связи, называется дифференциальным уравнением с запаздыванием. Уравнения с запаздыванием позволяют моделировать многие явления в нейродинамике, биологии и медицине [1-5], а уравнения с запаздыванием нейтрального типа находят широкое применение в народном хозяйстве [6].

В отличие от обыкновенных дифференциальных уравнений, начальное условие для дифференциальных уравнений с запаздыванием задаётся некоторой начальной функцией, таким образом, фазовое пространство для уравнений с запаздыванием является бесконечномерным [7]. Это обуславливает наличие различных сложных динамических эффектов [8-11].

Представляет интерес исследование решений в случае, когда функция  $F$  является кусочно-постоянной, например, релейной [12, 13].

Уравнения, в которых правая часть содержит также зависимость от производной искомой функции, называются уравнениями нейтрального типа:

$$\dot{x}(t) + x(t) = F(x(t - T), \dot{x}(t - T)).$$

# 1 Постановка задачи

В настоящей работе мы исследуем уравнение с запаздыванием нейтрального типа, в котором функция запаздывающей нейтральной обратной связи является кусочно-постоянной:

$$\dot{x} + x = \alpha \cdot \text{sign}(x(t - T)). \quad (1)$$

Здесь  $\alpha \neq 0$  и  $T > 0$ . Поставим задачу изучить периодические решения уравнения (1).

В качестве фазового пространства выберем пространство непрерывных кусочно-непрерывно-дифференцируемых функций. Будем искать решения уравнения (1), удовлетворяющие начальному условию

$$x(t) = \varphi(t) \text{ при } t \in [-T, 0]$$

для некоторой начальной функции  $\varphi(t)$  из класса  $S(t_0, \dots, t_k; s, h)$ , определённого следующим образом:

$$S(t_0, \dots, t_k; s, h) = \{ \varphi \in C[-T, 0] : \varphi(0) = h, \varphi \in C^1[t_{i-1} - T, t_i - T], \text{sign}(\dot{\varphi}(t)) = s(-1)^i \text{ при } t \in (t_{i-1} - T, t_i - T), i = \overline{1, \dots, k} \}, \quad (2)$$

где  $k \in \mathbb{N}$ ,  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{k-1} < t_k = T$  и  $s \pm 1$ . Функции из класса (2) обладают следующими свойствами. Они непрерывны и имеют кусочно непрерывную производную. В точках  $t_i - T$  ( $i = \overline{0, \dots, k}$ ) у них существуют односторонние производные. На интервалах  $(t_{i-1} - T, t_i - T)$ ,  $i = \overline{1, \dots, k}$ , их производная знакопостоянна, то есть эти функции строго монотонны, причём знак производной и, соответственно, характер монотонности (возрастание или убывание) меняется для каждого следующего интервала. Пример начальной функции из этого класса изображён на Рис.1.

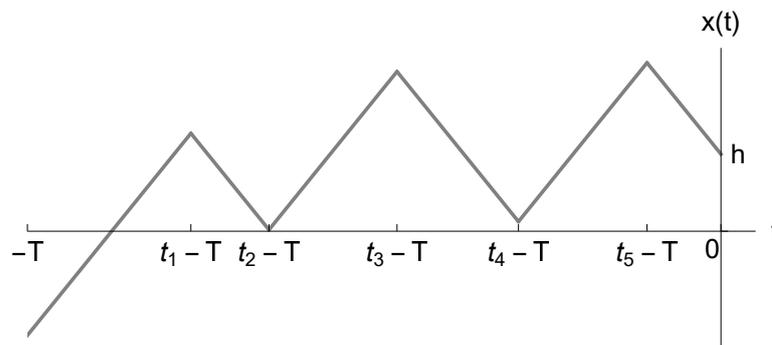


Рис. 1: Пример начальной функции для  $k = 6$  и  $s = -1$ .

Метод исследования состоит в следующем. После выбора класса начальных функций, построим методом шагов решение уравнения (1) с начальными условиями из этого класса и покажем, что в некоторый момент времени решение будет принадлежать такому же классу функций, возможно, с другими параметрами. Таким образом будет определен оператор сдвига по траектории, исследование свойств которого даст результаты о существовании и свойствах периодических решений уравнения (1). Подобный подход использовался в [8, 13-17] для построения нелокальных решений уравнений с запаздыванием, в том числе с разрывной правой частью. В рамках данного подхода уравнение с запаздыванием нейтрального типа (1) будет рассматриваться впервые.

Далее с помощью этого метода мы получим новые результаты относительно динамики уравнения (1). Будет показано, что у него сосуществует бесконечное количество орбитально устойчивых периодических решений, а также будет определён их вид и период.

## 2 Построение решений

Изложим метод шагов, с помощью которого будем строить решение уравнения (1) с начальным условием из класса (2).

Заметим, что при  $t \in [0, T]$  уравнение (1) принимает вид

$$\dot{x} + x = \alpha \cdot \text{sign}(\dot{\varphi}(t - T)).$$

Теперь правая часть — это известная функция, то есть имеем обыкновенное (неавтономное) дифференциальное уравнение. Решение получившегося уравнения с начальным условием  $x(0) = \varphi(0)$  совпадает с искомым решением уравнения (1) на отрезке  $[0, T]$ . Рассуждая таким же образом при  $t \in [T, 2T]$ , мы можем построить решение на отрезке  $[T, 2T]$ . Очевидно, так можно построить решение на любом конечном отрезке.

Для  $i = \overline{1, \dots, k}$ , ввиду формулы (2), справедливо равенство  $\text{sign}(\dot{x}(t - T)) = \text{sign}(\dot{\varphi}(t - T)) = s(-1)^i$  при  $t \in (t_{i-1}, t_i)$ . Поэтому решение уравнения (1) с выбранным начальным условием на отрезке  $[t_{i-1}, t_i]$ , которое мы будем обозначать как  $x_i(t)$ , находится как решение следующей задачи Коши:

$$\dot{x}_i + x_i = s\alpha(-1)^i, \quad x_i(t_{i-1}) = x_{i-1}(t_{i-1}), \quad i = 1, \dots, k. \quad (3)$$

При этом полагаем  $x_0(t) = \varphi(t)$ , то есть для  $i = 1$  начальное условие имеет вид  $x_1(t_0) = x_0(t_0) = \varphi(0) = h$ . Решение задачи (3) для каждого  $i = 1, \dots, k$  имеет вид

$$x_i(t) = s\alpha(-1)^i + \left( x_{i-1}(t_{i-1}) - s\alpha(-1)^i \right) e^{-(t-t_{i-1})}. \quad (4)$$

**Лемма 1.** Для решения задачи (3) имеет место формула

$$x_i(t) = s\alpha(-1)^i + \left( (h + s\alpha)e^{t_0} + 2s\alpha \sum_{j=1}^{i-1} (-1)^j e^{t_j} \right) e^{-t}, \quad i = \overline{1, \dots, k}. \quad (5)$$

**Доказательство.**

Доказательство будем проводить с помощью метода математической индукции.

База индукции: пусть  $i = 1$ , тогда, подставляя в формулу (4) начальное условие  $x_0(t_0) = h$ , находим

$$x_1(t) = s\alpha(-1)^1 + (h + s\alpha)e^{-(t-t_0)} = s\alpha(-1)^1 + ((h + s\alpha)e^{t_0})e^{-t}.$$

Теперь сделаем шаг индукции. Пусть формула (5) верна для  $i = l - 1$ , покажем, что она также верна для  $i = l$ :

$$\begin{aligned} x_l(t) &= s\alpha(-1)^l + \left( \overbrace{x_{l-1}(t_{l-1})}^{\text{по формуле (5)}} - s\alpha(-1)^l \right) e^{(t_{l-1}-t)} = \\ &= s\alpha(-1)^l + \left( s\alpha(-1)^{l-1} + \left( (h + s\alpha)e^{t_0} + 2s\alpha \sum_{j=1}^{l-2} (-1)^j e^{t_j} \right) e^{-t_{l-1}} - s\alpha(-1)^l \right) e^{(t_{l-1}-t)} = \\ &= s\alpha(-1)^l + \left( (s\alpha(-1)^{l-1} + s\alpha(-1)^{l-1})e^{t_{l-1}} + \left( (h + s\alpha)e^{t_0} + 2s\alpha \sum_{j=1}^{l-2} (-1)^j e^{t_j} \right) e^{-t_{l-1}} e^{t_{l-1}} \right) e^{-t} = \\ &= s\alpha(-1)^l + \left( 2s\alpha(-1)^{l-1} e^{t_{l-1}} + (h + s\alpha)e^{t_0} + 2s\alpha \sum_{j=1}^{l-2} (-1)^j e^{t_j} \right) e^{-t} = \end{aligned}$$

$$= s\alpha(-1)^l + \left( (h + s\alpha)e^{t_0} + 2s\alpha \sum_{j=1}^{l-1} (-1)^j e^{t_j} \right) e^{-t}.$$

Получили равенство (5) для  $l$ . Следовательно, формула (5) справедлива для всех  $i = 1, \dots, l$ . Лемма доказана.

Таким образом, мы явно нашли решение при  $t \in [0, T]$ . Отметим, что функции  $x_i$  непрерывно дифференцируемы, и их производная знакопостоянна, поэтому изменение знака производной решения  $x(t)$  на интервале  $(0, T)$  может происходить только в точках из набора  $t_1, t_2, \dots, t_{k-1}$ , то есть количество изменений знака производной не растёт. Пусть  $t'_1 < \dots < t'_m$  — это те точки из набора  $t_1, \dots, t_{k-1}$ , в которых происходят изменения знака производных. Тогда на отрезке  $t \in [-T, 0]$  решение  $x(t + T)$ , взятое со сдвигом по времени, принадлежит классу  $S(t_0, t'_1, \dots, t'_m, t_k; s_1, h_1)$ , где  $h_1 = x_k(T)$ , и  $s_1 = s(-1)^k$ , если в точке  $t_0$  есть изменение знака производной, и  $s_1 = -s(-1)^k$  в противном случае. Поэтому решение при  $t \in [T, 2T]$  находится аналогично решению с начальным условием из этого класса  $S(t_0, t'_1, \dots, t'_m, t_k; s_1, h_1)$  и так далее.

Теперь найдём, при каких параметрах  $(t_0, \dots, t_k, s, h)$  решение является периодическим. У периодического решения число изменений знака не увеличивается и не уменьшается, поэтому потребуем, чтобы в каждой из точек  $t_1, \dots, t_{k-1}$  было изменение знака производной. Также для периодического решения сдвигом по времени можно добиться изменения знака производной и в точке  $t_0$ , поэтому для определённости мы ещё потребуем переключения знака производной и в точке  $t_0$ .

Выясним, когда в точке  $t_0$  происходит изменение знака производной. Производная на интервале  $(t_{k-1} - T, t_k - T)$  имеет знак  $s(-1)^k$ , а производная на интервале  $(t_0, t_1)$  имеет знак величины  $-(h + s\alpha)$ , то есть условие изменения знака производной в точке  $t_0$  может быть записано как

$$(-1)^k s(h + s\alpha) > 0. \quad (6)$$

**Лемма 2.** В точке  $t_i$  ( $i = \overline{1, \dots, k-1}$ ) есть изменение знака производной решения  $x(t)$  тогда и только тогда, когда

$$|x_i(t_i)| < |\alpha|. \quad (7)$$

**Доказательство.**

Условие того, что в точке  $t_i$  ( $i = \overline{1, \dots, k-1}$ ) произойдёт изменение знака производной, может быть записано как  $\dot{x}(t_i - 0)\dot{x}(t_i + 0) = \dot{x}_i(t_i)\dot{x}_{i+1}(t_i) < 0$ . Выразим оба множителя из формулы (3):

$$\dot{x}_i(t_i) = s\alpha(-1)^i - x_i(t_i), \quad \dot{x}_{i+1}(t_i) = s\alpha(-1)^{i+1} - x_{i+1}(t_i).$$

Учитывая, что  $x_{i+1}(t_i) = x_i(t_i)$ , получим следующее:

$$\dot{x}_i(t_i)\dot{x}_{i+1}(t_i) = \left( s\alpha(-1)^i - x_i(t_i) \right) \left( s\alpha(-1)^{i+1} - x_i(t_i) \right) < 0.$$

Преобразовав это неравенство и учитывая  $s = \pm 1$ , получим:

$$x_i^2(t_i) < s^2(-1)^{2i}\alpha^2,$$

откуда следует, что

$$|x_i(t_i)| < |s\alpha(-1)^i| = |\alpha|.$$

Лемма доказана.

Подставив (5) в неравенство  $|x_1(t_1)| < |\alpha|$ , раскрыв модуль и выразив  $h$ , мы получим следующее условие изменения знака производной в точке  $t_1$ :

$$h \in \left( (s\alpha - |\alpha|)e^{t_1} - s\alpha, (s\alpha + |\alpha|)e^{t_1} - s\alpha \right). \quad (8)$$

Докажем, что при условии (8) и в остальных точках  $t_2, \dots, t_{k-1}$  тоже есть изменение знака производной. Справедлива следующая лемма.

**Лемма 3.** Если  $|x_{i-1}(t_{i-1})| < |\alpha|$ , то  $|x_i(t_i)| < |\alpha|$  при  $i = \overline{2, \dots, k}$ .

**Доказательство.**

Пусть  $|x_{i-1}(t_{i-1})| < |\alpha|$ . По формуле (4)

$$\begin{aligned} |x_i(t_i)| &= \left| s\alpha(-1)^i + (x_{i-1}(t_{i-1}) - s\alpha(-1)^i)e^{t_{i-1}-t_i} \right| = \left| s\alpha(-1)^i(1 - e^{t_{i-1}-t_i}) + x_{i-1}(t_{i-1})e^{t_{i-1}-t_i} \right| \leq \\ &\leq \left| s\alpha(-1)^i(1 - e^{t_{i-1}-t_i}) \right| + \left| x_{i-1}(t_{i-1})e^{t_{i-1}-t_i} \right| = |\alpha|(1 - e^{t_{i-1}-t_i}) + |x_{i-1}(t_{i-1})|e^{t_{i-1}-t_i} < \\ &< |\alpha|(1 - e^{t_{i-1}-t_i}) + |\alpha|e^{t_{i-1}-t_i} = |\alpha|. \end{aligned}$$

Таким образом, при выполнении условия (8) верно неравенство  $|x_1(t_1)| < |\alpha|$ , и, ввиду леммы 3, верны и неравенства  $|x_2(t_2)| < |\alpha|$ ,  $|x_3(t_3)| < |\alpha|$  и так далее до неравенства  $|h_1| = |x_k(t_k)| < |\alpha|$ . Мы получили, что для начального значения  $h_1$  на интервале  $[T, 2T]$  верно неравенство  $|h_1| < |\alpha|$ , поэтому потребуем, чтобы такое неравенство выполнялось и для  $h$ :

$$h \in (-|\alpha|, |\alpha|). \quad (9)$$

При  $|h| < |\alpha|$  условие (8) верно автоматически. Также легко проверить, что при условии (9) условие (6) (условие изменения знака производной в точке  $t_0$ ) выполнено тогда и только тогда, когда

$$(-1)^k = \text{sign}(\alpha). \quad (10)$$

Таким образом, условия (9), (10) гарантируют изменение знака производной решения в точках  $t_0, t_1, \dots, t_{k-1}$ . Поэтому на отрезке  $[-T, 0]$  решение  $x(t+T)$ , взятое со сдвигом по времени, принадлежит классу функций  $S(t_0, \dots, t_k, s_1, h_1)$ , где  $h_1 = x(T) = x_k(t_k)$  и  $s_1 = s(-1)^k$ . Вычислим  $h_1 = x_k(t_k)$  по формуле (5):

$$\begin{aligned} h_1 = x_k(T) &= s\alpha(-1)^k + \left( (h + s\alpha)e^{t_0} + 2s\alpha \sum_{j=1}^{k-1} (-1)^j e^{t_j} \right) e^{-T} = \\ &= he^{-T} + s\alpha \left( e^{t_0} + 2 \sum_{j=1}^{k-1} (-1)^j e^{t_j} + (-1)^k e^T \right) e^{-T} = \\ &= he^{-T} + sA, \quad \text{где } A = \alpha e^{-T} \sum_{j=1}^k (-1)^j (e^{t_j} - e^{t_{j-1}}). \end{aligned} \quad (11)$$

Заметим, что  $|h_1| = |x_k(t_k)| < |\alpha|$ , то есть из условия сохранения всех точек изменения знака производной на промежутке  $[0, T]$  следует условие сохранения всех точек изменения знака производной на промежутке  $[T, 2T]$ , а значит на каждом следующем промежутке это условие будет сохраняться. Поэтому на промежутке  $[nT, (n+1)T]$  решение будет находиться из задачи с начальным условием  $x(t+nT)|_{t \in [-T, 0]} \in S(t_0, \dots, t_k, s_n, h_n)$ , где  $h_0 = h$ ,  $s_0 = s$ , и

$$s_n = s_{n-1}(-1)^k = s(-1)^{kn}, \quad h_{n+1} = h_n e^{-T} + s_n A = h_n e^{-T} + (-1)^{kn} s A. \quad (12)$$

Из (12), в частности, следует

$$\begin{aligned} h_{n+2} &= \left( h_n e^{-T} + (-1)^{kn} sA \right) e^{-T} + (-1)^{k(n+1)} sA = \\ &= h_n e^{-2T} + (e^{-T} + (-1)^k) (-1)^{kn} sA. \end{aligned} \quad (13)$$

Для того, чтобы решение было периодическим, необходимо и достаточно, чтобы для некоторого натурального  $m$  были выполнены равенства

$$h_m = x(Tm) = h, \quad s_m = s(-1)^{km} = s. \quad (14)$$

Отметим, что для  $A$  справедлива оценка

$$\begin{aligned} |A| &= |\alpha| \left| \sum_{j=1}^k (-1)^j (e^{t_j} - e^{t_{j-1}}) \right| e^{-T} \leq |\alpha| \left( \sum_{j=1}^k |e^{t_j} - e^{t_{j-1}}| \right) e^{-T} = \\ &= |\alpha| (e^{t_k} - e^{t_0}) e^{-T} = |\alpha| (1 - e^{-T}) < |\alpha|. \end{aligned} \quad (15)$$

Далее отдельно разберем два случая:  $\alpha$  положительно (тогда из (10) следует, что  $k$  чётно) и  $\alpha$  отрицательно (тогда  $k$  нечётно).

## 2.1 Случай $\alpha > 0$ и $k$ чётно

Пусть  $\alpha > 0$  и  $k$  чётно. Тогда  $s_n = s$  при любом  $n \geq 0$ .

Решение (12) можно представить в виде  $h_n = c\mu^n + c_0$ , где  $\mu = e^{-T}$ . Подставляя данный вид в (12) и используя начальное условие  $h_0 = h$ , получим, что

$$h_n = \left( h - \frac{sA}{1 - \mu} \right) \mu^n + \frac{sA}{1 - \mu}.$$

При  $n \rightarrow \infty$   $h_n \rightarrow h^*$ , где

$$h^* = \frac{sA}{1 - e^{-T}}. \quad (16)$$

Используя неравенство (15), оценим  $h^*$  (заметим, что при  $k \geq 2$  в первой строке формулы (15) имеет место строгое неравенство):

$$|h^*| < \frac{|\alpha| |1 - e^{-T}|}{|1 - e^{-T}|} = |\alpha|. \quad (17)$$

Таким образом, решение с начальными условиями из класса  $S(t_0, \dots, t_k, s, h^*)$  через время  $T$  попадает в  $S(t_0, \dots, t_k, s, h^*)$  и так далее. Поэтому решение будет периодическим, поскольку на каждом следующем отрезке длины  $T$  решение строится одинаково.

## 2.2 Случай $\alpha < 0$ и $k$ нечётно

Пусть  $\alpha < 0$  и  $k$  нечётно. Рассмотрим (13) для чётных  $n$ , тогда  $s_n = s$  и

$$h_{n+2} = h_n e^{-2T} + (e^{-T} - 1)As. \quad (18)$$

Решая это рекуррентное соотношение аналогично случаю 2.1, получим, что для чётных  $n$

$$h_n = (h - h^*)e^{-nT} + h^*,$$

где

$$h^* = \frac{sA}{-1 - e^{-T}}. \quad (19)$$

Для нечётных  $n$  аналогичным образом можно получить

$$h_n = (h - h^*)e^{-nT} - h^*,$$

так что все решения стремятся к  $(-1)^n h^*$ , то есть у (12) существует притягивающий цикл периода 2, состоящий из точек  $h^*, -h^*$ .

При этом справедлива оценка

$$|h^*| < \frac{|\alpha|}{|-1 - e^{-T}|} < |\alpha|. \quad (20)$$

Поэтому, как и в случае 2.1, решение с начальными условиями из класса  $S(t_0, \dots, t_k, s, h^*)$  через время  $2T$  попадает в  $S(t_0, \dots, t_k, s, h^*)$  и так далее. Поэтому решение будет периодическим, поскольку на каждом следующем отрезке длины  $2T$  решение строится одинаково.

### 3 Результаты

**Определение.** Решение  $x_0(t)$  уравнения (1) с начальными условиями (2) называется орбитально устойчивым, если для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta > 0$  такое, что для любого решения  $x(t)$  такого, что  $\|x(0) - x_0(0)\| < \delta$ , верно, что для любого  $t \geq 0$  существует  $\tau \geq 0$  такое, что  $\|x(t) - x_0(\tau)\| < \varepsilon$ .

Из результатов предыдущих разделов следует следующая теорема.

**Теорема 1.** Решения уравнения (1) с начальными условиями (2) при условиях (9), (10) стремятся к орбитально устойчивому периодическому решению  $x_*(t)$  уравнения (1) с начальными условиями из класса  $\varphi_*(t) \in S(t_0, \dots, t_k; s, h^*)$ , где

$$h^* = \frac{sA}{(-1)^k - e^{-T}}, \quad (21)$$

при этом для  $\alpha > 0$  период равен  $T$ , а для  $\alpha < 0$  период равен  $2T$ .

**Замечание.** Уравнение (1) имеет бесконечное число устойчивых периодических решений, поскольку семейство классов начальных условий вида  $S(t_0, \dots, t_k; s, h^*)$  бесконечно. Каждое из этих решений орбитально устойчиво.

Примеры решений, стремящихся к периодическим, изображены на рис. 2 и рис. 3.

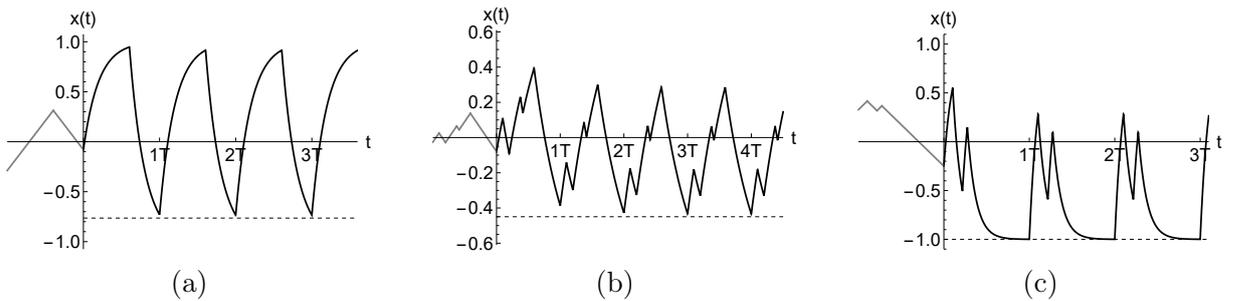


Рис. 2: Примеры решений при  $\alpha > 0$  ( $k$  — чётное). Значения параметров: а)  $\alpha = 1$ ,  $k = 2$ ,  $T = 5$ ; б)  $\alpha = 1$ ,  $k = 6$ ,  $T = 2$ ; в)  $\alpha = 1$ ,  $k = 4$ ,  $T = 10$ .

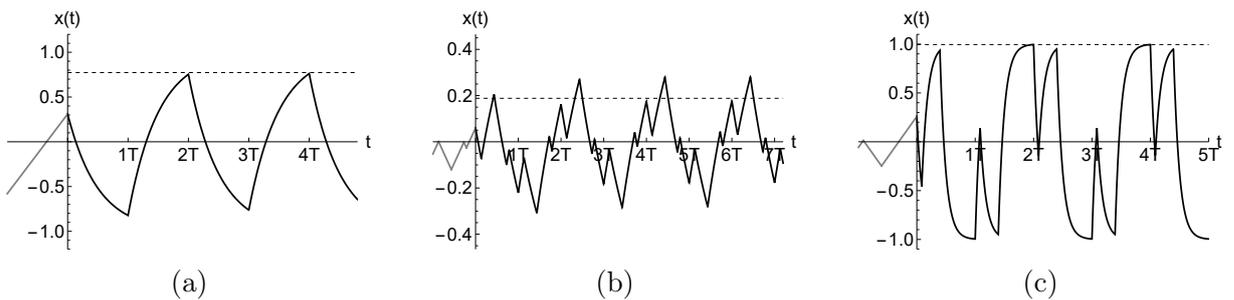


Рис. 3: Примеры решений при  $\alpha < 0$  ( $k$  — нечётное). Значения параметров: а)  $\alpha = -1$ ,  $k = 1$ ,  $T = 2$ ; б)  $\alpha = -1$ ,  $k = 5$ ,  $T = 1$ ; в)  $\alpha = -1$ ,  $k = 3$ ,  $T = 10$ .

**Определение.** Решение уравнения (1) с начальным условием  $x(t) = \varphi(t)$  при  $t \in [-T, 0]$  называется  $C^1$ -устойчивым, если для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta > 0$ , такой, что для любого решения  $\tilde{x}(t)$  уравнения (1) с начальным условием  $\tilde{x}(t) = \psi(t)$  при  $t \in [-T, 0]$ , такими, что

$$|\varphi(t) - \psi(t)|, |\dot{\varphi}(t) - \dot{\psi}(t)| < \delta, \quad \text{для любых } t \in [-T, 0], \quad (22)$$

верно, что

$$|x(t) - \tilde{x}(t)| < \varepsilon, \text{ для любых } t \geq 0. \quad (23)$$

Если при этом  $\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t) - \tilde{x}(t)| = 0$ , то решение  $x(t)$  называется асимптотически  $C^1$ -устойчивым.

**Теорема 2.** Решение  $x_*(t)$ , определенное в теореме 1, асимптотически  $C^1$ -устойчиво.

**Доказательство.** Заметим из явного вида  $x_*(t)$ , что кусочно-непрерывная производная функции  $x_*(t)$  отделена от нуля, т.е. существует константа  $\delta_1 > 0$ , такая что  $|\dot{x}_*(t)| \geq \delta_1$  для любых  $t \geq 0$ . Будем считать, что то же верно и на начальном отрезке, то есть  $|\dot{\varphi}_*(t)| \geq \delta_1$  для любых  $t \in [-T, 0]$ .

Пусть  $\tilde{x}(t)$  — это решение уравнения (1) с начальным условием  $\tilde{x}(t) = \psi(t)$  при  $t \in [-T, 0]$ , где начальная функция  $\psi$  такова, что

$$|\varphi_*(t) - \psi(t)|, |\dot{\varphi}_*(t) - \dot{\psi}(t)| < \delta, \text{ для любых } t \in [-T, 0], \quad (24)$$

где  $\delta < \delta_1$ , тогда знак  $\dot{\psi}(t)$  совпадает со знаком  $\dot{\varphi}_*(t)$  для любых  $t \in [-T, 0]$ :

$$\dot{\varphi}_*(t) > 0 \implies \dot{\varphi}_*(t) \geq \delta_1 \implies \dot{\psi}(t) = (\dot{\psi}(t) - \dot{\varphi}_*(t)) + \dot{\varphi}_*(t) > -\delta + \delta_1 > 0;$$

$$\dot{\varphi}_*(t) < 0 \implies \dot{\varphi}_*(t) \leq -\delta_1 \implies \dot{\psi}(t) = (\dot{\psi}(t) - \dot{\varphi}_*(t)) + \dot{\varphi}_*(t) < \delta - \delta_1 < 0.$$

Пусть  $\tilde{h} = \psi(0)$ , тогда  $\psi \in S(t_0, \dots, t_k, s, \tilde{h})$ , и  $|\tilde{h} - h_*| = |\psi(0) - \varphi_*(0)| < \delta$ . При  $\delta < ||h_*| - |\alpha||$  верно, что  $\tilde{h} \in (-|\alpha|, |\alpha|)$ . Следовательно, по теореме 1,  $\tilde{x}(t)$  стремится к  $x_*(t)$ .

Ввиду уравнения (1) и того, что  $\text{sign}(\dot{x}_*(t)) = \text{sign}(\dot{\tilde{x}}(t))$  для любых  $t$ , верно, что

$$\frac{d}{dt}(x_*(t) - \tilde{x}(t)) = -(x_*(t) - \tilde{x}(t)) \implies x_*(t) - \tilde{x}(t) = (h^* - \tilde{h})e^{-t}.$$

Следовательно, для любого  $\varepsilon > 0$  достаточно выбрать  $\delta < \min(\varepsilon, \delta_1, ||h_*| - |\alpha||)$  и тогда будет верно, что

$$|x_*(t) - \tilde{x}(t)| < \varepsilon, \text{ для любых } t \geq 0.$$

Теорема доказана.

## Заключение

В настоящей работе получены новые результаты относительно динамики уравнения (1). Показано, что решения через определенное время возвращаются в аналогичный класс, возможно, с другими параметрами. Анализ изменения параметров позволил описать периодические решения и их устойчивость. Показано, что у уравнения (1) существует бесконечное количество орбитально устойчивых периодических решений, определён их вид и период. Кроме того, было доказано, что устойчивое решение уравнения (1) асимптотически  $C^1$ -устойчиво.

## Список литературы

1. *T. Erneux* Applied Delay Differential Equations; Springer Science & Business Media: Berlin/Heidelberg, Germany, 2009.
2. *H. Smith* An Introduction to Delay Differential Equations with Applications to the Life Sciences; Springer: Berlin/Heidelberg, Germany, 2011.
3. *F. Brauer, C. Castillo-Chavez* Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology; Springer: New York, NY, USA, 2012.
4. *V. Kolmanovskii, A. Myshkis* Introduction to the Theory and Applications of Functional Differential Equations, Mathematics and its Applications, 463, Kluwer, Dordrecht, 1999.
5. *Г. И. Марчук* Математические методы в иммунологии. Вычислительные методы и алгоритмы, Наука, М., 1991.
6. *Andrei G. Vladimirov and Daria A. Dolinina* Neutral delay differential equation model of an optically injected Kerr cavity // Physical Review E. 2024. Vol. 109, no. 2. P. 024206.
7. *Хейл Дж.* Теория Функционально-дифференциальных уравнений, М.: Мир. 1984
8. *Kashchenko, A.* Relaxation modes of a system of diffusion coupled oscillators with delay // Commun Nonlinear Sci Numer Simulat. 2021. Vol. 93. P. 105488.
9. *Kashchenko, S. A.* Dynamics of the logistic equation with delay // Mathematical Notes. 2015. Vol. 98, no. 1. P. 98–110.
10. *Yanchuk, S., Ruschel, S., Sieber, J., and Wolfrum, M.* Temporal Dissipative Solitons in Time-Delay Feedback Systems // Phys. Rev. Letters. 2019. Vol. 123. P. 053901.
11. *I. Kashchenko* Endless Process of Bifurcations in Delay Differential Equations // International Journal of Bifurcation and Chaos, Vol. 32, No. 13 (2022) P. 2250193.
12. *Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х.* Периодические решения типа бегущих волн в кольцевых цепочках однонаправленно связанных уравнений // Теоретическая и математическая физика. – 2013. – Т. 175. – №. 1. – С. 62-83.
13. *A. A. Kashchenko* Asymptotics of Solutions to a Differential Equation with Delay and Nonlinearity Having Simple Behaviour at Infinity, Mathematics, 10(18), 3360, 2022.
14. *Kashchenko A., Kashchenko I., Kondratiev S.* Travelling Waves in the Ring of Coupled Oscillators with Delayed Feedback // Mathematics 2023, 11, 2827.
15. *Grigorieva E.V., Kashchenko S.A.* Complex temporal structures in models of a laser with optoelectronic delayed feedback // Optics communications, 1993, Vol. 102, No 1-2, P. 183-192.
16. *Якубив Ю.А.* Исследование дифференциального уравнения с запаздыванием нейтрального типа со знаковой функцией в правой части // Современные проблемы математики и информатики : сборник научных трудов молодых ученых, аспирантов и студентов / Яросл. гос. ун-т им. П. Г. Демидова. — Ярославль : Филигрань, 2023. — Вып. 23. — С. 93 – 99.

17. *Якубив Ю.А.* Периодические решения дифференциального уравнения с разрывной запаздывающей обратной связью нейтрального типа // Теоретическая и математическая физика, 2024. Т. 3, No 219.

В Оргкомитет Смотра дипломных работ математиков России

от Валиахметова Булата Ильдаровича

заявление о новизне.

Сообщаю, что новыми в моей представленной на Смотр магистерской диссертации под названием «Мозаично-скелетонный метод для современных вычислительных систем и его приложения» являются: процедура свертки с матрицей в мозаично-скелетонном формате, описываемая в пунктах 2.2.2 и 4.3, процедура построения мозаичной матрицы общего вида, описываемая в разделе 2.3, ее программная реализация, описываемая в разделе 3.1, в частности, способ параллельных вычислений, представленный в разделе 3.2, а также метод решения одной обратной задачи, описываемый в разделе 4.1.

Также сообщаю, что для проверки новизны было проделано следующее:

- В период с 25 августа 2022 г. по 10 апреля 2024 г. мною был произведён поиск в следующих поисковых системах: Яндекс, Google Scholar, arxiv.org по следующим ключевым словам: мозаично-скелетонный метод, матричный крестовый метод, иерархические матрицы, mosaic-skeleton approximations, hierarchical matrix, H2 matrix, low-rank convolution; в выдаче поисковиков было исследовано 15 статей, 2 книги (см. раздел Литература в тексте работы), а также 10 репозиториев с реализациями программных пакетов, и все они не содержали материала, заявляемого автором выпускной квалификационной работы в качестве нового. При поиске не было встречено работ или упоминаний работ, позволяющих усомниться в новизне материала. При этом в работе [10] были найдены конструкции, аналогичные представленным в настоящей работе, но отличающиеся по методу получения. Отметим, что нами они были получены независимо.
- Проведена серия консультаций с моим научным руководителем Тыртышниковым Евгением Евгеньевичем, академиком РАН, доктором физико-математических наук, профессором ВМК МГУ.
- Проведена серия консультаций с кандидатом физико-математических наук Желтковым Дмитрием Александровичем, научным сотрудником ИВМ РАН.
- Проведена серия консультаций со Ставцевым Станиславом Леонидовичем, кандидатом физико-математических наук, старшим научным сотрудником ИВМ РАН.
- Проведено выступление на научном семинаре в ИВМ РАН (руководитель семинара академик РАН Е. Е. Тыртышников).

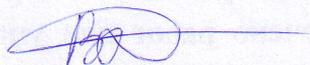
- Проведено выступление на конференции «Суперкомпьютерные дни в России 2023» в секции «Молодые ученые» с последующей публикацией мини-статьи в сборнике трудов конференции.
- Проведено выступление на конференции «Матричные методы и интегральные уравнения».
- Проведено выступление на конференции «Ломоносовские чтения 2024» в секции вычислительной математики и кибернетики.

Таким образом, по результатам поиска в сети Интернет и тематических научных базах, а также обсуждений с указанными выше специалистами следует, что, по-видимому, представленный в моей магистерской диссертации указанный выше математический материал действительно является новым.

Подтверждаю, что являюсь автором предоставляемой на Смотр работы и прошу принять её для участия в Смотре. Принимаю на себя обязательство соблюдать правила Смотра. Также (в соответствии с п. 4 Положения о Смотре) принимаю на себя обязательство оценить 5 работ участников Смотра, выданных мне Оргкомитетом в результате жеребьёвки и сверх того оценить 2-5 работ других участников Смотра на мой выбор. Я понимаю правила оценки работ, приведённые в п. 4.3 Положения о Смотре. Даю согласие на публикацию адреса моей электронной почты.

Защита работы состоялась 31.05.2024. На Смотр представлен текст работы.

Валиахметов Булат Ильдарович



14 июня 2024 г. Москва, Россия



Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова  
Факультет вычислительной математики и кибернетики  
Кафедра вычислительных технологий и моделирования

Валиахметов Булат Ильдарович

**Мозаично-скелетонный метод для современных  
вычислительных систем и его приложения**

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ

**Научный руководитель:**  
академик РАН, д. ф.-м. н., проф.  
Тыртышников Евгений Евгеньевич

Москва, 2024

# Содержание

<b>1</b>	<b>Введение</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Мозаичный формат</b>	<b>6</b>
2.1	Структурированные матрицы . . . . .	6
2.2	Быстрые матрично–векторные операции . . . . .	7
2.2.1	Умножение на вектор . . . . .	8
2.2.2	Свертка векторов с ядром . . . . .	9
2.3	Процедура аппроксимации . . . . .	11
2.3.1	Как определить структуру блока? . . . . .	12
2.3.2	Как разбить блок? . . . . .	13
2.3.3	Как вычислить блок? . . . . .	15
<b>3</b>	<b>Вопросы реализации</b>	<b>17</b>
3.1	Новый подход . . . . .	17
3.2	Параллельные вычисления на общей памяти . . . . .	18
3.2.1	Мотивация асинхронности . . . . .	19
3.2.2	Аппроксимация . . . . .	21
3.2.3	Использование . . . . .	21
3.3	Параллельные вычисления на распределенной памяти . . . . .	22
3.3.1	Аппроксимация . . . . .	22
3.3.2	Использование . . . . .	23
3.4	Численные эксперименты . . . . .	24
<b>4</b>	<b>Приложения к задачам математического моделирования</b>	<b>31</b>
4.1	Обратная задача магнитометрии . . . . .	31
4.1.1	Выбор позиций измерителей . . . . .	32
4.1.2	Решение линейной системы . . . . .	33
4.2	Задача рассеяния . . . . .	37
4.3	Задача агрегации . . . . .	39
4.3.1	Сравнение решений двух методов . . . . .	41
4.3.2	Работа с широким спектром частиц . . . . .	42

4.3.3	Асимптотика мозаичных операций . . . . .	43
<b>5</b>	<b>Заключение</b>	<b>45</b>
	<b>Список литературы</b>	<b>46</b>

# 1 Введение

Моделирование явлений и процессов является одной из ключевых задач прикладной математики. С развитием данной научной области модели постоянно совершенствовались и усложнялись. Это накладывает высокие требования на эффективность используемых методов и их реализаций. Отдельного рассмотрения требует вопрос параллельности и масштабируемости вычислений на современных комплексах ЭВМ.

Нередко решение прикладных задач сводится к работе с массивами чисел — матрицами. Они возникают при решении обыкновенных дифференциальных уравнений, уравнений математической физики или интегральных уравнений, когда нахождение аналитического решения затруднено. В частности, это актуально в случае сложной пространственной области. Тогда, как правило, производится её дискретизация и ставится задача нахождения приближенного решения исходной задачи. Существует множество методов, опирающихся на данный подход, однако почти все они приводят к известной задаче — решению системы линейных уравнений с некоторой матрицей:

$$Ax = b, \tag{1}$$

где  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  и  $b \in \mathbb{C}^n$ .

Хотя задача (1) и является хорошо изученной, трудность её численного решения существенно зависит от обусловленности матрицы  $A$  и согласованности с ней правой части  $b$ . Для решения линейных систем было разработано множество различных алгоритмов, начиная от метода Гаусса, и до обобщенного метода минимальных невязок [18]. Наиболее современные методы зачастую используют матрицу не как таблицу из её элементов, а как оператор, который применяется к вектору:

$$\mathcal{A}(x) = Ax.$$

Это вполне естественно, так как по сути она аппроксимирует исходный оператор в уравнении. Данный подход позволяет по-новому взглянуть на матрицу линейной системы и способ её вычисления. Появляется возможность выбирать способ представления приближенного оператора, позволяющий применять его на заданном конечномерном пространстве векторов. Причем представление можно выбирать, исходя из сложности вычисления  $\mathcal{A}(x)$ , необходимого объёма данных для его хранения и сложности его по-

лучения. К тому же, можно искать представление не исходной матрицы, а её приближения, так как она уже является некоторой аппроксимацией оператора на конечномерном пространстве.

Одним из таких представлений является мозаично-скелетонный формат. Его идея возникла при численном решении интегральных уравнений с ядрами определенного вида в работах В. В. Воеводина [28] и В. Хакбуша [9]. Для нового метода в работах Е. Е. Тыртышникова [20, 21] были получены теоретические оценки на результаты аппроксимации матриц, порожденных достаточно гладкими функциями. В последующем были разработаны эффективные методы получения приближений в данном формате на основе крестового метода [22, 30].

Множество матриц в мозаично-скелетонном формате с общей структурой можно рассматривать как единый класс. В литературе его называют иерархическим или классом  $\mathcal{H}$ -матриц [8]. Над его элементами можно производить различные операции, а также строить эффективные матричные алгоритмы.

Также существуют отдельные методы вычисления мозаично-скелетонных аппроксимаций, когда элементы матрицы не заданы явно, а имеется процедура умножения её на вектор [11, 12].

В данной работе рассмотрен общий подход к процедуре аппроксимации в мозаичном формате, см. Раздел 2. Он позволяет расширить набор используемых методов и искать в матрицах не только малоранговые структуры. На его основе создана открытая программная реализация метода [23], которую пользователь может расширять для учета специфики своей задачи, см. Раздел 3. Код поддерживает параллельное исполнение на общей и распределенной памяти, основанное на асинхронной модели. Это дает возможность его использования для решения задач большого размера на современных вычислительных системах. Также нами был рассмотрены приложения мозаично-скелетонного метода к различным задачам математического моделирования, см. Раздел 4. В частности, для одной из них был разработан алгоритм свертки векторов с мозаичной матрицей.

Результаты были представлены на конференциях «Суперкомпьютерные дни в России 2023» [24], «Матричные методы и интегральные уравнения» [27] и «Ломоносовские чтения–2024» [31, 34].

## 2 Мозаичный формат

### 2.1 Структурированные матрицы

Существует множество различных форматов представления матриц. Наибольший интерес из них представляют малопараметрические. Во-первых, они позволяют хранить данные в сжатом формате, что открывает путь к задачам большого масштаба. Во-вторых, выполнять операции со структурированными матрицами можно значительно эффективнее, чем с плотными. Самые распространенные задачи, такие как решение линейных систем и поиск собственных значений, сводятся к итерациям, на которых матрицу нужно умножить на вектор.

В связи с распространением метода конечных элементов большую популярность обрели разреженные матрицы. Количество занимаемой памяти и сложность умножения на вектор такой матрицы линейны по числу ее ненулевых элементов. В задачах с регулярной структурой часто возникают матрицы типа теплицевых. Они определяются линейным по размеру числом параметров, а операции с ними имеют сублинейную сложность при применении продвинутых алгоритмов. Также интерес представляют матрицы малого ранга. Для них имеет место скелетное разложение:

$$A = UV^*, \quad (2)$$

где  $U \in \mathbb{C}^{m \times r}$  и  $V \in \mathbb{C}^{n \times r}$ ,  $r \geq \text{rank } A$ . Количество параметров для хранения данного представления составляет  $r(m+n)$ . Также и умножение на вектор проводится за  $r(m+n)$  операций вида «умножить–сложить» (fused multiply-add).

Однако при решении практических задач приходится сталкиваться с матрицами, которые не укладываются ни в один из классических форматов. Возникает естественная идея: в отсутствие глобальной структуры задаться поиском более мелких подструктур.

Следуя за [21], обозначим  $\Gamma(B)$  матрицу размера  $m \times n$ , совпадающую с матрицей  $A$  на ее подматрице  $B$  и нулями на остальных позициях. Тогда произвольную матрицу  $A$ , составленную из блоков  $A_i$ , можно представить в виде суммы

$$A = \sum_i \Gamma(A_i). \quad (3)$$

Такое представление будем называть *мозаичным разбиением*. Здесь каждый блок  $A_i$  может обладать произвольной структурой. Например, исходя из априорных знаний о

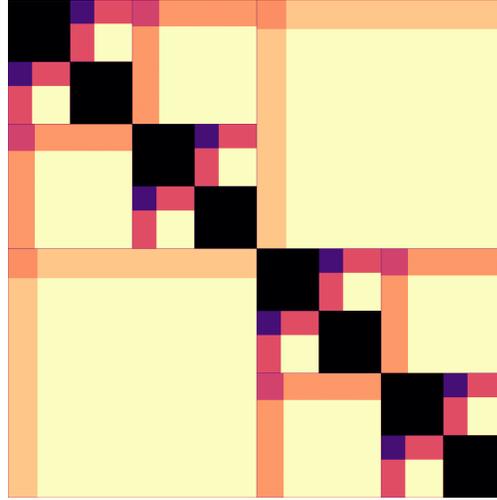


Рис. 1: Мозаичное разбиение. У каждого блока  $A_i$  факторы обозначены цветом, соответствующим их заполненности:  $\text{mem } A_i / (m_i \cdot n_i)$ .

задаче можно выделять блоки, не требующие аппроксимации, и экономить вычисления. В случае, когда блоки могут быть либо малоранговыми, либо плотными, такое представление называет *мозаично-скелетонным форматом*.

Аналогично рангу матрицы можно ввести понятие мозаичного ранга:

$$\text{mrank } A = \frac{1}{m+n} \sum_i \text{mem } A_i,$$

где  $\text{mem } A_i = \min(m_i \cdot n_i, r_i(m_i + n_i))$  для  $A_i \in \mathbb{C}^{m_i \times n_i}$  и  $r_i = \text{rank } A_i$ . Тогда матрица  $A$  в мозаично-скелетонном формате требует хранения  $(m+n) \text{mrank } A$  параметров, аналогично малоранговой. На Рис. 1 приведен пример мозаичного разбиения квадратной матрицы, в котором внедиагональные блоки имеют малый ранг. Данный формат в литературе встречается под аббревиатурой HODLR (hierarchical(-ly) off-diagonal low-rank) [2].

## 2.2 Быстрые матрично–векторные операции

Формально, любую матрицу  $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$  можно представить в мозаичном формате. Однако практический интерес имеет случай небольшого общего числа параметров, который можно охарактеризовать малым мозаичным рангом:

$$\text{mrank } A \ll m+n.$$

Для матриц, порожденных значениями функций в узлах или ячейках сетки, имеются следующие теоретические результаты.

**Определение 2.1.** Функция  $f(y, x)$  называется асимптотически гладкой, если

$$\left| \frac{\partial^{|\varphi|} f}{\partial x^\varphi} \right| \leq Ch^{|\varphi|} |\varphi|! \|x - y\|^{g-|\varphi|}$$

для некоторых постоянных  $C$ ,  $h$  и  $g$ . Здесь  $x \in \mathbb{C}^d$ ,  $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_d)$ ,  $\varphi_i \in \mathbb{N}_0$ ,  $|\varphi| = \sum_i \varphi_i$

и  $\frac{\partial^{|\varphi|} f}{\partial x^\varphi} \equiv \frac{\partial^{|\varphi|} f}{\partial x_1^{\varphi_1} \dots \partial x_d^{\varphi_d}}$ .

**Теорема 2.1.** [21] Пусть функция  $f(y, x)$  — асимптотически гладкая,  $\{y_i\}_{i=1}^n$  и  $\{x_j\}_{j=1}^n$  — квазиравномерные сетки в некотором кубе в  $\mathbb{R}^d$  и  $A_n = [f(y_i, x_j)]_{n \times n}$ . Тогда  $\forall \delta > 0$  найдется  $\tilde{A}_n$  такая, что  $\|A_n - \tilde{A}_n\|_F = O(n^{-\delta})$  и  $\text{mrank } \tilde{A} = O(\log^{d+1} n)$ .

При более общем предположении о гладкости функции можно получить потенциально лучшую асимптотическую оценку на мозаичные ранги функционально порожденных матриц, см. Теорему 2 в работе [22].

### 2.2.1 Умножение на вектор

Мозаичный формат позволяет проводить операции с матрицей гораздо эффективнее, чем с плотной. Наиболее распространенной операцией по праву можно считать умножение матрицы на вектор. Если  $A$  представляется в виде (3), то для произведения справедливо следующее соотношение:

$$Ax = \sum_i \Gamma(A_i)x.$$

Каждое произведение  $\Gamma(A_i)x$ , фактически, требует вычисления

$$y(\alpha_i : \alpha_i + m_i) \leftarrow y(\alpha_i : \alpha_i + m_i) + A_i x(\beta_i : \beta_i + n_i), \quad (4)$$

где  $(\alpha_i, \beta_i)$  — позиция блока  $A_i \in \mathbb{C}^{m_i \times n_i}$  (его углового элемента) в матрице  $A$ . Здесь и далее используется нотация срезов векторов по аналогии с синтаксисом массивов во многих языках программирования:  $w(t : s) \equiv [w_t, \dots, w_{s-1}]^T$ .

В мозаично-скелетонном случае каждое такое произведение требует  $\text{mem } A_i$  числа операций как для плотных блоков, так и для малоранговых. Отсюда общая сложность

матрично-векторного умножения составляет  $\text{mrank } A \cdot (m + n)$  операций. Умножение в транспонированном виде производится абсолютно аналогично прямому и имеет такую же сложность.

### 2.2.2 Свертка векторов с ядром

Также практический интерес представляет процедура свертки  $z = \text{conv}(y, A, x)$ ,  $z \in \mathbb{C}^n$ , определяемая формулой:

$$z_k = \sum_{i+j=k+1} y_i a_{ij} x_j, \quad (5)$$

которая является простейшей дискретизацией билинейной свертки с интегральным ядром:

$$z(u) = \int_0^u y(v) K(v, u - v) x(u - v) dv.$$

Пример использования данной операции есть в Разделе 4.3.

Временно будем считать  $m = n$ . Прямое вычисление вектора  $z$  по формуле (5) требует  $2n^2$  операций. Однако для ядра  $A$  ранга  $r$  из скелетного разложения (2) можно получить следующее выражение:

$$z_k = \sum_{i+j=k+1} y_i a_{ij} x_j = \sum_{i+j=k+1} \sum_{\alpha=1}^r y_i u_{i\alpha} \bar{v}_{j\alpha} x_j = \sum_{\alpha=1}^r \sum_{i+j=k+1} y_i u_{i\alpha} \bar{v}_{j\alpha} x_j,$$

откуда, обозначая  $U = [u_1 \dots u_r]$  и  $V = [v_1 \dots v_r]$ , получаем

$$z = \sum_{\alpha=1}^r (u_{\alpha} \odot y) * (\bar{v}_{\alpha} \odot x),$$

где " $\odot$ " обозначает адамарово (поэлементное) произведение, а "\*" обозначает одномерную свертку векторов. Так, формула (5) сводится к вычислению суммы  $r$  обыкновенных сверток векторов. Для них известна процедура с общей сложностью  $O(n \log n)$ :

$$x * y = \text{FFT}^{-1}(\text{FFT}(x) \odot \text{FFT}(y)),$$

где FFT — процедура быстрого дискретного преобразования Фурье. Таким образом, свертка с ядром малого ранга может быть вычислена за  $O(rn \log n)$  операций. Данная техника нашла широкое применение в задачах вычислительной химии, см. например [16, 26].

Процедура свертки может эффективно быть выполнена и для мозаично-скелетонной матрицы. В применении к одной задаче коагуляции данная техника уже возникала [10]. Однако нами она была получена независимо и в некотором более общем виде, удобном для реализации. Аналогично матрично-векторному умножению, в силу линейности свертки по ядру, из формулы (3) можно получить следующее представление:

$$\text{conv}(y, A, x) = \sum_i \text{conv}(y, \Gamma(A_i), x).$$

Здесь для нахождения  $\text{conv}(y, \Gamma(A_i), x)$  фактически требуется вычислить

$$z(\gamma_i : \gamma_i + l_i) \leftarrow z(\gamma_i : \gamma_i + l_i) + \text{conv}(y(\alpha_i : \alpha_i + m_i), A_i, x(\beta_i : \beta_i + n_i)), \quad (6)$$

где  $\gamma_i = \alpha_i + \beta_i - 1$  и  $l_i = m_i + n_i - 1$  — длина части результата, зависящего от блока  $A_i$ . В данном случае свертка векторов различного размера понимается как "полная", то есть выражение (5) справедливо для всех  $k$ , для которых найдутся допустимые  $i$  и  $j$ .

В мозаично-скелетонном формате для плотных блоков применяется явная формула (5). Свертка с блоком  $A_i \in \mathbb{C}^{m_i \times n_i}$  малого ранга производится с использованием преобразования Фурье. Для получения полной свертки необходимо дополнить векторы нулями перед применением FFT:

$$\tilde{z} = \sum_{\alpha=1}^{r_i} \text{pad}_{l_i}(\tilde{u}_\alpha \odot \tilde{y}) * \text{pad}_{l_i}(\tilde{v}_\alpha \odot \tilde{x}).$$

где  $A_i = \tilde{U}\tilde{V}^*$ ,  $U = [\tilde{u}_1 \dots \tilde{u}_{r_i}] \in \mathbb{C}^{m_i \times r_i}$ ,  $V = [\tilde{v}_1 \dots \tilde{v}_{r_i}] \in \mathbb{C}^{n_i \times r_i}$ . Здесь  $\tilde{y} \in \mathbb{C}^{m_i}$ ,  $\tilde{x} \in \mathbb{C}^{n_i}$ ,  $\tilde{z} \in \mathbb{C}^{l_i}$ ,  $l_i = m_i + n_i - 1$ , обозначают соответствующие данному блоку части входных и выходного векторов, а  $\text{pad}_{l_i}(w) = [w^T 0 \dots 0]^T \in \mathbb{C}^{l_i}$  — дополнение нулями произвольного вектора  $w$  размера не больше  $l_i$ .

Вычислительная сложность свертки с плотным блоком  $A_i$  составляет

$$2m_i n_i = 2 \text{mem } A_i$$

операций. В свою очередь, блок малого ранга требует порядка

$$2Cr_i(m_i + n_i) \log(m_i + n_i) = 2C \log(m_i + n_i) \text{mem } A_i$$

действий, где  $C$  — константа из сложности  $CN \log N$  процедуры FFT над вектором длины  $N$ . Грубо оценив

$$2 \leq 2C \log(m_i + n_i) \leq 2C \log(m + n),$$

итоговая сложность не превышает

$$2C \log(m+n) \sum_i \text{mem } A_i = 2C \log(m+n)(m+n) \text{mrank } A.$$

Таким образом, данное представление позволяет для матриц малого мозаичного ранга вычислять свертку (5) за  $O(\text{mrank } A(m+n) \log(m+n))$  операций аналогично случаю малого обыкновенного ранга. Практические результаты также подтверждают данную асимптотическую оценку, см. Раздел 4.3.3.

## 2.3 Процедура аппроксимации

Абстрактная процедура мозаичной аппроксимации описана в Алгоритме 1. В ней есть 3 ключевых процедуры:

1.  $\text{Struct}(B)$  определяет наличие структуры в блоке  $B$ ;
2.  $\text{Split}(B)$  разбивает блок  $B$  на несколько блоков меньшего размера;
3.  $\text{Compute}(B, \sigma)$  вычисляет блок  $B$  или его приближение в формате  $\sigma$ .

Каждая из них может быть воплощать различную логику, что позволяет комбинировать подходы без изменения структуры общего алгоритма.

На практике для поиска структур необходимо обладать информацией о природе элементов матрицы. Пусть они задаются некоторой функцией:

$$A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{m \times n}, \quad a_{ij} = f(y_i, x_j),$$

аргументы которой выбираются из некоторого множества  $H$ :

$$Y = \{y_i \in H : i \in \overline{1, m}\},$$

$$X = \{x_j \in H : j \in \overline{1, n}\}.$$

В простейшем случае, когда никакой дополнительной информации нет, можно положить  $H = \{1, 2, \dots, \max(m, n)\}$ . Такую матрицу будем обозначать как  $A(Y, X)$ .

---

**Алгоритм 1** Мозаичная аппроксимация

---

```
1:  $Q \leftarrow \{A\}$  {Блоки для рассмотрения}
2:  $R \leftarrow \{\}$  {Структурированные блоки}
3: while  $|Q| > 0$  do
4:    $B \in Q, Q \leftarrow Q \setminus \{B\}$  {Берем из очереди блок}
5:    $\sigma \leftarrow \text{Struct}(B)$  {Тип структуры блока, 0 — ее отсутствие}
6:   if  $\sigma = 0$  then
7:      $B_1, \dots, B_q \leftarrow \text{Split}(B)$  {Разбиение на блоки меньшего размера}
8:      $Q \leftarrow Q \cup \{B_1, \dots, B_q\}$ 
9:   else
10:     $C \leftarrow \text{Compute}(B, \sigma)$  {Блок аппроксимируется типом  $\sigma$ }
11:     $R \leftarrow R \cup \{C\}$ 
12:   end if
13: end while
14: return  $R$ 
```

---

### 2.3.1 Как определить структуру блока?

Для задания процедуры  $\text{Struct}(\cdot)$  необходимо либо обладать априорными знаниями о блоке (например, он может быть нулевым), либо иметь некоторый критерий для функции  $f$ . Каждой подматрице  $\hat{A}$  соответствуют наборы  $\hat{Y} \subset Y$  и  $\hat{X} \subset X$ . Будем обозначать ее как  $A(\hat{Y}, \hat{X})$ . Если блок достаточно мал:

$$\max(|\hat{Y}|, |\hat{X}|) < n_0,$$

то можно считать его плотным. В противном случае попытаемся определить наличие в нем структуры.

Пусть  $f$  обладает следующим свойством. Если  $\hat{X}$  и  $\hat{Y}$  «достаточно далеко» друг от друга, то матрица  $\hat{A} \equiv A(\hat{Y}, \hat{X})$  имеет *малый ранг*:

$$\text{dist}(\hat{Y}, \hat{X}) > 0 \Rightarrow \text{rank } \hat{A} \ll \min(|\hat{Y}|, |\hat{X}|). \quad (7)$$

Здесь  $\text{dist}(\cdot, \cdot)$  реализует критерий удаленности множеств. Наиболее распространенный подход основан на вычислении расстояния между множествами по отношению к их

размерам:

$$\text{dist}(\hat{Y}, \hat{X}) = \frac{\rho(\hat{Y}, \hat{X})}{\text{width}(\hat{Y}) + \text{width}(\hat{X})} - d_0, \quad (8)$$

где  $\rho(\cdot, \cdot)$  — расстояние между множествами и  $\text{width}(\cdot)$  — ширина множества. Вместо суммы ширин также можно использовать их среднее, максимум или минимум с соответствующим изменением  $d_0$ .

В силу дискретности множеств  $\hat{Y}$  и  $\hat{X}$  расстояние между ними в обычном смысле плохо применимо в данной задаче. Типичный способ его задания состоит в погружении множеств в открытые односвязные и последующая работа с ними. В случае  $H$  — метрического пространства можно погружать множества в сферы. Часто  $H$  представляет собой линейное нормированное пространство, где можно выбирать также сферу или параллелепипед. Ширина  $\hat{Y}$  и  $\hat{X}$  также может определяться как ширина множеств, в которые они погружены. Например, из Леммы 2.2 можно заключить, что при рассмотрении асимптотически гладких функций в  $\mathbb{R}^d$  и погружении наборов их точек–аргументов в кубы, то в формуле (8) можно выбирать  $d_0 > 0.5$ . Причем ранг определяется только точностью приближения.

**Лемма 2.2.** [21] Пусть функция  $f(y, x)$  — асимптотически гладкая с константами  $C, h, g, X \subset [0, L]^d$  и  $Y \subset \{y : \|y-x\| \geq L \forall x \in [0, L]^d\}$ . Тогда для произвольных  $q \in (0, 1)$  и целого  $k$  найдется  $\tilde{A}$  такая, что  $\text{rank } \tilde{A} = O(k^d)$  и  $\|A(Y, X) - \tilde{A}\|_F \leq Cq^k L^g \sqrt{|Y||X|}$ .

На практике могут использоваться различные критерии и эвристические подходы. Основное требование к ним — сублинейная сложность по числу точек. Это обусловлено тем, что зачастую стадия аппроксимации имеет сложность  $O((m+n) \log(m+n))$ .

### 2.3.2 Как разбить блок?

Процедура  $\text{Split}(\cdot)$ , осуществляющая разбиение блока на блоки меньшего размера, наследует геометрические принципы процедуры выявления структуры. Как правило, для  $A(\hat{Y}, \hat{X})$  проводится независимое разбиение  $\hat{Y} = \bigcup_p \hat{Y}_p$  и  $\hat{X} = \bigcup_q \hat{X}_q$ , и затем в родительском блоке выбирается прямоугольная сетка из блоков  $A(\hat{Y}_p, \hat{X}_q)$  по всем парам  $(p, q)$ . Для некоторых множеств точек разбиение может быть задано априори. Например, при наличии нескольких изолированных кластеров естественно выделить их в отдельные наборы.

Основная задача мозаично-скелетонного разбиения — выделение блоков малого ранга. С выбором критерия (7) мы приходим к задаче максимизации соотношения (8). В случае  $H = \mathbb{R}^d$ , как правило, множества делятся гиперплоскостями, проходящими через их центр  $c$ . В качестве  $c$  можно выбирать, например, центр фигуры, в которое мы погружали данное множество при проверке критерия малоранговости (как правило, центр уже бывает вычислен). Также распространенным выбором является центра масс:

$$c = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j.$$

При выборе направляющего вектора  $w$  гиперплоскости можно поступить просто: провести сразу  $d$  плоскостей — ортогонально каждой из координатных осей, но это порождает  $2^{d+1}$  блоков из одного и обычно приводит к избыточно мелкому разбиению. Более интересный подход состоит в поиске направления ”вытянутости” множества и проведении гиперплоскости ортогонально ему. Данный вектор также можно выбирать среди ортов по наибольшему разбросу значений соответствующей координаты, что соответствует погружению точек в параллелепипед:

$$w = e_k, k = \arg \max_t \left( \max_j (x_j - c, e_t) - \min_j (x_j - c, e_t) \right).$$

Альтернативой является поиск наиболее удаленной от центра  $c$  точки:

$$w = x_k - c, k = \arg \max_j \|x_j - c\|.$$

Далее можно задаться итерационным процессом: находить наиболее удаленную точку от предыдущей и выбирать в качестве направления ”вытянутости” их разность.

Существуют и другие методы определения геометрических свойств таких множеств. Среди различных комбинаций таких подходов можно найти наиболее подходящую для конкретного класса задач. Как и для процедуры  $\text{Struct}(\cdot)$ , сублинейная сложность по числу точек необходима для сохранения общей асимптотики мозаично-скелетонного алгоритма.

При нетривиальном разбиении блока на несколько неизбежно возникает необходимость перестановки строк и столбцов матрицы, чтобы обеспечить их непрерывную индексацию внутри блока. Это легко обеспечить, храня наборы индексов элементов исходной матрицы, которым он соответствует. На практике, один и тот же набор стро-

к/столбцов разбивается одинаково вне зависимости от блока. Во-первых, данное разбиение можно проводить единожды и сохранять. Во-вторых, можно хранить лишь одну перестановку строк и столбцов, обновляя при очередном разбиении.

### 2.3.3 Как вычислить блок?

Процедура  $\text{Compute}(B, \sigma)$  осуществляет вычисление блока  $B$  в формате  $\sigma$ . В зависимости от  $\sigma$ , это может быть произвольный метод. Отметим, что блок задан не как матрица, а как функция вычисления элемента. Это необходимо учитывать при оценке сложности процедуры.

Для *явных* форматов, требующих нахождения части элементов блока, (плотных, теплицевых и др.) производится их непосредственное вычисление. То есть сложность  $\text{Compute}(B, \sigma)$  в таком случае составляет  $\text{mem}(B)$ .

Для  $\varepsilon \geq 0$  введем понятие  $\varepsilon$ -ранга как наименьшее  $r$  такое, что

$$\min_{U \in \mathbb{C}^{m \times r}, V \in \mathbb{C}^{n \times r}} \|B - UV^*\| \leq \varepsilon \|B\|,$$

обозначаемое как  $\text{rank}_\varepsilon B$ . В рамках мозаично-скелетонного формата необходима также аппроксимация блоков малого  $\varepsilon$ -ранга. Процедура сингулярного разложения, часто используемая для поиска скелетного разложения, в данном случае не применима из-за высокой сложности и необходимости вычисления блока полностью. Куда более подходящим является метод крестовой аппроксимации [22, 30]. В данном алгоритме приближение для  $B = A(\hat{Y}, \hat{X})$  ищется в следующем виде:

$$B \approx A(\hat{Y}, \tilde{X})A(\tilde{Y}, \tilde{X})^{-1}A(\tilde{Y}, \hat{X}) = UV^T,$$

где  $\tilde{X} \subset \hat{X}$ ,  $\tilde{Y} \subset \hat{Y}$  и  $|\tilde{Y}| = |\tilde{X}| = r$ ,  $r \gtrsim \text{rank}_\varepsilon B$ . То есть некоторым образом выбираются строки и столбцы блока так, что построенный на них крест обеспечивает приближение с достаточной точностью. Причем ранг приближения не сильно отличается от наилучшего.

Схема крестового метода [32], использованная в нашей работе, приведена в Алгоритме 2. Отметим, что в местах обращения к строкам или столбцам  $B$  производится их непосредственное вычисление. Для удобства записи положим  $W \equiv V^T$ , а также для произвольной матрицы  $G$  будет обозначать ее  $i$ -ю строку и  $j$ -й столбец как  $G^i$  и  $G_j$ , соответственно.

---

**Алгоритм 2** Матрично-крестовый метод

---

**Require:**  $\|B - UW\| \leq \varepsilon\|B\|$

- 1:  $I \leftarrow \{1, \dots, m\}$
  - 2:  $J \leftarrow \{1, \dots, n\}$
  - 3:  $U \leftarrow []$
  - 4:  $W \leftarrow []$
  - 5:  $r \leftarrow 0$
  - 6:  $i \leftarrow \arg \max |B_{J(*)}|$   $\{J(*)$  обозначает случайный элемент из  $J\}$
  - 7:  $j \leftarrow \arg \max |B^i|$
  - 8: **while**  $\varepsilon\|UW\| \leq |B_{ij}|\sqrt{(m-r-1)(n-r-1)}$  **do**
  - 9:    $u \leftarrow \frac{1}{\sqrt{|B_{ij}|}} (B_j - UW_j)$
  - 10:    $w \leftarrow \frac{\sqrt{|B_{ij}|}}{B_{ij}} (B^i - U^iW)$
  - 11:    $U \leftarrow [Uu]$
  - 12:    $W \leftarrow \begin{bmatrix} W \\ w \end{bmatrix}$
  - 13:    $I \leftarrow I \setminus \{i\}$
  - 14:    $J \leftarrow J \setminus \{j\}$
  - 15:    $r \leftarrow r + 1$
  - 16:    $i \leftarrow \arg \max |B_{J(*)} - UW_{J(*)}|$
  - 17:    $j \leftarrow \arg \max |B^i - U^iW|$
  - 18: **end while**
  - 19: **return**  $B \approx UW$
- 

Данный алгоритм вычисляет всего  $O(r)$  строк и столбцов блока, то есть  $O(r(m+n))$  элементов, где  $r$  — ранг найденного приближения. Это позволяет вычислять функцию  $f(y, x)$  малое количество раз, что важно в ряде приложений, где эта операция является дорогостоящей. Итоговая сложность метода составляет  $O(r^2(m+n)) = O(r \text{ mem}(B))$ .

Если допустить, что для всех малоранговых блоков  $B$  имеет место оценка:

$$\text{rank}_\varepsilon B \leq R,$$

то общая сложность процедуры аппроксимации матрицы  $A$  в мозаично-скелетонном формате по числу операций составляет  $O(R \text{ mem } A)$ .

## 3 Вопросы реализации

### 3.1 Новый подход

Мозаичный формат аппроксимации матриц известен достаточно давно, и на данный момент существует немало его реализаций для различных платформ. Широкий список соответствующих библиотек можно найти в репозитории [3]. К сожалению, они имеют ряд недостатков:

1. единственно доступный тип данных;
2. жестко зафиксированные эвристики;
3. отсутствие параллельных вычислений;
4. отсутствие документации.

Поэтому возникла необходимость создания собственной реализации, которая бы отвечала всем требованиям к современному пакету программ. Мы руководствовались следующими принципами:

1. открытость и хорошая читаемость исходного кода;
2. высокая гибкость: настройка, дополнение и изменение программы;
3. нативные параллельные вычисления.

Исходный код библиотеки «MSk» находится в открытом доступе [23] под публичной лицензией GNU GPL 3 [6]. В качестве основного языка выбран C++ за его гибкость и быстрое действие. Для базовых процедур линейной алгебры используются библиотеки BLAS и LAPACK. Для типов данных кроме четырех стандартных (вещественных/комплексных чисел одинарной/двойной точности) реализованные аналогичные процедуры с использованием техники шаблонов. Параллельное исполнение обеспечивается стандартными средствами языка и стандартом MPI [13] ввиду его широкой распространенности. Также для основных процедур предоставляются интерфейсы к языкам C и Fortran.

Для воплощения заявленных принципов мы выделили несколько основных сущностей:

- `Matrix` — матрица как функция вычисления элемента;
- `Oracle` — метод определения структуры блоков;
- `Block` — абстрактный блок, поддерживающий необходимые пользователю типы операций.

Задачей `Oracle` является задание мозаичной структуры на матрице. В это входит как определение способов представления данных, так и методов их вычисления для `Block`. Причем пользователь может заменить алгоритм вычисления или добавить новый вид блоков — процедура аппроксимации, описанная в Алгоритме 1, не потребует никаких изменений. Также можно заменить и функцию `Matrix`, соответствующую протоколу работы используемого `Oracle`. Таким образом, данный подход позволяет пользоваться библиотекой как "скелетом", который задает основу для "наращивания" различных структур и процедур их получения. При этом большая вариативность не заставляет пользователя "дописывать" составные части библиотеки. Текущая версия реализует упомянутые в Разделе 2.3 способы аппроксимации, параметры которых при необходимости можно настроить.

На выходе пользователь получает оператор, для которого доступны операции над векторами. Важным функционалом нашей библиотеки стала операция свертки, которая не встречалась в упомянутых выше реализациях. Ее использование при численном решении задачи агрегации позволило расширить спектр используемых ядер, см. Раздел 4.3. Также была реализована простая, но эффективная для многих приложений, процедура дожатия. Например, при аппроксимации ядер сингулярных интегральных уравнений [19, 35] наибольшие по модулю элементы матрицы концентрируются в блоках, отвечающих взаимодействию геометрически близких объектов. За счет их точного вычисления после первичной аппроксимации и подсчета норм блоков можно огрубить приближения для блоков малого ранга. Это снижает итоговый мозаичный ранг, увеличивая сжатие и ускоряя векторные операции в мозаичном формате.

### 3.2 Параллельные вычисления на общей памяти

Современные вычислительные системы в большинстве своем являются многоядерными. Для эффективного решения прикладных задач необходимо использовать эти

возможности. Соответственно, для них необходимо найти и ресурс параллелизма на общей памяти.

### 3.2.1 Мотивация асинхронности

При работе с мозаичным форматом на **стадии аппроксимации** есть две разнородные процедуры. Во-первых, вычисление элементов матрицы. Как правило, требуется вычислять либо целый блок (например, плотный), либо его строку или столбец (например, в крестовом методе). Практически всегда это можно выполнять параллельно. Во-вторых, это матрично-векторные операции при поиске приближений для блоков. Современные реализации пакетов программ линейной алгебры BLAS и LAPACK часто поддерживают параллельность таких процедур (OpenBLAS, Intel MKL и др.). Нами не упомянута процедура построения мозаичного разбиения матрицы, так как на практике она занимает пренебрежимо малое количество времени. Таким образом, ускорить вычисления на общей памяти можно при помощи уже имеющихся средств.

Однако может возникнуть ситуация, когда для аппроксимации блока используется алгоритм, параллельная реализация которого отсутствует или требует больших затрат. Решением данной проблемы является одновременная аппроксимация сразу всех блоков матрицы. Это открывает большой ресурс параллелизма, но требует балансировки работы между потоками. Асинхронная модель исполнения удачно вписывается в данную картину, так как блоки обрабатываются независимо и почти не требуют синхронизаций. Таким образом, параллельные свойства всей процедуры перестают зависеть от аналогичных свойств применяемых пользователем методов.

На **стадии использования** матрицы в мозаичном формате в рамках данной работы мы рассматриваем два вида операций. Один из них, умножение на вектор, относится к упомянутым ранее процедурам линейной алгебры. Второй — быстрое преобразование Фурье, необходимое для свертки (5). К сожалению, процедура БПФ не обладает высокой степенью параллелизма. Пример масштабируемости реализации в библиотеке FFTW [5] приведен на Рис. 2. Отметим, что большая часть блоков мозаично-скелетонной матрицы имеют размеры до нескольких тысяч, ускорение для которых на данном графике трудно назвать удовлетворительным.

Особенность данного матричного формата состоит в оперировании с большим количеством блоков, суть порций данных, многие из которых — малого размера. Это

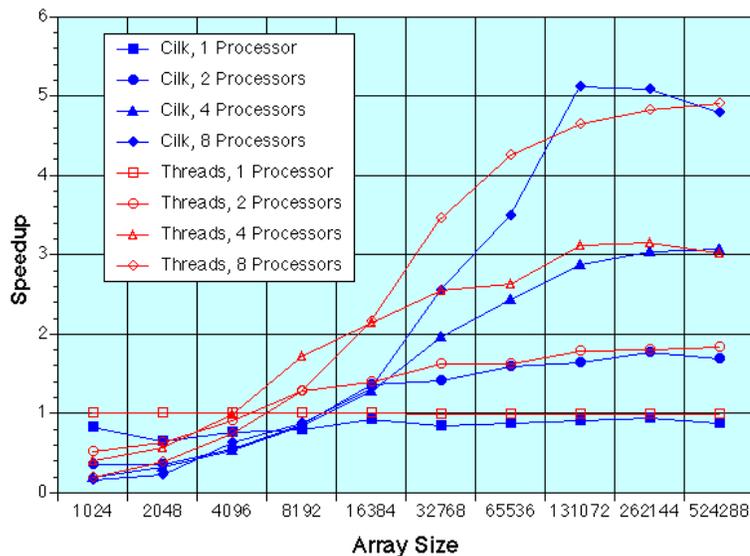


Рис. 2: Ускорение БПФ (библиотека FFTW) на общей памяти. Источник: <http://www.fftw.org/parallel/xolas.html>

снижает эффективность распараллеливания каждой локальной процедуры, особенно когда число ядер (потоков исполнения) велико, а современные ЭВМ, специализированные под вычисления, часто имеют их несколько десятков. Однако позитивная сторона этого — *дополнительный ресурс параллелизма*. Упомянутые выше процедуры можно проводить одновременно для различных блоков. Это обеспечивает параллельность "на более высоком уровне", что дает ряд преимуществ:

1. независимость от реализации используемых библиотек;
2. независимость от масштабируемости методов, выбранных пользователем для различных типов блоков;
3. возможность выбора методов распределения работы по потокам и их настройки, балансировки.

Однако они компенсируются трудностями в реализации, так как элементарные единицы работы имеют различную сложность, которую нельзя оценить априори. Блоки могут отличаться размерами, стоимостью вычисления элементов, стоимостью процедуры аппроксимации. Все это привело нас к выбору асинхронной модели параллелизма.

К сожалению, первоначальный выбор средств библиотеки OpenMP оказался неудачным. Часть ее стандарта, касающаяся задач (OMP task), не дает должных гарантий на

их приоритизацию и сменяемость. Итогом стала собственная реализация асинхронного исполнения *пула потоков* на основе C++ `std::thread` с очередью задач.

### 3.2.2 Аппроксимация

В рамках процедуры аппроксимации мы ориентировались, в первую очередь, на пошаговые алгоритмы, комбинирующие вычисления набора элементов и промежуточные операции, как это делает крестовый метод, см. Алгоритм 2. При таком подходе можно выделить такие шаги как более мелкие единицы работы для распределения по потокам. Во-первых, это позволяет провести более тонкую балансировку между процедурами, оставаясь независимыми от применяемых методов. Во-вторых, методы вычисления отделяются от вычисления элементов и только формируют запросы в виде набора индексов. Для обработки этих запросов вводится *очередь вычисления элементов*. Каждый блок будет отправлять в данную очередь запрос с набором индексов и впоследствии получать сигнал о его исполнении. С ее помощью также производится группировка запросов в группы не ниже заданного размера, чтобы выделять единицы работы большей сложности.

### 3.2.3 Использование

При работе с матрицей, уже представленной в мозаичном формате, операции умножения на вектор и свертки балансируются аналогично аппроксимационной. Но данная задача осложняется тем, что локальные результаты побочных операций необходимо сложить в единый вектор, см. (4) и (6). Это приводит к появлению большого числа критических секций, время выполнения которых может быть сопоставимо с проведением собственно операций. Однако в данном случае уже можно оценить сложность обработки каждого блока  $B$  по известному параметру  $\text{mem } B$ , что позволяет выделять единицы работы значительно большего размера. Вдобавок такой подход позволяет уменьшить общее количество критических секций за счет группировки блоков с пересекающейся областью записи результата. Может показаться, что это может потребовать много дополнительной памяти на локальные операции. Но данная проблема легко решается созданием "банка" массивов и их переиспользованием рабочими потоками.

### 3.3 Параллельные вычисления на распределенной памяти

При работе с задачами больших размеров неизбежно возникают распределенные вычисления. Когда дело касается матриц, зачастую количество непосредственных операций с числами сопоставимо с количеством их чтений из памяти. Скорость работы современных процессоров значительно превышает скорость чтения из оперативной памяти, которая является ограничителем скорости численного решения задачи. Организация мозаично-скелетонного метода на распределенной системе состоит по сути в распределении данных по узлам (MPI-процессам). Последующие вычисления почти полностью выполняются локально.

#### 3.3.1 Аппроксимация

Процедура выделения блоков, как уже было сказано выше, не требует больших временных затрат по сравнению с аппроксимацией, поэтому ее можно выполнять независимо. Далее возникает задача равномерного (насколько это возможно) распределения блоков по узлам. Она не является тривиальной, поскольку не для каждого из них необходимый объем памяти известен заранее, до вычисления. Практический опыт подсказывает, что плотные блоки чаще всего занимают большую долю памяти по отношению к малоранговым. Исходя из этой предпосылки, мы сначала распределяем их, а также другие блоки, для которых объем памяти определен. Затем распределяются оставшиеся в предположении пропорциональности памяти сумме размеров блока. Процедуры распределения достаточно проста и приведена в Алгоритме 3. Он обозначен как "холодный" старт, так как изначально все узлы являются пустыми.

По завершении процедуры аппроксимации можно провести ребалансировку. По известным величинам  $\text{mem}(B)$  можно получить оптимальное с точки зрения равномерности распределение, но эта задача, вообще говоря, полного перебора. Если уже имеющийся расклад близок к равномерному, то его можно попытаться улучшить. Мы составили простую итерационную процедуру, которая жадным образом пытается перераспределить часть блоков, допуская относительный дисбаланс  $\varepsilon$ , см. Алгоритм 4.

Что касается непосредственно процедуры аппроксимации, для каждого блока она выполняется локально на узле. Мы исходим из предположения, что для блока  $B$  количество необходимых вычислений пропорционально  $\text{mem}(B)$ . Предварительно проведен-

---

**Алгоритм 3** Балансировка 1 (“холодный” старт)

---

**Require:**  $\{B_i\}$ ,  $\text{mem}(\cdot)$  {Набор блоков и функция задания памяти}  
1:  $Q \leftarrow \text{Sort}(\{B_i, \text{mem}\})$  {Сортировка по убыванию по заданным весам}  
2:  $S_p \leftarrow \{\}, p \in \overline{1, P}$  {Всего  $P$  узлов}  
3: **while**  $|Q| > 0$  **do**  
4:    $B \in Q, Q \leftarrow Q \setminus \{B\}$   
5:    $p \leftarrow \arg \min_q \sum_{B_i \in S_q} \text{mem}(B_i)$   
6:    $S_p \leftarrow S_p \cup \{B\}$   
7: **end while**  
8: **return**  $S_p, p \in \overline{1, P}$

---

ная балансировка позволяет уравновесить эти вычисления между процессами.

Неучтенным остается распределение вычисления элементов. Чаще всего оно достаточно сбалансировано в соответствии с занимаемой блоками памятью. Однако случается и обратная ситуация — какому-то из узлов может выпасть вычисление “тяжелых” элементов. Данная проблема решается путем синхронизации введенных ранее очередей вычисления элементов между узлами. При исчерпании одной из них другие могут передать ей часть своей работы.

### 3.3.2 Использование

Операции с матрицей в мозаичном формате, распределенной по узлам, организуются вполне естественным образом. Мы ограничимся рассмотрением умножения на вектор и сверткой. Как правило, на каждом из узлов хранится часть входных и выходного векторов. Предварительно входные векторы собираются на каждом из процессов. При необходимости их элементы переставляются для соответствия мозаичному разбиению. Если данная операция проводится много раз, то рекомендуется вначале применить перестановку, работать постоянно с переставленным вектором, и потом переставить его обратно. Затем аналогично работе на общей памяти, процедуры проводятся поблочно с использованием общих ресурсов на узле. В конце результаты суммируются в общий вектор, то есть на каждом процессе производится редукция нужной части результата.

Если задача настолько велика, что хранение целого вектора на одном процессе невозможно, то процедура усложняется. Одной из задач становится распределенная переста-

---

**Алгоритм 4** Балансировка 2

---

**Require:**  $S_p = \{B_i\}$ ,  $p \in \overline{1, P}$ ,  $\text{mem}(\cdot)$  {Блоки распределены по  $P$  узлам}

- 1:  $M_p \leftarrow \sum_{B \in S_p} \text{mem}(B)$
  - 2:  $M \leftarrow \frac{1}{P} \sum_{p=1}^P M_p$
  - 3: **while**  $\frac{1}{M} \max_p |M_p - M| > \varepsilon$  **do**
  - 4:    $p \leftarrow \arg \max_k M_k$
  - 5:    $q \leftarrow \arg \min_k M_k$
  - 6:    $B \leftarrow \arg \min_{B \in S_p} \max \left( \left| \frac{1}{M} |M_p - \text{mem}(B) - M| - \varepsilon \right|, \left| \frac{1}{M} |M_q + \text{mem}(B) - M| - \varepsilon \right| \right)$   
    {”Уравниваются” наиболее и наименее загруженные узлы}
  - 7:    $S_p \leftarrow S_p \setminus \{B\}$
  - 8:    $S_q \leftarrow S_q \cup \{B\}$
  - 9: **end while**
  - 10: **return**  $S_p$ ,  $p \in \overline{1, P}$
- 

новка векторов. Ее можно решить за счет дополнительных пересылок, которые стоит делать единожды заранее и после самих операций. Другая задача — сбор нужных частей входных векторов для каждого из блоков. Во избежание излишнего сбора одних и тех же данных блоки упорядочиваются в соответствии с порядком частей входных данных. Для редукции результирующего вектора необходимо установить, какие из процессов вычисляют слагаемые части результата, которая должна оказаться на данном, и произвести соответствующие пересылки.

### 3.4 Численные эксперименты

Нами были проведен ряд экспериментов по изучению параллельных свойств полученной реализации мозаично-скелетонного метода. Измерялось время выполнения аппроксимации матрицы (Approx), умножения ее на вектор (Matvec) и свертки (Conv). Время выполнения операций с векторами усреднялось по 100 запускам. Все эксперименты проводились на кластере ИВМ РАН [33], на узлах по два 20-ядерных процессора Intel Xeon Gold 6230@2.10ГГц на каждом. В качестве примера рассматривается рассеяния электромагнитной волны на идеально проводящей поверхности цилиндра. Ее

подробную постановку можно найти в Разделе 4.2.

Для измерения *сильной масштабируемости на общей памяти* мы зафиксировали размер матрицы  $N = 21174$  и изменяли число потоков (ядер)  $T$ . Мозаичный ранг полученной аппроксимации составил  $\text{mrank } A = 1553.1$  (сжатие 14.67%). В Таблице 1 приведено время расчета и на Рис. 3 изображен соответствующий график ускорения.

$T$	1	2	4	8	12	16	20	30	40
$t_{\text{Approx}}$ , сек	886.74	470.24	261.99	132.12	96.68	79.93	65.01	50.41	40.41
$t_{\text{Matvec}}$ , мс	24.80	13.72	9.16	6.05	4.91	4.73	4.65	4.78	5.56

Таблица 1: Время аппроксимации и умножения на вектор матрицы размера  $N = 21174$  от числа потоков

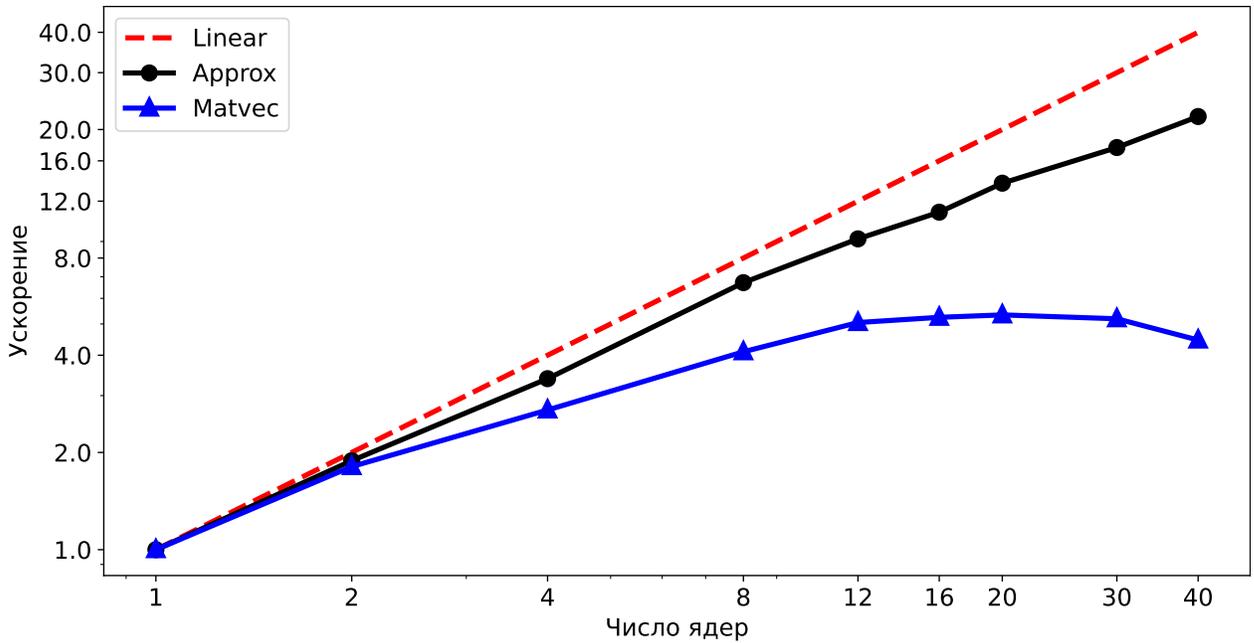


Рис. 3: Сильная масштабируемость на общей памяти по сравнению с линейной

Для измерения *сильной масштабируемости на распределенной памяти* мы зафиксировали размер матрицы  $N = 41724$  и изменяли число процессов  $P$ , при этом число потоков на каждый процесс оставалось постоянным  $T = 20$ . Мозаичный ранг полученной аппроксимации составил  $\text{mrank } A = 1706.5$  (сжатие 8.18%). В Таблице 2 приведено время расчета и на Рис. 4 изображен соответствующий график ускорения.

$P$	1	2	4	6	8	10
$t_{\text{Approx}}$ , сек	157.27	78.97	41.88	29.70	23.94	20.22
$t_{\text{Matvec}}$ , мс	12.65	7.99	5.20	3.96	4.27	3.99

Таблица 2: Время аппроксимации и умножения на вектор матрицы размера  $N = 41724$  от числа процессов

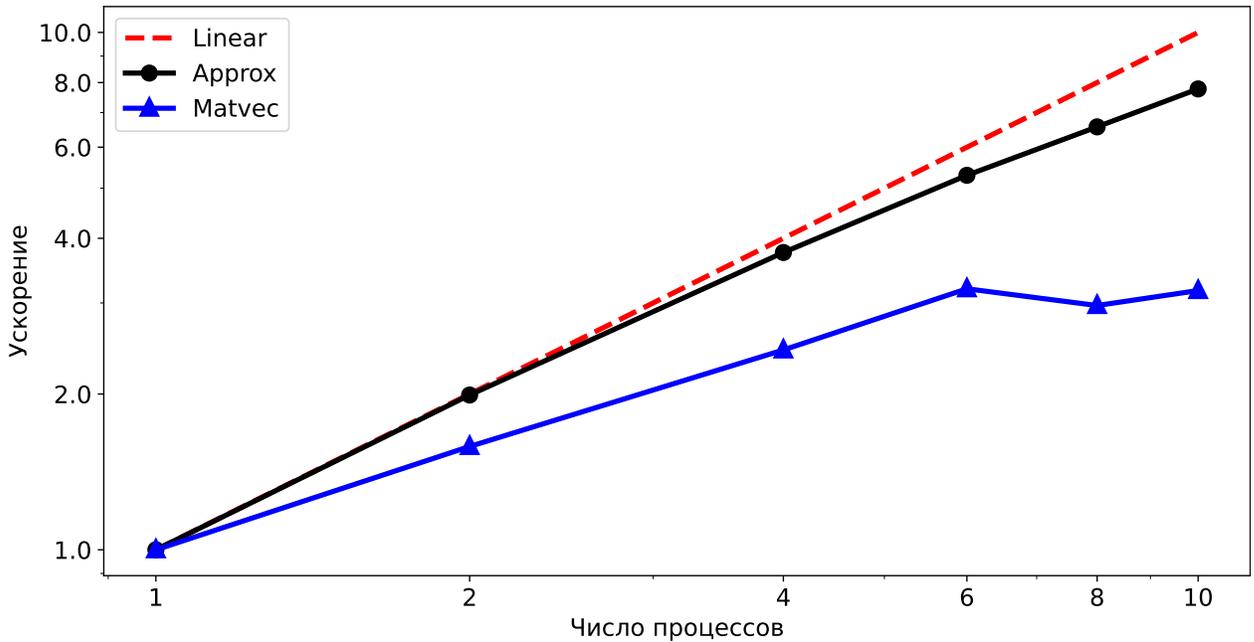


Рис. 4: Сильная масштабируемость на распределенной памяти по сравнению с линейной

Можно сделать вывод, что процедура аппроксимации масштабируется почти линейно как на общей, так и на распределенной памяти. То же нельзя сказать об умножении матрицы на вектор. Видно, что на достаточно большом суммарном числе ядер время перестает уменьшаться. Это можно объяснить ограничением пропускной способности оперативной памяти, которая является постоянной на каждом процессоре. Также количество работы, приходящееся на один поток, становится достаточно маленьким, и накладные расходы на синхронизации становятся существенными. Отметим, что в данной задаче  $t_{\text{Approx}}$  существенно доминирует над  $t_{\text{Matvec}}$ , поэтому за счет него общее время решения линейной системы будет масштабироваться почти линейно.

Для измерения *слабой масштабируемости на общей памяти* мы рассмотрели сетки разной мелкости на одном и том же теле и соразмерно  $N \log N$  (по асимптотике

процедуры аппроксимации) варьировали число потоков  $T$ . В Таблице 3 приведено время расчета и на Рис. 5 изображен соответствующий график эффективности использования ядер алгоритмом. Здесь процедура аппроксимации показывает ускорение даже выше ”идеального” в силу того, что наименьшая из сеток не достаточно мелкая, чтобы мозаично-скелетонный метод показывал высокую эффективность (показатель сжатия для нее составляет 31.4%). В свою очередь, эффективность умножения на вектор падает почти линейно, что говорит о том, что эта задача на самом деле имеет ограниченный ресурс параллелизма из-за ограничений пропускной способности ОЗУ. В данном случае ”эффективное” число ядер (произведение эффективности на  $T$ ) составляет порядка 5.

$N$	6000	21174	41724	84954
mrank	942.0	1553.1	1706.5	1898.7
$T$	1	4	9	19
$t_{\text{Approx}}$ , сек	356.61	246.88	221.69	289.46
$t_{\text{Matvec}}$ , мс	6.07	9.56	11.49	24.26

Таблица 3: Время аппроксимации и умножения на вектор матриц разного размера на общей памяти

Аналогичные результаты были получены и при исследовании *слабой масштабируемости на распределенной памяти*. Здесь мы фиксировали число потоков  $T = 10$  и варьировали число процессов. Результаты расчетов приведены в Таблице 4 и показаны на графике, см. Рис. 6.

$N$	6000	21174	41724	84954
mrank	942.0	1553.1	1706.5	1898.7
$P$	1	4	9	19
$t_{\text{Approx}}$ , сек	46.11	40.40	37.71	41.01
$t_{\text{Matvec}}$ , мс	1.56	2.67	4.386	8.56

Таблица 4: Время аппроксимации и умножения на вектор матриц разного размера на распределенной памяти

Также была проведена вторая серия расчетов для изучения параллельных свойств процедуры свертки на общей памяти. Для исследования *сильной масштабируемости*

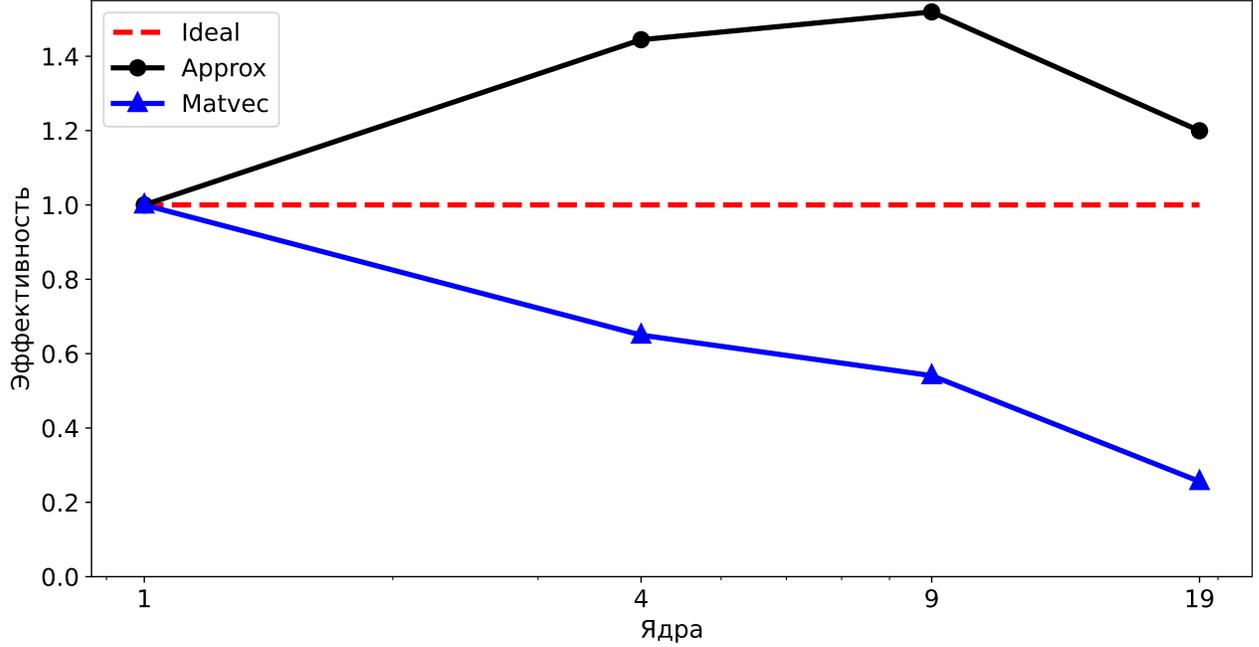


Рис. 5: Слабая масштабируемость на общей памяти по сравнению с идеальной

рассматривалась матрица размера  $N = 2^{21}$ , возникающая в уравнении Смолуховского, см. Раздел 4.3. Размер наименьшего блока выбирался как  $P = 2^9$ , общее сжатие матрицы составило 0.05159%. Время расчета приведено в Таблице 5, соответствующие графики можно увидеть на Рис. 7. Результаты по асимптотике аналогичны первой серии тестов для интегрального уравнения. Видно, что на процедуре свертки удастся получить меньшее ускорение, которое объясняется особенностями обращений алгоритма БПФ в оперативную память.

$T$	1	2	4	8	12	16	20	30	40
$t_{\text{Approx}}$ , сек	683.85	357.49	193.59	104.00	76.47	65.45	57.78	51.23	46.73
$t_{\text{Matvec}}$ , мс	1461.94	764.18	573.36	335.92	279.07	221.52	216.25	237.98	229.84
$t_{\text{Conv}}$ , сек	95.64	56.21	37.15	26.18	22.41	22.60	20.46	21.66	23.38

Таблица 5: Время аппроксимации, умножения на вектор и свертки матрицы размера  $N = 2^{21}$  от числа потоков

Для измерения *слабой масштабируемости* мы рассмотрели для того же набора потоков  $T$  различные размеры матрицы такие, что  $\frac{N \log^2 N}{T} = \text{const}$ . В Таблице 6 приве-

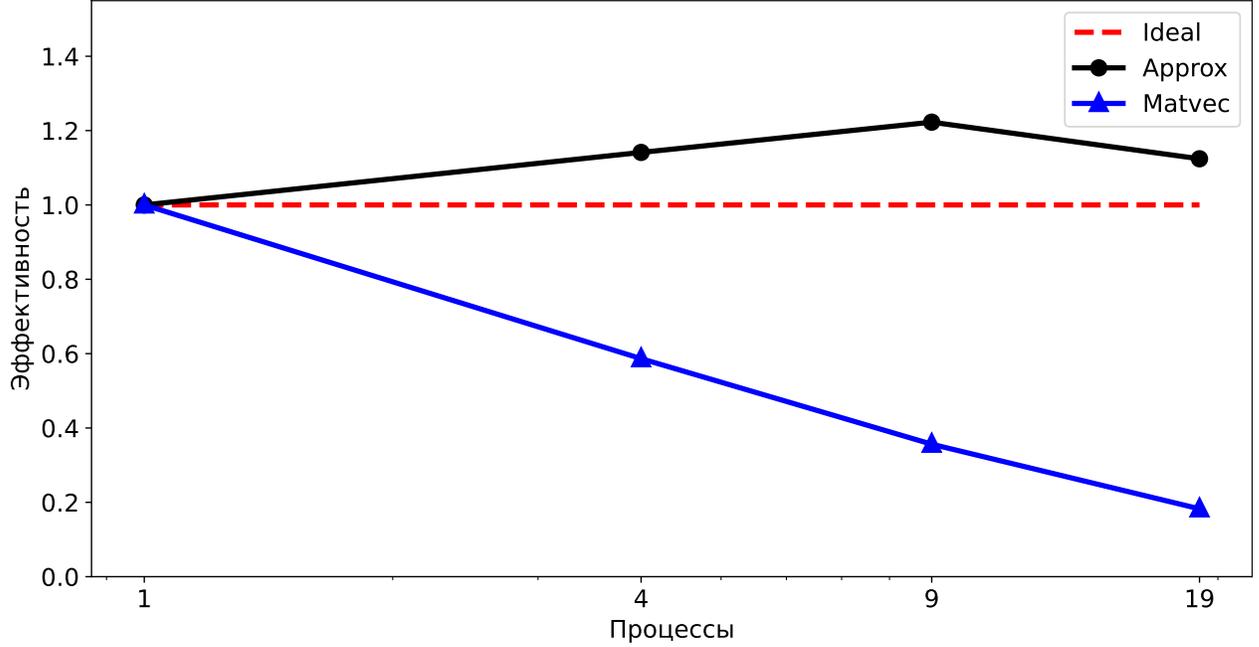


Рис. 6: Слабая масштабируемость на распределенной памяти по сравнению с идеальной

дены время расчета и точные размеры, а на Рис. 8 изображен соответствующий график эффективности использования ядер. Здесь, в отличие от предыдущей задачи, процедура аппроксимации масштабируется не идеально, но число "эффективных" растет с числом реально используемых. Эффективность умножения на вектор вновь уменьшается линейно. Для свертки этот показатель изменяется скачкообразно, так как в данной реализации БПФ [5] для преобразования векторов разного размера могут использоваться разные алгоритмы.

$T$	1	2	4	8	12	16	20	30	40
$N \cdot 2^{-9}$	169	304	551	1004	1429	1836	2231	3182	4096
$t_{\text{Approx}}$ , сек	15.04	16.31	17.67	20.47	25.21	26.74	31.70	40.66	48.14
$t_{\text{Matvec}}$ , мс	37.56	38.20	56.21	73.83	78.66	97.99	106.06	173.11	263.54
$t_{\text{Conv}}$ , сек	1.83	3.00	4.40	3.69	7.04	13.22	8.00	22.19	23.55

Таблица 6: Время аппроксимации, умножения на вектор и свертки матриц разного размера на общей памяти

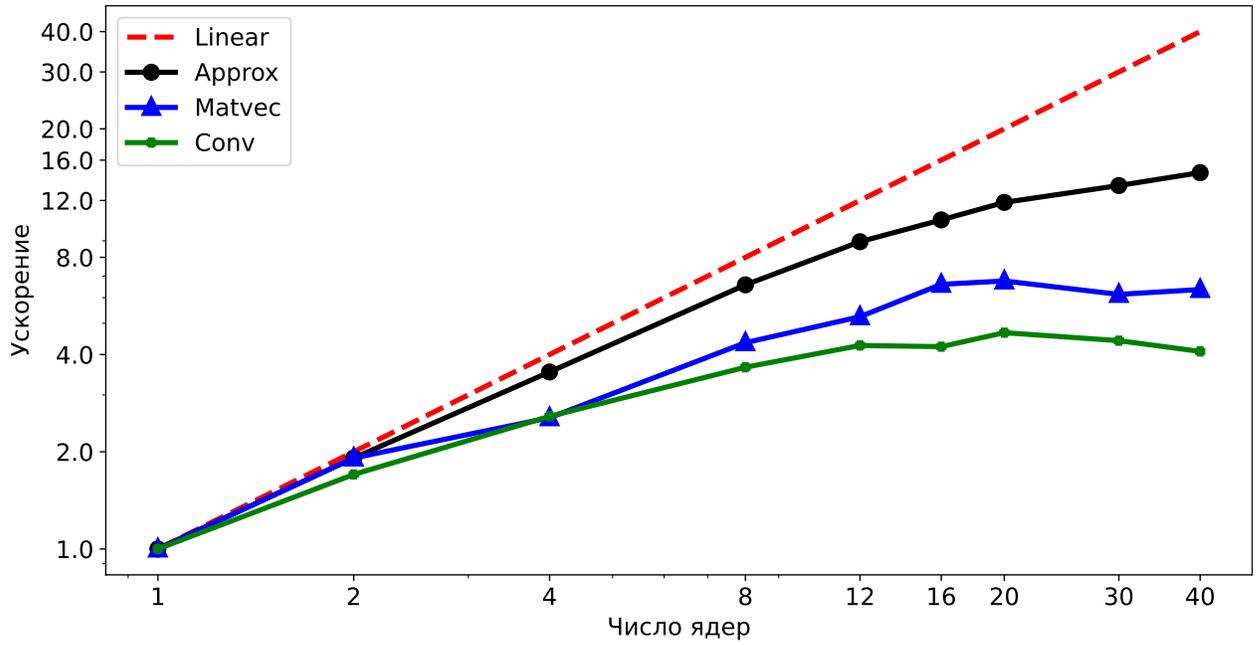


Рис. 7: Сильная масштабируемость свертки на общей памяти

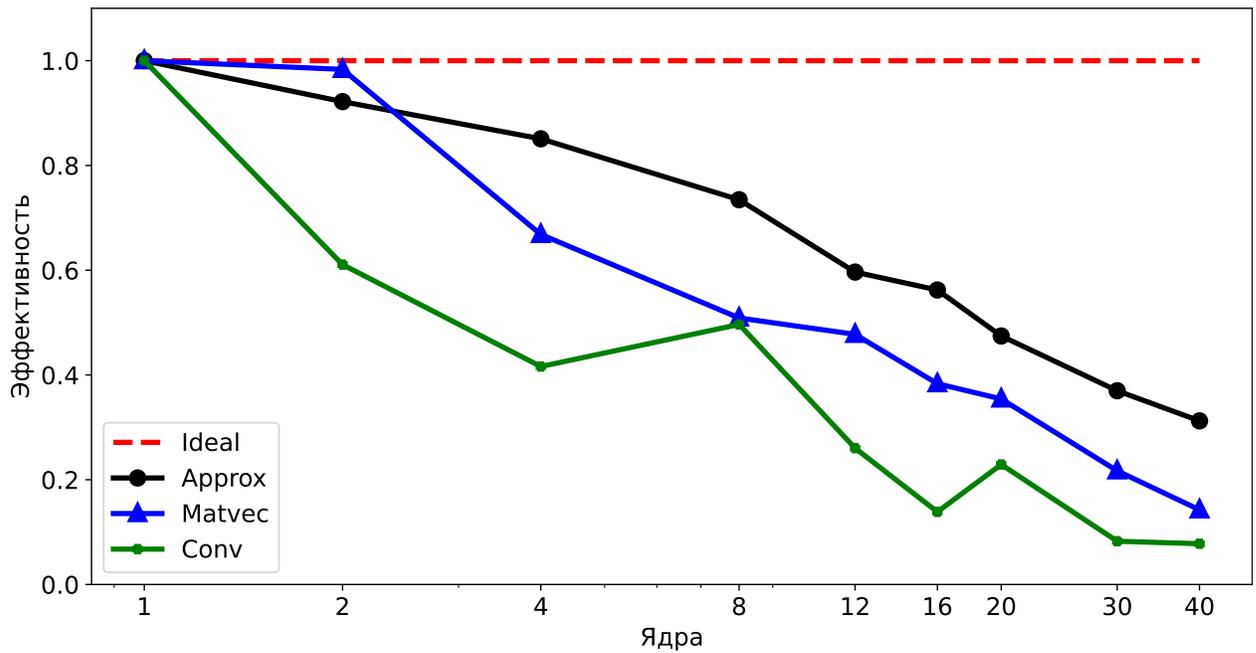


Рис. 8: Слабая масштабируемость на общей памяти по сравнению с идеальной

## 4 Приложения к задачам математического моделирования

### 4.1 Обратная задача магнитометрии

Обратная задача магнитометрии — одна из важных задач прикладной вычислительной физики. Её решение часто представляет трудность из-за некорректности постановки и высокой вычислительной сложности. В классической постановке [25] необходимо определить  $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $x \in P \subset \mathbb{R}^3$ , из уравнения

$$\frac{\mu_0}{4\pi} \int_P \left( \frac{3(\varphi(x), x-y)(x-y)}{\|x-y\|^5} - \frac{\varphi(x)}{\|x-y\|^3} \right) dx = \psi(y) \quad (9)$$

по данным экспериментальных измерений  $\psi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  триаксиальными сенсорами в точках  $y \in Q \subset \mathbb{R}^3$ ,  $P \cap Q = \emptyset$ .

Далее производится дискретизация  $Q$  по точкам проведения измерений  $\psi(y_i)$ ,  $Y = \{y_1, \dots, y_M\} \subset Q$ , равно как и  $P$  по точкам восстановления  $\varphi(x_j)$ ,  $X = \{x_1, \dots, x_N\} \subset P$ . Для простоты предположим, что все области разделены на равные элементы объема и для  $\psi$  и  $\varphi$  производится кусочно-постоянная аппроксимация. Так, задача (9) сводится к системе линейных уравнений для трехмерных векторов:

$$\frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{j=1}^N \left( \frac{3(\varphi(x_j), x_j - y_i)(x_j - y_i)}{\|x_j - y_i\|^5} - \frac{\varphi(x_j)}{\|x_j - y_i\|^3} \right) = \psi(y_i), \quad i \in \overline{1, M}.$$

Положив  $\psi(y_i) = [\psi_i^1, \psi_i^2, \psi_i^3]^T$  и  $\varphi(x_j) = [\varphi_j^1, \varphi_j^2, \varphi_j^3]^T$ , ее можно переписать в виде

$$A\tilde{\varphi} = \tilde{\psi}, \quad (10)$$

где  $\tilde{\varphi} = [\varphi_1^1, \varphi_1^2, \varphi_1^3, \dots, \varphi_N^1, \varphi_N^2, \varphi_N^3]^T \in \mathbb{R}^{3N}$  — искомый вектор компонент поля и  $\tilde{\psi} = [\psi_1^1, \psi_1^2, \psi_1^3, \dots, \psi_M^1, \psi_M^2, \psi_M^3]^T \in \mathbb{R}^{3M}$  — заданный вектор компонент измерений. Матрица  $A \in \mathbb{R}^{3M \times 3N}$  состоит из  $M \times N$  блоков размера  $3 \times 3$  вида

$$\frac{\mu_0}{4\pi\rho_{ij}^3} (r_{ij}^T r_{ij} - I_3), \quad (11)$$

где  $x_j - y_i = \rho_{ij} r_{ij}$ ,  $\rho_{ij} = \|x_j - y_i\|$ , а  $I_3$  — единичная матрица. Для простоты обозначений далее вместо  $\tilde{\psi}$  и  $\tilde{\varphi}$  будем писать  $\psi$  и  $\varphi$ , соответственно.

### 4.1.1 Выбор позиций измерителей

Первый вопрос, который возникает в данной задаче, это выбор положений сенсоров. На первый взгляд, увеличение числа сенсоров может только улучшить восстанавливаемое решение. Однако это может привести к ухудшению её численной обусловленности и увеличению вычислительной сложности. Поэтому вопрос поиска количества и оптимального расположения сенсоров представляет интерес с прикладной точки зрения. Многие подходы к определению наилучшей конфигурации точек наблюдения основываются либо на решении модельных задач и сравнении качества решений [4, 15], что многократно увеличивает время решения задачи, либо на инженерном опыте исследователя. Далее описывается предложенный нами алгоритм *априорного* определения информативности заданной конфигурации сенсоров без решения обратной задачи (9).

К матрице линейной системы можно применить метод мозаично-скелетонной аппроксимации. Предпосылкой к этому служит, во-первых, убывающий с расстоянием вид функции (11). Во-вторых, отделенность областей расположения источников ( $P$ ) и сенсоров ( $Q$ ) друг от друга. Как итог, определяется набор блоков  $\{B_k\}$  и соответствующие  $\text{mem}(B_k)$ ,  $k \in \overline{1, K}$ . Из них можно судить об информативности выбранного набора сенсоров  $Y$  по степени сжатия матрицы  $A$  относительно плотного формата хранения:

$$\zeta_A(Y) = \frac{\text{mem}(A(Y, X))}{3M \cdot 3N} \cdot 100\%.$$

Для двух конфигураций вида, аналогичному Рис. 9, при аппроксимации с точностью  $\varepsilon = 10^{-2}$  расчет показывает  $\zeta_A(Y_1) = 2.88\%$  и  $\zeta_A(Y_2) = 1.02\%$ . Это согласуется с физическим смыслом эксперимента: при одинаковом числе сенсоров результат наблюдения объекта с одной стороны несет большее количество информации, чем при наблюдении с одной стороны.

Таким образом, использование мозаично-скелетонной аппроксимации позволяет оценивать степень информативности различных конфигураций сенсоров и выбирать из них наилучшую.

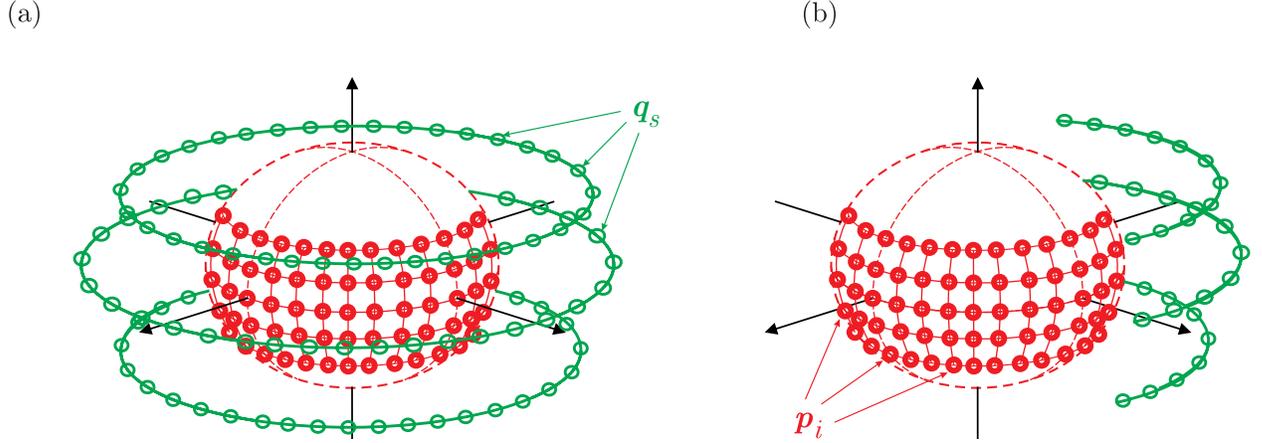


Рис. 9: Схематическое изображение взаимного расположения множеств  $Y$  и  $X$  в случае различных конфигураций расположения сенсоров при тестовых расчётах: (а) “конфигурация 1” ( $Y_1, X$ ) — объект наблюдается со всех сторон; (б) “конфигурация 2” ( $Y_2, X$ ) — объект наблюдается только с одной стороны.

#### 4.1.2 Решение линейной системы

Матрица линейной системы (10) не является квадратной. Будем понимать под ее решением  $\varphi$  нормальное псевдорешение, то есть решение задачи минимизации:

$$\|A\varphi - \psi\|_2 \rightarrow \min_{\varphi \in \mathbb{R}^{3N}}.$$

Оно же является решением нормализованной задачи:

$$A^*A\varphi = A^*\psi. \quad (12)$$

К ней уже применимы различные методы решения линейных систем с симметричной матрицей, причем здесь она является неотрицательно определенной. Ввиду больших размеров используемых в задаче пространственных сеток и измерителей, использование явных методов затруднено, поэтому практический смысл представляют итерационные методы.

Также зачастую задача (9) является некорректной. Причем может оказаться, что  $\text{rank } A < 3N$ , и тогда система (12) будет вырожденной. К тому же, в правой части  $\psi$  могут присутствовать ошибки измерения приборов. Для борьбы с этими проблемами применяется регуляризация по Тихонову:

$$A^*A\varphi_\lambda + \lambda^2\varphi_\lambda = A^*\psi, \quad (13)$$

где  $\lambda$  — параметр регуляризации.

Мы предлагаем *явный метод* решения поставленной задачи. Предположим, что известно сингулярное разложение матрицы  $A$ :

$$A = U\Sigma V^*, \quad (14)$$

где  $U \in \mathbb{R}^{3M \times R}$ ,  $V \in \mathbb{R}^{3N \times R}$ ,  $\Sigma \in \mathbb{R}^{R \times R}$ . Причем  $U^*U = I$ ,  $V^*V = I$ ,  $\Sigma$  — диагональная и  $R = \text{rank } A$ . Тогда  $\varphi$  может быть найдено с помощью псевдообратной матрицы:

$$\varphi = A^\dagger \psi = V\Sigma^\dagger U^* \psi.$$

Аналогичным образом из (13) находится и регуляризованное решение  $\varphi_\lambda$ :

$$\varphi_\lambda = V (\Sigma^2 + \lambda^2 I)^{-1} \Sigma U^* \psi = V \text{diag} \left( \frac{\sigma_1}{\sigma_1^2 + \lambda^2}, \dots, \frac{\sigma_R}{\sigma_R^2 + \lambda^2} \right) U^* \psi.$$

Сложность данной процедуры составляет  $3R(M+N+1)$  операций, что заведомо меньше любого итерационного метода.

**Как найти сингулярное разложение матрицы системы (10)?** Пусть матрица  $A$  представляет собой блочный столбец размера  $K$ :

$$A = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \dots \\ B_K \end{bmatrix}, \quad (15)$$

где  $B_k \in \mathbb{R}^{m_k \times n}$ ,  $k \in \overline{1, K}$ ,  $n = 3N$  и  $\sum_{k=1}^K m_k = m = 3M$ . Пусть также для каждого блока известно его малоранговое разложение:

$$A_k = U_k V_k^*, \quad (16)$$

где  $U_k \in \mathbb{R}^{m_k \times r_k}$ ,  $V_k \in \mathbb{R}^{n \times r_k}$ . Такое представление можно получить, из мозаично-скелетонного метода, введя дополнительное условие на структуру разбиение — запрет на разбиение множества источников. Причем разбиение множества сенсоров проводится до тех пор, либо пока все блоки не будут удовлетворять критерию их малоранговости, либо до фиксированного порогового размера.

Из формул (15) и (16) получается скелетное разложение для матрицы  $A$ :

$$A = \begin{bmatrix} U_1 & & \\ & \ddots & \\ & & U_K \end{bmatrix} [V_1 \dots V_K]^*, \quad (17)$$

с количеством слагаемых  $\sum_{k=1}^K r_k = r \geq R$ . Для получения разложения (14) осталось провести процедуру дожатия:

1. Найдем QR-разложение для каждой из матриц  $U_k = Z_k W_k$ ,  $k \in \overline{1, K}$ . Сложность каждого из них составляет  $O(m_k r_k^2)$ , что в сумме дает  $O(m r_{\max}^2)$ , где  $r_{\max} = \max_k r_k$ .
2. Найдем QR-разложение для блочной матрицы  $[V_1 \dots V_K] = G [H_1 \dots H_K]$ , где  $H_k$  – коэффициенты разложения  $V_k$  по общему базису  $G$ ,  $k \in \overline{1, K}$ . Его сложность составляет  $O(n r^2)$ .
3. Представление (17) для  $A$  преобразуется в следующее:

$$A = \text{diag}(Z_1, \dots, Z_K) \text{diag}(W_1, \dots, W_K) [H_1 \dots H_K]^* G^*,$$

где  $\text{diag}(\cdot)$  – диагональная матрица, составленная из блоков. Причем матрицы  $G$  и  $\text{diag}(Z_1, \dots, Z_K)$  являются ортогональными.

4. Найдем её сингулярное разложение матрицы

$$\text{diag}(W_1, \dots, W_K) [H_1 \dots H_K]^* = \begin{bmatrix} W_1 H_1^* \\ \vdots \\ W_K H_K^* \end{bmatrix},$$

обозначим его как

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_K \end{bmatrix} SL^*.$$

Сложность данной процедуры составляет  $O(r^3)$ . Здесь следует провести редукцию ранга  $r$  аппроксимации по заданной точности и параметру регуляризации.

5. В итоге для  $A$  получено представление:

$$A = \text{diag}(Z_1, \dots, Z_K) \begin{bmatrix} F_1 \\ \dots \\ F_K \end{bmatrix} SL^*G^*.$$

Обозначив  $U := \begin{bmatrix} Z_1 X_1 \\ \dots \\ Z_K X_K \end{bmatrix}$ ,  $V := GL$  и  $\Sigma := S$ , получаем искомое сингулярное разложение (14).

Таким образом, сложность поиска сингулярного разложения составляет  $O((m+n)r^2)$ . Итоговая сложность метода решения системы (10) не превышает  $O((M+N)r^2)$ .

Далее приведены примеры расчетов для конфигурации 2, см. Рис. 9. Число источников  $|X| = 3200$  и число сенсоров  $|Y| = 5000$ ,  $A \in \mathbb{R}^{15000 \times 9600}$ . Все эксперименты проводились на ПК с процессором AMD Ryzen 9 5900HX на 8 ядрах. В каждом из них строилось модельное решение вида  $\varphi = A^* \xi$ , где  $\xi$  — вектор с компонентами из стандартного нормального распределения, и правая часть  $\psi = A\varphi$ . Здесь для получения входных данных использовалась исходная плотная матрица. Для сравнения с изложенным выше методом блочного сингулярного разложения (MSkSVD) был выбран метод сопряженных градиентов для нормального уравнения (CGNR) [17]. Итерационный алгоритм запускался до сходимости невязки с точностью  $10^{-3}$ . В Таблице 7 показаны результаты расчетов. Видно, что предложенный нами подход за меньшее время получает более точное решение.

Метод	Ошибка	Невязка	$t_{\text{solve}}$ , мс	$t_{\text{approx}}$ , мс
MSkSVD	$3.77 \cdot 10^{-4}$	$8.68 \cdot 10^{-8}$	0.54	1498
CGNR	$1.17 \cdot 10^{-2}$	$1.37 \cdot 10^{-4}$	5540	0

Таблица 7: Решение модельной задачи

В рамках второго эксперимента мы добавили в правую часть  $\psi$  белый шум на уровне 0.1%. В данном случае применение регуляризации (13) необходимо, в противном случае полученное решение существенно отличается от настоящего. В Таблице 8 представлены результаты расчетов. Параметр регуляризации  $\lambda$  для каждого из методов подбирался

относительно  $\|A\|_2$ , равной ее старшему сингулярному числу. Здесь качество решений явного и итерационного методов почти совпадают, при этом новый подход вновь требует меньшее время.

Метод	Ошибка	Невязка	$\lambda/\ A\ _2$	$t_{\text{solve}}$ , МС	$t_{\text{approx}}$ , МС
MSkSVD	$5.96 \cdot 10^{-2}$	$4.75 \cdot 10^{-3}$	0.04	0.21	1498
CGNR	$5.39 \cdot 10^{-2}$	$4.44 \cdot 10^{-3}$	0.01	4291	0

Таблица 8: Решение модельной задачи с шумом 0.1%

Отметим также, что предложенный метод в сравнении с CGNR может быть еще более эффективным при наличии  $L > 1$  различных измерений, то есть при решении линейной системы с многими правыми частями. Тогда единожды построенное за  $t_{\text{approx}}^{\text{MSkSVD}}$  сингулярное разложение может быть использовано для решения всей задачи за время  $L \cdot t_{\text{solve}}^{\text{MSkSVD}}$  вместо порядка  $L \cdot t_{\text{solve}}^{\text{CGNR}}$  времени на итерации.

## 4.2 Задача рассеяния

Одной из часто рассматриваемых задач вычислительной электродинамики является задача рассеяния на идеально проводящей поверхности  $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ :

$$\mathbf{n}(x) \times \left( \mathbf{E}_{\text{inc}}(x) + \frac{\hat{i}}{\omega \varepsilon_0} \text{rot rot} \int_{\Sigma} F(x-y) \mathbf{j}(y) d\sigma_y \right) = 0, \quad x \in \Sigma.$$

Здесь  $F(x-y) = \frac{e^{\hat{i}k\|x-y\|}}{4\pi\|x-y\|}$  — фундаментальное решение уравнения Гельмгольца,  $k$  — волновое число,  $\mathbf{E}_{\text{inc}}$  — инцидентное поле (монохроматическая плоская волна),  $\mathbf{j}$  — искомый вектор поверхностного тока,  $\hat{i}$  — мнимая единица. На  $\Sigma$  производится триангуляция, пространство поиска приближенного решения выбирается на базе конечноэлементных функций  $\mathbf{v}_i(x)$  типа RWG (Rao–Wilton–Glisson), а затем применяется метод Бубнова–Галеркина. Таким образом, задача сводится к решению линейной системы. Для ее решения обычно применяются итерационные методы. Подробности постановки и применяемого метода граничных интегральных уравнений можно найти, например, в книге [7].

Элемент  $a_{ij}$  матрицы  $A \in \mathbb{C}^{N \times N}$  решаемой линейной системы задается следующей формулой:

$$a_{ij} = \int_{\sigma_i} \int_{\sigma_j} (k^2 \mathbf{v}_i(x) \cdot \mathbf{v}_j(y) - \text{Div } \mathbf{v}_i \text{ Div } \mathbf{v}_j) F(x - y) d\sigma_y d\sigma_x, \quad (18)$$

где  $\sigma_i = \sigma_i^+ \cup \sigma_i^-$  — пара треугольников с общим ребром под номером  $i$  и  $\text{Div } \mathbf{v}_i$  — поверхностная дивергенция  $\mathbf{v}_i$ . Для вычисления интегралов применяется квадратура Гаусса. Одним из недостатков метода интегральных уравнений по сравнению с, например, дифференциальной постановкой является то, что возникающая матрица является плотной. Для задач большого волнового размера, когда размеры области много больше длины волны, это существенный недостаток — требуется огромное количество оперативной памяти и вычислительных ресурсов для решения системы. Однако  $A$  можно приблизить в мозаично-скелетонном формате [19, 35], тем самым уменьшив требуемую на ее хранение память. Решение системы также ускоряется за счет быстрого умножения матрицы на вектор. Причем процедура аппроксимации зачастую проходит быстрее, чем набор плотной матрицы, поскольку требует вычисления только части ее элементов.

В качестве примера рассмотрим рассеяние на металлическом цилиндре с частотой  $\nu = 4\text{ГГц}$ ,  $k = \frac{2\pi\nu}{c}$ . Для четырех треугольных сеток различного разрешения производилась мозаично-скелетонная аппроксимация матрицы  $A$ , задаваемой формулой (18), и затем решалась линейная система с многими правыми частями (всего 722 по 2 типам поляризации и 361 углу падения от  $0^\circ$  до  $180^\circ$ ) модифицированным методом минимальных невязок (GMRES) [18]. В Таблице 9 приведены результаты расчетов: время аппроксимации матрицы и решения системы, а также полученное сжатие:  $\frac{\text{mem } A}{N^2} \cdot 100\%$  и соответствующий мозаичный ранг  $\text{mrank } A = \frac{\text{mem } A}{2N}$ . Из Рис. 10а видно, что с ростом размеров задачи время ее решения растет сублинейно, а из Рис. 10b — что мозаичный ранг данной матрицы данной задачи растет логарифмически с размером сетки. Данные выводы вполне согласуются с теоретическими результатами для мозаично-скелетонного метода.

На Рис. 11 также сравниваются эффективная площадь рассеяния (ЭПР) для результата физического эксперимента и численного решения на самой мелкой из сеток (56636 треугольных ячеек,  $N = 84954$ ). ЭПР часто используется как метрика качества в задачах рассеяния. На графиках можно увидеть, что численная схема хорошо согласуется с экспериментальными данными.

$N$	6000	21174	41724	84954
$t_{\text{Approx}}$ , сек	16.70	39.84	79.93	166.80
$t_{\text{Solve}}$ , сек	29.96	91.56	245.11	682.39
Сжатие	31.4%	14.67%	8.18%	4.47%
$\text{mrank } A$	942.0	1553.1	1706.5	1898.7

Таблица 9: Время решения задачи рассеяния для разных размеров

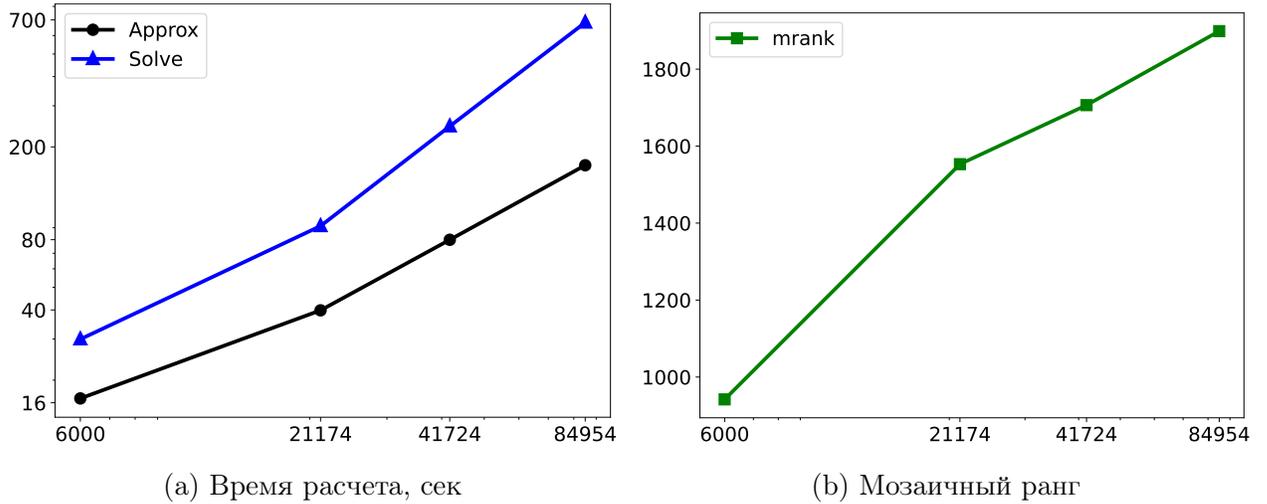


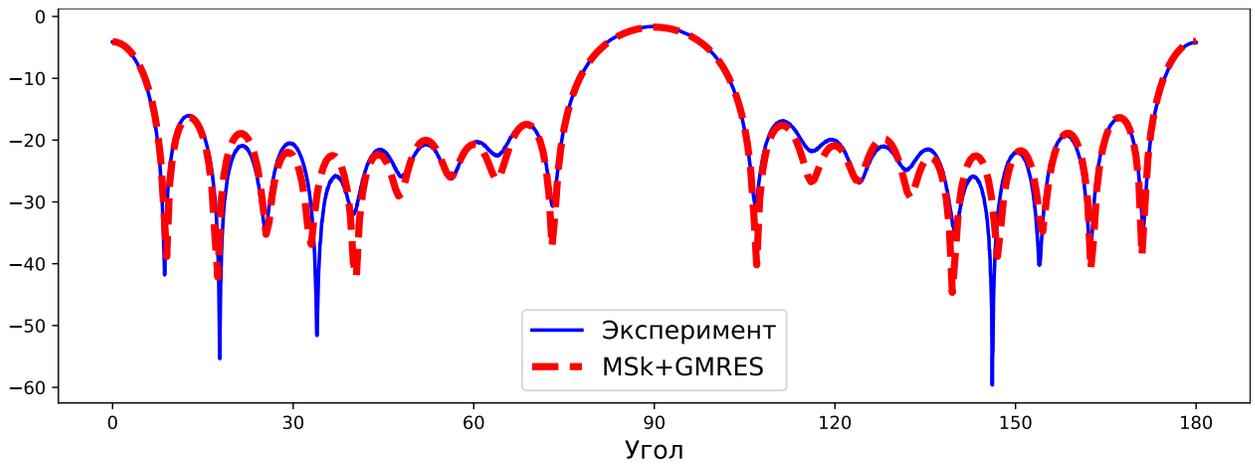
Рис. 10: Рост сложности решения задачи с увеличением размера сетки

### 4.3 Задача агрегации

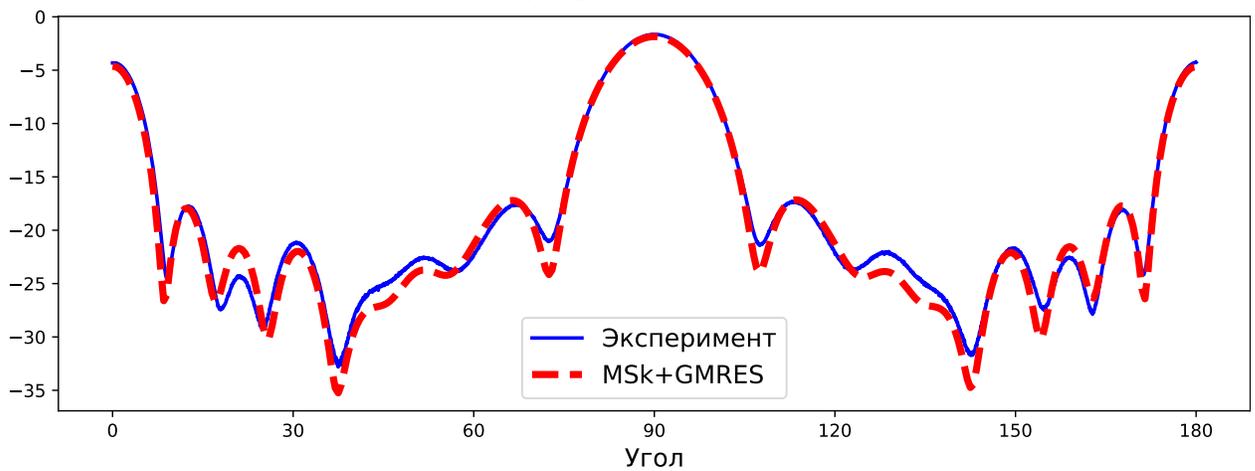
Еще одна область, в которой мозаично-скелетный формат нашел свое применение, это задачи химической кинетики, а именно уравнение Смолуховского [29] в его дискретном виде. Ставится задача Коши для следующего дифференциального уравнения:

$$\begin{cases} \frac{d\eta_s}{dt} = \frac{1}{2} \sum_{i+j=s} K_{ij} \eta_i \eta_j - \sum_j K_{sj} \eta_s \eta_j, \\ \eta_s(0) = \eta^{(0)}, \end{cases} \quad (19)$$

где  $\eta_s$  — концентрация частиц размера  $s \in \mathbb{N}$  в заданном объеме,  $\eta^{(0)}$  — начальные концентрации. Формально, размеров частиц бесконечно много, но на практике ограничиваются некоторым наибольшим допустимым размером  $S$  и  $\eta \in \mathbb{R}^S$ . Тогда система уравнений (19) сводится к конечному числу нелинейных ОДУ. Для их решения существует большое количество методов. Однако все они неизбежно должны вычислять



(a) Горизонтальная



(b) Вертикальная

Рис. 11: ЭПР (дБ) цилиндра при различной поляризации падающей волны в эксперименте и численном решении

правую часть (19) для различных  $\eta$ . Прямой подсчет требует порядка  $S^2$  операций, что может оказаться обременительным при больших  $S$ .

В случае, когда ядро  $K$  имеет малый ранг, были получены быстрые методы решения уравнения Смолуховского [26]. Однако не все приложения исчерпываются только ими. Для ядер, допускающих некоторую малоранговую оценку сверху были разработаны рандомизированные методы типа Монте–Карло [14]. Нами был предложен метод, позволяющий решать задачу (19) с ядрами полного ранга, допускающими приближение в мозаично-скелетонном формате. В частности, к ним относятся следующие [1]:

1.  $K_{ij} = |i^{1/3} - j^{1/3}|$ ;
2.  $K_{ij} = (i^{1/3} + j^{1/3})^2 |i^{2/3} - j^{2/3}|$ ;
3.  $K_{ij} = \frac{(i + j) (i^{1/3} + j^{1/3})^{2/3}}{(ij)^{5/9} |i^{2/3} - j^{2/3}|}$ ;

для  $i \neq j$  и  $K_{ij} = (i^{1/3} + j^{1/3})(i^{-1/3} + j^{-1/3})$  для  $i = j$ . В Таблице 10 для них приведены соответствующие значения для максимального ранга среди неплотных блоков для  $S = 2^{20}$  в зависимости от точности аппроксимации  $\varepsilon$ . Мозаичное разбиение строилось аналогично Рис. 1 с наименьшим размером блока, равным  $2^9$ .

$\varepsilon \backslash K_{ij}$	(1)	(2)	(3)
$10^{-4}$	2	3	10
$10^{-6}$	2	4	15
$10^{-8}$	2	4	21
$10^{-10}$	2	4	27

Таблица 10: Максимальный ранг внедиагональных блоков в зависимости от точности

Далее нами был проведен ряд численных экспериментов для двух методов: мажорантного Монте-Карло (MajMC) и схемы Рунге-Кутты 4-го порядка с ядром в мозаично-скелетонном формате (FDMSk). Все расчеты выполнялись на кластере ИВМ РАН [33] на одном узле с двумя процессорами Intel Xeon Gold 6230@2.10ГГц по 20 ядер на каждом. Количество реально используемых потоков указано отдельно в каждом эксперименте.

### 4.3.1 Сравнение решений двух методов

Первый расчет состоял в анализе точности получаемых решений. Для ядра (3) задача (19) с  $\eta^{(0)} = [1, 0, 0, \dots]^T$  решалась до времени  $T = 100$  с заданной точностью  $\varepsilon_1$ . При этом для разностной схемы фиксировалось  $S = 4096$ , а шаг подбирался адаптивно. В Таблице 11 приведены времена расчетов для различных  $\varepsilon_1$ . В данном случае оба метода запускались на одном потоке исполнения. Отметим, что для получения решения с высокой точностью метод FDMSk затрачивает существенно меньшее количество времени по сравнению с MajMC.

Для каждого  $\varepsilon_1$  мы сравнили полученные решения по метрике первого момента:

$$\varepsilon_2 = \frac{\|\eta^{\text{MajMC}} - \eta^{\text{FDMSk}}\|_{M_1}}{\|\eta^*\|_{M_1}} \equiv \frac{\sum_{k=1}^S k \cdot |\eta_k^{\text{MajMC}} - \eta_k^{\text{FDMSk}}|}{\sum_{k=1}^S k \cdot |\eta_k^*|}.$$

Здесь  $\eta^*$  — решение, полученное методом FDMSk при точности  $10^{-8}$ , принятое как эталонное. Соответствующие значения также приведены в Таблице 11. На Рис. 12 приведен график полученной ошибки в зависимости от точности методов. Видно что различие между решениями двух методов соразмерно выбираемой для них точности.

$\varepsilon_1$	$10^{-1}$	$10^{-2}$	$10^{-3}$	$10^{-4}$	$10^{-5}$
$\varepsilon_2$	$0.88 \cdot 10^0$	$1.12 \cdot 10^{-1}$	$1.14 \cdot 10^{-2}$	$1.17 \cdot 10^{-3}$	$1.14 \cdot 10^{-4}$
МajMC, сек	0.034	3.6	315.6	27192	2599938
FDMSk, сек	9.8	10.6	23.8	54.5	129.7

Таблица 11: Время работы и ошибка MajMC и FDMSk для ядра (1)

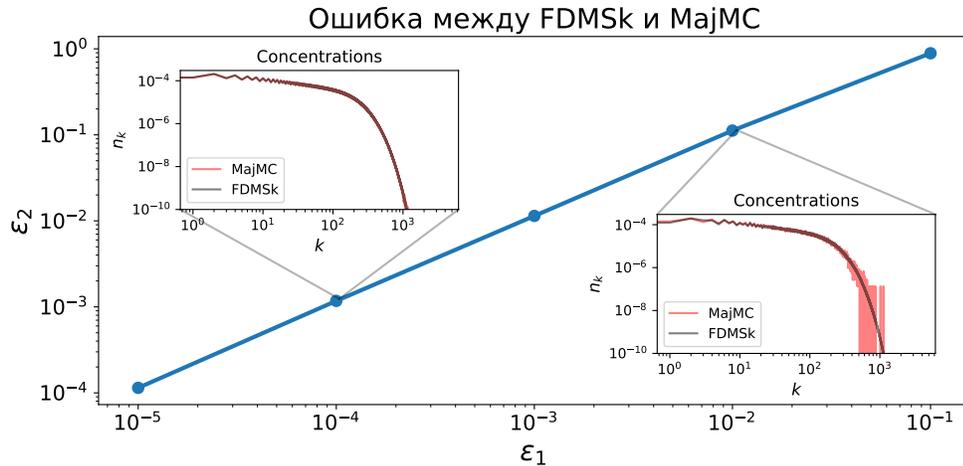


Рис. 12: Взаимная ошибка  $\varepsilon_2$  для MajMC и FDMSk в зависимости от точности решения  $\varepsilon_1$ , а также концентрации  $\eta_k^{\text{MajMC}}$  и  $\eta_k^{\text{FDMSk}}$  для некоторых  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$ .

#### 4.3.2 Работа с широким спектром частиц

Известно, что мажорантный малоранговый метод Монте–Карло имеет проблему большого количества отклонений (итераций без шага по времени) при широком спектре

распределения  $\eta$ , то есть при наличии существенной концентрации частиц как большого, так и малого размеров. Следующий расчет показывает, что разностная схема лишена данного недостатка даже при большом числе уравнений.

Для ядра (3) ставилось начальное условие  $\eta_k^{(0)} = \frac{1}{k+1}$ ,  $k \in \overline{1, S}$  и конечное время наблюдения  $T = 1$ ,  $S = 2^{20}$ . Здесь шаг разностной схемы выбирался адаптивно на каждой итерации. Итоговое время решения на одном потоке (последовательное исполнение) составило  $\tau_{\text{FDMSk}} = 46 \text{ мин } 22 \text{ сек}$ . Метод Монте-Карло запускался один раз с объемом системы  $V = 2^{20}$  и таким же ограничением  $S$  на размер частиц. Время его расчета составило порядка  $\tau_{\text{МайМС}} = 9 \text{ дней}$ . Отметим, что здесь не производится усреднение по нескольким запускам, как этого требует практика, вообще говоря. В данном случае разностная схема в комбинации с мозаично-скелетонной аппроксимацией существенно превосходит рандомизированный метод.

### 4.3.3 Асимптотика мозаичных операций

Для мозаичной матрицы  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  в Разделе 2.2 были получены асимптотики количества операций  $O(n \text{ mrank } A)$  для умножения ее на вектор и  $O(n \log n \text{ mrank } A)$  для свертки. Для мозаичной структуры вида Рис. 1, характерной для ядер уравнения Смолуховского, можно легко оценить мозаичный ранг через максимальный ранг ее блоков. Предположим, что  $n = 2^L$  и наименьший размер блока равен  $2^P$ . Тогда количество блоков малого ранга размера  $\frac{2^L}{2^l} \times \frac{2^L}{2^l}$  составляет  $2^l$ ,  $l \in \overline{1, L-P}$ . Также имеется  $2^{L-P}$  плотных блоков размера  $2^P \times 2^P$ . Если ранг внедиагональных блоков оценивается числом  $R$ , то

$$\text{mem } A \leq \sum_{l=1}^{L-P} 2^l \left( \frac{2^L}{2^l} + \frac{2^L}{2^l} \right) R + 2^P 2^P \cdot 2^{L-P} = 2^{L+1}(L-P)R + 2^{L+P},$$

откуда

$$\text{mrank } A = 2^{-L-1} \text{mem } A \leq R(L-P) + 2^{P-1}.$$

Проведя минимизацию по  $P$ , получаем  $\text{mrank } A \leq R(L - \log_2 R + 1)$ . С учетом  $L = \log_2 n$ , имеем

$$\text{mrank } A \leq R \log_2 n,$$

откуда сложность процедуры умножения на вектор получается  $O(n \log n)$ , а свертки —  $O(n \log^2 n)$ .

Для ядра (3) мы провели мозаично-скелетонную аппроксимацию и измерили время каждой из двух процедур, усреднив по 1000 запускам. В данном эксперименте использовались все доступные ядра на узле (40 потоков). Их результаты приведены на Рис. 13. Из него видно, что практические результаты согласуются с теоретической оценкой на асимптотику.

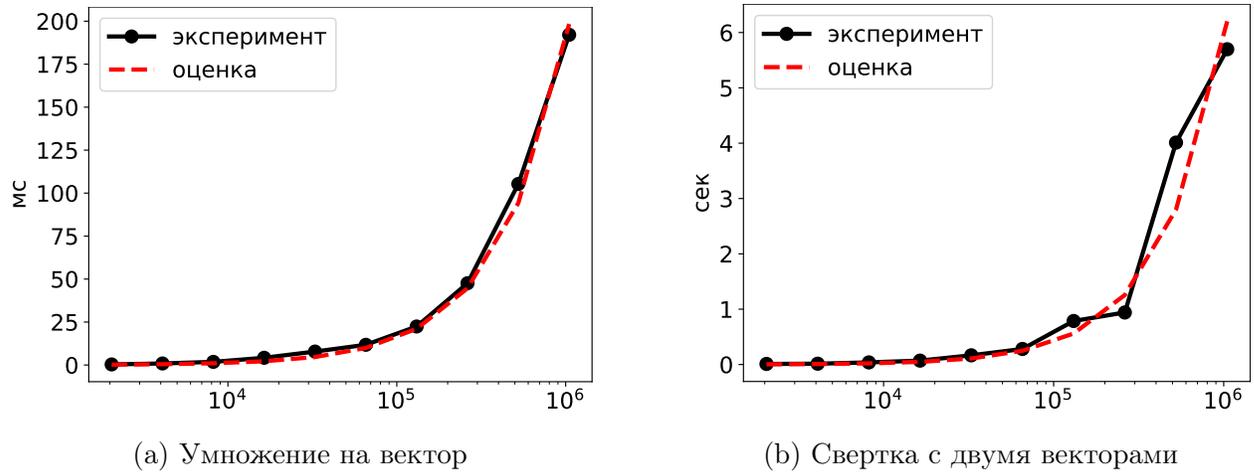


Рис. 13: Время операции в мозаичном-скелетонном формате в сравнении с теоретической асимптотикой

## 5 Заключение

В работе представлен новый подход к реализации мозаично-скелетонного метода аппроксимации матриц. Новая техника позволяет расширить набор используемых типов структурированных матриц и методов нахождения их приближения. Это упрощает процедуру разработки и развития данного метода в рамках единого комплекса программ для новых задач. Программная реализация выполнена на языке C++ в виде открытой библиотеки под названием «MSk». Используемые техники позволяют применять метод для решения задач больших размеров на современных вычислительных системах с многими ядрами на распределенной памяти. При этом параллельные свойства программы не зависят от применяемых пользователем методов и сторонних библиотек.

Гибкость и широкий набор параметров упрощают применение мозаично-скелетонных аппроксимаций к различным задачам математического моделирования. Нами был предложен алгоритм решения обратной задачи магнитометрии и способ оценки качества расположения измерительных приборов. Они позволяют существенно снизить вычислительные затраты и в некоторых случаях повысить точность получаемого решения. В свою очередь, для метода граничных интегральных уравнений, где традиционно возникают мозаичные структуры, была добавлена процедура дожатия, позволяющая уменьшить итоговое число параметров в матричном представлении.

Важным нововведением стала операция свертки мозаичной матрицы с вектором. Полученный нами алгоритм низкой сложности позволил существенно расширить класс ядер в задаче коагуляции, для которых решение системы ОДУ может быть найдено эффективно и с высокой точностью.

Таким образом, созданный комплекс программ может быть использован для решения широкого спектра задач различной природы на современных вычислительных системах. Гибкость и модульность общей процедуры дает пользователю возможность использовать все богатство существующих методов без потери эффективности.

В дальнейшем планируется продолжить работу над улучшением параллельных свойств и расширением набора предоставляемых методов матричной аппроксимации в рамках библиотеки «MSk».

## Список литературы

- [1] Aggregation kinetics at sedimentation: the impact of particles diffusion / Rishat R Zagidullin, Alexander P Smirnov, Sergey A Matveev, Nikolai V Brilliantov // *arXiv preprint arXiv:2112.14584*. — 2021.
- [2] *Ambikasaran Sivaram, Darve Eric*. An  $\mathcal{O}(N \log N)$  Fast Direct Solver for Partial Hierarchically Semi-Separable Matrices: With Application to Radial Basis Function Interpolation // *Journal of Scientific Computing*. — 2013. — Vol. 57. — Pp. 477–501.
- [3] *Chavez Gustavo*. Awesome Hierarchical Matrices: Software libraries that implement hierarchical matrices. — [Электронный ресурс]. — Электрон. дан. URL: [https://github.com/gchavez2/awesome\\_hierarchical\\_matrices](https://github.com/gchavez2/awesome_hierarchical_matrices). (дата обращения 07.05.2024).
- [4] *Chmielewski Donald J, Palmer Tasha, Manousiouthakis Vasilios*. On the theory of optimal sensor placement // *AICHE journal*. — 2002. — Vol. 48, no. 5. — Pp. 1001–1012.
- [5] *Friigo Matteo, Johnson Steven G*. The Design and Implementation of FFTW3 // *Proceedings of the IEEE*. — 2005. — Vol. 93, no. 2. — Pp. 216–231. — Special issue on “Program Generation, Optimization, and Platform Adaptation”.
- [6] GNU General Public License, version 3. — [Электронный ресурс]. — Электрон. дан. URL: <https://www.gnu.org/licenses/gpl-3.0.html>. (дата обращения 07.05.2024).
- [7] *Gibson Walton C*. The method of moments in electromagnetics. — Chapman and Hall/CRC, 2021.
- [8] *Hackbusch Wolfgang*. Hierarchical matrices: algorithms and analysis. — Springer, 2015. — Vol. 49.
- [9] *Hackbusch Wolfgang, Nowak Zenon Paul*. On the fast matrix multiplication in the boundary element method by panel clustering // *Numerische Mathematik*. — 1989. — Vol. 54, no. 4. — Pp. 463–491.

- [10] Koch Jürgen, Hackbusch Wolfgang, Sundmacher Kai. H-matrix methods for quadratic integral operators appearing in population balances // *Computers & Chemical Engineering*. — 2008. — Vol. 32, no. 8. — Pp. 1789–1809.
- [11] Levitt James, Martinsson Per-Gunnar. Randomized compression of rank-structured matrices accelerated with graph coloring // *arXiv preprint arXiv:2205.03406*. — 2022.
- [12] Lin Lin, Lu Jianfeng, Ying Lexiong. Fast construction of hierarchical matrix representation from matrix–vector multiplication // *Journal of Computational Physics*. — 2011. — Vol. 230, no. 10. — Pp. 4071–4087.
- [13] *Message Passing Interface Forum*. — MPI: A Message-Passing Interface Standard Version 2.1, 2008. <https://www.mpi-forum.org/docs/mpi-2.1/mpi21-report.pdf>.
- [14] Osinsky AI. Low-rank Monte Carlo for Smoluchowski-class equations // *Journal of Computational Physics*. — 2024. — Vol. 506. — P. 112942.
- [15] Pearson David, Pillai S Unnikrishna, Lee Youngjik. An algorithm for near-optimal placement of sensor elements // *IEEE Transactions on Information Theory*. — 1990. — Vol. 36, no. 6. — Pp. 1280–1284.
- [16] Rakhuba M. V., Oseledets I. V. Fast multidimensional convolution in low-rank tensor formats via cross approximation // *SIAM Journal on Scientific Computing*. — 2015. — Vol. 37, no. 2. — Pp. A565–A582.
- [17] Saad Yousef. *Iterative methods for sparse linear systems*. — SIAM, 2003.
- [18] Saad Youcef, Schultz Martin H. GMRES: A generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems // *SIAM Journal on scientific and statistical computing*. — 1986. — Vol. 7, no. 3. — Pp. 856–869.
- [19] Stautsev S. L., Tyrtyshnikov E. E. Application of mosaic-skeleton approximations for solving EFIE // *Progress in Electromagnetics Research Symposium, Moscow*. — 2009. — Pp. 1752–1755.
- [20] Tyrtyshnikov Eugene. *Mosaic ranks and skeletons* // *International Workshop on Numerical Analysis and Its Applications* / Springer. — 1996. — Pp. 505–516.

- [21] *Tyrtysnikov Eugene*. Mosaic-skeleton approximations // *Calcolo*. — 1996. — Vol. 33. — Pp. 47–57.
- [22] *Tyrtysnikov Eugene*. Incomplete cross approximation in the mosaic-skeleton method // *Computing*. — 2000. — Vol. 64. — Pp. 367–380.
- [23] *Valiakhmetov Bulat*. MSk: Mosaic-skeleton method of dense matrix approximation. — [Электронный ресурс]. — Электрон. дан. URL: <https://gitlab.com/bulatr/bulatral/mosaic-skeleton>. (дата обращения 07.05.2024).
- [24] *Valiakhmetov B., Tyrtysnikov E*. MSk - the package for a dense matrix approximation in the mosaic-skeleton format // Russian Supercomputing Days : Proceedings of the International Conference. — Moscow, Russia: 2023. — September 25–26. — Pp. 20–27.
- [25] *Wang Yanfei, Lukyanenko Dmitry, Yagola Anatoly*. Magnetic parameters inversion method with full tensor gradient data. // *Inverse Problems & Imaging*. — 2019. — Vol. 13, no. 4.
- [26] Быстрый метод решения уравнений агрегационно-фрагментационной кинетики типа уравнений Смолуховского / С. А. Матвеев, Е. Е. Тыртышников, А. П. Смирнов, Н. В. Бриллиантов // *Вычислительные методы и программирование*. — 2014. — Т. 15, № 1. — С. 1–8.
- [27] *Валиахметов Б. И., Тыртышников Е. Е.* MSk - пакет программ для приближения плотных матриц в мозаично-скелетонном формате // Матричные методы и интегральные уравнения. — Сириус: 2023.
- [28] *Воеводин В. В.* Об одном методе понижения порядка матрицы при решении интегральных уравнений // Численный анализ на Фортране. — Издательство МГУ Москва: 1979. — С. 21–26.
- [29] *Галкин Валерий Алексеевич*. Уравнение Смолуховского. — 2001.
- [30] *Горейнов С. А., Замарашкин Н. Л., Тыртышников Е. Е.* Псевдоскелетные аппроксимации матриц // Доклады Академии наук / Российская академия наук. — Т. 343. — 1995. — С. 151–152.

- [31] *Дьяченко Р. Р., Валиахметов Б. И., Матвеев С. А.* Мозаично-скелетонные аппроксимации для быстрого решения уравнений Смолуховского с полноранговыми ядрами // *Ломоносовские чтения. Научная конференция. 20 марта - 3 апреля 2024 г. : тезисы докладов.* — Москва: 2024. — С. 158–159.
- [32] *Желтков Д. А., Тыртышников Е. Е.* Параллельная реализация матричного крестового метода // *Вычислительные методы и программирование.* — 2015. — Т. 16. — С. 369–375.
- [33] Кластер ИВМ РАН. — [Электронный ресурс]. — Электрон. дан. URL: <http://cluster2.inm.ras.ru/>. (дата обращения 07.05.2024).
- [34] Малоранговые аппроксимации в обратных задачах дистанционного зондирования / Б. И. Валиахметов, Е. Е. Тыртышников, Д. В. Лукьяненко, А. Г. Ягола // *Ломоносовские чтения. Научная конференция. 20 марта - 3 апреля 2024 г. : тезисы докладов.* — Москва: 2024. — С. 156–157.
- [35] *Сетула А. В., Ставцев С. Л., Третьякова Р. М.* Применение мозаично-скелетонных аппроксимаций матриц в методе физической оптики для задач электромагнитного рассеяния // *Журнал вычислительной математики и математической физики.* — 2022. — Т. 62, № 9. — С. 1458–1472.

В Оргкомитет Смотра дипломных работ математиков России  
от Еделева Юлии Павловны  
Заявление о новизне

Сообщаю, что новыми в моей представленной на Смотр выпускной квалификационной работе под названием «Температурные поля, индуцированные системами частиц и плоскостей» являются:

1. Аналитическое решение задачи о взаимодействии сферической частицы и плоскости методом мультипольного разложения в декартовой системе координат (это позволяет распространить метод на произвольное число частиц).

2. Рассмотрение в рамках задачи о термодинамическом взаимодействии вопроса о предельном переходе от геометрии «частица + частица» к геометрии «частица + плоскость».

Также сообщаю, что для проверки новизны было проделано следующее:

- В период с 01 февраля по 15 марта 2023 г. мною был произведён поиск в следующих поисковых системах: Яндекс, Google, по следующим ключевым словам: термодинамическое взаимодействие плоскости и частицы. В выдаче поисковиков было исследовано несколько статей и все они не содержали материала, заявляемого автором выпускной квалификационной работы в качестве нового. Также были исследованы статьи разных авторов, предоставленные для ознакомления научным руководителем. При поиске не было встречено работ или упоминаний работ, позволяющих усомниться в новизне материала. При этом в работе [3] были найдены конструкции, похожие на излагаемые в настоящей выпускной квалификационной работе, однако отличие их ясно видно и наличие таких работ лишь подтверждает актуальность тематики исследования.

- Проведена серия консультаций с моим научным руководителем Алексеем Олеговичем Сыромьясовым, доцентом кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики МГУ им. Н.П.Огарева.

- Проведено выступление на XVI Международной научной конференции «Дифференциальные уравнения и их приложения в математическом моделировании» (Саранск 17-20 августа 2023)

- В соавторстве с научным руководителем опубликована статья на тему «Распределение температуры в полупространстве, содержащем сферическое включение» в Вестнике ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2023. №3. С.5– 18. <https://doi.org/10.26456/vtpmk692>

- В соавторстве с научным руководителем опубликована статья на тему «Взаимодействие слоя разреженных частиц с постоянно нагретой плоскостью при наличии поперечного градиента температуры в Журнале Средневолжского математического сообщества. 25:3 (2023), 174–186. <https://doi.org/10.15507/2079-6900.25.202303.174-186>

Таким образом, по результатам поиска в сети Интернет и тематических научных базах, а также обсуждений с указанными выше специалистами следует, что, по-видимому, представленный в моей выпускной квалификационной работе указанный выше математический материал действительно является новым.

Подтверждаю, что являюсь автором предоставляемой на Смотр работы и прошу принять её для участия в Смотре. Принимаю на себя обязательство соблюдать правила Смотра. Также (в соответствии с п. 4 Положения о Смотре) принимаю на себя обязательство оценить 5 работ участников Смотра, выданных мне Оргкомитетом в

результате жеребьёвки и сверх того оценить 2-5 работ других участников Смотра на мой выбор. Я понимаю правила оценки работ, приведённые в п. 4.3 Положения о Смотре. Даю согласие на публикацию адреса моей электронной почты.

Защита работы состоится 26.06.2024. На Смотр представлен проект текста работы.

Подпись *Еделева* Еделева Юлия Павловна  
29 мая 2024 г. Саранск, Россия

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
МОРДОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИМ. Н. П. ОГАРЕВА»  
(ФГБОУ ВО «МГУ им. Н.П. Огарева»)

Факультет математики и информационных технологий

Кафедра прикладной математики, дифференциальных уравнений и  
теоретической механики

УТВЕРЖДАЮ  
Зав. кафедрой  
канд. физ.-мат. наук  
\_\_\_\_\_ Е. В. Десяев  
подпись  
«\_\_\_\_\_» \_\_\_\_\_ 20\_\_ г.

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА МАГИСТРА  
по теме:  
ТЕМПЕРАТУРНЫЕ ПОЛЯ, ИНДУЦИРОВАННЫЕ СИСТЕМАМИ ЧАСТИЦ  
И ПЛОСКОСТЕЙ

Автор магистерской работы \_\_\_\_\_ Ю. П. Еделева  
подпись, дата

Обозначение бакалаврской работы МД–02069964–01.04.02–05–24

Направление подготовки 01.04.02 Прикладная математика и информатика

Профиль Математическое моделирование

Руководитель работы  
канд. физ.-мат. наук, доц \_\_\_\_\_ А.О. Сыромясов  
подпись, дата

Саранск 2024

Продолжение на следующем листе

Нормоконтролёр  
канд. физ.-мат. наук, доц.

\_\_\_\_\_

подпись, дата

Д. К. Егорова

Рецензент  
канд. физ.-мат. наук, доц.

\_\_\_\_\_

подпись, дата

Т. Е. Бадочкина

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования

«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
МОРДОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИМ. Н. П. ОГАРЕВА»  
(ФГБОУ ВО «МГУ им. Н.П. Огарева»)

Факультет математики и информационных технологий

Кафедра прикладной математики, дифференциальных уравнений и  
теоретической механики

УТВЕРЖДАЮ

Зав. кафедрой

канд. физ.-мат. наук

\_\_\_\_\_ Е. В. Десяев

подпись

« \_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 20\_\_ г.

## ЗАДАНИЕ НА ВЫПУСКНУЮ КВАЛИФИКАЦИОННУЮ РАБОТУ МАГИСТРА

Студент Еделева Юлия Павловна, 201М группа

1 Тема Температурные поля, индуцированные системами частиц и плоскостей

Утверждена приказом №9504-с от 07.11.2022

2 Срок представления работы к защите 26.06.2024г.

3 Исходные данные для научного исследования: научная литература по теме исследования

4 Содержание выпускной квалификационной работы

4.1 Общая постановка задачи о взаимодействии плоскости и частицы

4.2 Единичная частица в неограниченной среде

4.3 Взаимодействие двух сферических частиц

4.4 Взаимодействие плоскости и частицы

Продолжение на следующем листе

4.5 Предельный переход от задачи взаимодействия двух  
разноразмерных сферических частиц к задаче о взаимодействии плоскости и  
частицы

Руководитель работы  
канд. физ.-мат. наук, доц.

\_\_\_\_\_

подпись, дата

А. О. Сыромясов

Задание приняла к исполнению

\_\_\_\_\_

подпись, дата

Ю. П. Еделева

## СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	3
1 Общая постановка задачи о взаимодействии плоскости и частицы.....	5
2 Единичная частица в неограниченной среде.....	7
2.1 Постановка задачи .....	7
2.2 Мультипольное представление решения.....	9
3 Взаимодействие двух сферических частиц .....	15
3.1 Формализация задачи о взаимодействии двух частиц.....	15
3.2 Алгоритм решения. Анализ результатов.....	17
4 Взаимодействие плоскости и частицы.....	22
4.1 Постановка задачи. Введение фиктивной частицы.....	22
4.2 Температурные поля в случае поперечного градиента температуры ....	25
4.3 Температурные поля в случае продольного градиента температуры ....	28
5 Предельный переход от задачи взаимодействия двух разноразмерных сферических частиц к задаче о взаимодействии плоскости и частицы .....	31
ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....	37
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ .....	38

## ВВЕДЕНИЕ

Чистые вещества в природе и технике встречаются очень редко, чаще всего они содержат примеси, представляющие собой мелкие твердые или жидкие частицы. В большинстве случаев, частицы примесей имеют сферическую форму, а их размеры составляют несколько микрометров.

Под воздействием внешних условий свойства веществ изменяются, что приводит к трудностям при их хранении, транспортировке и обработке. Так, с изменением температуры у жидкостей и газов изменяются плотность и вязкость. В технологических процессах часто прибегают к целенаправленному изменению температуры. Примером может служить добыча нефти. При низких температурах нефть является более вязкой. Для того, чтобы увеличить текучесть нефти и осуществить ее транспортировку по трубопроводам, происходит нагрев до необходимой температуры. Однако, такой нагрев не будет однородным. Наличие примесей оказывает воздействие на распределение термодинамических полей в среде, что, в конечном итоге, приводит к изменению её характеристик, поскольку примеси и среда обладают разными тепловыми характеристиками.

Наибольший интерес вызывает изучение распределения температур вблизи стенок сосудов или труб, так как именно там происходит наибольшее изменение при распределении физических полей в веществах, содержащих примеси.

Исходя из вышесказанного, была поставлена **цель**: исследовать термодинамическое взаимодействие частицы и поверхности (плоскости). Основная проблема изучения такого взаимодействия связана со сложностью геометрии задачи: размеры поверхности во много раз превышают размеры частиц примесей.

В связи с этим были сформулированы следующие **задачи**:

- рассмотреть мультипольный метод представления температуры;

- решить задачу о взаимодействии двух сферических частиц с одинаковыми граничными условиями;
- исследовать возможность моделирования системы «частица + плоскость» с помощью фиктивной частицы;
- методом малого параметра найти первые несколько коэффициентов в разложении температур частицы и среды в случаях поперечного и продольного градиента температур по отношению к плоскости;
- решить задачу о взаимодействии двух сферических частиц различного радиуса с различными граничными условиями на их поверхностях;
- рассмотреть возможность предельного перехода от задачи о взаимодействии двух частиц к системе «частица + плоскость».

## 1 Общая постановка задачи о взаимодействии плоскости и частицы

Дисперсные вещества, как правило, представляют собой жидкость или газ и занимают некий объем, который может быть отделен от окружающей среды, например, стенками резервуара или трубы, в которых хранятся или транспортируются эти вещества.

В силу различных свойств вещества и границы, отделяющей его от среды, возникают изменения в распределении физических полей, при этом наибольшее искажение наблюдается вблизи границы и затухает по мере удаления от нее. Изучение поведения такой системы представляет достаточно высокий интерес.

Рассмотрим следующую задачу: вещество помещается в сосуд, противоположные стенки которого располагаются на достаточно большом расстоянии друг от друга, равном  $L$ , и имеют различные температуры  $T_1$  и  $T_2$ . Разница в температурах вызывает появление среднего градиента температуры. Предположим, что внутри вещества имеется слой частиц, находящихся в непосредственной близости к одной из стенок на расстоянии около  $h$ . Тогда в случае, когда  $h$  намного меньше  $L$ , т.е.  $h \ll L$ , то можно считать, что вторая граница сосуда удалена на бесконечность и ее можно не рассматривать при решении задачи. Геометрия задачи представлена на рисунке 1.1.

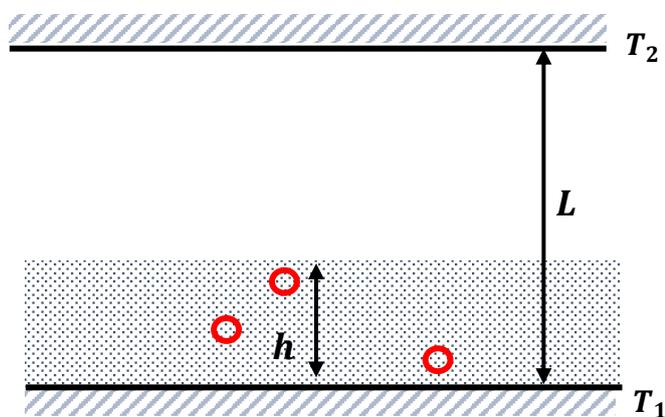


Рисунок 1.1 – Геометрия дисперсного вещества в сосуде

Перед тем как решать задачу о взаимодействии нескольких частиц со стенкой сосуда, необходимо изучить взаимодействие одной частицы со стенкой, что и будет рассмотрено в данной работе.

Таким образом в безграничную сплошную среду, при условии, что она неподвижна, и с постоянной теплопроводностью  $\kappa_f$ , помещается сферическая неподвижная частица  $\Omega$  радиуса  $a$  с теплопроводностью  $\kappa_p = const$  на расстоянии  $h \geq a$  от плоскости  $W$ . Теплопроводности частицы и среды отличны друг от друга ( $\kappa_p \neq \kappa_f$ ). На плоскости  $W$  поддерживается постоянная температура  $T_w$ . На бесконечности имеется заданный постоянный градиент температуры  $\vec{T}$ . Требуется определить, как частица искажает температуру вблизи плоскости и частицы.

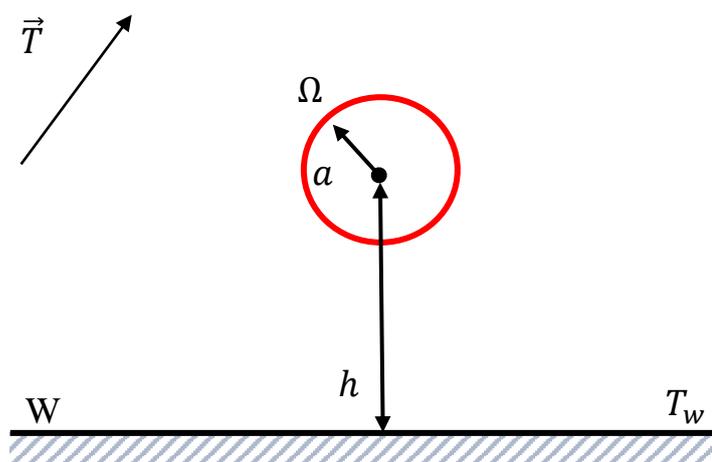


Рисунок 1.2 – Геометрия задачи

Исходя из рисунка 1.2, данная задача осложняется тем, что геометрия сферы и плоскости разная, поэтому целесообразно сначала рассмотреть вспомогательную задачу о единичной частице в безграничной среде.

## 2 Единичная частица в неограниченной среде

### 2.1 Постановка задачи

Имеется неподвижная безграничная сплошная среда с теплопроводностью  $\kappa_f = const$ , в нее помещается неподвижная частица с теплопроводностью  $\kappa_p = const$ . Частица представляет собой шар радиуса  $a$ . Теплопроводность частицы и среды произвольны и отличны друг от друга. В среде и частице отсутствуют источники тепла. Вдалеке от частицы задан постоянный градиент температуры  $\vec{T}$ , не зависящий от времени. Необходимо определить распределение температуры внутри частицы  $T_p$  и распределение температуры в среде  $T_f$ .

Далее в соответствии с рисунком 2.1 поместим частицу в декартову прямоугольную систему координат  $Ox_1x_2x_3$  так, чтобы центр частицы лежал в начале системы координат  $O$ . С помощью вектора  $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$  будем определять положение произвольной точки и зададим градиент температуры параллельно оси  $Ox_3$ , тогда  $\vec{T} = (0, 0, T_3)$ .

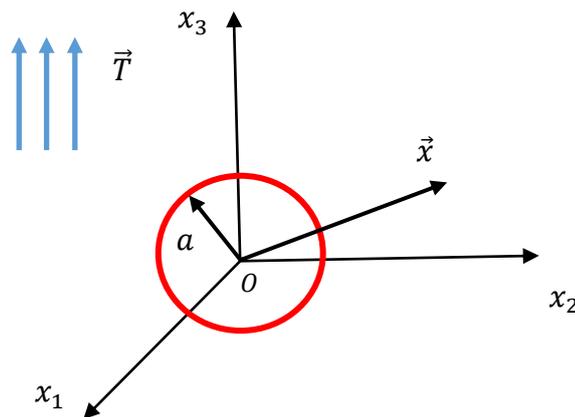


Рисунок 2.1 – Геометрия задачи о единичной частице

В отсутствие частицы, распределение температуры в среде можно описать функцией  $T_\infty(\vec{x})$ :

$$T_{\infty} = T_0 + T_3 x_3,$$

где  $T_0$  – температура в начале координат.

При этом изотермы представляют собой параллельные плоскости:

Из-за разной теплопроводности у сферы и окружающей среды, изотермы видоизменяются, и в результате среда достигает температуры  $T_f(\vec{x})$ , которая отличается от невозмущенной температуры  $T_{\infty}(\vec{x})$ .

$$T_f = T_{\infty} + T', \quad (2.1.1)$$

где  $T'$  – возмущение температуры, вызванное частицей.

Вдали от частицы, образованные ею возмущения, гаснут:

$$T_f(\vec{x}) \rightarrow T_{\infty}(\vec{x}), \text{ при } |\vec{x}| \rightarrow \infty. \quad (2.1.2)$$

Внутри сферы выполняются условия:

$$\begin{aligned} T_p(\vec{0}) &= T_0, \\ T_p(\vec{x}) &< +\infty, \text{ при } |\vec{x}| < a. \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

То есть температура внутри частицы – конечная величина.

У сферы отсутствуют внутренние источники тепла, поэтому будем считать, что для частицы и среды выполнены условия идеального теплового контакта: равенство температур и тепловых потоков на поверхности частицы, которые описываются следующими уравнениями:

$$T_f = T_p, \text{ при } |\vec{x}| = a, \quad (2.1.4)$$

$$\kappa_f(\vec{n} \cdot \nabla T_f) = \kappa_p(\vec{n} \cdot \nabla T_p), \text{ при } |\vec{x}| = a. \quad (2.1.5)$$

Здесь  $\vec{n}$  – единичный вектор внешней нормали к поверхности сферы.

Распределение температуры вне и внутри частицы  $T_f$  и  $T_p$  удовлетворяют уравнению Лапласа в силу неподвижности среды и стационарности (2.1.1), (2.1.4), (2.1.5):

$$\Delta T_f = 0, \quad \Delta T_p = 0. \quad (2.1.6)$$

Из условия (2.1.1) и в силу свойств уравнения Лапласа следует:

$$\begin{aligned} \Delta T_f &= \Delta(T_\infty + T') = \Delta T_\infty + \Delta T' = \Delta T' = 0, \\ \Delta T' &= 0. \end{aligned}$$

Таким образом, необходимо найти функции  $T_f$  и  $T_p$ , удовлетворяющие условиям (2.1.1) – (2.1.6).

## 2.2 Мультипольное представление решения

Обозначим через  $L_{ijk\dots s}(\vec{x})$  мультиполь, вычисляемый по следующему правилу:

$$L_{ijk\dots s}(\vec{x}) = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_k} \dots \frac{\partial}{\partial x_s} \left( \frac{1}{|\vec{x}|} \right).$$

Например,

$$L_i(\vec{x}) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{1}{|\vec{x}|} \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} \right) = - \frac{x_i}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{\frac{3}{2}}} = - \frac{x_i}{|\vec{x}|^3}.$$

Приведем первые несколько мультиполей:

$$L_0(\vec{x}) = \frac{1}{|\vec{x}|} = \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}},$$

$$L_i(\vec{x}) = -\frac{x_i}{|\vec{x}|^3},$$

$$L_{ij}(\vec{x}) = -\frac{3}{|\vec{x}|^5} x_i x_j - \frac{1}{|\vec{x}|^3} \delta_{ij},$$

$$L_{ijk}(\vec{x}) = -\frac{15}{|\vec{x}|^7} x_i x_j x_k + \frac{3}{|\vec{x}|^5} (x_i \delta_{jk} + x_j \delta_{ik} + x_k \delta_{ij}),$$

и т. д.,

где  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

При решении системы (2.1.1) – (2.1.6) будем пользоваться методом мультипольного разложения. В силу линейности уравнения Лапласа сумма его решений и произведение на константу также является решением.

Из курса уравнений математической физики [1] известно, что  $L_0(\vec{x})$  является фундаментальным решением уравнения Лапласа. Исходя из определения мультиполя и теоремы Шварца о равенстве частных производных [2] можно сделать вывод, что и все остальные мультиполи также являются решениями этого уравнения, и, следовательно, представляют собой гармонические функции.

Так как согласно (2.1.6) искомые  $T_f$  и  $T_p$  – гармонические функции, то их можно представить в виде линейной комбинации мультиполей.

Распределение температуры вне частицы будем искать в виде:

$$T_f(\vec{x}) = T_\infty(\vec{x}) + T'(\vec{x}) = T_0 + T_j x_j + A_0^{ext}(\Omega) L_0(\vec{x}) + \\ + H_j^{ext}(\Omega) L_j(\vec{x}) + F_{jk}^{ext}(\Omega) L_{jk}(\vec{x}) + G_{jkl}^{ext}(\Omega) L_{jkl}(\vec{x}) + \dots \quad (2.2.1)$$

Представим  $T_p$  также в виде линейной комбинации мультиполей. Для частицы должно выполняться (2.1.3), однако при попытке записать  $T_p$  в виде (2.2.1), мы получим, что  $T_p(0) = \infty$ . Теперь, если мы умножим мультиполя на соответствующие степени  $|\vec{x}|$ , то это позволит нам избавиться от бесконечности, а функции останутся гармоническими:

$$T_p(\vec{x}) = T_\infty(\vec{x}) + A_0^{int}(\Omega)L_0(\vec{x})|\vec{x}| + H_j^{int}(\Omega)L_j(\vec{x})|\vec{x}|^3 + \\ + F_{jk}^{int}(\Omega)L_{jk}(\vec{x})|\vec{x}|^5 + G_{jkl}^{int}(\Omega)L_{jkl}(\vec{x})|\vec{x}|^7 + \dots \quad (2.2.2)$$

где  $H_j^{ext}(\Omega), F_{jk}^{ext}(\Omega), \dots, A_0^{ext}(\Omega), H_j^{int}(\Omega), F_{jk}^{int}(\Omega)$  – тензорные коэффициенты, которые определяются из условий (2.1.4), (2.1.5).

В записи (2.2.1), (2.2.2) применяется правило Эйнштейна, в соответствии с которым, если в записи присутствуют одинаковые буквенные индексы, то по нему предполагается суммирование в пределах от 1 до 3.

Введем вектор  $\vec{b} = (0,0,1)$  – орт оси  $Ox_3$ , тогда  $\vec{T} = T_3\vec{b}$ . Согласно теории тензорных функций тензорного аргумента [3], свойства решения задачи определяются геометрией задачи. В частности, наше решение задачи должно иметь ту же симметрию, что и граничные условия. В силу (2.1.2) и однородности (2.1.4), (2.1.5) относительно  $T_p$  и  $T_f$  задача линейна, а значит тензорные коэффициенты содержат множитель  $T_3$ :

$$A_0 = T_3AA, \\ H_j = T_3HAb_j, \\ F_{jk} = T_3FAb_jb_k, \\ G_{jkl} = T_3GAb_jb_kb_l, \dots \quad (2.2.3)$$

Приведенные выражения справедливы, как для коэффициентов, относящихся к температуре среды (множители с верхним индексом ext), так и

для коэффициентов температуры частицы (множители с верхним индексом int).

Для единичной сферической частицы ограничимся первыми несколькими слагаемыми:

$$T_f(\vec{x}) = T_0 + T_3 x_3 + T_3 AA^{ext} L_0(\vec{x}) + T_3 HA^{ext} L_3(\vec{x}) \quad (2.2.4)$$

$$T_p(\vec{x}) = T_0 + T_3 AA^{int} L_0(\vec{x}) |\vec{x}| + T_3 HA^{int} L_3(\vec{x}) |\vec{x}|^3 \quad (2.2.5)$$

Коэффициент  $AA^{int}$  найдем из условия (2.1.3):

$$AA^{int} = 0.$$

Подставив необходимые значения мультиполей в (2.2.4), (2.2.5), запишем выражения для температур вне и внутри частицы:

$$\begin{cases} T_f = T_0 + T_3 x_3 + \frac{T_3 AA^{ext}}{|\vec{x}|} - T_3 HA^{ext} \frac{x_3}{|\vec{x}|^3}, \\ T_p = T_0 - T_3 HA^{int} x_3. \end{cases} \quad (2.2.6)$$

При  $|\vec{x}| = a$  должно быть выполнено (2.1.4). Подставляя (2.2.6) в (2.1.4) найдем  $AA^{ext}$ :

$$T_0 + T_3 x_3 + \frac{T_3 AA^{ext}}{a} - T_3 HA^{ext} \frac{x_3}{a^3} = T_0 - T_3 HA^{int} x_3,$$

$$T_3 x_3 \left( 1 - \frac{HA^{ext}}{a^3} \right) + \frac{AA^{ext}}{a} T_3 = -T_3 HA^{int} x_3, \quad \forall x_3,$$

$$x_3 \left( 1 - \frac{HA^{ext}}{a^3} \right) + \frac{AA^{ext}}{a} = -HA^{int} x_3, \quad \forall x_3.$$

Следовательно,

$$AA^{ext} = 0.$$

Подставляя (2.2.4), (2.2.5) в (2.1.5) и принимая  $|\vec{x}| = a$ , найдем  $HA^{ext}, HA^{int}$ :

$$HA^{ext} = \frac{\kappa_p - \kappa_f}{\kappa_p + 2\kappa_f} a^3,$$

$$HA^{int} = -\frac{3\kappa_f}{\kappa_p + 2\kappa_f}.$$

Искомые температуры имеют вид:

$$\begin{cases} T_f = T_0 + \left(1 + \frac{\kappa_f - \kappa_p}{\kappa_p + 2\kappa_f} \frac{a^3}{|\vec{x}|^3}\right) T_3 x_3, \\ T_p = T_0 + \frac{3\kappa_f}{\kappa_p + 2\kappa_f} T_3 x_3. \end{cases} \quad (2.2.7)$$

Для наглядности приведено распределение температур на рисунке 2.2.1 при следующих параметрах:  $a = 1, \kappa_p = 4, \kappa_f = 1, T_3 = 10, T_0 = 0$ .

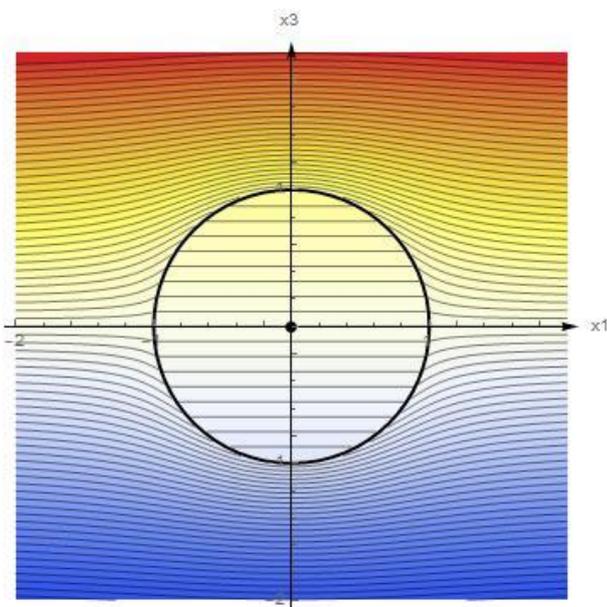


Рисунок 2.2.1 – Распределение температуры вне и внутри частицы

Таким образом, было найдено распределение температуры внутри частицы, а также распределение температуры окружающей среды, учитывая возмущение, вносимое частицей. Это решение совпадает с решением, полученным в [4].

### 3 Взаимодействие двух сферических частиц

#### 3.1 Формализация задачи о взаимодействии двух частиц

В дальнейшем планируется рассмотреть моделирование термодинамического взаимодействия частицы и плоскости, основанное на методе, заключающемся на замене плоскости частицей, поэтому целесообразно прежде изучить термодинамическое взаимодействие двух частиц разных размеров.

По-прежнему будем рассматривать неподвижную среду, где введена декартова прямоугольная система координат  $Ox_1x_2x_3$ . В среду помещаются сферические частицы  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  с радиусами  $a_1$  и  $a_2$  и теплопроводностями  $k_1$  и  $k_2$  соответственно. При этом центр  $\Omega_1$  совпадает с началом системы координат  $O$ , а центр частицы  $\Omega_2$  лежит на оси  $Ox_3$ , как показано на рисунке 3.1.1. Положение произвольной точки задается вектором  $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ . Положение частиц определяется радиус-векторами их центров  $\vec{r}_1$  и  $\vec{r}_2$  соответственно относительно начала координат. Центры частиц разделены вектором  $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ . Вдали от частиц (на бесконечности) задан постоянный градиент температуры  $\vec{T}$ . Необходимо найти распределение температуры в среде  $T_f$  и внутри каждой частицы  $T_p(1)$  и  $T_p(2)$ .

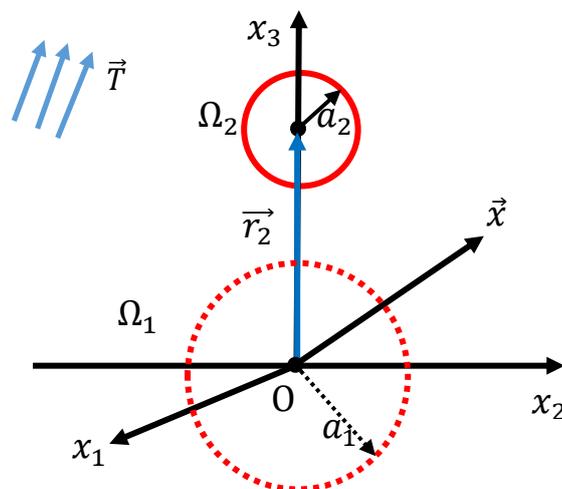


Рисунок 3.1.1 –Задача о двух разноразмерных частицах

Искомые температурные поля удовлетворяют уравнению Лапласа (2.1.6), а на поверхностях частиц выполнены условия непрерывности (2.1.4) и (2.1.5):

$$T_f = T_p(N), \text{ при } |\vec{x} - \vec{r}_N| = a_N, \quad (3.1.1)$$

$$\kappa_f(\vec{n} \cdot \nabla T_f) = \kappa_N(\vec{n} \cdot \nabla T_p(N)), \text{ при } |\vec{x} - \vec{r}_N| = a_N. \quad (3.1.2)$$

На бесконечности возмущения, вызванные частицами, так же затухают, т.е. выполнено условие (2.1.2), а внутри частиц отсутствуют особенности, т.е. температура внутри частиц конечна и выполнено:

$$T_p(N) < +\infty, \text{ при } |\vec{x} - \vec{r}_N| = a_N. \quad (3.1.3)$$

Индекс N введен для обозначения номера частицы.

Распределение температур будем искать с помощью мультипольного разложения. Распределение температуры внутри каждой из частиц определяется аналогично (2.2.2), а в выражение для температуры вне частиц добавляются так же слагаемые, отвечающие за возмущения, вызванные второй частицей. В итоге выражения для температур примут вид:

$$\begin{aligned} T_f(\vec{x}) = & T_\infty(\vec{x}) + [A_0^{ext}(\Omega_1)L_0(\vec{x}) + H_j^{ext}(\Omega_1)L_j(\vec{x}) + \\ & + F_{jk}^{ext}(\Omega_1)L_{jk}(\vec{x}) + \dots] + [A_0^{ext}(\Omega_2)L_0(\vec{x} - \vec{r}) + \\ & + H_j^{ext}(\Omega_2)L_j(\vec{x} - \vec{r}) + F_{jk}^{ext}(\Omega_2)L_{jk}(\vec{x} - \vec{r}) + \dots], \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

$$\begin{aligned} T_p(N, \vec{y}) = & T_\infty(\vec{r}_N) + A_0^{int}(N)L_0(\vec{y})|\vec{y}| + H_j^{int}(N)L_j(\vec{y})|\vec{y}|^3 + \\ & + F_{jk}^{int}(N)L_{jk}(\vec{y})|\vec{y}|^5 + G_{jkl}^{int}(N)L_{jkl}(\vec{y})|\vec{y}|^7 + \dots, \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

где  $\vec{y} = \vec{x} - \vec{r}_N$ , а тензорные коэффициенты имеют структуру (2.2.3).

Для определения тензорных коэффициентов воспользуемся методом неопределенных коэффициентов, подставляя выражения для температур (3.1.4) и (3.1.5) в граничные условия (3.1.1), (3.1.2), предварительно представив (3.1.4) и (3.1.5) в виде разложения по степеням малого параметра  $\varepsilon = a_1/r < 1$ . Отметим, что с повышением желаемой точности решения (то есть увеличением степени  $\varepsilon$ ), увеличивается также ранг тензоров, участвующих в разложении.

### 3.2 Алгоритм решения. Анализ результатов

Для поиска тензорных коэффициентов применим следующий алгоритм:

1. Тензорные коэффициенты раскладываются в ряд по степеням  $\varepsilon$ .
2. Выражения (3.1.4) и (3.1.5) подставляются в условия (3.1.1) и (3.1.2).
3. Производится замена  $r = a_1/\varepsilon$  для избавления от величины  $r$ .
4. Выражения из п.2 раскладываются по степеням  $\varepsilon$ .
5. В полученных выражениях исключаем переменную  $x_3$ , степень которой выше первой, вводя замену:

$$x_3^2 = a_N^2 - x_1^2 - x_2^2$$

Данное соотношение выполняется на поверхностях частиц.

6. Далее реализуется метод неопределенных коэффициентов: формируется список независимых выражений при степенях  $\varepsilon$ , составляется система уравнений на коэффициенты. Решение полученной системы будет являться искомым.

Приведем решение с точностью до  $\varepsilon^5$ :

$$\begin{aligned}
AA^{int}(\Omega_1) &= T_3 \frac{a_2^3}{a_1^2} \frac{\kappa_2 - \kappa_f}{k_2 + 2\kappa_f} (\varepsilon^2 + 2 \frac{\kappa_1 - \kappa_f}{k_1 + 2\kappa_f} \varepsilon^5); \\
AA^{int}(\Omega_2) &= -T_3 \frac{\kappa_1 - \kappa_f}{k_1 + 2\kappa_f} (a_1 \varepsilon^2 + 2 \frac{a_2^3}{a_1^2} \frac{\kappa_2 - \kappa_f}{k_2 + 2\kappa_f} \varepsilon^5); \\
HA^{int}(\Omega_1) &= -T_3 \frac{3\kappa_f}{k_1 + 2\kappa_f} (1 + 2 \frac{a_2^3}{a_1^3} \frac{\kappa_2 - \kappa_f}{k_2 + 2\kappa_f} \varepsilon^3); \\
HA^{int}(\Omega_2) &= -T_3 \frac{3\kappa_f}{k_2 + 2\kappa_f} (1 + 2 \frac{a_2^3}{a_1^3} \frac{\kappa_1 - \kappa_f}{k_1 + 2\kappa_f} \varepsilon^3); \\
FA^{int}(\Omega_1) &= -\frac{15}{2} T_3 \frac{a_2^3}{a_1^4} \frac{\kappa_f}{k_2 + 2\kappa_f} \frac{\kappa_2 - \kappa_f}{2k_1 + 3\kappa_f} \varepsilon^4; \\
FA^{int}(\Omega_2) &= \frac{15}{2} T_3 \frac{\kappa_f}{k_1 + 2\kappa_f} \frac{1}{a_1} \frac{\kappa_1 - \kappa_f}{2k_2 + 3\kappa_f} \varepsilon^4; \\
GA^{int}(\Omega_1) &= -\frac{14}{3} T_3 \frac{a_2^3}{a_1^5} \frac{\kappa_f}{k_2 + 2\kappa_f} \frac{\kappa_2 - \kappa_f}{3k_1 + 4\kappa_f} \varepsilon^5; \\
GA^{int}(\Omega_2) &= -\frac{14}{3} T_3 \frac{1}{a_1^2} \frac{\kappa_f}{k_1 + 2\kappa_f} \frac{\kappa_1 - \kappa_f}{3k_2 + 4\kappa_f} \varepsilon^5; \\
AA^{ext}(\Omega_1) &= AA^{ext}(\Omega_2) = 0; \\
HA^{ext}(\Omega_1) &= T_3 \frac{\kappa_1 - \kappa_f}{k_1 + 2\kappa_f} (a_1^3 + 2a_2^2 \frac{\kappa_2 - \kappa_f}{k_2 + 2\kappa_f} \varepsilon^3); \\
HA^{ext}(\Omega_2) &= T_3 \frac{\kappa_2 - \kappa_f}{k_2 + 2\kappa_f} (a_2^3 + 2a_2^2 \frac{\kappa_1 - \kappa_f}{k_1 + 2\kappa_f} \varepsilon^3); \\
FA^{ext}(\Omega_1) &= 3T_3 a_1 a_2^3 \frac{\kappa_1 - \kappa_f}{k_2 + 2\kappa_f} \frac{\kappa_2 - \kappa_f}{2k_1 + 3\kappa_f} \varepsilon^4; \\
FA^{ext}(\Omega_2) &= -3T_3 \frac{a_2^5}{a_1} \frac{\kappa_2 - \kappa_f}{k_1 + 2\kappa_f} \frac{\kappa_1 - \kappa_f}{2k_2 + 3\kappa_f} \varepsilon^4; \\
GA^{ext}(\Omega_1) &= 2a_1^2 a_2^3 T_3 \frac{\kappa_1 - \kappa_f}{k_2 + 2\kappa_f} \frac{\kappa_2 - \kappa_f}{3k_1 + 4\kappa_f} \varepsilon^5; \\
GA^{ext}(\Omega_2) &= 2T_3 \frac{a_2^7}{a_1^2} \frac{\kappa_2 - \kappa_f}{k_1 + 2\kappa_f} \frac{\kappa_1 - \kappa_f}{3k_2 + 4\kappa_f} \varepsilon^5.
\end{aligned}$$

Полученные коэффициенты совпадают с решением, полученным в [5].

Для наглядности на рисунке 3.2.1 приведено распределение температуры при следующих параметрах:  $a_1 = 1.5, a_2 = 3, \varepsilon = 0.15, \kappa_f = 2, \kappa_1 = 3, \kappa_2 = 1.5, T_3 = 1, T_0 = 0$ .

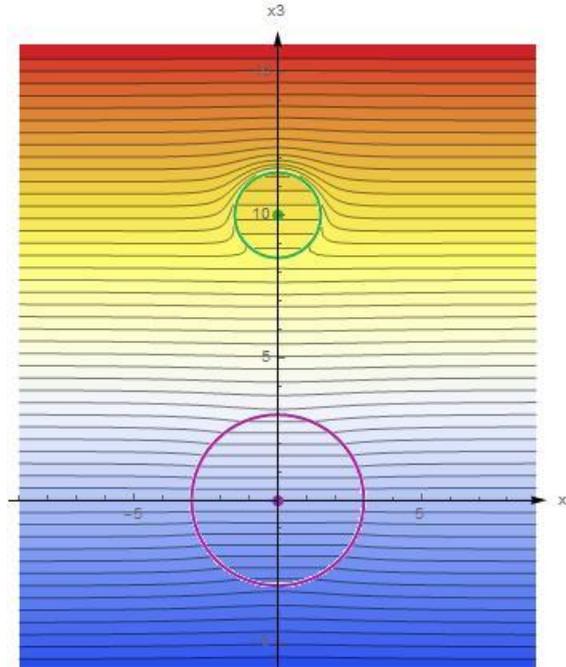


Рисунок 3.2.1 – Распределение температуры для разноразмерных частиц при  $\kappa_1 \neq \kappa_2 \neq \kappa_f$

Из рисунка видно, что обе частицы искажают изотермы распределения температуры в среде, при этом наибольшее искажение наблюдается вблизи частицы меньшего радиуса и, теплопроводность которой, больше теплопроводности среды.

Заметим, что при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , получим коэффициенты из задачи об одиночной частицы:

$$\begin{aligned}
 HA^{int}(\Omega_1) &= -T_3 \frac{3\kappa_f}{\kappa_1 + 2\kappa_f}; \\
 HA^{ext}(\Omega_1) &= T_3 a_1^3 \frac{\kappa_1 - \kappa_f}{\kappa_1 + 2\kappa_f}; \\
 AA^{int}(\Omega_1) &= FA^{int}(\Omega_1) = GA^{int}(\Omega_1) = AA^{ext}(\Omega_1) = \\
 &= FA^{ext}(\Omega_1) = GA^{ext}(\Omega_1) = 0.
 \end{aligned}$$

Аналогичные коэффициенты получаются для второй частицы.

Рассмотрим случай, когда теплопроводность одной из частиц совпадает с теплопроводностью среды:  $a_1 = 2$ ,  $a_2 = 3$ ,  $\varepsilon = 0.2$ ,  $\kappa_f = \kappa_2 = 1$ ,  $\kappa_1 = 5$ ,  $T_3 = 1$ ,  $T_0 = 10$ :

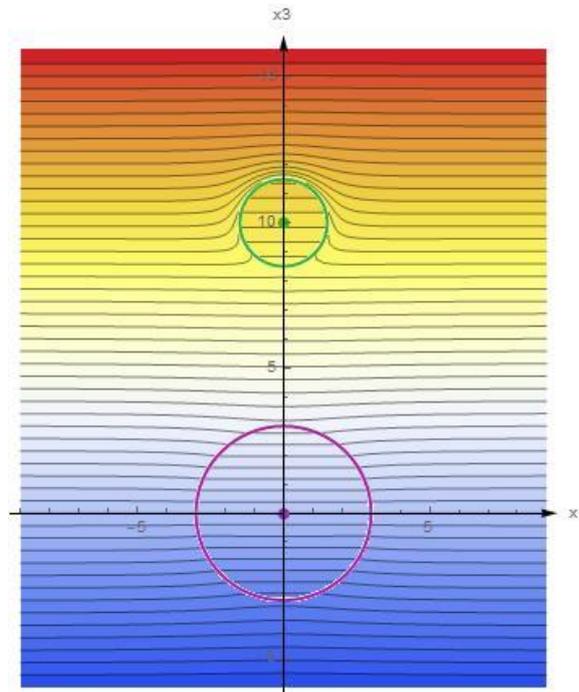


Рисунок 3.2.2 – Распределение температуры для разноразмерных частиц при  $\kappa_1 \neq \kappa_2$ ,  $\kappa_2 = \kappa_f$

Из рисунка 3.2.2, можно увидеть, что частица, имеющая ту же теплопроводность, что и окружающая среда, не вносит искажение в распределение температур, и, следовательно, такой случай можно свести к решению об одиночной частице.

Если в среду поместить две одинаковых частицы  $a_1 = a_2 = 1.5$ ,  $\varepsilon = 0.25$ ,  $\kappa_f = 3$ ,  $\kappa_1 = \kappa_2 = 2$ ,  $T_3 = 1$ ,  $T_0 = 0$ , то можно увидеть следующую картину:

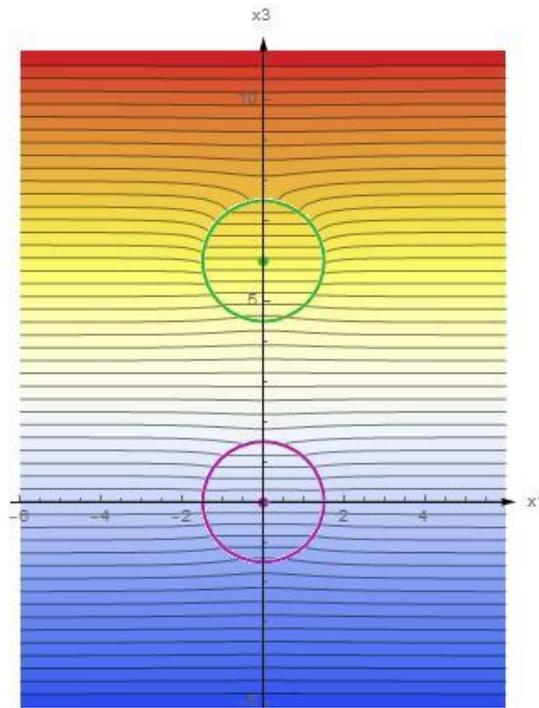


Рисунок 3.2.3 – Распределение температуры для одинаковых частиц

На рисунке 3.2.3 изотермы огибают наши частицы симметрично относительно оси  $x_3 = r/2$ , а для коэффициентов справедливы соотношения:

$$\begin{aligned}
 AA^{int}(\Omega_1) &= -AA^{int}(\Omega_2); HA^{int}(\Omega_1) = HA^{int}(\Omega_2); \\
 FA^{int}(\Omega_1) &= -FA^{int}(\Omega_2); GA^{int}(\Omega_1) = GA^{int}(\Omega_2); \\
 AA^{ext}(\Omega_1) &= AA^{ext}(\Omega_2) = 0; \\
 HA^{ext}(\Omega_1) &= HA^{ext}(\Omega_2); FA^{ext}(\Omega_1) = -FA^{ext}(\Omega_2); \\
 GA^{ext}(\Omega_1) &= GA^{ext}(\Omega_2).
 \end{aligned}$$

Таким образом, в случае одинаковых размеров и термодинамических свойств частиц, наблюдается симметрия в тензорных коэффициентах.

## 4 Взаимодействие плоскости и частицы

### 4.1 Постановка задачи. Введение фиктивной частицы

Вернемся к исходной задаче и введем декартову прямоугольную систему координат  $Ox_1x_2x_3$  так, что центр частицы  $\Omega$  радиуса  $a$  лежит на оси  $Ox_3$ , а плоскость  $Ox_1x_2$  совпадает с плоскостью  $W$ , как показано на рисунке 4.1.1. При этом будем полагать, что верхняя половина трехмерного пространства ( $x_3 > 0$ ) заполнена неподвижной средой, температура которой описывается функцией  $T_f$ , а на поверхности плоскости поддерживается постоянная температура  $T_w$ :

$$T_f = T_w, \text{ при } x_3 = 0. \quad (4.1.1)$$

Координаты произвольной точки относительно начала координат задаются вектором  $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ , а радиус-вектор  $\vec{r}$  с координатами  $(0, 0, h)$  задает расположение центра частицы  $\Omega$ , где  $h > a$ . Распределение температуры внутри частицы обозначим  $T_p$ . Теплопроводности среды и частицы отличны друг от друга ( $\kappa_f \neq \kappa_p$ ). Вдали от плоскости задан постоянный градиент.

Вдали от частицы и плоскости возмущения, вызванные ими, затухают – выполняется условие (2.1.2), на границе раздела «среда – частица» температура и тепловой поток непрерывны, т.е. справедливы формулы (3.1.1), (3.1.2), а внутри частицы температура должна иметь конечные значения.

Задача состоит в нахождении распределения температур  $T_f$  и  $T_p$ , при условии, что они удовлетворяют уравнениям (2.1.2), (2.1.3), (2.1.6), (3.1.1), (3.1.2), (4.1.1).

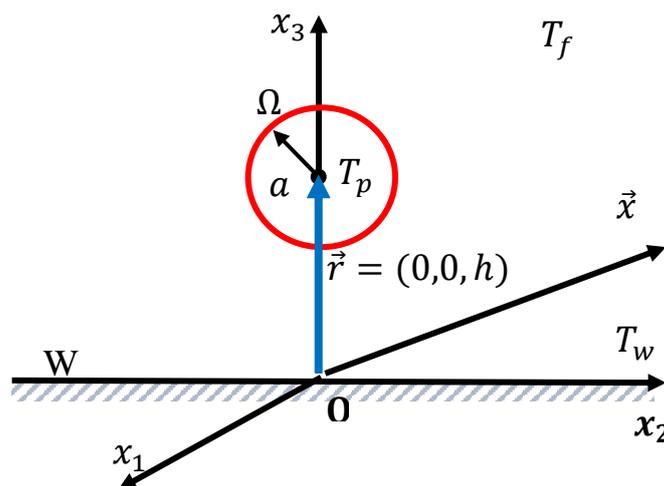


Рисунок 4.1.1 – Геометрия задачи о частице и плоскости

Поставленная задача осложняется тем, что поверхности плоскости и частицы имеют разную геометрию.

Для получения решения, соответствующего граничным условиям на двух геометрически различных поверхностях – сфере и плоскости (где поверхность сферы конечна, а плоскость  $W$  – бесконечна), рассмотрим подход, основанный на замене плоской стенки частицей. Основная идея решения заключается в том, чтобы решать задачу взаимодействия двух геометрически идентичных тел – частиц. Плоскость заменяется на фиктивную частицу  $M$ , радиус-вектор которой имеет координаты  $-\vec{r} = (0, 0, -h)$ . Т.е. в рассмотрение вводится частица, отображенная зеркально относительно  $W$ .

Таким образом, задача может быть сведена к моделированию термодинамического взаимодействия двух сферических частиц в безграничной среде, который был рассмотрен во второй главе.

Далее будет рассматриваться система «реальная сфера  $\Omega$  + фиктивная сфера  $M$ », представленная на рисунке 4.1.2.

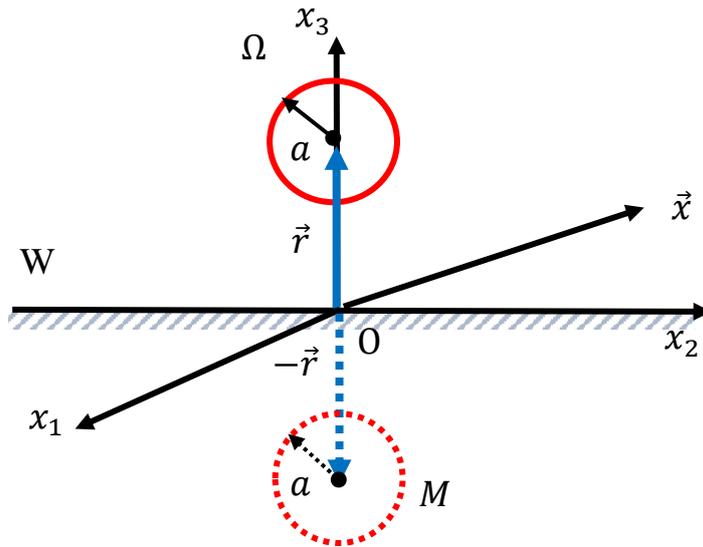


Рисунок 4.1.2 – Положение фиктивной частицы

Граничные условия принимают конечный вид:

$$T_f = T_p(\Omega), \text{ при } |\vec{x} - \vec{r}| = a, \quad (4.1.2)$$

$$k_f(\vec{n} \cdot \nabla T_f) = k_p(\vec{n} \cdot \nabla T_p(\Omega)), \text{ при } |\vec{x} - \vec{r}| = a, \quad (4.1.3)$$

$$T_f = T_p(M), \text{ при } |\vec{x} + \vec{r}| = a,$$

$$k_f(\vec{n} \cdot \nabla T_f) = k_M(\vec{n} \cdot \nabla T_p(M)), \text{ при } |\vec{x} + \vec{r}| = a.$$

Распределение температуры вне частицы может быть записано в следующем виде:

$$\begin{aligned} T_f(\vec{x}) = & T_0 + T_j x_j + [A_0^{ext}(\Omega) L_0(\vec{x} - \vec{r}) + \\ & + H_j^{ext}(\Omega) L_j(\vec{x} - \vec{r}) + F_{jk}^{ext}(\Omega) L_{jk}(\vec{x} - \vec{r}) + \\ & + G_{jkl}^{ext}(\Omega) L_{jkl}(\vec{x} - \vec{r}) + \dots +] + [A_0^{ext}(M) L_0(\vec{x} + \vec{r}) + \\ & + H_j^{ext}(M) L_j(\vec{x} + \vec{r}) + F_{jk}^{ext}(M) L_{jk}(\vec{x} + \vec{r}) + \\ & + G_{jkl}^{ext}(M) L_{jkl}(\vec{x} + \vec{r}) + \dots ]. \end{aligned} \quad (4.1.4)$$

Для температурного поля внутри частицы справедливо (3.1.5).

Для поиска тензорных коэффициентов необходимо использовать граничные условия (4.1.2), (4.1.3). При этом стоит учитывать, что условие (4.1.1) автоматически выполняется в результате введения в рассмотрение сферы  $M$ . Далее будем считать, что радиус частицы мал по сравнению с расстоянием от центра частицы до плоскости, тогда можно ввести безразмерный малый параметр  $\varepsilon = a/h < 1$  и представить искомые величины в виде ряда по степеням  $\varepsilon$ .

## 4.2 Температурные поля в случае поперечного градиента температуры

Пусть градиент температуры направлен перпендикулярно плоскости  $W$  и сонаправлен с осью  $Ox_3$ , т.е. вектор  $\vec{T} = (0, 0, T_3)$ .

Тогда невозмущенное поле запишется:

$$T_\infty(\vec{x}) = T_w + T_3 x_3, \text{ где } T_w = \text{const.}$$

Выедем вектор  $\vec{b} = (0, 0, 1)$  – орт оси  $Ox_3$ , тогда  $\vec{T} = T_3 \vec{b}$ ,  $\vec{r} = h \vec{b}$ , т.е. все тензорные коэффициенты можно представить, используя только вектор  $\vec{b}$ .

Из определения мультиполя следует, что мультиполи четного порядка  $(L_0(\vec{x} \pm \vec{r}), L_{jk}(\vec{x} \pm \vec{r}), \dots)$  являются четными функциями относительно  $\vec{r} = (0, 0, h)$ , а мультиполи  $(L_j(\vec{x} \pm \vec{r}), L_{jkl}(\vec{x} \pm \vec{r}), \dots)$ , имеющий нечетный порядок – нечетны. Положив

$$\begin{aligned} A_0^{ext}(\Omega) &= -A_0^{ext}(M), H_j^{ext}(\Omega) = H_j^{ext}(M), \\ F_{jk}^{ext}(\Omega) &= -F_{jk}^{ext}(M), G_{jkl}^{ext}(\Omega) = G_{jkl}^{ext}(M), \dots \end{aligned} \quad (4.2.1)$$

равенство (4.1.1) выполняется точно.

После упрощений, описанных выше получим:

$$\begin{aligned}
T_f(\vec{x}) = T_w + T_3 \{ & AA^{ext} [L_0(\vec{x} - \vec{r}) - L_0(\vec{x} + \vec{r})] + \\
& + HA^{ext} [L_3(\vec{x} - \vec{r}) + L_3(\vec{x} + r)] + \\
& + FA^{ext} [L_{33}(\vec{x} - \vec{r}) - L_{33}(\vec{x} + \vec{r})] + \\
& + GA^{ext} [L_{333}(\vec{x} - \vec{r}) + L_{333}(\vec{x} + \vec{r})] + \dots \}.
\end{aligned} \tag{4.2.2}$$

Отсюда

$$T_f(x_1, x_2, 0) = T_w.$$

Для нахождения неизвестных коэффициентов, выражения для температурных полей раскладываются по степеням  $\varepsilon$  и подставляются в граничные условия (4.1.2), (4.1.3). В результате получим:

$$\begin{aligned}
AA^{ext} &= 0, \\
HA^{ext} &= a^3 * \frac{k_p - k_f}{k_p + 2k_f} * \left( 1 + \frac{1}{4} * \frac{k_p - k_f}{k_p + 2k_f} \varepsilon^3 \right), \\
FA^{ext} &= a^4 * \frac{k_p - k_f}{k_p + 2k_f} * \frac{3}{16} \frac{k_p - k_f}{2k_p + k_f} \varepsilon^4, \\
GA^{ext} &= a^5 * \frac{k_p - k_f}{k_p + 2k_f} * \frac{1}{16} * \frac{k_p - k_f}{3k_p + 4k_f} \varepsilon^5, \\
AA^{int} &= -a * \frac{k_p - k_f}{k_p + 2k_f} * \left( \frac{1}{4} \varepsilon^2 + \frac{1}{16} \frac{k_p - k_f}{k_p + 2k_f} \varepsilon^5 \right), \\
HA^{int} &= -\frac{k_f}{k_p + 2k_f} * \left( 3 + 3 * \frac{k_p - k_f}{k_p + 2k_f} \varepsilon^3 \right), \\
FA^{int} &= -\frac{1}{a} * \frac{k_f}{k_p + 2k_f} * \frac{15}{32} \frac{k_p - k_f}{(2k_p + 3k_f)} \varepsilon^4, \\
GA^{int} &= -\frac{1}{a^2} * \frac{k_f}{k_p + 2k_f} * \frac{7}{48} \frac{k_p - k_f}{(3k_p + 4k_f)} \varepsilon^5.
\end{aligned}$$

По мере удаления инородной частицы от плоскости ( $h \rightarrow \infty$ ),  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Значит:

$$AA^{ext} = FA^{ext} = GA^{ext} = AA^{int} = FA^{int} = GA^{int} = 0,$$

$$HA^{ext} \rightarrow a^3 * \frac{k_p - k_f}{k_p + 2k_f}, HA^{int} \rightarrow -\frac{3 k_f}{k_p + 2k_f}$$

Полученные коэффициенты совпадают с решением задачи об одиночной частице, помещенной в бесконечную сплошную среду с постоянным градиентом температуры (2.2.7).

Рассмотрим предельные случаи.

Если теплопроводности одинаковы, то и температуры частицы и окружающей среды равны. Следовательно, когда частица имеет одни и те же термодинамические свойства, что и окружающая среда, она не искажает температурное поле среды.

При малых размерах частицы ( $a \rightarrow 0$ ), вызванное ею возмущение в среде также устремляется к нулю, т.е. частица не оказывает влияния на распределение температуры.

На рисунке 4.2.1 приведено распределение температур  $T_f$  и  $T_p$  в плоскости  $Ox_1x_3$  при заданных значениях:  $a = 1, h = 3, k_p = 5, k_f = 1, T_3 = 1, T_0 = 0, T_w = 2$ :

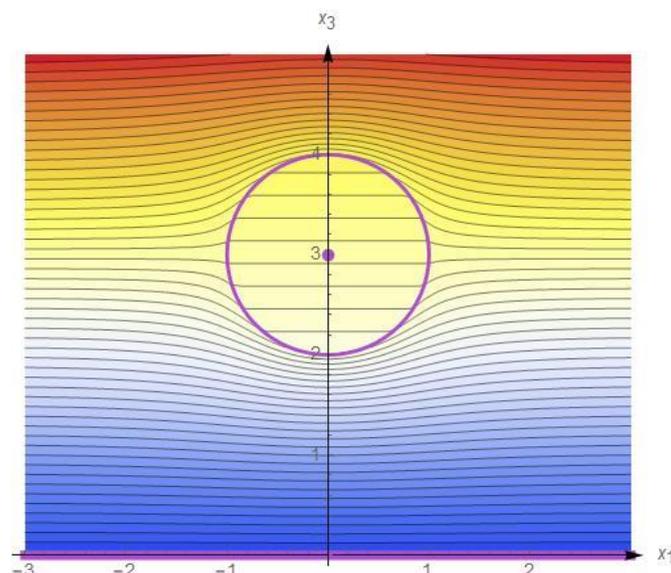


Рисунок 4.2.1 – Распределение температуры возле частицы, в случае, когда  $\vec{T}$  перпендикулярен  $W$

Из рисунка видно, что изотермы огибают частицу, а при  $x_3 = 0$ , плоскость  $W$  совпадает с одной из изотерм.

По мере удаления от частицы, температура начинает изменяться линейно, что удовлетворяет нашим условиям.

### 4.3 Температурные поля в случае продольного градиента температуры

Пусть теперь градиент температуры  $\vec{T}$  направлен вдоль плоскости  $W$  и имеет координаты  $(T_1, 0, 0)$ . Тогда

$$T_\infty(\vec{x}) = T_w + T_1 x_1, T_w(\vec{x}) = T_\infty(\vec{x}). \quad (4.3.1)$$

В отсутствие частицы изотермы  $T_\infty$  представляют плоскости  $x_1 = const$ , перпендикулярные к плоскости  $W$ .

В дополнение к вектору  $\vec{b}$  введем вектор  $\vec{c} = (1, 0, 0)$  так что  $\vec{T} = T_1 \vec{c}$ . Аналогично предыдущим рассуждениям, получим разложения температур, вычисляя тензорные произведения векторов  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$ . В данном случае тензорные коэффициенты содержат множитель  $T_1$ :

$$\begin{aligned} A_0 &= T_1 AB, \\ H_j &= T_1 HB c_j, \\ F_{jk} &= T_1 FB c_j c_k, \\ G_{jkl} &= T_1 GB c_j c_k c_l, \dots \end{aligned} \quad (4.2.2)$$

Вместо (4.2.1) предположим, что

$$A_0^{ext}(\Omega) = A_0^{ext}(M), H_j^{ext}(\Omega) = -H_j^{ext}(M), \quad (3.4.3)$$

$$F_{jk}^{ext}(\Omega) = F_{jk}^{ext}(M), G_{jkl}^{ext}(\Omega) = -G_{jkl}^{ext}(M), \dots$$

С точностью до  $\varepsilon^5$  были найдены значения скалярных коэффициентов из (4.2.2):

$$AB^{ext} = 0,$$

$$HB^{ext} = a^3 * \frac{k_p - k_f}{k_p + 2k_f} * \left( 1 + \frac{1}{8} * \frac{k_p - k_f}{k_p + 2k_f} \varepsilon^3 \right),$$

$$FB^{ext} = a^4 * \frac{k_p - k_f}{k_p + 2k_f} * \frac{1}{8} * \frac{k_p - k_f}{2k_p + k_f} \varepsilon^4,$$

$$GB^{ext} = a^5 * \frac{k_p - k_f}{k_p + 2k_f} * \frac{3}{64} * \frac{k_p - k_f}{3k_p + 4k_f} \varepsilon^5,$$

$$AB^{int} = 0,$$

$$HB^{int} = -\frac{k_f}{k_p + 2k_f} * \left( 3 + \frac{3}{8} * \frac{k_p - k_f}{k_p + 2k_f} \varepsilon^3 \right),$$

$$FB^{int} = -\frac{1}{a} * \frac{k_f}{k_p + 2k_f} * \frac{5}{16} * \frac{k_p - k_f}{2k_p + 3k_f} \varepsilon^4,$$

$$GB^{int} = -\frac{1}{a^2} * \frac{k_f}{k_p + 2k_f} * \frac{7}{64} * \frac{k_p - k_f}{3k_p + 4k_f} \varepsilon^5.$$

На рисунке 4.3.1 приведено распределение температуры вблизи частицы в плоскости  $Ox_1x_3$  при выбранных параметрах:  $a = 1$ ,  $h = 3$ ,  $k_p = 5$ ,  $k_f = 11$ ,  $T_1 = 3$ ,  $T_0 = 0$ ,  $T_w = 2$ .

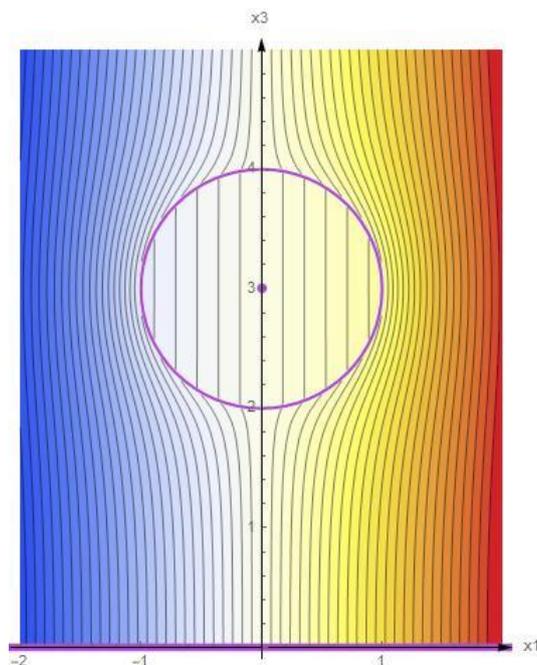


Рисунок 4.3.1 – Распределение температуры возле частицы, в случае, когда  $\vec{T}$  параллелен  $W$

Из рисунка видно, что изотермы огибают частицу. По мере удаления от частицы, температура начинает изменяться линейно, при этом изотермы перпендикулярны плоскости  $W$ , что удовлетворяет нашим условиям.

## 5 Предельный переход от задачи взаимодействия двух разноразмерных сферических частиц к задаче о взаимодействии плоскости и частицы

Рассмотрим возможность применения другого подхода к исследованию термодинамического взаимодействия плоскости и частицы, состоящем в замене плоскости на частицу с радиусом большим, чем у исходной. Ожидается, что распределение температуры в данном случае должно быть приближено к решению задачи о взаимодействии плоскости и частицы, рассмотренного ранее.

Основная идея решения заключается в том, чтобы заменить плоскую стенку  $W$  частицей  $W$  с радиусом  $R \rightarrow \infty$ , на поверхности которой поддерживается постоянная температура  $T_w$ , и рассмотреть задачу о взаимодействии двух геометрически одинаковых тел (частиц). Далее будем обозначать  $\Omega$  первую частицу, а ее радиус  $a$  ( $R \gg a$ ). Обе частицы помещаются в безграничную среду. А на бесконечности задан постоянный градиент температуры  $\vec{T}$ . Теплопроводности частицы  $\Omega$  и среды обозначим через  $k_p$  и  $k_f$ , а температуры, как и прежде  $T_p$  и  $T_f$ , соответственно.

Введем прямоугольную систему координат  $Ox_1x_2x_3$  так, что центр  $W$  совпадает с началом системы координат  $O$ , а центр частицы  $\Omega$  лежит на оси  $Ox_3$ . Положение произвольной точки задается вектором  $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ . Градиент температуры направим вдоль оси  $Ox_3$ , тогда  $\vec{T} = (0, 0, T_3)$ . Положение частиц определяется радиус-векторами их центров  $\vec{r}_1$  и  $\vec{r}_2$ , соответственно, относительно начала координат. Центры частиц разделены вектором  $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ , с длиной  $r = R + h$ . Расстояние от поверхности частицы  $W$  до центра частицы  $\Omega$  обозначим  $h$  в соответствии с рисунком 5.

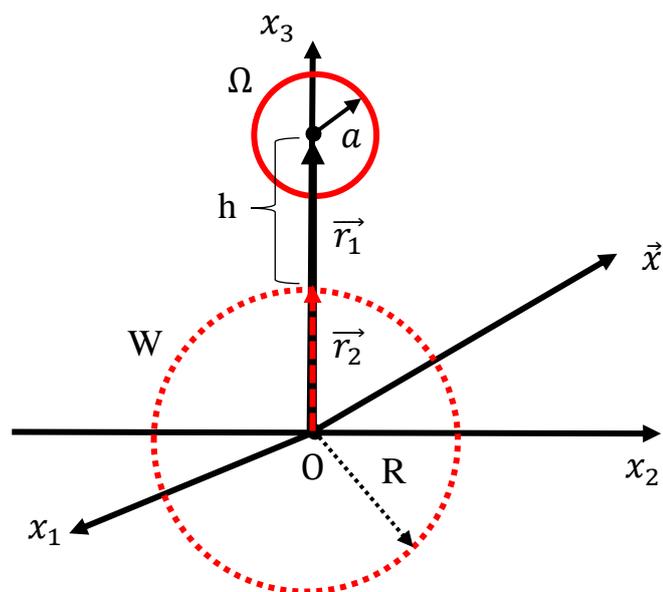


Рисунок 5 – Переход к задаче о двух частицах разного размера

Искомые температуры по-прежнему должны удовлетворять условиям (3.1.2), (2.1.3). Распределение температуры внутри  $\Omega$  и в среде гармонично, а на поверхности  $\Omega$  выполнены условия (4.1.2) и (4.1.3). Вместо условия (4.1.1) рассмотрим условие:

$$T_f(\vec{x}) = T_w, \text{ при } |\vec{x}| = R. \quad (5.1)$$

Согласно уравнению (4.1), определение температуры внутри частицы  $W$  не имеет смысла. В соответствии с принципом максимума [1], гармоническая функция, определенная внутри ограниченной области, достигает своего наибольшего и наименьшего значения на границе этой области. Если температура в  $W$  является гармонической функцией, для которой выполнены условия непрерывности, то ее наибольшее и наименьшее значения совпадают, то есть, она постоянна.

Распределение температуры внутри частицы  $T_p$  будем искать в виде (3.1.5), а распределение температуры среды в виде (3.1.4)

Тензорные коэффициенты определяются из граничных условий в виде разложения по степеням параметра  $\varepsilon_1 = \frac{a}{r} < 1$ .

С точностью до  $\varepsilon_1^2$  были получены следующие коэффициенты:

$$\begin{aligned}
 AA^{int}(\Omega) &= (T_w - T_0) \frac{R}{a} \varepsilon_1 - T_3 \frac{R^3}{a^2} \varepsilon_1^2; \\
 HA^{int}(\Omega) &= -T_3 \frac{3\kappa_f}{\kappa_p + 2\kappa_f} + (T_w - T_0) \frac{R}{a^2} \frac{3\kappa_f}{(\kappa_p + 2\kappa_f)} \varepsilon_1^2; \\
 HA^{ext}(\Omega) &= T_3 a^3 \frac{\kappa_p - \kappa_f}{\kappa_p + 2\kappa_f} - (T_w - T_0) a R \frac{\kappa_p - \kappa_f}{\kappa_1 + 2\kappa_f} \varepsilon_1^2; \\
 AA^{ext}(W) &= (T_w - T_0) R - T_3 a R \frac{\kappa_p - \kappa_f}{\kappa_1 + 2\kappa_f} \varepsilon_1^2; \\
 HA^{ext}(W) &= T_3 R^3; \\
 FA^{int}(\Omega) &= AA^{ext}(\Omega) = FA^{ext}(\Omega) = FA^{ext}(W) = 0.
 \end{aligned} \tag{5.2}$$

Для наглядности изобразим распределение температуры при следующих параметрах:  $a = 1, R = 3, r = 5, \kappa_f = 1, \kappa_p = 3, T_3 = 1, T_w = 2, T_0 = 0$  рисунок 5.2):

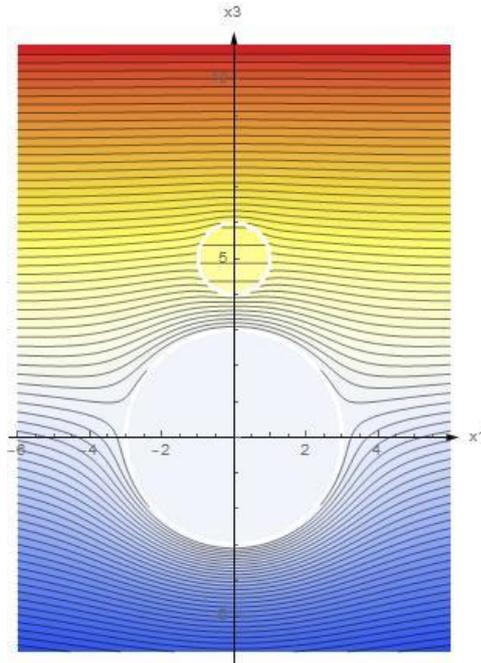


Рисунок 5.2 – Распределение температуры возле частиц

Изотермы огибают наши частицы. По мере удаления от частицы, температура начинает изменяться линейно, а внутри второй частицы и на ее поверхности температура постоянна, что удовлетворяет нашим условиям.

При фиксированном  $a, r \rightarrow \infty$  следует, что  $\varepsilon_1 \rightarrow 0$ . В результате были получены следующие выражения для коэффициентов:

$$HA^{int}(\Omega) = T_3 \frac{3\kappa_f}{\kappa_p + 2\kappa_f};$$

$$HA^{ext}(\Omega) = T_3 a^3 \frac{\kappa_p - \kappa_f}{\kappa_p + 2\kappa_f};$$

$$AA^{ext}(W) = (T_w - T_0)R;$$

$$HA^{ext}(W) = T_3 R^3;$$

$$AA^{int}(\Omega) = FA^{int}(\Omega) = AA^{ext}(\Omega) = FA^{ext}(\Omega) = FA^{ext}(W) = 0.$$

Температура среды зависит от радиуса обеих частиц. Однако частицы находятся настолько далеко друг от друга, что они не взаимодействуют друг с другом, поскольку коэффициенты возмущения, приходящего от одной частицы, не зависят от параметров другой частицы.

Таким образом, при  $\varepsilon_1 \rightarrow 0$  распределение температуры можно представить в виде суммы двух независимых задач об одиночных частицах, на поверхностях которых заданы различные граничные условия.

Проверим, выполняется ли предельный переход от задачи о взаимодействии двух сферических частиц разного размера к задаче о взаимодействии плоскости и частицы.

При достаточно большом радиусе ( $R \rightarrow \infty$ ) частицы  $W$  поверхность частицы можно рассматривать как плоскость. Предполагается, что вблизи поверхности частицы  $W$  существует область, которая содержит в себе частицу  $\Omega$ . Учитывая это, выполним замену  $x_3 = R + z_3$ , где  $z_3 \ll R$ .

Для окончательного перехода к пределу необходимо произвести замену  $\varepsilon_1 \rightarrow a/(R + h)$  и зафиксировать параметры  $a$  и  $h$ .

Устремляя  $R \rightarrow \infty$ , придем к выражениям:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} T_f = T_w + 3T_3 z_3 + 3a^3 T_3 \frac{\kappa_p - \kappa_f}{\kappa_p + 2\kappa_f} \frac{h - z_3}{[x_1^2 + x_2^2 + (h - z_3)^2]^{3/2}};$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} T_p = T_w + 3T_3 h + T_3 y_3 \frac{9\kappa_f}{\kappa_p + 2\kappa_f}.$$

Не трудно увидеть, что полученное распределение похоже на решение задачи об одиночной частице в безграничной среде (2.2.7), при этом градиент температуры на бесконечности в 3 раза превышает исходный градиент  $\vec{T}$ , а температура в начале координат (условный нуль) совпадает с  $T_w$ .

Данный результат отличается от распределения температур, полученных в предыдущих разделах. В предельном переходе возникают слагаемые с некоторым числовым множителем. Подобный результат наблюдается и при рассмотрении одиночной частицы, с помощью которой моделируется плоскость.

Поместим частицу радиуса  $R$  в начало координат, задав на поверхности частицы постоянную температуру  $T_w$ , тогда температура среды будет описана выражением:

$$T_f(\vec{x}) = T_0 + T_3 x_3 + (T_w - T_0) R L_0(\vec{x}) + R^3 T_3 L_3(\vec{x}) =$$

$$= T_0 + T_3 x_3 + \frac{R}{|\vec{x}|} (T_w - T_0) - R^3 T_3 \frac{x_3}{|\vec{x}|^3}.$$

В предельном переходе при  $x_3 = R + z_3$ ,  $R \rightarrow \infty$  получим :

$$T_f = T_0 + T_3(R + z_3) + \frac{R}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + (R + z_3)^2}} (T_w - T_0) -$$

$$- R^3 T_3 \frac{x_3}{(x_1^2 + x_2^2 + (R + z_3)^2)^{3/2}},$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} T_f = T_w + 3T_3 z_3.$$

При таком предельном переходе изменилась геометрия задачи: произошло смещение по оси  $Ox_3$ , в результате чего вторая частица, большего радиуса, перекрыла частицу меньшего радиуса. Оказывается, если частица имеет большой радиус и мы отходим от нее на маленькое расстояние, то градиент температуры практически не зависит от координат  $x_1, x_2$ . Полученный градиент постоянен, однако он отличается от исходного градиента, заданного на бесконечности от частицы  $W$ . Изотермы, огибающие частицу, будут иметь форму близкую к прямой линии.

Таким образом, невозможно свести задачу о двух частицах к задаче о «частица+плоскость», выполнив предельный переход [5].

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе данной работы были рассмотрены задачи о термодинамическом взаимодействии двух частиц, частицы и плоскости и возможность предельного перехода от первой задачи ко второй. Для решения задачи был использован аналитический подход, основанный на мультипольном представлении исследуемых величин.

Решение задачи было разбито на несколько этапов. В первом приближении решения были получены выражения для температур в случае единичной частицы, помещенной в безграничную среду. Во втором - рассмотрено взаимодействие двух сферических частиц с одинаковыми граничными условиями.

Для решения основной задачи был применен метод, позволяющий интерпретировать взаимодействие частицы и плоскости, как взаимодействие двух частиц: реальной и фиктивной.

С помощью асимптотического разложения коэффициентов с точностью до  $\varepsilon^5$  были найдены представления температур частицы и среды в случаях поперечного и продольного градиента температур по относительно плоскости.

Решена задача о взаимодействии двух сферических частиц, радиусы которых отличны друг от друга, с разными граничными условиями на их поверхностях. Изучена возможность моделирования взаимодействия системы «плоскость+частица» путем предельного перехода от задачи о взаимодействии двух частиц.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Владимиров В. С. Уравнения математической физики / В. С. Владимиров, В. В. Жаринов. – Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2008. – 400с. – ISBN 978-5-9221-0310-7. – Текст : непосредственный.
2. Кудрявцев Л. Д. Краткий курс математического анализа. Учебник / Л. Д. Кудрявцев. – 3-е изд., перераб. – Москва : ФИЗМАТЛИТ, [б. г.]. – Том 2 : Дифференциальное и интегральное исчисления функций многих переменных. Гармонический анализ – 2003. – 424 с. – ISBN 5-9221-0185-4. – Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. – URL: <https://e.lanbook.com/book/2225> (дата обращения: 30.04.2022). – Режим доступа: для авториз. пользователей.
3. Сыромясов А.О. Термодинамическое взаимодействие сферических частиц в среде с постоянным градиентом температуры // Вестник Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского. 2011. № 4. С. 1158 – 1160. Текст : непосредственный.
4. Ландау Л. Д. Теоретическая физика. Учебное пособие : в 10 томах / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц ; под редакцией Л. П. Питаевского. – 6-е изд., испр. – Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2021 — Том 6 : Гидродинамика – 2021. – 728 с. – ISBN 978-5-9221-1625-1. – Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. – URL: <https://e.lanbook.com/book/185671> (дата обращения: 05.05.2022). – Режим доступа: для авториз. пользователей.
5. Сыромясов А.О., Еделева Ю.П. Распределение температуры в полупространстве, содержащем сферическое включение // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2023. №3. С. 5 – 18. [https://doi.org/10.26456/vt\\_pmk692](https://doi.org/10.26456/vt_pmk692)

## Приложение

В Оргкомитет Смотра дипломных работ математиков России  
от Ионина Василия Андреевича

### Заявление о новизне

Сообщаю, что новыми в моей представленной на Смотр выпускной квалификационной работе (далее - работа) под названием Конфигурационные пространства, косы и гомотопические группы являются: доказательство Proposition 1.1, Lemma 1.2 (Corollary 4.3), Theorem 1.3, Theorem 1.4, доказательство Theorem 1.5, Theorem 1.6, Lemma 4.2, Lemma 4.4, Theorem 5.2, Lemma 5.5, Theorem 5.9, Theorem 6.7, Proposition 6.8, Corollary 6.9, Proposition 6.10, Proposition 6.11, Lemma 7.1, доказательство Lemma 7.2.

Также сообщаю, что для проверки новизны мною было проделано следующее:

- В период с 11 февраля по 1 марта 2024 г. мною был произведён поиск в следующих поисковых системах: Яндекс, Google, Google Scholar, Web of Science, arxiv.org по следующим ключевым словам: braided simplicial group, Delta-group on braids, automorphisms of pure braid groups, в выдаче поисковиков был исследован ряд статей (см. библиографию и литературный обзор во введении), и все они не содержали материала, заявляемого автором выпускной квалификационной работы в качестве нового. При поиске не было встречено работ или упоминаний работ, позволяющих усомниться в новизне материала. При этом в работах [J. A. Berrick, F. R. Cohen, Y. L. Wong, J. Wu, Braids, configurations and homotopy groups, J. Amer. Math. Soc. 19 (2006) 265–326.] и [J. Wu, A braided simplicial group, Proc. London Math. Soc. (3) 84 (2002), 645-662.], были найдены конструкции, похожие на излагаемые в настоящей выпускной квалификационной работе, однако отличие их ясно видно и наличие таких работ лишь подтверждает актуальность тематики исследования.
- Проведена консультация с рецензентом работы Ивановым Сергеем Олеговичем, кандидатом ф.-м. наук.
- Проведено выступление на [студенческом семинаре по маломерной топологии](#).
- Проведено выступление на [воркшопе Advances in Homotopy Theory VI](#).

Подтверждаю, что являюсь автором предоставляемой на Смотр работы и прошу принять её для участия в Смотре. Принимаю на себя обязательство соблюдать правила Смотра. Также (в соответствии с п. 4 Положения о Смотре) принимаю на себя обязательство оценить 5 работ участников Смотра, выданных мне Оргкомитетом в результате жеребьёвки и сверх того оценить 2-5 работ других участников Смотра на мой выбор. Я понимаю правила оценки работ, приведённые в п. 4.3 Положения о Смотре. Даю согласие на публикацию адреса моей электронной почты.

Защита работы состоится/состоялась 13.06.2024. На Смотр представлен проект текста/окончательный текст работы.



Ионин Василий Андреевич

20.06.2024

Санкт-Петербург, Россия

Санкт-Петербургский государственный университет

*Ионин Василий Андреевич*

**Выпускная квалификационная работа**

*Конфигурационные пространства, косы и гомотопические группы*

Уровень образования: магистратура

Направление 01.04.01 “Математика”

Основная образовательная программа ВМ.5832.2022 “Современная математика”

Научный руководитель:  
профессор факультета МКН СПбГУ,  
д.ф.-м.н.,  
Петров Виктор Александрович

Рецензент:  
профессор Пекинского института  
математических наук и приложений у озера Янчи,  
к.ф.-м.н.,  
Иванов Сергей Олегович

Санкт-Петербург  
2024

St Petersburg State University

*Ionin Vasilii*

**Graduation work**

*Configuration spaces, braids, and homotopy groups*

Level of education: Master

Field 01.04.01 “Mathematics”

The main educational program BM.5832.2022 “Advanced Mathematics”

Supervisor:

Professor,

Saint Petersburg University,

Department of Mathematics and Computer Science,

Viktor A. Petrov

Reviewer:

Professor,

Yanqi Lake Beijing Institute

of Mathematical Sciences and Applications,

Sergei O. Ivanov

St Petersburg

2024

# CONFIGURATION SPACES, BRAIDS, AND HOMOTOPY GROUPS

VASILY IONIN

ABSTRACT. The main results of the present paper are as follows:

- commutator subgroup  $F[S^n]'$  of Milnor's free group construction models the loop space of the  $(n + 1)$ th stage of Whitehead tower for  $S^{n+1}$ ;
- the sequence of commutator subgroups of the pure braid groups admits a simplicial group structure  $[\mathbb{P}, \mathbb{P}]$ ;
- the loop space of  $[\mathbb{P}, \mathbb{P}]$  is homotopy equivalent to  $\Omega S^3$ ;
- $[\mathbb{P}, \mathbb{P}]$  admits an (almost strict) topological model given by the Fulton-MacPherson compactifications of configuration spaces;
- $[\mathbb{P}, \mathbb{P}]$  admits a braided simplicial group structure;
- the action of automorphisms of pure braid groups on homotopy groups of  $S^3$  reduces to the sign action of mapping class group of the punctured sphere.

## CONTENTS

1. Introduction	5
2. Preliminaries	8
2.1. Brunnian braid groups	9
2.2. Automorphisms of pure braid groups	10
2.3. Action of braids on the pure braid group by conjugation	10
3. Elaborations on braid formalism	11
3.1. Expression for the central braid via $A_{0,k}$	11
3.2. Automorphism $\theta_n$	12
4. Simplicial methods and homotopy groups of spheres	13
4.1. Simplicial homotopy theory	13
4.2. Milnor's free group construction and its commutator subgroup	14
4.3. Standard (semi-)simplicial objects: $\mathbb{A}\mathbb{P}$ and $\mathbb{P}$	15
4.4. Sphere-trivial braids and $\ker(\partial)$	16
4.5. Proof of Proposition 1.1	16
5. New simplicial group on commutator subgroups of pure braid groups	17
5.1. Proof of Theorem 1.3	18
5.2. Braided simplicial group structure on $[\mathbb{P}, \mathbb{P}]$	20
6. Simplicial spaces built from configuration spaces	22
6.1. Prelude	22
6.2. Sketch of the construction	25
6.3. Stage I: Build auxiliary morphisms	27
6.4. Stage II: Lift angle-storage along universal covering	29
6.5. Stage III: Retract to the nice subspaces	30

7. Action of automorphisms of pure braid groups on $\pi_*(S^3)$	31
7.1. Reflection automorphism	31
7.2. Proofs of Theorem 1.5 and Theorem 1.6	34
7.3. On triviality of the action and homotopy groups of $S^3$	35
Appendix A. Computations	35
A.1. Explicit formulas for structure maps of $\mathbb{P}$	35
A.2. Verification of identities in the proofs of Lemma 5.7 and Theorem 5.10	40
Appendix B. Compactifications of configuration spaces	41
B.1. Explanation of Proposition 6.2	41
References	43

1. INTRODUCTION

In general, the sequence of finite abelian groups  $\pi_n(S^2), n \geq 4$ , is one of the most mysterious objects in math, it is difficult to speculate how far we are from its understanding. It is a strange luck that we can realize this extremely complicated sequence as a series of simply formulated subquotients of free groups.

---

*Roman Mikhailov, "Homotopy patterns in group theory",  
ICM 2022 talk [Mik21]*

We assume some familiarity of the reader with the simplicial homotopy theory. However, in the main body of the paper, we recall all the basic concepts.

Simplicial groups are of great interest because they model loop spaces. There is a standard construction  $\Omega: \mathbf{sSet}_* \rightarrow \mathbf{sGrp}$  of the *simplicial loop space* such that  $|\Omega X|$  is homotopy equivalent to  $\Omega|X|$ . This functor admits a right adjoint, the simplicial classifying space. This adjunction is a Quillen adjunction for the standard model structure on pointed simplicial sets and its transferred model structure on simplicial groups. It becomes a Quillen equivalence after restricting to reduced simplicial sets. That is, simplicial groups are models for  $\mathcal{A}_\infty$ -grouplike algebras.

Recall that a simplicial group  $G$  is a Kan complex, and its homotopy groups can be computed as the homology of the associated Moore complex  $NG$  given by

$$(NG)_n := \bigcap_{i=1}^n (d_i: G_n \rightarrow G_{n-1})$$

with differential  $\partial_n := d_0|_{(NG)_n}$ .

For every pointed simplicial set  $X$ , there is Milnor's free group construction  $F[X]$  whose geometric realization is homotopy equivalent to  $\Omega\Sigma|X|$ . In particular,  $F[S^1]$  is a simplicial group such that  $F[S^1]_n$  is the free group of rank  $n$  and  $|F[S^1]| \simeq \Omega S^2$ . This gives great scope for extracting new combinatorial formulas for the homotopy groups of the 2-sphere. A general pattern is to find a simplicial group  $G$  whose loop space is a Milnor's construction  $F[S^1]$  (at least starting from some degree), and conclude that  $\pi_k(G) \cong \pi_k(S^2)$  for  $k$  from a suitable range.

There are many interesting connections between the braid groups and the homotopy groups of the spheres, see [CW08] for a general exposition. We briefly retell some part of the story.

Denote by  $\mathcal{P}_n(M)$  the pure braid group with  $n$  strands on the surface  $M$  (when  $M$  is a regular disk we denote the pure braid group simply as  $\mathcal{P}_n$ ). In [CW04, CW10], authors constructed a contractible simplicial group  $AP$ . such that  $AP_n = \mathcal{P}_{n+1}$  with faces and degeneracies given by string delitions and string doublings. They proved that the simplicial map  $F[S^1] \rightarrow AP$ . is a monomorphism. Hence, there is a fibration sequence

$$F[S^1] \hookrightarrow AP. \twoheadrightarrow \frac{AP.}{F[S^1]},$$

which is equivalent to the path fibration over  $AP./F[S^1]$ . Therefore, one has  $\Omega(AP./F[S^1]) \cong F[S^1]$  is homotopy equivalent to  $\Omega S^2$ .

A braid is said to be *Brunnian* if it becomes a trivial braid after any one of its strands is removed. Denote by  $Brun_n(M)$  the group of all Brunnian braids with  $n$  strands on the surface  $M$ . In the iconic article [BC+06], Berrick, Cohen, Wong and Wu introduced a  $\Delta$ -group  $AP(S^2) = \{\mathcal{P}_{n+1}(S^2)\}_{n \geq 0}$  on the sequence of shifted pure spherical braid groups

(faces are string delitions; doublings are not well-defined for the same reason that there is no nondegenerate vector field on the sphere; there is no canonical way to determine a direction to spawn a new strand). They proved that the  $\Delta$ -group of Moore loops  $\Omega\text{AP}(S^2)$  coincides with  $F[S^1]$  for  $n \geq 4$  (the fact that  $\pi_k(\Omega\text{AP}(S^2)) = \pi_{k+1}(\text{AP}(S^2))$  is not automatic in semi-simplicial setting, but is indeed true in this case). Moreover, they have deciphered what the cycles and boundaries of the Moore complex look like and obtained an especially nice-looking formula saying that

$$\pi_n(S^2) \cong \text{coker}(\text{Brun}_{n+1}(D^2) \rightarrow \text{Brun}_{n+1}(S^2)), \quad n \geq 4.$$

In the same paper, they proposed another  $\Delta$ -group  $\mathbb{P}$  (denoted with letter  $\Gamma$  in the original paper) built on the sequence of non-shifted pure braid groups  $\{\mathcal{P}_n\}_{n \geq 0}$ . Its Moore complex  $N\mathbb{P}$  is built on the sequence of classical Brunnian braid groups:

$$\dots \rightarrow \text{Brun}_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} \text{Brun}_n \xrightarrow{\partial_n} \text{Brun}_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \dots \xrightarrow{\partial_3} \text{Brun}_2 \xrightarrow{\partial_2} \text{Brun}_1 \xrightarrow{\partial_1} 1. \quad (1.1)$$

They proved that the  $\Delta$ -group of Moore loops  $\Omega\mathbb{P}$  coincides with  $F[S^1]$  in all dimensions, which implies that there is an isomorphism

$$H_n(\text{Brun}, \partial) = Z_n / \text{Bd}_n \cong \pi_n(S^2)$$

for any  $n \geq 1$  where  $Z_n = \text{Ker}(\partial_n)$  and  $\text{Bd}_n = \text{Im}(\partial_{n+1})$ .

In our joint work [AIM21], we found that there is a small inaccuracy in the construction of  $\Delta$ -group  $\mathbb{P}$  that yields a failure of the simplicial identity  $d_0^{\mathbb{P}} \circ d_0^{\mathbb{P}} = d_0^{\mathbb{P}} \circ d_1^{\mathbb{P}}$ , so technically it is not an actual  $\Delta$ -group. However, we showed that this does not affect the validity of the key isomorphism  $H_n(\text{Brun}, \partial) \cong \pi_n(S^2)$ , see [AIM21, Section 6].

In this paper, we intend to explain why this inequality arises, how to correct it, and what benefits can be derived from this correction.

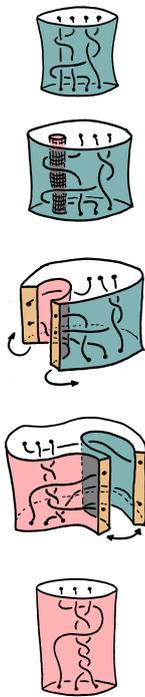


FIGURE 1. Description of  $\partial$ .

First, we are going to describe what structure maps  $d_i^{\mathbb{P}}$ 's are, and how Moore cycles and boundaries could be described geometrically. Let  $\underline{n}$  be a set  $\{1, 2, \dots, n\}$ . Given  $k \in \underline{n}$ , denote by  $d_k: \mathcal{P}_n \rightarrow \mathcal{P}_{n-1}$  the removing of the  $k$ th strand homomorphism. There is an extra homomorphism  $\partial: \mathcal{P}_n \rightarrow \mathcal{P}_{n-1}$  which maps a pure braid  $\beta \in \mathcal{P}_n$  to a pure braid  $\partial(\beta) \in \mathcal{P}_{n-1}$  constructed by the following geometric procedure:

- (1) choose a geometric representative of the braid  $\beta$  with the first strand straightened;
- (2) blow-up the first strand into a hollow tube of non-zero thickness;
- (3) make a vertical cut through the ambient cylinder to the tube, resulting in a cut, which in the horizontal section looks like a keyhole contour ;
- (4) perform eversion of the cylinder by continuously changing the inner surface of the tube and the outer wall, resulting in an everted keyhole contour ;
- (5) gently join the two sides of the cut to each other so that the ends of the strands match, then glue the blue tube.

The structure maps in  $\mathbb{P}$  are defined as  $d_i^{\mathbb{P}} := d_i$  for  $i > 0$  and  $d_0^{\mathbb{P}} := \partial$ .

Let  $\mathcal{H}_n$  be the kernel of the natural homomorphism  $\mathcal{P}_n \rightarrow \mathcal{P}_n(S^2)$ . That is,  $\mathcal{H}_n$  is a subgroup of  $\mathcal{P}_n$  consisting of the braids that become trivial when transplanted onto a 2-sphere from a disk. Carefully analyzing the kernel of  $\partial$  and using the results from [LW09], we can come up with a more geometric description of cycles and boundaries of (1.1): the group of  $n$ -cycles  $Z_n$  coincides with the intersection  $\text{Brun}_n \cap \mathcal{H}_n$ , and the group of  $n$ -boundaries  $\text{Bd}_n$  coincides with the commutator  $[\text{Brun}_n, \mathcal{H}_n]$ . This leads to the following description of the homologies of this complex.

**Proposition 1.1.** *For every  $n \geq 1$  there is isomorphism*

$$\pi_n(S^2) \cong \frac{\text{Brun}_n \cap \mathcal{H}_n}{[\text{Brun}_n, \mathcal{H}_n]}.$$

Our key observation stems from the fact that when restricted to commutator subgroups  $[\mathcal{P}_n, \mathcal{P}_n] \subset \mathbb{P}_n$ , all simplicial identities become valid, and (surprisingly) we can even enhance this sequence with degeneracies, such that the resulting data becomes a simplicial group, which we call  $[\mathbb{P}, \mathbb{P}]$ . The method for proving this result is to find an *almost strict* simplicial topological space  $X$  such that  $X^{\tau_1} = [\mathbb{P}, \mathbb{P}]$ . It turns out that it may be easier to check simplicial identities for explicitly defined geometric mappings than for homomorphisms of groups defined on the generating set. *Almost strictness* here means that simplicial identities hold not globally but rather when restricting to some appropriate deformation retracts. We construct such a space  $X$  using some variations of compactifications of configuration spaces of Fulton-MacPherson-Kontsevich type.

Note that the Moore complex is nearly unchanged after passing to the commutator, since  $\text{Brun}_n \subset [\mathcal{P}_n, \mathcal{P}_n]$  for  $n \geq 3$ . Actually, the difference between  $N[\mathbb{P}, \mathbb{P}]$  and  $N\mathbb{P}$  is very subtle: since  $\mathbb{P}_2 \cong \mathbf{Z}$  is abelian, its commutator subgroup is trivial, while all braids on two strands are Brunnian by the very definition. Hence,  $N[\mathbb{P}, \mathbb{P}]$  is just the brutal truncation  $\tau_{\geq 3}N\mathbb{P}$ . Now we can see that homotopy groups of  $[\mathbb{P}, \mathbb{P}]$  coincide with the homotopy groups of the 3-sphere, not the 2-sphere as for  $\mathbb{P}$ . This is not a coincidence: we can recognise that the Moore loops of  $[\mathbb{P}, \mathbb{P}]$  coincide with the commutator subgroup  $F[S^1]'$  of Milnor's free group construction, which in turn models the loop space of the 3-sphere. (Note that we write  $F[S^1]'$  for the commutator subgroup to avoid mess with square brackets.)

**Lemma 1.2.** *The short exact sequence for abelianization of simplicial groups*

$$F[S^1]' \hookrightarrow F[S^1] \twoheadrightarrow F[S^1]^{\text{ab}}$$

*is equivalent after geometric realization to the fibration sequence*

$$\Omega S^3 \rightarrow \Omega S^2 \rightarrow S^1,$$

*obtained from Hopf fibration  $S^1 \rightarrow S^3 \rightarrow S^2$  by Puppe sequence.*

**Theorem 1.3.** *The loop space of the simplicial group  $[\mathbb{P}, \mathbb{P}]$  is isomorphic to  $F[S^1]'$  as a simplicial group.*

It is kind of an interesting situation. The 3-sphere  $S^3$  is a Lie group, thus it admits naturally a structure of grouplike  $\mathcal{A}_\infty$ -algebra, hence could be potentially modelled by a simplicial group. We prove the following theorem.

**Theorem 1.4.** *The geometric realization  $||[\mathbb{P}, \mathbb{P}]||$  is homotopy equivalent to  $S^3$ .*

This provides the most economical model for  $S^3$  through a simplicial group that we know.

In [LW09], Li and Wu construct an automorphism  $\theta_n$  of  $\mathcal{P}_n$ , which maps Brunnian braids to non-Brunnian ones but preserves  $Z_n$ . At the same time, their results imply that the reflection automorphism  $\chi_n$  of  $\mathcal{P}_n$  preserves both  $Z_n$  and  $\text{Bd}_n$  and induces the identity

automorphism of  $Z_n/\text{Bd}_n$ . Inspired by these facts, in joint work [AIM21], we establish the following result.

**Theorem 1.5.** *For any  $n \geq 3$ , both  $Z_n$  and  $\text{Bd}_n$  are characteristic subgroups of  $\mathcal{P}_n$ , hence all automorphisms of  $\mathcal{P}_n$  induce automorphisms of  $\pi_n(S^3)$ .*

Given  $n \geq 3$ , we denote by  $r_n: \text{Aut}(\mathcal{P}_n) \rightarrow \text{Aut}(\pi_n(S^3))$  the resulting homomorphism of the automorphism groups. For  $n = 3$ , the group  $Z_3/\text{Bd}_3 \cong \pi_3(S^3)$  is infinite cyclic, generated by the image of the standard braid whose closure is the Borromean rings. In this case, we computed the action of  $\text{Aut}(\mathcal{P}_3)$  explicitly and established that  $r_3$  is non-trivial, and  $\text{Im}(r_3) = \{-\text{id}, \text{id}\}$ .

Since  $\pi_4(S^3) \cong \pi_5(S^3) \cong \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ , the homomorphisms  $r_4$  and  $r_5$  are trivial. In general, we conjectured that  $\text{Im}(r_n) = \{-\text{id}, \text{id}\}$  for any  $n \geq 3$ .

In this work, we affirmatively answer this conjecture by fully calculating the constructed action. The center is always characteristic subgroup, hence every automorphism of  $\mathcal{P}_n$  could be descended on  $\overline{\mathcal{P}}_n := \mathcal{P}_n/Z(\mathcal{P}_n)$ . There is a well-known isomorphism  $\text{Aut}(\overline{\mathcal{P}}_n) \cong \text{Mod}(S^2, n+1)$  for  $n \geq 4$ , where  $\text{Mod}(S^2, n+1)$  is the extended mapping class group of the 2-sphere with  $n+1$  punctures. This fact was originally established by Korkmaz, for the general exposition see [Co12]. We prove the following theorem.

**Theorem 1.6.** *For every  $n \geq 4$  the following diagram commutes:*

$$\begin{array}{ccccc}
 \text{Aut}(\mathcal{P}_n) & \xrightarrow{r_n} & & & \text{Aut}(\pi_n(S^3)) \\
 \downarrow & & & & \uparrow \\
 \text{Aut}(\overline{\mathcal{P}}_n) & & & & \\
 \parallel & & & & \\
 \text{Mod}(S^2, n+1) & \xrightarrow{\text{perm}} & \Sigma_{n+1} & \xrightarrow{\text{sign}} & \mathbf{Z}/2.
 \end{array}$$

In the proof of this theorem, we construct the structure of *braided simplicial group* (the concept from [Wu02]) on a simplicial group  $[\mathbb{P}, \mathbb{P}]$  and refer to some consequence of the Homotopy Addition Theorem.

Along the way, we are re-proving Theorem 1.5 from scratch. Note that in the original paper, invariance of these subgroups were shown by directed calculations, whereas now it is just another gift from the machinery of braided simplicial groups.

The article organized as follows. In Section 2, we recall some concepts from braid theory. In Section 3, we prove some useful formulas that would be useful to keep in mind. In Section 4, we recall some simplicial homotopy theory, compute the homotopy type of commutator  $F[S^n]'$ . In Section 5, we present a simplicial group  $[\mathbb{P}, \mathbb{P}]$ , compute homotopy type of  $\Omega[\mathbb{P}, \mathbb{P}]$ . In Section 6, we provide a method for constructing simplicial spaces, and build a simplicial space  $X$  such that  $X^{\pi_1} = [\mathbb{P}, \mathbb{P}]$ . In Section 7, we completely compute the action  $\text{Aut}(\mathcal{P}_n) \curvearrowright \pi_n(S^3)$  from [AIM21]. In Appendix A, we provide explicit formulas for faces and degeneracies of  $[\mathbb{P}, \mathbb{P}]$ . In Appendix B, we analyse different kinds of compactifications of configuration spaces.

The author would like to thank Ilya Alexeev for helpful discussions, and to thank Alexey Yu. Miller for drawing the amazing pictures for us.

## 2. PRELIMINARIES

We refer to [GJP15] for standard notions of braid theory.

Denote by  $\mathcal{B}_n$  the braid group with  $n$  strands, by  $\Sigma_n$  the symmetric group of degree  $n$ , and by  $\pi_\beta \in \Sigma_n$  the permutation that a braid  $\beta \in \mathcal{B}_n$  induces on its strands. The assignment  $\beta \mapsto \pi_\beta$  determines a homomorphism from  $\mathcal{B}_n$  to  $\Sigma_n$ , whose kernel is the pure braid group  $\mathcal{P}_n$ . Recall that

$$\mathcal{B}_n \cong \langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \mid \sigma_k \sigma_{k+1} \sigma_k = \sigma_{k+1} \sigma_k \sigma_{k+1}, 1 \leq k < n - 1; \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i, |i - j| \geq 2 \rangle$$

and that the set  $\{A_{i,j} \mid 1 \leq i < j \leq n\}$  generates the group  $\mathcal{P}_n$ , where

$$A_{i,j} := \sigma_{j-1} \sigma_{j-2} \dots \sigma_{i+1} \sigma_i^2 \sigma_{i+1}^{-1} \dots \sigma_{j-2}^{-1} \sigma_{j-1}^{-1}.$$

We picture these braids as in Figure 2, where rectangular boxes with small round holes stand for trivial braids.

Recall that the abelianization  $\mathcal{P}_n / [\mathcal{P}_n, \mathcal{P}_n]$  is free abelian of rank  $n(n - 1)/2$ , generated by the images of  $A_{i,j}$  (see [GJP15, Theorem 11]). Roughly speaking, the abelianization homomorphism  $\mathcal{P}_n \rightarrow \mathcal{P}_n / [\mathcal{P}_n, \mathcal{P}_n]$  assigns to a pure braid, given by a word in the alphabet  $\{A_{i,j}^{\pm 1} \mid 1 \leq i < j \leq n\}$ , the tuple of exponent sums of the letters  $A_{i,j}$ .

**2.1. Brunnian braid groups.** Given  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ , denote by  $d_k: \mathcal{P}_n \rightarrow \mathcal{P}_{n-1}$  the removing of the  $k$ th strand homomorphism. By definition,

$$\text{Brun}_n = \bigcap_{k=1}^n \text{Ker}(d_k).$$

It is easy to see that

$$\text{Ker}(d_k) = \langle A_{1,k}, A_{2,k}, \dots, A_{k-1,k}, A_{k,k+1}, \dots, A_{k,n} \rangle. \tag{2.1}$$

In particular, for each braid  $\beta \in \text{Brun}_n$  and for each letter  $A_{i,j}$ , the braid  $\beta$  can be presented as a word in the alphabet  $\{A_{s,t}^{\pm 1} \mid 1 \leq s < t \leq n\} \setminus \{A_{i,j}^{\pm 1}\}$ , thus the exponent sum of  $A_{i,j}$  in this presentation is zero. Therefore,

$$\text{Brun}_n \subseteq [\mathcal{P}_n, \mathcal{P}_n]. \tag{2.2}$$

Given  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ , let

$$A_{0,j} := A_{j,n}^{-1} A_{j,n-1}^{-1} \dots A_{j,j+1}^{-1} A_{j-1,j}^{-1} A_{j-2,j}^{-1} \dots A_{1,j}^{-1}.$$

As shown in Figure 2, in the braid  $A_{0,j}$ , the  $j$ th strand is wrapped around all the others. Note that  $A_{0,j}$  is denoted by  $A_{-1,j-1}$  in [BC<sup>+</sup>06]. Given indices  $i, j \in \{0, 1, \dots, n\}$  such that  $i < j$ , let  $A_{j,i} := A_{i,j}$  and let  $A_{i,i} = \mathbf{1}$  be the trivial braid. In these notations,

$$A_{0,j} = (A_{1,j} A_{2,j} \dots A_{n,j})^{-1}.$$

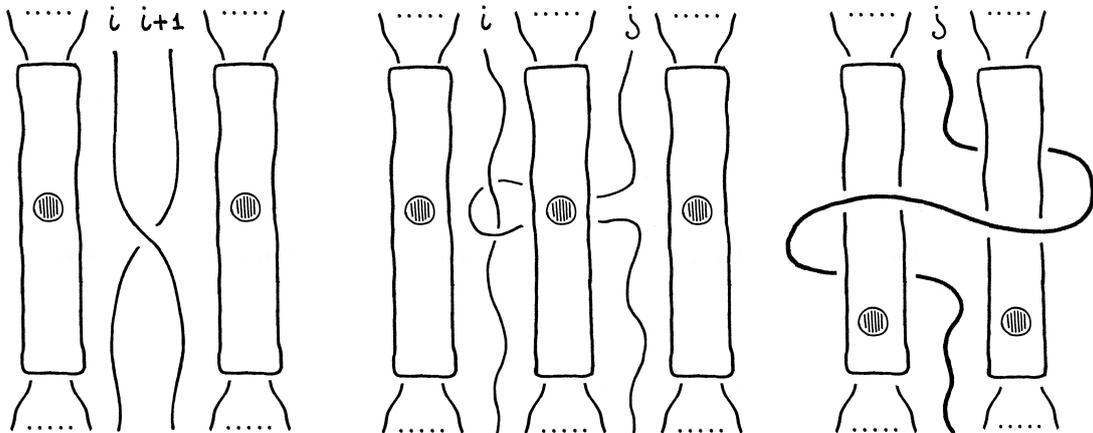


FIGURE 2. The pictures of geometric braids  $\sigma_i$ ,  $A_{i,j}$ , and  $A_{0,j}$ .<sup>1</sup>

Let  $\theta_n: \mathcal{P}_n \rightarrow \mathcal{P}_n$  be the automorphism given by

$$\theta_n(A_{i,j}) := \begin{cases} A_{i,j}, & 2 \leq i < j \leq n; \\ A_{1,j}^{-1} A_{0,j} A_{1,j}, & 1 = i < j \leq n. \end{cases} \tag{2.3}$$

The geometric interpretation of  $\theta_n$  is given in [LW09, p. 522].

Define  $\partial_n: \mathcal{P}_n \rightarrow \mathcal{P}_{n-1}$  by  $\partial_n := d_1 \circ \theta_n$ . In (1.1), we denote the restriction of the homomorphism  $\partial_n$  to  $\text{Brun}_n$  by the same symbol. Let  $Z_n := \text{Brun}_n \cap \text{Ker}(\partial_n)$  and let  $\text{Bd}_n := \partial_{n+1}(\text{Brun}_{n+1})$ .

The following result is a key element in the connection between brunnian braids and homotopy groups of the two-sphere.

**Lemma 2.1.** *The group  $\text{Bd}_n$  is a normal subgroup of  $Z_n$ , and*

$$H_n(\text{Brun}, \partial) := Z_n / \text{Bd}_n \cong \pi_n(S^2).$$

**2.2. Automorphisms of pure braid groups.** Recall that the center  $Z(\mathcal{P}_n)$  of  $\mathcal{P}_n$  is infinite cyclic (see, e.g., [GJP15, Theorem 15]), generated by the full twist braid

$$z_n := A_{1,2}(A_{1,3}A_{2,3}) \dots (A_{1,n}A_{2,n} \dots A_{n-1,n}).$$

An automorphism  $f: \mathcal{P}_n \rightarrow \mathcal{P}_n$  is said to be *central* if  $f$  induces the identity automorphism of the quotient group  $\mathcal{P}_n / Z(\mathcal{P}_n)$ . In this case, for any element  $x \in \mathcal{P}_n$  there exists  $m \in \mathbb{Z}$  such that  $f(x) = xz_n^m$ . Denote by  $\text{Aut}_c(\mathcal{P}_n)$  the subgroup of all central automorphisms of  $\mathcal{P}_n$ .

Following [BNS18], we denote by  $w_n: \mathcal{P}_n \rightarrow \mathcal{P}_n$  the automorphism given by

$$w_n(A_{i,j}) := \begin{cases} A_{i,j}, & 1 \leq i < j < n; \\ (A_{1,n}A_{1,2}A_{1,3} \dots A_{1,n-1})^{-1}, & (i,j) = (1,n); \\ (A_{2,n}A_{1,2}A_{2,3} \dots A_{2,n-1})^{-1}, & (i,j) = (2,n); \\ (A_{i,n}A_{1,i} \dots A_{i-1,i}A_{i,i+1} \dots A_{i,n-1})^{-1}, & 3 \leq i < j = n. \end{cases}$$

It is easy to check that

$$w_n(A_{i,j}) = \begin{cases} A_{i,j}, & 1 \leq i < j < n; \\ A_{i,n}A_{0,i}A_{i,n}^{-1}, & 1 \leq i < j = n. \end{cases}$$

The geometric interpretation of  $w_n$  in terms of the mapping class group of the punctured sphere is given in [BNS18, p. 5].

Let  $\chi_n$  be the reflection automorphism of  $\mathcal{P}_n$ . We denote by  $\text{Aut}(\mathcal{B}_n)$  the subgroup of  $\text{Aut}(\mathcal{P}_n)$  generated by  $\chi_n$  and the conjugations by all elements of  $\mathcal{B}_n$ .

In [BNS18], Bardakov, Neshchadim, and Singh show that the group  $\text{Aut}(\mathcal{P}_n)$  is generated by the union

$$\text{Aut}(\mathcal{B}_n) \cup \text{Aut}_c(\mathcal{P}_n) \cup \{w_n\}. \tag{2.4}$$

**2.3. Action of braids on the pure braid group by conjugation.** Let us examine how the conjugation by braids looks like (see [DG81] and [Co12]).

---

<sup>1</sup>We depict braid block composed of the straight strands with the symbol  $\textcircled{\bullet}$ .

For all  $i \in \underline{n-1}$  and  $s, k \in \underline{n-1}$  such that  $s < k$  we have

$$\Psi_{\sigma_i}(A_{s,k}) = \begin{cases} A_{i,k}, & i+1 = s < k, \\ A_{i+1,k}^{A_{i,i+1}}, & i = s < k-1, \\ A_{s,i}, & s < k-1 = i, \\ A_{s,i+1}^{A_{i,i+1}}, & k = i, \\ A_{s,k}, & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{2.5}$$

Also, for all  $i \in \underline{n-1}$  and  $s, k \in \underline{n-1}$  such that  $s < k$  we have

$$\Psi_{\sigma_i^{-1}}(A_{s,k}) = \begin{cases} A_{s-1,k}^{A_{s-1,s}} A_{s-1,k}, & i+1 = s < k, \\ A_{s+1,k}, & i = s < k-1, \\ A_{k-1,k}^{A_{s,k-1}} A_{s,k-1}, & s < k-1 = i, \\ A_{s,k+1}, & s < k = i, \\ A_{s,k}, & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{2.6}$$

In [LW09], the authors provide us with another useful formula, which covers the case  $s = 0$  as well. Let  $i \in \underline{n-1}$  and  $s, k \in \underline{n-1}$  such that  $s < k$ . Then

$$\Psi_{\sigma_i^{-1}}(A_{s,k}) = \begin{cases} A_{s-1,k}^{A_{s,k}}, & i+1 = s < k, \\ A_{s+1,k}, & i = s < k-1, \\ A_{s,k-1}^{A_{s,k}}, & s < k-1 = i, \\ A_{s,k+1}, & s < k = i, \\ A_{s,k}, & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{2.7}$$

In particular, we have

$$\Psi_{\sigma_i^{-1}}(A_{0,k}) = \begin{cases} A_{0,k}^{-1} A_{0,k-1} A_{0,k}, & i = k-1; \\ A_{0,k+1}, & i = k; \\ A_{0,k}, & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{2.8}$$

### 3. ELABORATIONS ON BRAID FORMALISM

In this chapter, we will make some computations to obtain useful formulas.

**3.1. Expression for the central braid via  $A_{0,k}$ .** First, let's make an observation.

**Observation 3.1.** *The image of the braid  $z_n^m$  under the abelianization homomorphism of  $\mathcal{P}_n$  is*

$$A_{1,2}^m (A_{1,3}^m A_{2,3}^m) \dots (A_{1,n}^m A_{2,n}^m \dots A_{n-1,n}^m).$$

Using this observation, we can deduce the following Lemma.

**Lemma 3.2.** *For any  $n \geq 1$  the following identity holds in  $\mathcal{P}_n$ :*

$$A_{0,1} A_{0,2} \dots A_{0,n} = z_n^{-2}.$$

*Proof.* If  $n = 1$  then there is nothing to prove. Now let  $n \geq 2$ .

Let  $\beta := A_{0,1} A_{0,2} \dots A_{0,n}$ . First, we claim that  $\beta$  commutes with all the generators  $\sigma_i$  of  $\mathcal{B}_n$ .

Note that  $\sigma_i$  commutes with  $\beta$  if and only if  $\Psi_{\sigma_i^{-1}}(\beta) = \beta$ . Let  $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ . Then

$$\begin{aligned} \Psi_{\sigma_i^{-1}}(\beta) &= \Psi_{\sigma_i^{-1}}(A_{0,1} \dots A_{0,i-1} \cdot A_{0,i} \cdot A_{0,i+1} \cdot A_{0,i+2} \dots A_{0,n}) \\ &\stackrel{(2.8)}{=} A_{0,1} \dots A_{0,i-1} \cdot A_{0,i+1} \cdot A_{0,i+1}^{-1} A_{0,i} A_{0,i+1} \cdot A_{0,i+2} \dots A_{0,n} = \beta. \end{aligned}$$

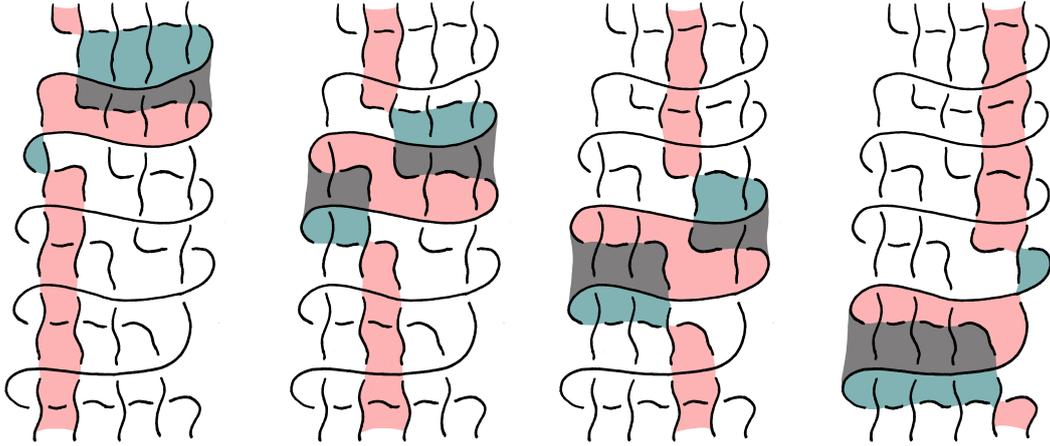


FIGURE 3. Any pair of two adjacent strands of  $A_{0,1}A_{0,2} \dots A_{0,n}$  bounds a ribbon.

Therefore, the claim is proved. Alternatively, we can see this fact pictorially: Figure 3 shows (for  $n = 5$ ) that each pair of two adjacent strands of  $\beta$  bounds a ribbon, and it suffices to push the additional crossing  $\sigma_i$  through the ribbon to establish the equality  $\sigma_i\beta = \beta\sigma_i$ .

Recall that the center of  $\mathcal{B}_n$  agrees with those of  $\mathcal{P}_n$  (see [GJP15, Theorem 15]). Thus there exists  $m \in \mathbf{Z}$  such that  $\beta = z_n^m$ . Note that the images of  $\beta$  and  $z_n^{-2}$  under the abelianization homomorphism are equal. Therefore,  $m = -2$ .  $\square$

3.2. **Automorphism  $\theta_n$ .** In this subsection, we make some computations related to the automorphism  $\theta_n$ .

**Proposition 3.3.** *We have*

$$\theta_n(A_{0,k}) = \begin{cases} A_{1,k}, & k \in \{2, 3, \dots, n\}, \\ A_{0,1}z_n^2, & k = 1. \end{cases}$$

*Proof.* If  $k \in \{2, 3, \dots, n\}$  then

$$\theta_n(A_{0,k}) = \theta_n \left( (A_{1,k}A_{2,k} \dots A_{n,k})^{-1} \right) = (A_{1,k}^{-1}A_{0,k}A_{1,k} \cdot A_{2,k} \dots A_{n,k})^{-1} = A_{1,k}. \quad (3.1)$$

Now we will compute the action of  $\theta_n$  on the center of  $\mathcal{P}_n$ .

Since any automorphism preserves the center of the group  $\mathcal{P}_n$ , there exists  $m \in \mathbf{Z}$  such that  $\theta_n(z_n) = z_n^m$ . We claim that  $m = -1$ .

We have

$$\theta_n(z_n) = \theta_n \left( \prod_{k=2}^n \prod_{s=1}^{k-1} A_{s,k} \right) = \prod_{k=2}^n A_{1,k}^{-1}A_{0,k}A_{1,k} \cdot \prod_{s=2}^{k-2} A_{s,k}.$$

Note that the image of  $\theta_n(z_n)$  and  $z_n^{-1}$  under the abelianization homomorphisms are equal. Thus, the claim follows.

Hence,

$$\theta_n(A_{0,1}) = \theta_n((A_{0,2} \dots A_{0,n})^{-1}z_n^{-2}) = (A_{1,2} \dots A_{1,n})^{-1}z_n^2 = A_{0,1}z_n^2.$$

Thus, the proposition is proved.  $\square$

Now we can see that the inverse of the automorphism  $\theta_n$  is even nicer.

**Corollary 3.4.** *For any  $s, k \in \underline{n}$  such that  $s < k$ , we have*

$$\theta_n^{-1}(A_{s,k}) = \begin{cases} A_{s,k}, & s \neq 1, \\ A_{0,k}, & s = 1. \end{cases} \quad (3.2)$$

□

#### 4. SIMPLICIAL METHODS AND HOMOTOPY GROUPS OF SPHERES

**4.1. Simplicial homotopy theory.** We refer to [Cur97] for standard notions of simplicial homotopy theory.

Consider the full subcategory  $\Delta$  of the category of linear orders, spanned by the sets of the form  $[n] := \{0, 1, \dots, n\}$ , equipped with the standard ordering, where  $n \geq 0$ . The class of morphisms of  $\Delta$  is generated by *cofaces*  $d^0, d^1, \dots, d^n: [n-1] \rightarrow [n]$  and *codegeneracies*  $s^0, s^1, \dots, s^n: [n+1] \rightarrow [n]$ , given by the following formulas:

$$d^i(j) = \begin{cases} j, & 0 \leq j < i, \\ j+1, & i \leq j < n, \end{cases}$$

$$s^i(j) = \begin{cases} j, & 0 \leq j \leq i, \\ j-1, & i < j \leq n+1. \end{cases}$$

A *simplicial object*  $X$  in a category  $\mathcal{C}$  is a contravariant functor from the category  $\Delta$  to  $\mathcal{C}$ . We can decode information from  $X$  as follows. There is a sequence  $\{X_n\}_{n \geq 0}$ , where  $X_n := X([n])$ ; there are *face maps*  $d_0^X, d_1^X, \dots, d_n^X: X_n \rightarrow X_{n-1}$  for every  $n \geq 1$  given by  $d_i^X := X(d^i)$ ; there are *degeneracy maps*  $s_0^X, s_1^X, \dots, s_n^X: X_n \rightarrow X_{n+1}$  for every  $n \geq 0$  given by  $s_i^X := X(s^i)$ . The *simplicial identities*

$$d_i^X \circ d_{j+1}^X = d_j \circ d_i^X, i \leq j;$$

$$s_i^X \circ s_j^X = s_{j+1}^X \circ s_i^X, i \leq j;$$

$$d_i^X \circ s_j^X = \begin{cases} s_{j-1}^X \circ d_i^X, & i < j, \\ \text{id}, & i = j, j+1, \\ s_j^X \circ d_{i-1}^X, & i > j+1, \end{cases}$$

follows from the corresponding formulas for  $d^i$  and  $s^i$  in the category  $\Delta$ . It is well known that the data  $(\{X_n\}_{n \geq 0}, d^X, s^X)$  satisfying simplicial identities, uniquely corresponds to simplicial object in  $\mathcal{C}$ .

When we have some data with signature  $(\{X_n\}_{n \geq 0}, d^X, s^X)$ , and we don't know status of simplicial identities, we say that this data constitutes a *simplicial bunch*.

Simplicial objects in the category of sets, groups or spaces are called *simplicial sets*, *simplicial groups* or *simplicial spaces* respectively.

There is a standard combinatorial Quillen model structure on  $\text{sSet} := \text{Func}(\Delta^{\text{op}}, \text{Set})$ , and geometric realization  $|-|: \text{sSet} \rightarrow \text{Spc}$  is a Quillen equivalence, with Quillen-Serre model structure on spaces. In  $\text{sSet}$  all objects are cofibrant, and fibrant objects are precisely *Kan complexes*.

**Example 4.1.** For every  $n \geq 0$  there are a standard  $n$ -simplex

$$\Delta[n] := \text{Hom}_{\text{sSet}}(-, [n])$$

and a simplicial  $n$ -sphere

$$S^n := \Delta[n] / \partial \Delta[n],$$

where  $\partial\Delta[n]$  is a simplicial subset of  $\Delta[n]$  generated by all the faces (i.e. the images of the injections  $\Delta[n-1] \hookrightarrow \Delta[n]$  induced by the projections  $(d^i: [n] \rightarrow [n-1]) \in \Delta$ ).

For a pointed simplicial set  $X \in \mathbf{sSet}_*$  one could define its homotopy groups via geometric realization as  $\pi_n(X) := \pi_n(|X|)$ . If  $X$  happen to be Kan complex, then this definition coincides with the internal one  $\pi_n(X) \cong \pi_0 \text{map}_*(S^n, X)$ , where  $S^n$  is the simplicial  $n$ -sphere and  $\text{map}_*(-, -)$  is the simplicial mapping space whose  $k$ -simplices are  $\text{map}_*(A, B)_k := \text{Hom}_{\mathbf{sSet}_*}(A \times \Delta[k], B)$ .

Let  $G$  be a simplicial group. Then  $G$  is a Kan complex. The (normalized) Moore complex of  $G$  is the  $\mathbf{Z}_+$ -graded chain complex  $NG$  of (possibly nonabelian) groups

$$(NG)_n := \bigcap_{i=1}^n \ker(d_i^G: G_n \rightarrow G_{n-1})$$

with differential given by the remaining 0-face map  $\partial_n^G := d_0^G|_{(NG)_n}$ . For  $n \geq 0$  let  $(\mathcal{Z}G)_n$  and  $(\mathcal{B}G)_n$  be the groups of  $n$ -cycles and  $n$ -boundaries of  $(NG, \partial)$  respectively. It is known that

$$\pi_n(G) \cong H_n(NG) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{(\mathcal{Z}G)_n}{(\mathcal{B}G)_n}.$$

Let  $\Delta_+$  be the subcategory of  $\Delta$  with the same class of objects and the morphisms in  $\Delta_+$  are the morphisms of  $\Delta$  which are injective as functions. The presheaves on  $\Delta_+$  are called *semi-simplicial objects* or  *$\Delta$ -objects*. Such a functor corresponds to a sequence  $\{X_n\}_{n \geq 0}$  with only faces  $d_i^X$ . If there is a  $\Delta$ -group  $G$ , one can still compute its ‘homotopy groups’ by the same formula using Moore complex.

A *semi-simplicial bunch* is defined in the same manner as simplicial one.

**4.2. Milnor’s free group construction and its commutator subgroup.** Consider a functor  $F[-]: \mathbf{Set}_* \rightarrow \mathbf{Grp}$  which sends  $(X, *)$  to the group generated by elements of  $X$  subject to the single relation  $* = 1$ . For pointed simplicial set  $X \in \mathbf{Func}(\Delta^{\text{op}}, \mathbf{Set}_*)$  a Milnor’s free group construction  $F[X]$  is a simplicial group, which is defined by post-composing  $X$  with  $F[-]$ . Milnor proved that for any reduced simplicial set  $X$  a Milnor’s construction  $F[X]$  is homotopy equivalent to  $\Omega\Sigma|X|$ . For instance,  $F[S^n]$  models  $\Omega S^{n+1}$ .

**Lemma 4.2.** *The commutator subgroup  $F[S^n]'$  of Milnor’s free group construction models the loop space of the  $(n + 1)$ th stage of Whitehead tower for the  $(n + 1)$ -sphere.*

*Proof.* Recall that morphisms of simplicial groups are Kan fibrations. Hence, there is a fibration sequece

$$F[S^n]' \hookrightarrow F[S^n] \twoheadrightarrow F[S^n]^{\text{ab}}.$$

Note that the abelianization of  $F[S^n]$  is a model for Eilenberg-MacLane space  $K(\mathbf{Z}, n)$ . Hence, this fibration sequence after geometric realization is equivalent to the sequence

$$|F[S^n]'| \rightarrow \Omega S^{n+1} \rightarrow K(\mathbf{Z}, n).$$

We claim that  $\Omega S^{n+1} \rightarrow K(\mathbf{Z}, n)$  is obtained by applying the loop space functor to the natural map  $S^{n+1} \rightarrow K(\mathbf{Z}, n + 1)$ . It is enough to show that the abelianization map  $F[S^n] \twoheadrightarrow F[S^n]^{\text{ab}}$  induces isomorphism on  $\pi_n$ . The simplicial  $n$ -sphere has a unique non-degenerate 0-simplex, and a unique non-degenerate  $n$ -simplex  $x$ . Hence,  $F[S^n]_{n+1}$  is a free group of rank  $n + 1$  generated by  $n + 1$  degeneracies of  $x$ :

$$\begin{array}{ccccc} F[S^n]_{n-1} & \xleftarrow{d_0} \cdots \xleftarrow{d_n} & F[S^n]_n & \xleftarrow{d_0} \cdots \xleftarrow{d_{n+1}} & F[S^n]_{n+1} \\ \parallel & & \parallel & & \parallel \\ 1 & & \mathbf{Z} & & F(x_0, x_1, \dots, x_n). \end{array}$$

The face maps  $d_i: F(x_0, x_1, \dots, x_n) \rightarrow F(x) \cong \mathbf{Z}$  act on generators by the formula

$$d_i(x_j) = \begin{cases} 1, & j = i, i + 1; \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Hence,

$$\ker(d_j) = \{w \in F(x_0, \dots, x_n) \mid \exp_{j-1}(w) + \exp_j(w) = 0\},$$

and  $w \in N(F[S^n])_{n+1} = \bigcap_{i=1}^{n+1} \ker(d_i: F(x_0, \dots, x_n) \rightarrow \mathbf{Z})$  if and only if the following system of equations holds

$$\begin{aligned} \exp_0(w) + \exp_1(w) &= 0, \\ \exp_1(w) + \exp_2(w) &= 0, \\ &\dots \\ \exp_{n-1}(w) + \exp_n(w) &= 0, \\ \exp_n(w) &= 0, \end{aligned}$$

which is the case only if  $\exp_0(w) = \exp_1(w) = \dots = \exp_n(w) = 0$ , i.e. if  $w$  is in commutator subgroup  $[F(x_0, \dots, x_n), F(x_0, \dots, x_n)] = F[S^n]'_{n+1}$ . The induced morphism of Moore complexes  $N(F[S^1]) \rightarrow N(F[S^1]^{\text{ab}})$  in  $k = n - 1, n, n + 1$  looks like the following

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longleftarrow & 1 & \longleftarrow & \mathbf{Z} & \xleftarrow{0} & F[S^n]'_{n+1} & \longleftarrow & \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow \text{id} & & \downarrow & & \\ \dots & \longleftarrow & 0 & \longleftarrow & \mathbf{Z} & \longleftarrow & 0 & \longleftarrow & \dots \end{array}$$

which clearly induces isomorphism on  $H_1$ . The claim is proved.

Since the loop space functor preserves homotopy fibers, we have

$$|F[S^n]'| \simeq \Omega \text{hofib}(S^{n+1} \rightarrow K(\mathbf{Z}, n + 1)) = \Omega S^{n+1} \langle n + 1 \rangle.$$

□

**Corollary 4.3** (Lemma 1.2). *The short exact sequence for abelianization of simplicial groups*

$$F[S^1]' \hookrightarrow F[S^1] \twoheadrightarrow F[S^1]^{\text{ab}}$$

is equivalent after geometric realization to the fibration sequence

$$\Omega S^3 \rightarrow \Omega S^2 \rightarrow S^1,$$

obtained from Hopf fibration  $S^1 \rightarrow S^3 \rightarrow S^2$  by Puppe sequence.

*Proof.* Let  $\eta: S^3 \rightarrow S^2$  be a Hopf fibration. Note that the inclusion  $\Omega S^2 \hookrightarrow \text{hofib}(\eta) \simeq S^1$  is equivalent to  $\Omega(S^2 \rightarrow K(\mathbf{Z}, 2))$ , since  $S^1 = K(\mathbf{Z}, 1)$ , and both maps induce isomorphisms on  $\pi_1$ .

Therefore,  $S^2 \langle 2 \rangle \simeq S^3$ , and the result follows. □

**4.3. Standard (semi-)simplicial objects: AP and  $\mathbb{P}$ .** Denote by  $\mathcal{P}_n$  the pure braid group on  $n$  strands. Given a pure braid  $\beta$  on  $n$  strands we are particularly interested in two operations one could perform with it. For every index  $i \in \underline{n}$  there are braids  $d_i(\beta) \in \mathcal{P}_{n-1}$  and  $s_i(\beta) \in \mathcal{P}_{n+1}$  obtained from the braid  $\beta$  by removing and doubling the  $i$ th strand, respectively. Together these operations constitute into homomorphisms  $d_i: \mathcal{P}_n \rightarrow \mathcal{P}_{n-1}$  and  $s_i: \mathcal{P}_n \rightarrow \mathcal{P}_{n+1}$ . One could check that the sequence  $\{\mathcal{P}_{n+1}\}$  of shifted pure braid groups forms a simplicial group AP. with faces and degeneracies given by  $d_i^{\text{AP}} := d_{i+1}$  and  $s_i^{\text{AP}} := s_{i+1}$ . In [CW04, CW10], authors proved that this simplicial group is contractible, and proved that the unique map of simplicial groups  $F[S^1] \rightarrow \text{AP}$ , such that

the non-degenerate 1-simplex of  $S^1$  maps to the generator  $A_{1,2} \in AP_1 = \mathcal{P}_2 \cong \mathbf{Z}$ , is an embedding. From this one can deduce that  $\Omega(AP./F[S^1])$  is homotopy equivalent to the loop space of the two-sphere  $\Omega S^2$ . In fact, this yields a pretty nice formula describing  $\pi_n(S^2)$  in terms of some simple subquotient of  $\mathcal{P}_{n+1}$ .

There is a similar semi-simplicial bunch  $\mathbb{P}$  defined as follows. The  $n$ th component  $\mathbb{P}_n$  is just a pure braid group  $\mathcal{P}_n$ . The face maps  $d_0^{\mathbb{P}}, d_1^{\mathbb{P}}, \dots, d_n^{\mathbb{P}}: \mathbb{P}_n \rightarrow \mathbb{P}_{n-1}$  are just string deletions  $d_i^{\mathbb{P}} := d_i$  for  $i > 0$  and the extra face is  $d_0^{\mathbb{P}} := \partial_n \stackrel{\text{def}}{=} d_1 \circ \theta_n$ . It is known that  $\pi_n(\mathbb{P}) \cong \pi_n(S^2)$  for every  $n \geq 1$  (see Lemma 2.1).

However, we can see that this bunch does not constitute a  $\Delta$ -group, since one simplicial identity  $d_0^{\mathbb{P}} \circ d_1^{\mathbb{P}} = d_0^{\mathbb{P}} \circ d_0^{\mathbb{P}}$  does not hold:

$$(\partial_{n-1} \circ d_1)(A_{1,2}) = \partial_{n-1}(\mathbf{1}) = \mathbf{1} \neq z_{n-2}^2 = \partial_{n-1}(A_{0,1}) = (\partial_{n-1} \circ \partial_n)(A_{1,2}).$$

Luckily, the only problematic Markov generator is  $A_{1,2}$ , see Proposition A.4.

**4.4. Sphere-trivial braids and  $\ker(\partial)$ .** The one-point compactification  $\mathbb{C} \hookrightarrow \widehat{\mathbb{C}} = S^2$  induces the map on configuration spaces  $\text{Conf}(\mathbb{C}, n) \rightarrow \text{Conf}(S^2, n)$  for every  $n \geq 1$ . The induced homomorphism on  $\pi_1$  is the natural quotient  $\mathcal{P}_n \rightarrow \mathcal{P}_n(S^2)$ . Let  $\mathcal{H}_n := \ker(\varphi)$  be the subgroup of those pure braids that become trivial after allowing points in configurations to pass through the point at infinity.

**Lemma 4.4.** *Let  $n \geq 2$ . Then*

$$\mathcal{H}_n = \langle A_{0,1}, A_{0,2}, \dots, A_{0,n} \rangle, \tag{4.1}$$

and

$$\ker(\partial: \mathcal{P}_n \rightarrow \mathcal{P}_{n-1}) = \langle A_{0,2}, A_{0,3}, \dots, A_{0,n} \rangle. \tag{4.2}$$

*Proof.* Indeed, it is well-known that  $\mathcal{H}_n$  is the subgroup of  $\mathcal{B}_n$  normally generated by  $A_{0,1}$ , see the end of the fifth section in [FB62]. Clearly,  $\langle\langle A_{0,1} \rangle\rangle^{\mathcal{B}_n} = \langle A_{0,1}, \dots, A_{0,n} \rangle$  by looking at the equations (2.8).

The second part of this lemma is [AIM21, Lemma 4.5]. □

**Remark 4.5.** Note that the subgroup  $\ker(\partial)$  is free of rank  $n - 1$  (it is isomorphic image of  $\ker(d_1) \cong F_{n-1}$  under  $\theta_n^{-1} \in \text{Aut}(\mathcal{P}_n)$ ), but the group of sphere-trivial braids  $\mathcal{H}_n$  is not free, since it has nontrivial central element  $A_{0,1}A_{0,2} \dots A_{0,n} = z_n^{-2}$ .

The difference between  $\mathcal{H}_n$  and  $\ker(\partial)$  is the reason why the problematic simplicial identity  $d_0^{\mathbb{P}} \circ d_0^{\mathbb{P}} = d_0^{\mathbb{P}} \circ d_1^{\mathbb{P}}$  breaks: if we start from the braid from  $\ker(\partial)$ , then the left hand side of this identity clearly will return zero, while  $d_0^{\mathbb{P}}$  on the right hand side could produce  $d_1^{\mathbb{P}}(A_{0,2}) = A_{0,1} \in \mathcal{H}_{n-1} \setminus \ker(\partial)$ , and then outer  $d_0^{\mathbb{P}}$  will throw out  $\partial(A_{0,1}) = z_{n-2}^2 \neq 1$ .

**4.5. Proof of Proposition 1.1.** We aim to prove that for  $n \geq 1$  there are equalities  $Z_n = \text{Brun}_n \cap \mathcal{H}_n$  and  $\text{Bd}_n = [\text{Brun}_n, \mathcal{H}_n]$ .

Recall that  $Z_n = \ker(\partial_n) = \ker(d_0) \cap \text{Brun}_n$  and  $\text{Bd}_n = \text{Im}(\partial_{n+1}) = d_0(\text{Brun}_{n+1})$ .

Note that this proposition trivially holds for  $n = 1$ , since  $\mathcal{P}_1 = 1$ . Also it formally holds for  $n = 2$ . Indeed, if  $n = 2$  then  $\mathcal{H}_2 = \mathcal{P}_2 \cong \mathbf{Z}$ , since  $\mathcal{B}_2(S^2) \cong \mathbf{Z}/2$ , and we have

$$Z_2 = \text{Brun}_2 = \text{Brun}_2 \cap \mathcal{H}_2,$$

and

$$\text{Bd}_2 = \partial_3(\text{Brun}_3) = \partial_3([\mathcal{P}_3, \mathcal{P}_3]) \subset [\mathcal{P}_2, \mathcal{P}_2] = 1, [\text{Brun}_2, \mathcal{H}_2] \cong [\mathbf{Z}, \mathbf{Z}] = 1.$$

Let  $n \geq 3$ . First, we prove that  $Z_n = \text{Brun}_n \cap \mathcal{H}_n$ .

By (4.1) and (4.2), one has  $\mathcal{H}_n \supset \ker(d_0)$ . Hence,  $Z_n \subset \text{Brun}_n \cap \mathcal{H}_n$ . To prove the reverse inclusion, it is enough to show that  $\text{Brun}_n \cap \mathcal{H}_n \subset \ker(d_0)$ . Let  $\beta \in \text{Brun}_n \cap$

$\mathcal{H}_n$ . By (4.1),  $\beta$  can be represented as a word in the alphabet  $\{A_{0,1}^\pm, A_{0,2}^\pm, \dots, A_{0,n}^\pm\}$ . Since  $A_{0,1}A_{0,2}\dots A_{0,n} = z_n^{-2}$ , we can replace each occurrence of  $A_{0,1}^\pm$  in this word by some other word in the alphabet  $\{z_n^\pm, A_{0,2}^\pm, A_{0,3}^\pm, \dots, A_{0,n}^\pm\}$ . Since  $z_n$  lies in the center of  $\mathcal{P}_n$ , we can write

$$\beta = A_{0,k_1}^{\varepsilon_1} \dots A_{0,k_l}^{\varepsilon_l} z_n^m$$

for some  $l \geq 0, k_i \geq 2, \varepsilon_i \in \{\pm\}, m \in \mathbf{Z}$ . Now it is easy to see that  $m = \exp_{1,2}(\beta)$ , which is zero, since  $\beta \in \text{Brun}_n \subset [\mathcal{P}_n, \mathcal{P}_n]$ . Therefore,  $\beta \in \ker(d_0)$  by (4.2), and the reverse inclusion is proved.

Second, we prove that  $\text{Bd}_n = [\text{Brun}_n, \mathcal{H}_n]$ .

By [LW09, Corollary 3.13], one has  $\text{Bd}_n = [\text{Brun}_n, \ker(d_0)]$ . Since  $\ker(d_0) \subset \mathcal{H}_n$ , there is the inclusion  $\text{Bd}_n \subset [\text{Brun}_n, \mathcal{H}_n]$ . To prove the reverse inclusion, it suffice to prove that  $[\alpha, \beta] \in [\text{Brun}_n, \ker(d_0)]$  for every  $\alpha \in \text{Brun}_n$  and  $\beta \in \mathcal{H}_n$ . As before, we can write  $\beta = A_{0,k_1}^{\varepsilon_1} \dots A_{0,k_l}^{\varepsilon_l} z_n^m$  with  $k_i \geq 2$  and  $m \in \mathbf{Z}$ . Let  $\beta' = A_{0,k_1}^{\varepsilon_1} \dots A_{0,k_l}^{\varepsilon_l} \in \ker(d_0)$ . Then

$$[\alpha, \beta] = [\alpha, \beta' z_n^m] = [\alpha, \beta'] \in [\text{Brun}_n, \ker(d_0)].$$

□

### 5. NEW SIMPLICIAL GROUP ON COMMUTATOR SUBGROUPS OF PURE BRAID GROUPS

We have seen that  $\mathbb{P}$  is not exactly  $\Delta$ -group since the simplicial identity  $d_0^\mathbb{P} \circ d_0^\mathbb{P} = d_0^\mathbb{P} \circ d_1^\mathbb{P}$  is not satisfied. However, the only problematic Markov generator is  $A_{1,2}$ , and  $(d_0^\mathbb{P} \circ d_0^\mathbb{P})(A_{1,2})$  differs from  $(d_0^\mathbb{P} \circ d_1^\mathbb{P})(A_{1,2})$  by the central element. This means that if we restrict to subgroup  $\{\beta \in \mathbb{P}_n \mid \exp_{1,2}(\beta) = 0\}$ , this simplicial identity would be satisfied. We could not just restrict to those subgroups since  $d_i^\mathbb{P}$ 's do not preserve them. The natural choice is to restrict to subgroup consisting of pure braids  $\beta$  with zero exponent sum  $\exp_{i,j}(\beta)$  for every pair of indices  $i < j$ , i.e. to commutator subgroup. Indeed, commutator is functorial (i.e. is preserved by every homomorphism), it does not change Moore complex much (since  $\text{Brun}_n \subset [\mathcal{P}_n, \mathcal{P}_n]$  for  $n \geq 3$ ), and all the simplicial identities becomes true by the following Observation.

**Observation 5.1.** *If two group homomorphisms  $G \rightrightarrows H$  are coequalized by a projection  $H \rightarrow H/Z(H)$ , then they agree on  $[G, G]$ .*

So on, consider a  $\Delta$ -group  $[\mathbb{P}, \mathbb{P}]$  with  $[\mathbb{P}, \mathbb{P}]_n = [\mathcal{P}_n, \mathcal{P}_n]$  and structure maps  $d_i^\mathbb{P}$  being restriction of those of  $\mathbb{P}$  (we denote the restrictions with the same letters).

Surprisingly, we can enrich  $[\mathbb{P}, \mathbb{P}]$  with degeneracies and obtain a simplicial group! For  $n \geq 0$  we will define a sequence  $s_0^\mathbb{P}, s_1^\mathbb{P}, \dots, s_n^\mathbb{P}: [\mathbb{P}, \mathbb{P}]_n \rightarrow [\mathbb{P}, \mathbb{P}]_{n+1}$  by the following rules:  $s_i^\mathbb{P} := s_i|_{[\mathcal{P}_n, \mathcal{P}_n]}$  is an ordinary string duplication for  $i > 0$  and  $s_0^\mathbb{P}$  is the restriction of the embedding  $\mathcal{B}_n \xrightarrow{\sigma_i \rightarrow \sigma_{i+1}} \mathcal{B}_{n+1}$  (geometrically this embedding acts like drawing an unlinked strand on the left).

**Theorem 5.2.** *There is a simplicial group  $[\mathbb{P}, \mathbb{P}]$  with components and structure maps as defined above, and  $\pi_k([\mathbb{P}, \mathbb{P}]) \cong \pi_k(S^3)$  for  $k \geq 0$ .*

We can prove this theorem algebraically using explicit formulas for  $d_i^\mathbb{P}$ 's and  $s_i^\mathbb{P}$ 's (see Appendix A.1), but instead we will show this topologically later on.

**Remark 5.3.** In [AIM21, Theorem 1.1], we showed that the subgroups  $Z_n$  and  $\text{Bd}_n$  are characteristic subgroups in the pure braid group  $\mathcal{P}_n$  for  $n \geq 3$ . Now we can see that these subgroups arise naturally as Moore cycles and boundaries of the simplicial group  $[\mathbb{P}, \mathbb{P}]$ . Thus, it seems natural to ask whether these subgroups are characteristic in  $[\mathcal{P}_n, \mathcal{P}_n]$  (if this is the case, we could potentially obtain more of interesting automorphisms acting on

the homotopy groups of the sphere). We don't know the answer for  $n = 3, 4, 5, 6$  but for  $n \geq 7$  the answer is affirmative and poor in a some sense (no new automorphisms).

For every group the commutator subgroup is characteristic. Hence, the restriction along the inclusion  $[G, G] \subset G$  induces the homomorphism  $\text{Aut}(G) \rightarrow \text{Aut}([G, G])$ . The surjectivity of this homomorphism means that every automorphism of  $[G, G]$  extends to some automorphism of  $G$ . Hence, if this homomorphism happens to be surjective, then every subgroup of  $[G, G]$ , which is characteristic in  $G$ , is also characteristic in  $[G, G]$ .

- (1) If  $G = \mathcal{P}_3$ , then this is not the case, since  $[\mathcal{P}_3, \mathcal{P}_3] = \text{Brun}_3$  is a free group of infinite rank, and there is no chance for a map of the form  $\text{Aut}(\mathcal{P}_3) \rightarrow \text{Aut}(F_\infty)$  to be a surjection.
- (2) Let  $G = \mathcal{P}_n$  for  $n \geq 4$ . Since, a center is always a characteristic subgroup, there is a restriction  $\text{Aut}(\mathcal{P}_n) \rightarrow \text{Aut}(\overline{\mathcal{P}}_n)$ , where  $\overline{\mathcal{P}}_n = \mathcal{P}_n / Z(\mathcal{P}_n)$ . This map is a surjection, since there is a well-known decomposition  $\text{Aut}(\mathcal{P}_n) \cong \text{Aut}_c(\mathcal{P}_n) \rtimes \text{Aut}(\overline{\mathcal{P}}_n)$ , see [BM07, Theorem 8]. Since  $Z(\mathcal{P}_n)$  and  $[\mathcal{P}_n, \mathcal{P}_n]$  trivially intersect, one has

$$[\overline{\mathcal{P}}_n, \overline{\mathcal{P}}_n] = \frac{[\mathcal{P}_n, \mathcal{P}_n]Z(\mathcal{P}_n)}{Z(\mathcal{P}_n)} = [\mathcal{P}_n, \mathcal{P}_n],$$

and there is a restriction homomorphism

$$\text{Aut}(\overline{\mathcal{P}}_n) \rightarrow \text{Aut}([\overline{\mathcal{P}}_n, \overline{\mathcal{P}}_n]) = \text{Aut}([\mathcal{P}_n, \mathcal{P}_n]).$$

This homomorphism is proved to be an isomorphism for  $n \geq 7$ , see [McL18, Corollary 1.4]. Hence, the restriction  $\text{Aut}(\mathcal{P}_n) \rightarrow \text{Aut}([\mathcal{P}_n, \mathcal{P}_n])$  is a surjection for  $n \geq 7$ . It is clearly not injective, since every central automorphism acts trivially on the commutator subgroup.

- (3) In contrast, for  $G = \mathcal{B}_n$  it is known that the restriction  $\text{Aut}(\mathcal{B}_n) \rightarrow \text{Aut}([\mathcal{B}_n, \mathcal{B}_n])$  is an isomorphism for all  $n \geq 4$ , see [Or17, Theorem 1.1].

**5.1. Proof of Theorem 1.3.** Let  $X$  be a pointed simplicial set. The *Moore path space* is the pointed simplicial set  $\mathcal{P}X$  with

$$(\mathcal{P}X)_n = \{x \in X_{n+1} \mid d_1 d_2 \dots d_{n+1} x = *\},$$

and faces

$$d_i^{\mathcal{P}X} := d_{i+1}^X|_{(\mathcal{P}X)_n} : (\mathcal{P}X)_n \rightarrow (\mathcal{P}X)_{n-1},$$

and degeneracies

$$s_i^{\mathcal{P}X} = s_{i+1}^X|_{(\mathcal{P}X)_n} : (\mathcal{P}X)_n \rightarrow (\mathcal{P}X)_{n+1}.$$

It is easy to show that  $\mathcal{P}X$  is contractible. If  $X$  is Kan complex then  $d_0^X : \mathcal{P}X \rightarrow X$  is a fibration. The *Moore loop space*  $\Omega X$  is defined to be the fiber of  $d_0^X : \mathcal{P}X \rightarrow X$ .

It is easy to see that Moore path space of  $[\mathbb{P}, \mathbb{P}]$  is precisely the commutator subgroup  $[\text{AP}, \text{AP}]$  of contractible simplicial group  $\text{AP}$ . Let  $\Omega[\mathbb{P}, \mathbb{P}] = \ker(d_0^{\mathbb{P}} : [\text{AP}, \text{AP}] \rightarrow [\mathbb{P}, \mathbb{P}])$ . There is a path fibration sequence

$$\Omega[\mathbb{P}, \mathbb{P}] \rightarrow [\text{AP}, \text{AP}] \rightarrow [\mathbb{P}, \mathbb{P}].$$

It is enough to show that  $\Omega[\mathbb{P}, \mathbb{P}]$  is homotopy equivalent to  $\Omega S^3$ .

Note that  $(\Omega[\mathbb{P}, \mathbb{P}])_n = \ker(d_0^{\mathbb{P}}) \cap [\mathbb{P}, \mathbb{P}]_{n+1}$ . By Lemma 4.4,  $\ker(d_0^{\mathbb{P}} : \mathcal{P}_{n+1} \rightarrow \mathcal{P}_n)$  is a free group of rank  $n$  with the basis  $\{A_{0,2}, \dots, A_{0,n+1}\}$  for every  $n \geq 0$ .

**Lemma 5.4.**  $(\Omega[\mathbb{P}, \mathbb{P}])_n = [\ker(\partial_{n+1}), \ker(\partial_{n+1})]$  for every  $n \geq 0$ .

*Proof.* It is easy to see that

$$\ker(d_1) \cap [\mathcal{P}_{n+1}, \mathcal{P}_{n+1}] = [\ker(d_1), \ker(d_1)], \tag{5.1}$$

since the condition of belonging to commutator subgroup is the same for the pure braid group  $\mathcal{P}_{n+1} = \langle A_{i,j} \mid 1 \leq i < j \leq n \rangle$  and for the free group  $\ker(d_1) = \langle A_{1,2}, A_{1,3}, \dots, A_{1,n} \rangle$  of rank  $n - 1$ : the exponent sum for each letter must be zero.

Hence,

$$\begin{aligned} \ker(\partial_{n+1}) \cap [\mathcal{P}_{n+1}, \mathcal{P}_{n+1}] &= \theta_{n+1}^{-1}(\ker(d_1)) \cap \theta_{n+1}^{-1}([\mathcal{P}_{n+1}, \mathcal{P}_{n+1}]) = \\ &= \theta_{n+1}^{-1}(\ker(d_1) \cap [\mathcal{P}_{n+1}, \mathcal{P}_{n+1}]) \stackrel{(5.1)}{=} \theta_{n+1}^{-1}([\ker(d_1), \ker(d_1)]) = \\ &= [\theta_{n+1}^{-1}(\ker(d_1)), \theta_{n+1}^{-1}(\ker(d_1))] = [\ker(\partial_{n+1}), \ker(\partial_{n+1})]. \end{aligned}$$

□

Let  $G$  be a simplicial group given by

$$G_n = \ker(\partial: \mathcal{P}_{n+1} \rightarrow \mathcal{P}_n) = \langle A_{0,2}, \dots, A_{0,n+1} \rangle$$

with faces  $d_0^G, \dots, d_n^G: G_n \rightarrow G_{n-1}$  and degeneracies  $s_0^G, \dots, s_n^G: G_n \rightarrow G_{n+1}$  given by the following formulae

$$d_i^G(A_{0,j}) = \begin{cases} (A_{0,2} \dots A_{0,n})^{-1}, & (i, j) = (0, 2); \\ A_{0,j-1}, & i < j - 1; \\ \mathbf{1}, & i = j - 1; \\ A_{0,j}, & i > j - 1; \end{cases} \quad s_i^G(A_{0,j}) = \begin{cases} A_{0,j+1}, & i < j - 1; \\ A_{0,j}A_{0,j+1}, & i = j - 1; \\ A_{0,j}, & i > j - 1. \end{cases}$$

This is indeed a simplicial group which is isomorphic to  $F[S^1]$ , see Section 6.1 in [BC<sup>+</sup>06].

We claim that  $\Omega[\mathbb{P}, \mathbb{P}] \cong [G, G]$ . There is an evident identification  $[G, G]_n = \Omega[\mathbb{P}, \mathbb{P}]_n$ , however the structure maps  $d_i^G$ 's and  $s_i^G$ 's are not exactly string delitions and cablings as one would expect. It remains to show that they agree when restricting to commutator subgroup.

**Lemma 5.5.** *The restrictions of  $d_i^G$ 's and  $s_i^G$ 's to commutator subgroup  $[G, G]$  are string delitions and string doublings respectively:*

- (1)  $d_i^G|_{[G_n, G_n]} \equiv d_i^{\text{AP}}$  for every  $n \geq 1$  and  $0 \leq i \leq n$ ;
- (2)  $s_i^G|_{[G_n, G_n]} \equiv s_i^{\text{AP}}$  for every  $n \geq 0$  and  $0 \leq i \leq n$ .

*Proof.* The first part of Lemma is true because of Observation 5.1. Indeed,

$$d_0^{\text{AP}}(A_{0,2}) = A_{0,1} = (A_{0,2} \dots A_{0,n})^{-1} z_{n-1}^{-2} = d_0^G(A_{0,2}) z_{n-1}^{-2},$$

and  $d_i^{\text{AP}}(A_{0,j}) = d_i^G(A_{0,j})$  for  $(i, j) \neq (0, 2)$ .

Now, we aim to prove that  $s_i^G|_{[G_n, G_n]} \equiv s_i^{\text{AP}}$ .

Note that

$$s_i^{\text{AP}}(A_{0,s}) = \begin{cases} s_i^G(A_{0,s}) A_{i+1, i+2}^2, & s = i + 1, \\ s_i^G(A_{0,s}), & s \neq i + 1. \end{cases}$$

It is easy to see that  $A_{i+1, i+2}^2 = \sigma_{i+1}^A$  commutes with both  $s_i^G(A_{0, i+1}) = A_{0, i+1} A_{0, i+2}$  and  $s_i^{\text{AP}}(A_{0, k})$  where  $k \neq i + 1$ .

Note that  $[G_n, G_n]$  is generated by commutators  $[u, v]$  where  $u, v \in G_n$ . Hence,

$$\begin{aligned} s_i^{\text{AP}}([u, v]) &= [s_i^{\text{AP}}(u), s_i^{\text{AP}}(v)] = [\dots s_i^{\text{AP}}(A_{0, i+1})^\pm \dots, \dots] = \\ &= [\dots (s_i^G(A_{0, i+1}) A_{i+1, i+2}^2)^\pm \dots, \dots] = [\dots s_i^G(A_{0, i+1})^\pm \dots, \dots] = \\ &= [s_i^G(u), s_i^G(v)] = s_i^G([u, v]). \end{aligned}$$

□

This lemma proves the claim, which proves the theorem.  $\square$

**5.2. Braided simplicial group structure on  $[\mathbb{P}, \mathbb{P}]$ .** In the paper [Wu02] the author presents a notion of a braided simplicial group.

**Definition 5.6.** A *braided simplicial group* is a simplicial group  $X$  equipped with a sequence of actions  $\mathcal{B}_{n+1} \curvearrowright X_n$ , such that each  $\sigma_i$  acts automorphically and the following identities do hold:

$$d_j^X \circ \sigma_i = \begin{cases} \sigma_{i-1} \circ d_j^X, & j \leq i-2, \\ d_i^X, & j = i-1, \\ d_{i-1}^X, & j = i, \\ \sigma_i \circ d_j^X, & j > i, \end{cases}$$

for any  $n \geq 1$  and  $i \in \underline{n}$ , and

$$s_j^X \circ \sigma_i = \begin{cases} \sigma_{i+1} \circ s_j^X, & j \leq i-2, \\ \sigma_{i+1} \circ \sigma_i \circ s_i^X, & j = i-1, \\ \sigma_i \circ \sigma_{i+1} \circ s_{i-1}^X, & j = i, \\ \sigma_i \circ s_j^X, & j > i, \end{cases}$$

for any  $n \geq 0$  and  $i \in \underline{n}$ .

In the paper [LW09, Proposition 3.3], authors proved that for any  $n \geq 1$  there is a well-defined representation  $\Lambda_n: \mathcal{B}_{n+1} \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{P}_n)$ , given by

$$\Lambda_n(\sigma_i) = \begin{cases} \theta_n, & i = 1, \\ \Psi_{\sigma_{i-1}^{-1}}, & i \in \{2, 3, \dots, n\} \end{cases}$$

(note that  $\Psi_{\beta^{-1}}$  was denoted by  $\chi_\beta$  in [LW09]).

**Lemma 5.7.** For any  $n \geq 0$  there is commutative diagram

$$\begin{array}{ccc} [\mathcal{P}_{n+1}, \mathcal{P}_{n+1}] & \xrightarrow{\Psi_{\beta^{-1}}} & [\mathcal{P}_{n+1}, \mathcal{P}_{n+1}] \\ \partial_{n+1} \downarrow & & \downarrow \partial_{n+1} \\ [\mathcal{P}_n, \mathcal{P}_n] & \xrightarrow{\Lambda_n(\beta)} & [\mathcal{P}_n, \mathcal{P}_n] \end{array}$$

for each  $\beta \in \mathcal{B}_{n+1}$ .

*Proof.* Since a set  $\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n\}$  generates  $\mathcal{B}_{n+1}$ , it is sufficient to show these two identities:

- (1)  $\partial_{n+1} \circ \Psi_{\sigma_i^{-1}} = \Psi_{\sigma_{i-1}^{-1}} \circ \partial_{n+1}$  for each  $i \in \{2, 3, \dots, n\}$ .
- (2)  $\partial_{n+1} \circ \Psi_{\sigma_1^{-1}} = \theta_n \circ \partial_{n+1}$ .

First, note that the assertion (1) follows from the direct computations.

Second, we prove assertion (2).

We claim that the identity  $\partial_{n+1} \circ \Psi_{\sigma_1^{-1}} = \theta_n \circ \partial_{n+1}$  holds on  $\{A_{s,k} \mid 1 \leq s < k \leq n+1, (s,k) \neq (1,2)\}$ . The computations are made in table 1.

Note that

$$(\partial_{n+1} \circ \Psi_{\sigma_1^{-1}})(A_{1,2}) = \partial_{n+1}(\Psi_{\sigma_1^{-1}}(A_{1,2})) = \partial_{n+1}(A_{1,2}) = A_{0,1}$$

and

$$(\theta_n \circ \partial_{n+1})(A_{1,2}) = \theta_n(\partial_{n+1}(A_{1,2})) = \theta_n(A_{0,1}) = A_{0,1}z_n^2.$$

Hence, the claim is true by Observation 5.1.

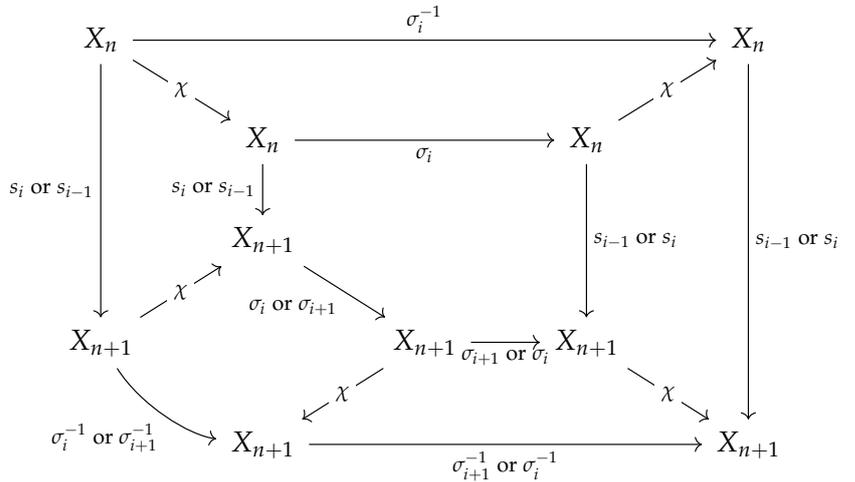
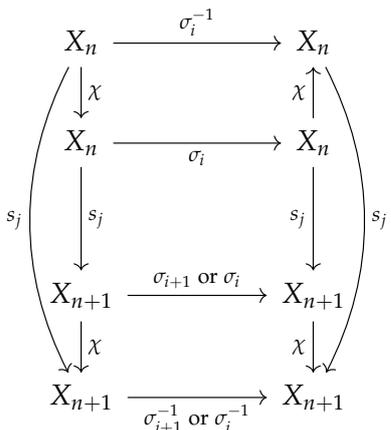
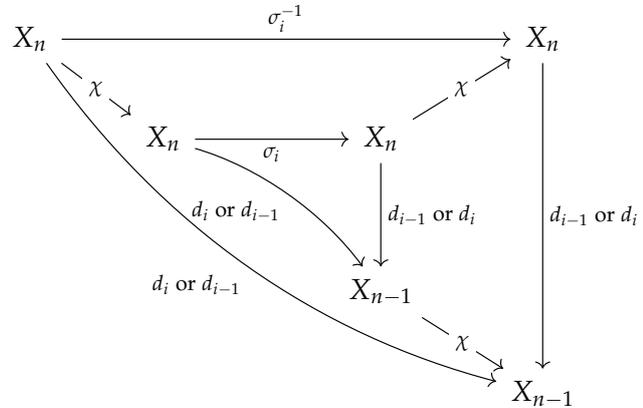
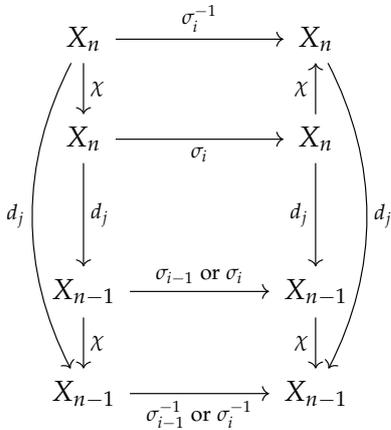
Therefore, the assertion is proved. □

**Definition 5.8.** A braided simplicial group with reflection is a braided simplicial group  $X$  equipped with an involutive simplicial automorphism  $\chi: X \rightarrow X$  such that the equation  $\sigma_i^{-1} = \chi \circ \sigma_i \circ \chi$  holds in  $\text{Hom}(X_n, X_n)$  for every  $n \geq 0$  and  $i \in \underline{n+1}$ .

**Theorem 5.9.** Let  $X$  be a braided simplicial group which admits some reflection. Then there is a braided simplicial group  $X^\chi$  which coincides with  $X$  as a simplicial group, and carries new braiding  $\Lambda_n^\chi: \mathcal{B}_{n+1} \rightarrow \text{Aut}(X_n)$  given by the composition  $\Lambda_n^\chi := \Lambda_n \circ \chi_{n+1}$ .

*Proof.* In a less fancy words, we want to show that braiding identities still hold when replacing  $\sigma_i$  with  $\sigma_i^{-1}$  everywhere.

This is by simple chasing. First two diagrams show all four identities with faces in rhyme scheme ABBA; second two diagrams show all four identities with degeneracies.



□

**Theorem 5.10.** The simplicial group  $[\mathbb{P}, \mathbb{P}]$  equipped with the defined sequence of homomorphisms  $\Lambda_n$  forms a braided simplicial group.

*Proof.* It is enough to check that  $\Lambda_n^\chi$  is a correct braiding, since in that case  $([\mathbb{P}, \mathbb{P}], \Lambda^\chi)$  admits a reflection  $\chi: [\mathbb{P}, \mathbb{P}] \rightarrow [\mathbb{P}, \mathbb{P}]$  given by the reflection automorphism (see Corollary 7.3), and we can apply Theorem 5.9 and conclude that  $\Lambda_n = (\Lambda_n^\chi)^\chi$  is a correct braiding.

We are going to check braiding identities for

$$\Lambda_n^\chi(\sigma_i) = \begin{cases} \theta_n^{-1}, & i = 1, \\ \Psi_{\sigma_{i-1}}, & i \in \{2, 3, \dots, n\}. \end{cases}$$

Since hom-sets  $\text{Hom}(\cdot, [\mathbb{P}, \mathbb{P}]_{0,1})$  and  $\text{Hom}([\mathbb{P}, \mathbb{P}]_{0,1}, \cdot)$  consist of only one element, all identities in these sets are true. Hence, we need to only check those identities which involve  $[\mathbb{P}, \mathbb{P}]_n$  where  $n \geq 2$ .

The identity  $d_0^{[\mathbb{P}, \mathbb{P}]} \circ \sigma_i = \sigma_{i-1} \circ d_0^{[\mathbb{P}, \mathbb{P}]}$  follows from Proposition 5.7.

We will check some of the rest identities.

**Identity**  $d_0^{[\mathbb{P}, \mathbb{P}]} \circ \sigma_1 = d_1^{[\mathbb{P}, \mathbb{P}]}$ . This is the easiest one:

$$d_0^{\mathbb{P}} \circ \sigma_1 = (d_1^{\mathbb{P}} \circ \theta_n) \circ \theta_n^{-1} = d_1^{\mathbb{P}}.$$

**Identity**  $d_j^{[\mathbb{P}, \mathbb{P}]} \circ \sigma_{j+1} = d_{j+1}^{[\mathbb{P}, \mathbb{P}]}$  for  $j \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ . We claim that  $d_j^{\mathbb{P}} \circ \Psi_{\sigma_j} = d_{j+1}^{\mathbb{P}}$ . The computations are made in table 2.

**Identity**  $d_1^{[\mathbb{P}, \mathbb{P}]} \circ \sigma_1 = d_0^{[\mathbb{P}, \mathbb{P}]}$ . We claim that  $d_1^{\mathbb{P}} \circ \theta_n^{-1} = d_0^{\mathbb{P}}$ . The computations are made in table 3.

**Identity**  $s_0^{[\mathbb{P}, \mathbb{P}]} \circ \sigma_i = \sigma_{i+1} \circ s_0^{[\mathbb{P}, \mathbb{P}]}$  for  $i \in \{2, 3, \dots, n-1\}$ . We claim that  $s_0^{\mathbb{P}} \circ \Psi_{\sigma_{i-1}} = \Psi_{\sigma_i} \circ s_0^{\mathbb{P}}$ . The computations are made in table 4.

The other identities are straightforward. □

## 6. SIMPLICIAL SPACES BUILT FROM CONFIGURATION SPACES

**6.1. Prelude.** Every simplicial group  $G$  gives rise to a simplicial  $\infty$ -groupoid by post-composing with the Eilenberg-MacLane space functor  $K(-, 1): \text{Grp} \rightarrow \text{Spc}_*$ . Having some small model for  $K(G_n, 1)$  spaces could be very useful: one could better understand via geometric insights why such a data built up into a simplicial group, and then one could invent new simplicial groups by taking some simplicial geometric constructions inspired by these models and then applying  $\pi_1$  functor component-wise.

One popular model for  $K(\mathcal{P}_n, 1)$  is the configuration space  $\text{Conf}(\mathbb{C}, n)$  of  $n$  different points on a plane

$$\text{Conf}(\mathbb{C}, n) = \{(z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mid z_i \neq z_j \forall i \neq j\}$$

equipped with the induced topology from the product space  $\mathbb{C}^n$ . One could guess that the operations on braids of string delitions and cablings are induced by the following continuous functions:  $d_i: \text{Conf}(\mathbb{C}, n) \rightarrow \text{Conf}(\mathbb{C}, n-1)$  removes the  $i$ th coordinate, and  $s_i: \text{Conf}(\mathbb{C}, n) \rightarrow \text{Conf}(\mathbb{C}, n+1)$  spawns a new point in  $i$ th coordinate sufficiently close to the old  $i$ th point, and increase indicies of all points  $z_i, \dots, z_n$  by one. Explicitly,

$$\begin{aligned} d_i(z_1, z_2, \dots, z_n) &= (z_1, \dots, z_{i-1}, z_{i+1}, \dots, z_n), \\ s_i(z_1, z_2, \dots, z_n) &= (z_1, \dots, z_{i-1}, z_i - \epsilon, z_i, z_{i+1}, \dots, z_n), \end{aligned}$$

where  $\epsilon$  is some continuous function  $\text{Conf}(\mathbb{C}, n) \rightarrow (0, +\infty)$  such that  $\epsilon < \max_{i \neq j} |z_i - z_j|$ . These definitions carry some problems:

- both types of maps  $d_i$  and  $s_j$  hardly preserve (any simultaneous choice of) base-points in configuration spaces, and hence these maps induce homomorphisms only on fundamental groupoids  $\Pi_1$ ;
- although it is straightforward that  $d_i \circ s_i = \text{id}$ , and  $d_j \circ d_i = d_i \circ d_{j+1}$  for  $i \leq j$ , other simplicial identities hold only approximately (e.g., up to a homotopy).

We can use two different strategies to address these problems.

*Strategy I. Work up to a homotopy.* Let  $\mathbf{p}_n = (1, 2, \dots, n) \in \text{Conf}(\mathbb{C}, n)$  be a base-point. For every index  $i \in \underline{n}$  let us choose two canonical paths. Let  $\gamma_{d,i}$  be a linear path in  $\text{Conf}(\mathbb{C}, n - 1)$  connecting  $\mathbf{p}_{n-1}$  with  $d_i(\mathbf{p}_n)$  and  $\gamma_{s,i}$  be a linear path in  $\text{Conf}(\mathbb{C}, n + 1)$  connecting  $\mathbf{p}_{n+1}$  with  $s_i(\mathbf{p}_n)$ . Explicitly,

$$\begin{aligned} \gamma_{d,i}(t) &= (1, 2, \dots, i - 1, i + t, i + 1 + t, \dots, n - 1 + t), \\ \gamma_{s,i}(t) &= (1, 2, \dots, i - 1, i - t\epsilon(\mathbf{p}_n), i + 1 - t, i + 2 - t, \dots, n + 1 - t). \end{aligned}$$

Then it is easy to see that the compositions

$$\begin{aligned} \pi_1(\text{Conf}(\mathbb{C}, n), \mathbf{p}_n) &\xrightarrow{d_i} \pi_1(\text{Conf}(\mathbb{C}, n - 1), d_i(\mathbf{p}_n)) \xrightarrow[\sim]{h_{\gamma_{d,i}}} \pi_n(\text{Conf}(\mathbb{C}, n), \mathbf{p}_{n-1}), \\ \pi_1(\text{Conf}(\mathbb{C}, n), \mathbf{p}_n) &\xrightarrow{s_i} \pi_1(\text{Conf}(\mathbb{C}, n + 1), s_i(\mathbf{p}_n)) \xrightarrow[\sim]{h_{\gamma_{s,i}}} \pi_n(\text{Conf}(\mathbb{C}, n + 1), \mathbf{p}_{n+1}) \end{aligned}$$

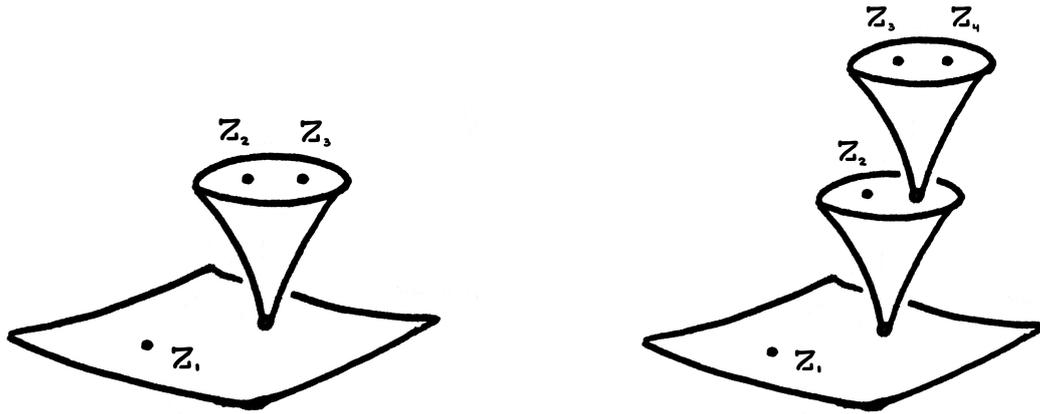
are equal to  $d_i$  and  $s_i$  correspondingly along the identifications  $\mathcal{P}_* = \pi_1(\text{Conf}(\mathbb{C}, *), \mathbf{p}_*)$ .

Then we could check that simplicial identities hold up to a homotopy, and hence the data  $\{\text{Conf}(\mathbb{C}, n + 1)\}$  encodes a simplicial object in  $\text{Ho}(\text{Spc})$  (but not in  $\text{Ho}(\text{Spc}_*)$ ). We need to track the basepoints very carefully using change-of-basepoints maps  $h_\gamma$  to obtain a simplicial group AP. after applying the functor  $\pi_1$  to the sequence of based spaces  $(\text{Conf}(\mathbb{C}, n + 1), \mathbf{p}_{n+1})$ .

This approach was fully implemented in the famous paper [BC<sup>+</sup>06]. Moreover, the authors constructed such a simplicial group on a sequence of surface braid groups  $\{\mathcal{P}_{n+1}(M)\}$ , where  $M$  is a surface admitting a non-degenerate vector field or, more generally, a metric space with a steady flow. The steady flow is used to make a canonical choice where to spawn a new point when applying a degeneracy operator to some configuration in  $\text{Conf}(M, n)$ .

*Strategy II. Try to strictify everything.* Instead, we could try to compactify the configuration space such that new points on the boundary correspond to would-be configurations of points where some of the points have formally vanishing distance to each other, while still remembering a relative direction to each other.

A standard way to visualize such boundary configurations is by means of “funnels”, which might be thought of as an infinite magnifying glass held to the location of the some point and revealing that it really consists of many points of the zero distance to each other. For example, in the Figure 6a, points labeled  $z_2$  and  $z_3$  are infinitesimally close to each other from the point of view of  $z_1$ ; and in the Figure 6b, points  $z_3, z_4$  and  $z_4$  are infinitesimally close to each other from the point of view of  $z_1$ , but  $z_3$  and  $z_4$  are infinitesimally close to each other from the point of view of  $z_2$ .



(A) Some configuration in  $\overline{\text{Conf}(\mathbb{C}, 3)}$ .

(B) Some configuration in  $\overline{\text{Conf}(\mathbb{C}, 4)}$ .

FIGURE 6. Typical elements of compactifications of configuration spaces.

This will allow us to spawn a new point infinitely close to the left of the point which we want to double while performing a degeneracy operation.

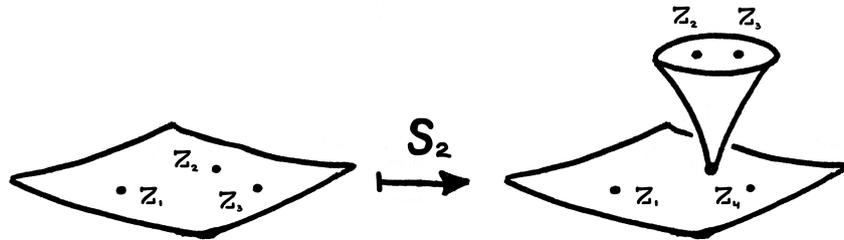


FIGURE 7. Visualization for the map  $s_2: \overline{\text{Conf}(\mathbb{C}, n)} \rightarrow \overline{\text{Conf}(\mathbb{C}, n + 1)}$ .

Now all the simplicial identities will become strict, and that will solve the second posed problem.

Unfortunately, the first problem is still unsolved, the basepoints are not preserved under the action of faces and degeneracies. To overcome it, we need to completely abandon the concept of distance and start assuming that all points in the configuration are actually at a single physical point. To be more specific, for each pair of indices  $i < j$  we will store only the direction of the vector drawn from the point  $z_i$  to the point  $z_j$  in some configuration. Let us formalize exactly what we mean.

If  $L_1$  and  $L_2$  are subsets of the set of integers, we denote by  $L_1 \bowtie L_2$  the set of all pairs  $(x, y) \in L_1 \times L_2$  such that  $x < y$ . For a topological space  $X$  and a non-negative integer  $n$ , we set  $X^{(n)}$  be a space of all functions  $n \bowtie n \rightarrow X$  equipped with the product topology.

Let  $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$  and  $\blacktriangleright: \text{Conf}(\mathbb{C}, n) \rightarrow (S^1)^{n \bowtie n}$  be a map sending a configuration  $(z_1, z_2, \dots, z_n)$  to a point  $u \in (S^1)^{n \bowtie n}$  with coordinates given by  $u_{i,j} = \frac{z_j - z_i}{|z_j - z_i|}$ .

**Definition 6.1.** Let  $\tilde{C}(n)$  be the closure of the image of  $\blacktriangleright$  in the compact manifold  $(S^1)^{n \bowtie n}$ .

We will choose  $\mathbf{u}_n := \blacktriangleright(\mathbf{p}_n)$  to be a basepoint in  $\tilde{C}(n)$ . Note that  $(\mathbf{u}_n)_{i,j} = 1$  for every pair of indices  $i < j$ .

The following proposition says that leaving only relative directions does not change a homotopy type.

**Proposition 6.2.** *The map  $\text{Conf}(\mathbb{C}, n) \rightarrow \tilde{C}(n)$  induced by  $\blacktriangleright$  is a homotopy equivalence. Hence, the space  $\tilde{C}(n)$  is aspherical with  $\pi_1(\tilde{C}(n), \mathbf{u}_n) = \mathcal{P}_n$ .*

**Remark 6.3.** Compact spaces obtained by such a procedure are now known as Fulton-MacPherson compactifications. This particular version  $\tilde{C}(n)$  was proposed by Maxim Kontsevich in [Kon99]. The Proposition 6.2 follows from the results in [Sin04] and [Sal01]. See Appendix B for a detailed account.

**Example 6.4.** We can still draw configurations in  $\tilde{C}(n)$  by means of funnels as follows. Let also  $z(t) = (0, ti, 1) \in \text{Conf}(\mathbb{C}, 3)$  and  $u(t) = \blacktriangleright(z(t)) \in \tilde{C}(3)$  for  $t > 0$ . Let

$$u^0 = \lim_{t \rightarrow 0^+} u(t) \in \tilde{C}(3).$$

It is easy to see that  $u(t)_{1,2} = i, u(t)_{1,3} = 1$  and  $u(t)_{2,3} = e^{-i \arctan(t)}$ . Hence,  $u^0 = (i, 1, 1)$ .

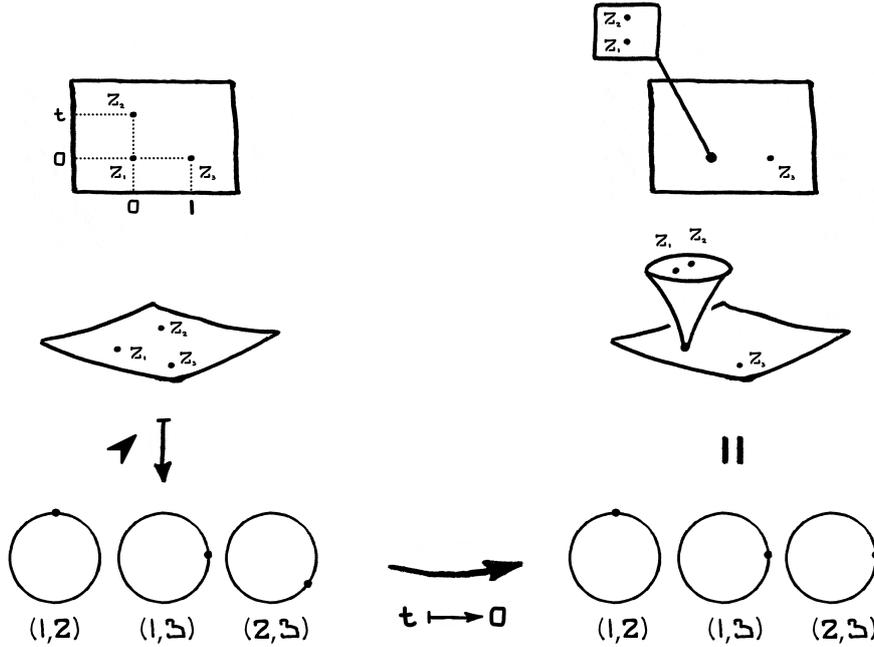


FIGURE 8. Points of  $\tilde{C}(3)$  as limits of points of  $\text{Conf}(\mathbb{C}, 3)$ .

The second strategy is implemented in Section 6 of [Sin04] but for the *cosimplicial* case. Each strategy has its pros and cons, which we have summarized in the following table.

Strategy 1	Easy to build structure, hard to prove identities
Strategy 2	Hard to build structure, easy to prove identities

FIGURE 9. Some simplification of the big picture.

In this work, we choose to follow the second strategy.

**6.2. Sketch of the construction.** We aim to construct a simplicial bunch of pointed spaces  $X$  such that each  $X_n$  is aspherical and  $X^{\pi_1} = [\mathbb{P}, \mathbb{P}]$ . In particular, the simplicial identities for  $X$  will imply the simplicial identities for  $[\mathbb{P}, \mathbb{P}]$ , and will prove that  $[\mathbb{P}, \mathbb{P}]$  is indeed a simplicial group. Even though we are forced to choose  $X_n$ 's to be models for the Eilenberg-MacLane spaces  $K([\mathcal{P}_n, \mathcal{P}_n], 1)$ , we are not going to reveal the cards right away. Instead, we start with spaces  $\tilde{C}(n)$  (which model  $K(\mathcal{P}_n, 1)$  by Proposition 6.2), and we will see how the universe naturally suggests us to move to some covering spaces (which happen to be models for commutator subgroups) to make everything fit together.

Let's try to invent faces and degeneracies for  $\{\tilde{C}(n)\}_{n \geq 0}$ . There are natural choices for  $d_1, \dots, d_n: \tilde{C}(n) \rightarrow \tilde{C}(n-1)$  and  $s_1, \dots, s_n: \tilde{C}(n) \rightarrow \tilde{C}(n+1)$ :  $d_i$  removes the  $i$ th

coordinate and  $s_i$  replaces  $i$ th point  $z_i$  with a pair of points  $z'_i$  and  $z'_{i+1}$  such that the point  $z'_i$  is just on the left of  $z'_{i+1}$ , and both new points are arranged relatively to old points just as  $z_i$  was. The map  $s_0$  just spawns new point on the left of all other points. To invent the last map  $d_0$  we need to appeal to geometric construction of  $\partial$  in [BC<sup>+</sup>06, Section 6.5]: one can show that  $\partial$  is the composition of the reflection with the map

$$\delta: \text{Conf}(\mathbb{C}, n) \rightarrow \text{Conf}(\mathbb{C}, n - 1), \quad \delta(z_1, \dots, z_n) := \left( \frac{1}{\bar{z}_2 - \bar{z}_1}, \frac{1}{\bar{z}_3 - \bar{z}_1}, \dots, \frac{1}{\bar{z}_n - \bar{z}_1} \right).$$

We can rewrite it in terms of angles and obtain a nice formula for  $d_0: \tilde{\mathcal{C}}(n) \rightarrow \tilde{\mathcal{C}}(n - 1)$ :

$$d_0(u)_{i,j} = \frac{u_{i+1,j+1}}{u_{1,i+1}u_{1,j+1}}.$$

We can see that the problematic simplicial identity  $d_0 \circ d_1 = d_0 \circ d_0$  holds on configurations  $(u_{ij}) \in \tilde{\mathcal{C}}(n)$  such that  $u_{1,2} = 1$ , i.e. on such that the first point is strictly horizontally to the left of the second one. We could try to retract on the subspace  $\{u_{1,2} = 1\} \subset X_n$  by rotating all the points in configuration  $u \in \tilde{\mathcal{C}}(n)$  around the first point by the angle  $(u_{1,2})^{-1}$ .

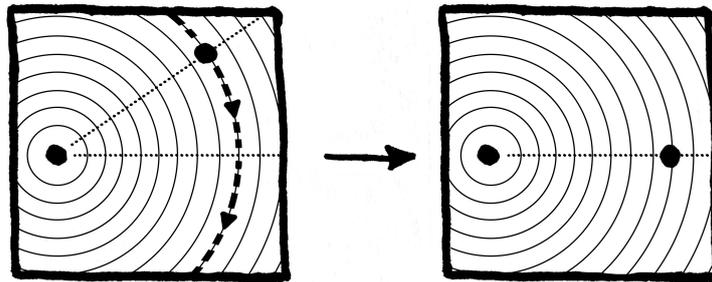


FIGURE 10. The retraction  $\tilde{\mathcal{C}}(n) \rightarrow \{u_{1,2} = 1\}$ .

It is easy to see that this  $\pi_1(\{u_{0,1} = 1\})$  is a subgroup of  $\mathcal{P}_n$  consisting of braids  $\beta$  with  $\exp_{1,2}(\beta) = 0$ , and the retraction  $\tilde{\mathcal{C}}(n) \rightarrow \tilde{\mathcal{C}}(n)$  induces on the fundamental group a homomorphism  $\mathcal{P}_n \rightarrow \mathcal{P}_n$  which maps  $A_{1,2}$  to  $A_{1,2}z_n^{-1}$ , and fixes other generators. Since this homomorphism distorts the group, there are no guarantees that the simplicial identities will be true on the hole group.

The situation changes if we replace a circle  $S^1$  with its universal cover  $\mathbb{R}$ : the rotation lifts to shift, which becomes homotopic to identity, and the retraction becomes deformation retraction. However, we could not just replace only one angle storage corresponding to pair (1,2), because in that case this is not clear how to define face maps. The obvious approach is this: consider a pullback  $X_n$  of inclusion  $\tilde{\mathcal{C}}(n) \hookrightarrow (S^1)^{\binom{n}{2}}$  along the universal cover  $\mathbb{R}^{\binom{n}{2}} \rightarrow (S^1)^{\binom{n}{2}}$ ; lift all maps  $d_i$ 's and  $s_i$ 's to  $X_n$ ; prove that all simplicial identities

hold on deformation retracts  $Y_n = \{\alpha_{1,2} = 0\} \subset X_n$ .

$$\begin{array}{ccc} X_n & \longrightarrow & \mathbb{R}^{\binom{n}{2}} \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ \tilde{C}(n) & \longleftarrow & (S^1)^{\binom{n}{2}} \end{array}$$

Since a pullback of a covering map is itself a covering map, it is reasonable to ask what is the subgroup  $\pi_1(X_n) \subset \pi_1(\tilde{C}(n)) = \mathcal{P}_n$  corresponding to the covering  $X_n \rightarrow \tilde{C}(n)$  in terms of Galois correspondence for covering spaces.

**Lemma 6.5.** *The space  $X_n$  is a model for the Eilenberg-MacLane space  $K([\mathcal{P}_n, \mathcal{P}_n], 1)$ .*

*Proof.* Consider a space

$$F_n^{\text{log}} := \left\{ \left( (z_i)_{1 \leq i \leq n}, (w_{i,j})_{1 \leq i < j \leq n} \right) \mid z_j - z_i = e^{w_{i,j}} \quad \forall 1 \leq i < j \leq n \right\}.$$

In [Bi21], Andrea Bianchi proves that  $F_n^{\text{log}}$  is a model for  $K([\mathcal{P}_n, \mathcal{P}_n], 1)$ . It remains to note that the following diagram is commutative:

$$\begin{array}{ccc} F_n^{\text{log}} & \xrightarrow{(\text{Im}(w_{i,j}))_{1 \leq i < j \leq n}} & X_n \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Conf}(\mathbb{C}, n) & \longrightarrow & \tilde{C}(n) \end{array}$$

□

We suggest the following definition.

**Definition 6.6.** A spatial bunch  $X$  is called *almost strict simplicial space*, if there are deformation retracts  $Y_n \hookrightarrow X_n$  such that the simplicial identities for  $d_i^X$ 's and  $s_i^X$ 's hold after restricting to  $Y_n$ 's.

Note that each almost strict simplicial space  $X$  yields a simplicial group  $X^{\pi_1}$ .

**Theorem 6.7.** *There is almost strict simplicial space  $X$ , such that  $X^{\pi_1} = [\mathbb{P}, \mathbb{P}]$ .*

**6.3. Stage I: Build auxiliary morphisms.** Let  $n \geq 1$ . We shall define a sequence of maps  $d_0, d_1, \dots, d_n: (S^1)^{\binom{n}{2}} \rightarrow (S^1)^{\binom{n-1}{2}}$  as follows.

Let  $1 \leq i \leq n$ . There is a projection map  $d_i: (S^1)^{\binom{n}{2}} \rightarrow (S^1)^{\binom{n-1}{2}}$  given by the precomposition with the map

$$\underline{n-1} \mathcal{A} \underline{n-1} \simeq (\underline{n} \setminus \{i\}) \mathcal{A} (\underline{n} \setminus \{i\}) \hookrightarrow \underline{n} \mathcal{A} \underline{n}.$$

The last map  $d_0: (S^1)^{\binom{n}{2}} \rightarrow (S^1)^{\binom{n-1}{2}}$  is given by the explicit formula

$$d_0(u)_{i,j} = \frac{u_{i+1,j+1}}{u_{1,i+1}u_{1,j+1}}.$$

**Proposition 6.8.** (1) *The following diagram commutes for every  $1 \leq i \leq n$*

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Conf}(\mathbb{C}, n) & \xrightarrow{d_i} & \text{Conf}(\mathbb{C}, n-1) \\
 \downarrow \blacktriangleright & & \downarrow \blacktriangleright \\
 (S^1)^{\binom{n}{2}} & \xrightarrow{d_i} & (S^1)^{\binom{n-1}{2}}.
 \end{array}$$

(2) *The following diagram commutes*

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Conf}(\mathbb{C}, n) & \xrightarrow{-\bar{\delta}} & \text{Conf}(\mathbb{C}, n-1) \\
 \downarrow \blacktriangleright & & \downarrow \blacktriangleright \\
 (S^1)^{\binom{n}{2}} & \xrightarrow{d_0} & (S^1)^{\binom{n-1}{2}},
 \end{array}$$

where  $(-\bar{\delta})(z_1, z_2, \dots, z_n) = (\frac{1}{z_1-z_2}, \frac{1}{z_1-z_3}, \dots, \frac{1}{z_1-z_n})$ .

*Proof.* The first part of this proposition is clear.

The second part follows from the direct calculations. Let  $u = \blacktriangleright(z_1, \dots, z_n)$ . Then

$$\blacktriangleright(-\bar{\delta}(z_1, z_2, \dots, z_n))_{i,j} = \frac{\frac{1}{z_1-z_{j+1}} - \frac{1}{z_1-z_{i+1}}}{\left| \frac{1}{z_1-z_{j+1}} - \frac{1}{z_1-z_{i+1}} \right|} = \frac{u_{i+1,j+1}}{u_{1,i+1}u_{1,j+1}} = d_0(u)_{i,j}.$$

□

**Corollary 6.9.** *The map  $d_i: (S^1)^{\binom{n}{2}} \rightarrow (S^1)^{\binom{n-1}{2}}$  induces the map  $d_i: \tilde{C}(n) \rightarrow \tilde{C}(n-1)$  for every index  $0 \leq i \leq n$ .*

*Proof.* By Proposition 6.8,  $d_i(\text{Im}(\blacktriangleright_n)) \subset \text{Im}(\blacktriangleright_{n-1})$ . Since all  $d_i$ 's are clearly continuous, one has

$$d_i(\tilde{C}(n)) = d_i(\overline{\text{Im}(\blacktriangleright_n)}) \subset \overline{d_i(\text{Im}(\blacktriangleright_n))} \subset \overline{\text{Im}(\blacktriangleright_{n-1})} \subset \tilde{C}(n-1).$$

□

Let  $n \geq 0$ . We shall define a sequence of maps  $s_0, s_1, \dots, s_n: (S^1)^{\binom{n}{2}} \rightarrow (S^1)^{\binom{n+1}{2}}$  as follows.

Let  $1 \leq i \leq n$ . There is a degeneracy map  $s_i: (S^1)^{\binom{n}{2}} \rightarrow (S^1)^{\binom{n+1}{2}}$  which maps function  $(\varphi: \underline{n} \blacktriangleright \underline{n} \rightarrow S^1) \in (S^1)^{\binom{n}{2}}$  to a unique function  $(\psi: \underline{n+1} \blacktriangleright \underline{n+1} \rightarrow S^1) \in (S^1)^{\binom{n+1}{2}}$  such that  $\psi(i, i+1) = 1$ , and the following diagram commutes:

$$\begin{array}{ccccc}
 (\underline{n+1} \setminus \{i\}) \blacktriangleright (\underline{n+1} \setminus \{i\}) & \hookrightarrow & \underline{n+1} \blacktriangleright \underline{n+1} & \longleftarrow & (\underline{n+1} \setminus \{i+1\}) \blacktriangleright (\underline{n+1} \setminus \{i+1\}) \\
 \parallel & & \psi \downarrow & & \parallel \\
 \underline{n} \blacktriangleright \underline{n} & \xrightarrow{\varphi} & S^1 & \xleftarrow{\varphi} & \underline{n} \blacktriangleright \underline{n}.
 \end{array}$$

(The condition  $\psi(i, i+1) = 1$  means that we replace  $i$ th point  $z_i$  from configuration  $\phi$  with a pair of points  $(z'_i, z'_{i+1})$  such that the point  $z'_i$  is just on the left of  $z'_{i+1}$ ; the commutativity of left square means that  $z'_{i+1}$  is arranged relatively to old points just as  $z_i$  was; the commutativity of right square means the same thing for  $z'_i$ .)

The last map  $s_0: (S^1)^{\binom{n}{2}} \rightarrow (S^1)^{\binom{n+1}{2}}$  sends function  $(\varphi: \underline{n} \curvearrowright \underline{n} \rightarrow S^1) \in (S^1)^{\binom{n}{2}}$  to a unique function  $(\psi: \underline{n+1} \curvearrowright \underline{n+1} \rightarrow S^1) \in (S^1)^{\binom{n+1}{2}}$  such that  $\psi(1, i) = 1$  for every index  $i \in \underline{n+1} \setminus \{1\}$ , and the following diagram commutes:

$$\begin{array}{ccc} (\underline{n+1} \setminus \{1\}) * (\underline{n+1} \setminus \{1\}) & \hookrightarrow & \underline{n+1} * \underline{n+1} \\ \parallel & & \psi \downarrow \\ \underline{n} * \underline{n} & \xrightarrow{\varphi} & S^1 \end{array}$$

Consider a composition

$$\text{Conf}(\mathbb{C}, n) \xrightarrow{\curvearrowright} (S^1)^{\binom{n}{2}} \xrightarrow{s_i} (S^1)^{\binom{n+1}{2}}. \tag{6.1}$$

Clearly this composition is a pointwise limit of compositions

$$\text{Conf}(\mathbb{C}, n) \xrightarrow{s_i^{(k)}} \text{Conf}(\mathbb{C}, n+1) \xrightarrow{\curvearrowright} \tilde{\mathcal{C}}(n+1),$$

for  $k \rightarrow \infty$ , where the first map spawns a new point at  $z_i - \frac{1}{2k} \min_{s \neq t} |z_s - z_t|$  if  $i \neq 0$ , or at  $\min_{s \in \underline{n}} \text{Re}(z_s) - k$  if  $i = 0$ . Since  $\tilde{\mathcal{C}}(n+1)$  is closed in  $(S^1)^{\binom{n+1}{2}}$ , a composition (6.1) factors through the inclusion  $\tilde{\mathcal{C}}(n+1) \hookrightarrow (S^1)^{\binom{n+1}{2}}$ .

**Proposition 6.10.** *The following diagram commutes for every  $i \in \{0, \dots, n\}$*

$$\begin{array}{ccc} \text{Conf}(\mathbb{C}, n) & \xrightarrow{s_i \circ \curvearrowright} & \tilde{\mathcal{C}}(n+1) \\ \downarrow \curvearrowright & & \downarrow \\ (S^1)^{\binom{n}{2}} & \xrightarrow{s_i} & (S^1)^{\binom{n+1}{2}}, \end{array}$$

hence the map  $s_i: (S^1)^{\binom{n}{2}} \rightarrow (S^1)^{\binom{n+1}{2}}$  induces the map  $s_i: \tilde{\mathcal{C}}(n) \rightarrow \tilde{\mathcal{C}}(n+1)$  for every index  $0 \leq i \leq n$ .

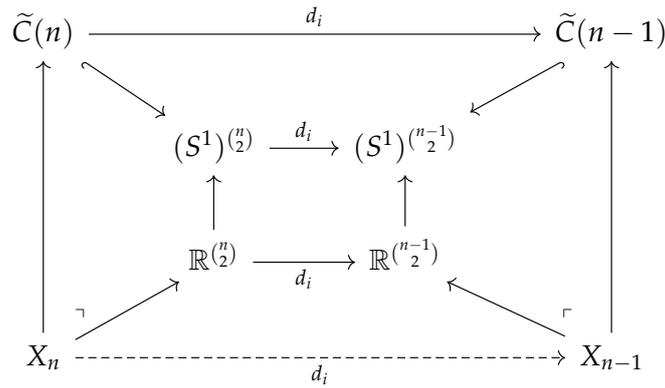
*Proof.* The first part is tautological, and the second part follows easily:

$$s_i(\tilde{\mathcal{C}}(n)) = s_i(\overline{\text{Im}(\curvearrowright_n)}) \subset \overline{s_i(\text{Im}(\curvearrowright_n))} \subset \overline{\tilde{\mathcal{C}}(n+1)} \subset \tilde{\mathcal{C}}(n+1).$$

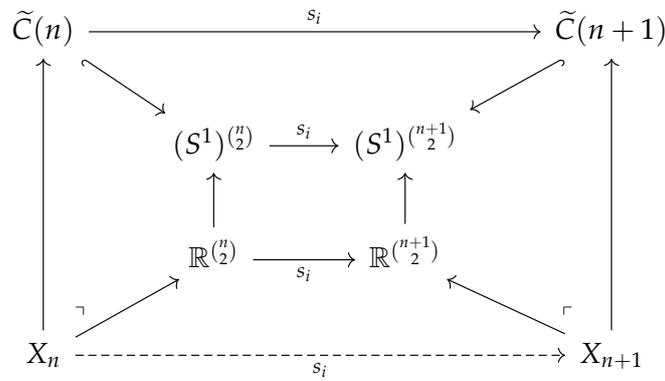
□

**6.4. Stage II: Lift angle-storage along universal covering.** Let  $n \geq 1$ . We are going to define a sequence of maps  $d_0, d_1, \dots, d_n: \mathbb{R}^{\binom{n}{2}} \rightarrow \mathbb{R}^{\binom{n-1}{2}}$  such that each  $d_i$  is a lift for corresponding  $d_i: (S^1)^{\binom{n}{2}} \rightarrow (S^1)^{\binom{n-1}{2}}$  along universal coverings  $\mathbb{R}^k \rightarrow (S^1)^{\binom{k}{2}}$ . For  $i \neq 0$  the map  $d_i$  is a projection, and the last map  $d_0: \mathbb{R}^{\binom{n}{2}} \rightarrow \mathbb{R}^{\binom{n-1}{2}}$  is given by the explicit formula  $d_0(\alpha)_{i,j} = \alpha_{i+1,j+1} - \alpha_{1,i+1} - \alpha_{1,j+1}$ . These maps induce maps  $d_i: X_n \rightarrow X_{n-1}$  by

the universal property for pullback:



Analogously, we should define  $s_0, s_1, \dots, s_n: \mathbb{R}^{\binom{n}{2}} \rightarrow \mathbb{R}^{\binom{n+1}{2}}$  for  $n \geq 0$  by the same formulas but replacing  $1 \in S^1$  with  $0 \in \mathbb{R}$ . As before, these maps induce maps  $s_i: X_n \rightarrow X_{n+1}$  by the universal property:



**6.5. Stage III: Retract to the nice subspaces.** For  $n \geq 0$  consider a subspace

$$Y_n = \{(\alpha_{i,j}) \in X_n \mid \alpha_{1,2} = 0\}.$$

Let  $r_n: X_n \rightarrow Y_n$  be a function defined by the rule  $r(\alpha)_{i,j} = \alpha_{i,j} - \alpha_{1,2}$  for  $(i,j) \in \underline{n} \times \underline{n}$ .

This map is a deformation retraction. Indeed, consider a homotopy  $H: X_n \times I \rightarrow X_n$  given by the formula  $H(\alpha, t)_{i,j} = \alpha_{i,j} - t \cdot \alpha_{1,2}$ . Clearly  $H(-, 0) = \text{id}$ ,  $H(-, 1) = r_n$ , and  $H(-, t)$  acts as identity on  $Y_n$  for every  $t \in I$ .

**Proposition 6.11.** *All simplicial identities hold for the restrictions of structure maps of  $X$  to the subspaces  $Y_n \subset X_n$ .*

*Proof.* If an identity does not involve nor  $d_0$ , nor  $s_0$ , then it clearly holds.

First, we show that  $d_0 \circ d_0|_{Y_n} = d_0 \circ d_1|_{Y_n}$  for  $n \geq 2$ . Let  $\alpha \in Y_n$  and  $(i, j) \in \underline{n-2} \times \underline{n-2}$ . Then

$$\begin{aligned}
 (d_0 \circ d_0)(\alpha)_{i,j} &= d_0(\alpha)_{i+1,j+1} - d_0(\alpha)_{1,i+1} - d_0(\alpha)_{1,j+1} = \\
 &= (\alpha_{i+2,j+2} - \alpha_{1,i+2} - \alpha_{1,j+2}) - (\alpha_{2,i+2} - \underbrace{\alpha_{1,2}}_{=0} - \alpha_{1,i+2}) - (\alpha_{2,j+2} - \underbrace{\alpha_{1,2}}_{=0} - \alpha_{1,j+2}) = \\
 &= \alpha_{i+2,j+2} - \alpha_{2,i+2} - \alpha_{2,j+2} = d_1(\alpha)_{i+1,j+1} - d_1(\alpha)_{1,i+1} - d_1(\alpha)_{1,j+1} = \\
 &= (d_0 \circ d_1)(\alpha)_{i,j}.
 \end{aligned}$$

Second, we show that  $d_0 \circ s_0|_{Y_n} = \text{id}$  for  $n \geq 0$ . Let  $\alpha \in Y_n$  and  $(i, j) \in \underline{n} \times \underline{n}$ . Then

$$d_0(s_0(\alpha))_{i,j} = s_0(\alpha)_{i+1,j+1} - s_0(\alpha)_{1,i+1} - s_0(\alpha)_{1,j+1} = \alpha_{i,j} - \alpha_{1,2} - \alpha_{1,2} = \alpha_{i,j}.$$

Other identities are straightforward. □

This proves Theorem 6.7.

7. ACTION OF AUTOMORPHISMS OF PURE BRAID GROUPS ON  $\pi_*(S^3)$

**7.1. Reflection automorphism.** As shown in [LW09, Lemma 4.3], the invariance of  $Z_n$  and  $Bd_n$  under  $\chi_n$  would follow from the fact that  $\chi_n$  commutes with the homomorphisms  $\partial, d_1, \dots, d_n: \mathcal{P}_n \rightarrow \mathcal{P}_{n-1}$ . The identities  $d_k \circ \chi_n = \chi_{n-1} \circ d_k$  are obvious. To prove the identity  $\partial \circ \chi_n = \chi_{n-1} \circ \partial$ , in [LW09, Lemma 2.3] Li and Wu suggest drawing pictures. For the sake of completeness, we follow their suggestion and provide proof.

Below, we express braids of the form  $\chi_n(A_{i,j})$  in terms of the standard generators of  $\mathcal{P}_n$ . See Figures 11, 12, and 13 for a geometric interpretation. Here, the  $j$ th strand of the braid  $(A_{i,j}A_{i+1,j} \dots A_{j-1,j})^{-1}$  is wrapped around the strands  $i, i+1, \dots, j-1$ , and the  $i$ th strand of the braid  $(A_{i,i+1}A_{i,i+2} \dots A_{i,j})$  is wrapped around the strands  $i+1, i+2, \dots, j$ .

**Lemma 7.1.** For any  $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$  such that  $i < j$ , one has

$$\chi_n(A_{i,j}) = (A_{i,j}A_{i+1,j} \dots A_{j-1,j})^{-1} A_{i,j}^{-1} (A_{i,j}A_{i+1,j} \dots A_{j-1,j}), \tag{7.1}$$

$$\chi_n(A_{i,j}) = (A_{i,i+1}A_{i,i+2} \dots A_{i,j}) A_{i,j}^{-1} (A_{i,i+1}A_{i,i+2} \dots A_{i,j})^{-1}, \tag{7.2}$$

and for any  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ , one has

$$\chi_n(A_{0,j}) = (A_{1,j}A_{2,j} \dots A_{j-1,j})^{-1} A_{0,j}^{-1} (A_{1,j}A_{2,j} \dots A_{j-1,j}). \tag{7.3}$$

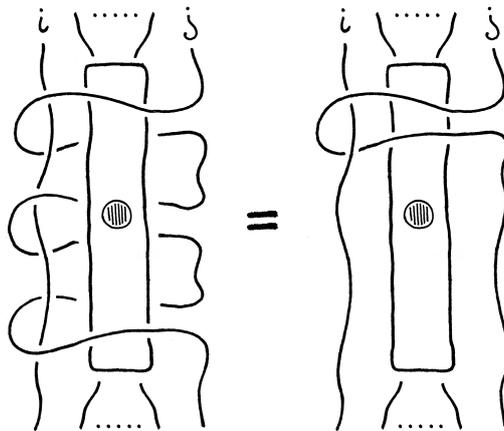


FIGURE 11. Conjugation between  $A_{i,j}^{-1}$  and  $(A_{i,j}A_{i+1,j} \dots A_{j-1,j})$

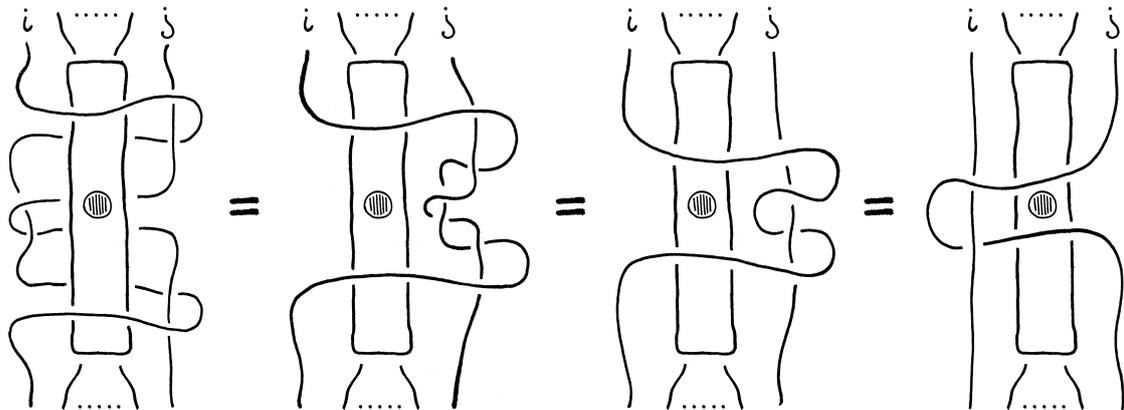


FIGURE 12. Alternative conjugation between  $A_{i,j}^{-1}$  and  $\chi_n(A_{i,j})$ .

*Proof.* The equality (7.1) is satisfied by [BNS18, Lemma 3.1]. It is easy to see that

$$A_{s,t} = \sigma_s^{-1} \sigma_{s+1}^{-1} \cdots \sigma_{t-2}^{-1} \sigma_{t-1}^2 \sigma_{t-2} \cdots \sigma_{s+1} \sigma_s \tag{7.4}$$

for any  $s, t \in \{1, 2, \dots, n\}$  such that  $s < t$ . Let  $\Phi$  be the involutive automorphism of  $\mathcal{B}_n$  given by  $\Phi(\sigma_m) = \sigma_{n-m}^{-1}$ . Then

$$\begin{aligned} \Phi(A_{s,t}) &= \Phi(\sigma_{t-1} \cdots \sigma_{s+1} \sigma_s^2 \sigma_{s+1}^{-1} \cdots \sigma_{t-1}^{-1}) = \sigma_{n-t+1}^{-1} \cdots \sigma_{n-s-1}^{-1} \sigma_{n-s}^{-2} \sigma_{n-s-1} \cdots \sigma_{n-t+1} = \\ &= (\sigma_{n-t+1}^{-1} \cdots \sigma_{n-s-1}^{-1} \sigma_{n-s}^2 \sigma_{n-s-1} \cdots \sigma_{n-t+1})^{-1} \stackrel{(7.4)}{=} A_{n-t+1, n-s+1}^{-1}. \end{aligned}$$

Let  $i' := n - j + 1$  and  $j' := n - i + 1$ . Since  $\Phi \circ \chi_n = \chi_n \circ \Phi$ , one has

$$\begin{aligned} \chi_n(A_{i,j}) &= \chi_n(\Phi(A_{i',j'}^{-1})) = \Phi(\chi_n(A_{i',j'}^{-1})) = \\ &\stackrel{(7.1)}{=} \Phi \left( (A_{i',j'} A_{i'+1,j'} \cdots A_{j'-1,j'})^{-1} A_{i',j'} (A_{i',j'} A_{i'+1,j'} \cdots A_{j'-1,j'}) \right) = \\ &= (A_{i,j}^{-1} A_{i,j-1} \cdots A_{i,i+1})^{-1} A_{i,j}^{-1} (A_{i,j}^{-1} A_{i,j-1} \cdots A_{i,i+1}) = \\ &= (A_{i,i+1} A_{i,i+2} \cdots A_{i,j}) A_{i,j}^{-1} (A_{i,i+1} A_{i,i+2} \cdots A_{i,j})^{-1}, \end{aligned}$$

hence the identity (7.2) follows.

To show that the identity (7.3) holds, we generously apply the results just proved:

$$\begin{aligned} \chi_n(A_{0,j}) &= \chi_n(\underbrace{A_{1,j} A_{2,j} \cdots A_{j-1,j}}_{\text{apply (7.1)}} \cdot \underbrace{A_{j,j+1} A_{j,j+2} \cdots A_{j,n}}_{\text{apply (7.2)}})^{-1} = \\ &= \left[ (A_{1,j} A_{2,j} \cdots A_{j-1,j})^{-1} \cdot \boxed{A_{1,j}^{-1}} \cdot \boxed{A_{1,j}} \cdot \boxed{A_{2,j}} \cdots \boxed{A_{j-1,j}} \cdot \right. \\ &\cdot \boxed{A_{2,j} A_{3,j} \cdots A_{j-1,j}}^{-1} \cdot \boxed{A_{2,j}^{-1}} \cdot \boxed{A_{2,j}} \cdot \boxed{A_{3,j}} \cdots \boxed{A_{j-1,j}} \cdot \dots \cdot \\ &\cdot \boxed{A_{j-1,j}}^{-1} \cdot \boxed{A_{j-1,j}}^{-1} \cdot \boxed{A_{j-1,j}} \cdot \boxed{A_{j,j+1}} \cdot \boxed{A_{j,j+1}}^{-1} \cdot \boxed{A_{j,j+1}}^{-1} \cdot \\ &\cdot \boxed{A_{j,j+1}} \cdot \boxed{A_{j,j+2}} \cdot \boxed{A_{j,j+2}}^{-1} \cdot \boxed{A_{j,j+1} A_{j,j+2}}^{-1} \cdot \dots \cdot \\ &\cdot \boxed{A_{j,j+1} A_{j,j+2} \cdots A_{j,n-1}} \cdot \boxed{A_{j,n}} \cdot \boxed{A_{j,n}}^{-1} \cdot \left. (A_{j,j+1} A_{j,j+2} \cdots A_{j,n-1} A_{j,n})^{-1} \right]^{-1} = \\ &= A_{j,j+1} A_{j,j+2} \cdots A_{j,n} \cdot A_{1,j} A_{2,j} \cdots A_{j-1,j} = \\ &= (A_{1,j} \cdots A_{j-1,j})^{-1} (A_{1,j} \cdots A_{j-1,j} \cdot A_{j,j+1} \cdots A_{j,n}) (A_{1,j} \cdots A_{j-1,j}) = \\ &= (A_{1,j} \cdots A_{j-1,j})^{-1} A_{0,j}^{-1} (A_{1,j} \cdots A_{j-1,j}). \end{aligned}$$

Here adjacent same-colored blocks cancel each other. □

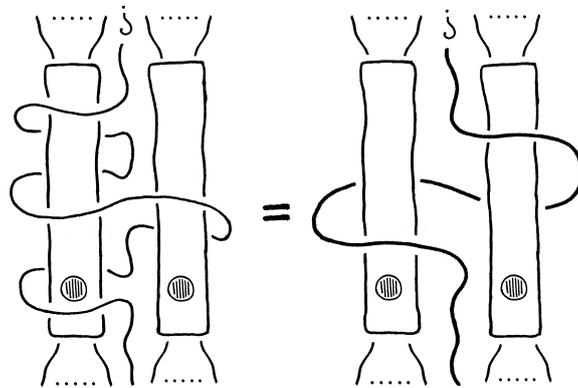


FIGURE 13. Conjugation between  $A_{0,j}^{-1}$  and  $\chi_n(A_{0,j})$ .

**Lemma 7.2.** *The following equality holds:*

$$\partial \circ \chi_n = \chi_{n-1} \circ \partial.$$

*Proof.* Recall that  $\partial = d_1 \circ \theta_n$ . If  $i \geq 2$ , then  $\theta_n(A_{i,j}) = A_{i,j}$ , and by (7.1), we have  $\theta_n(\chi_n(A_{i,j})) = \chi_n(A_{i,j})$ . Consequently,

$$(\theta_n \circ \chi_n)(A_{i,j}) = \chi_n(A_{i,j}) = (\chi_n \circ \theta_n)(A_{i,j}).$$

Therefore,

$$\begin{aligned} (\partial \circ \chi_n)(A_{i,j}) &= (d_1 \circ \theta_n \circ \chi_n)(A_{i,j}) = (d_1 \circ \chi_n \circ \theta_n)(A_{i,j}) \\ &= (\chi_{n-1} \circ d_1 \circ \theta_n)(A_{i,j}) = (\chi_{n-1} \circ \partial)(A_{i,j}). \end{aligned}$$

Next, for  $i = 1$ , we have

$$\begin{aligned} \chi_n(A_{1,j}) &\stackrel{(7.1)}{=} (A_{1,j}A_{2,j} \dots A_{j-1,j})^{-1} A_{1,j}^{-1} (A_{1,j}A_{2,j} \dots A_{j-1,j}) \\ &= (A_{2,j}A_{3,j} \dots A_{j-1,j})^{-1} A_{1,j}^{-1} (A_{2,j}A_{3,j} \dots A_{j-1,j}). \end{aligned}$$

Recall that  $\theta_n(A_{1,j}) = A_{1,j}^{-1} A_{0,j} A_{1,j}$ . We have

$$\begin{aligned} \theta_n(\chi_n(A_{1,j})) &= \theta_n \left( (A_{2,j}A_{3,j} \dots A_{j-1,j})^{-1} A_{1,j}^{-1} (A_{2,j}A_{3,j} \dots A_{j-1,j}) \right) \\ &= (A_{1,j}A_{2,j} \dots A_{j-1,j})^{-1} A_{0,j}^{-1} (A_{1,j}A_{2,j} \dots A_{j-1,j}) \\ &\stackrel{(7.3)}{=} \chi_n(A_{0,j}). \end{aligned}$$

Therefore,

$$\begin{aligned} (\partial \circ \chi_n)(A_{1,j}) &= d_1(\chi_n(A_{0,j})) = \chi_{n-1}(d_1(A_{0,j})) \\ &= \chi_{n-1}(d_1(A_{1,j}^{-1} A_{0,j} A_{1,j})) = \chi_{n-1}(d_1(\theta_n(A_{1,j}))) \\ &= (\chi_{n-1} \circ \partial)(A_{1,j}). \end{aligned}$$

□

**Corollary 7.3.** *The following identities hold:*

- (1)  $\chi_n^2 = \text{id}_{\mathbb{P}^n}$  for every  $n \geq 0$ ;
- (2)  $\chi_{n-1} \circ d_i^{\mathbb{P}} = d_i^{\mathbb{P}} \circ \chi_n$  for every  $n \geq 1$  and  $i \in \{0, \dots, n\}$ ;
- (3)  $\chi_{n+1} \circ s_i^{\mathbb{P}} = s_i^{\mathbb{P}} \circ \chi_n$  for every  $n \geq 0$  and  $i \in \{0, \dots, n\}$ ;
- (4)  $\Psi_{\sigma_i}^{-1} = \Psi_{\sigma_i^{-1}} = \chi_n \circ \Psi_{\sigma_i} \circ \chi_n$  for every  $n \geq 2$  and  $i \in \{1, \dots, n-1\}$ ;
- (5)  $\theta_n^{-1} = \chi_n \circ \theta_n \circ \chi_n$  for every  $n \geq 2$ .

*Proof.* The identity (1) is evident.

The identity (2) for  $i > 0$  is obvious, and for  $i = 0$  follows from Lemma 7.2.

The identity (3) is obvious.

The identity (4) is clear:

$$(\chi_n \circ \Psi_{\sigma_i} \circ \chi_n)(\beta) = \chi_n(\chi_n(\beta)^{\sigma_i}) = \chi_n(\chi_n(\beta))^{\chi_n(\sigma_i)} = \beta^{\sigma_i^{-1}} = \Psi_{\sigma_i^{-1}}(\beta).$$

For identity (5), it is enough to show that  $\theta_n^{-1}(A_{i,j}) = (\chi_n \circ \theta_n \circ \chi_n)(A_{i,j})$  for every  $1 \leq i < j \leq n$ . If  $i > 1$  then it is clear, since in that case  $\chi_n(A_{i,j}) \in \langle A_{s,k} \mid 2 \leq s < k \leq n \rangle$

by (7.1), and both maps  $\theta_n$  and  $\theta_n^{-1}$  act like an identity on this subgroup by (2.3) and (3.2). Hence, it is enough to prove this equality for  $i = 1$ :

$$\begin{aligned} (\chi_n \circ \theta_n \circ \chi_n)(A_{1,j}) &\stackrel{(7.1)}{=} \chi_n \left( \theta_n \left( (A_{1,j}^{-1})^{A_{1,j}A_{2,j}\dots A_{j-1,j}} \right) \right) = \\ &\stackrel{(2.3)}{=} \chi_n \left( (A_{1,j}^{-1}A_{0,j}^{-1}A_{1,j})^{A_{1,j}^{-1}A_{0,j}A_{1,j}\cdot A_{2,j}\dots A_{j-1,j}} \right) = \\ &= \chi_n \left( (A_{0,j}^{-1})^{A_{1,j}A_{2,j}\dots A_{j-1,j}} \right) \stackrel{(7.3)}{=} \chi_n(\chi_n(A_{0,j})) = \\ &= A_{0,j} \stackrel{(3.2)}{=} \theta_n^{-1}(A_{1,j}). \end{aligned}$$

□

**7.2. Proofs of Theorem 1.5 and Theorem 1.6.**

**Lemma 7.4.** *Let  $n \geq 3$ . Then the group of automorphisms  $\text{Aut}(\mathcal{P}_n)$  is generated by the union*

$$\text{Aut}(\mathcal{B}_n) \cup \text{Aut}_c(\mathcal{P}_n) \cup \{\theta_n\}.$$

*Proof.* It is enough to show that  $w_n \in \langle \text{Aut}(\mathcal{B}_n) \cup \text{Aut}_c(\mathcal{P}_n) \cup \{\theta_n\} \rangle$ .

Let  $\Phi$  be the involutive automorphism of  $\mathcal{B}_n$  given by  $\Phi(\sigma_m) = \sigma_{n-m}^{-1}$ . Then

$$\begin{aligned} \Phi(A_{s,t}) &= A_{n-t+1,n-s+1}^{-1} \\ \Phi(A_{0,s}) &= \Phi((A_{1,s}A_{2,s}\dots A_{n,s})^{-1}) = (A_{n-s+1,n}^{-1}A_{n-s+1,n-1}^{-1}\dots A_{1,n-s+1}^{-1})^{-1} = \\ &= A_{1,n-s+1}A_{2,n-s+1}\dots A_{n-s+1,n-1}A_{n-s+1,n} = A_{0,n-s+1}^{-1}. \end{aligned}$$

We claim that  $\Phi \circ \theta_n \circ \Phi = w_n$ . Let  $1 \leq s < t < n$ ; then

$$(\Phi \circ \theta_n \circ \Phi)(A_{s,t}) = \Phi(\theta_n(A_{n-t+1,n-s+1}^{-1})) = \Phi(A_{n-t+1,n-s+1}^{-1}) = A_{s,t} = w_n(A_{s,t}).$$

Let  $1 \leq s < n$ ; then

$$\begin{aligned} (\Phi \circ \theta_n \circ \Phi)(A_{s,n}) &= \Phi(\theta_n(A_{1,n-s+1}^{-1})) = \Phi(A_{1,n-s+1}^{-1}A_{0,n-s+1}^{-1}A_{1,n-s+1}) = \\ &= A_{s,n}A_{0,s}A_{s,n}^{-1} = w_n(A_{s,n}). \end{aligned}$$

The claim is proved. □

**Corollary 7.5.** *The subgroups  $Z_n$  and  $\text{Bd}_n$  are characteristic in  $\mathcal{P}_n$  for  $n \geq 3$ .*

*Proof.* The group  $\text{Aut}_c(\mathcal{P}_n)$  acts trivially on  $[\mathcal{P}_n, \mathcal{P}_n]$ , hence every central automorphism preserves both  $Z_n$  and  $\text{Bd}_n$ .

By Corollary 7.3, the subgroups  $Z_n$  and  $\text{Bd}_n$  are invariant under the reflection automorphism  $\chi_n$ .

Since  $Z_n = (\mathcal{Z}[\mathbb{P}, \mathbb{P}])_n$  and  $\text{Bd}_n = (\mathcal{B}[\mathbb{P}, \mathbb{P}])_n$ , these groups are invariant under the action  $\Lambda_n$  by [Wu02, Proposition 2.3]. Note that  $\text{Im}(\Lambda_n) \supset \{\Psi_{\sigma_1^{-1}}, \dots, \Psi_{\sigma_{n-1}^{-1}}, \theta_n\}$ . The result follows. □

In [Wu02], Jie Wu proved the following consequence of the Homotopy Addition Theorem.

**Lemma 7.6** ([Wu02, Lemma 2.8]). *Let  $X$  be a braided simplicial group and the braid action  $\Lambda_n: \mathcal{B}_{n+1} \rightarrow \text{Aut}(X_n)$ ,  $n \geq 0$ . Let  $x \in (\mathcal{Z}X)_n$  be a cycle with  $n \geq 1$ . Then*

$$\Lambda_n(\sigma_k)(x) \simeq x^{-1} \text{ for each } k \geq 0.$$

Recall that ‘to be homotopic’ in this context means ‘to be in the same right coset of  $(\mathcal{B}X)_n$ ’.

*Proof of Theorem 1.6.* In light of Lemma 7.4, it is enough to show that both compositions agree on each automorphism of  $\mathcal{P}_n$  from the generating set  $\text{Aut}(\mathcal{B}_n) \cup \text{Aut}_c(\mathcal{P}_n) \cup \{\theta_n\}$ .

We already saw that  $\text{Aut}_c(\mathcal{P}_n)$  act trivially on  $Z_n$  and  $\text{Bd}_n$ . In [LW09], authors proved that  $\chi_n$  induces an identity action on homotopy groups.

Hence, it is enough to show that the remaining automorphisms  $\theta_n, \Psi_{\sigma_1^{-1}}, \dots, \Psi_{\sigma_{n-1}^{-1}}$  induce a negation automorphism  $x \mapsto -x$ . But this is indeed true by Lemma 7.6.  $\square$

**7.3. On triviality of the action and homotopy groups of  $S^3$ .** Our computations implies that  $\text{Im}(r_n) = \{-\text{id}, \text{id}\}$ . Therefore, the action  $\text{Aut}(\mathcal{P}_n) \curvearrowright \pi_n(S^3)$  is trivial if and only if  $2 \cdot \pi_n(S^3) = 0$ , i.e. if  $\pi_n(S^3)$  is a  $\mathbf{Z}/2$ -vector space.

By Serre theorem,  $\pi_n(S^3)$  is a finite abelian group for  $n \geq 4$ , hence a direct sum of finite cyclic groups. Let  $\pi_n(S^3)_p$  denotes a  $p$ -primary component in  $\pi_n(S^3)$ . It is known that  $4 \cdot \pi_n(S^3)_2 = 0$  and  $p \cdot \pi_n(S^3)_p = 0$  for every odd prime  $p$ . That is, for every  $n \geq 4$  one has

$$\pi_n(S^3) = (\mathbf{Z}/2)^{n_2} \oplus (\mathbf{Z}/4)^{n_4} \oplus \bigoplus_{\text{odd prime } p} (\mathbf{Z}/p)^{n_p},$$

where  $n_i$  are some integers with only finitely many non-zero values.

All groups  $\pi_n(S^3)$  for  $n \geq 3$  are known to be non-trivial, see [IMW15]. There are some known series of non-vanishing spheroids in  $S^3$ . Here are some of them:  $\pi_{8n+5}(S^3) \supset \mathbf{Z}/2$ ,  $\pi_{8n+6}(S^3) \supset \mathbf{Z}/4$ ,  $\pi_{4n+1}(S^3) \supset \mathbf{Z}/3$ ,  $\pi_{8n+1}(S^3) \supset \mathbf{Z}/15$ .

The only dimensions  $k \in \underline{21}$  with  $\pi_k(S^3)$  being  $\mathbf{Z}/2$ -vector space are the following:

$$\begin{aligned} \pi_4(S^3) &= \mathbf{Z}/2, \\ \pi_5(S^3) &= \mathbf{Z}/2, \\ \pi_7(S^3) &= \mathbf{Z}/2, \\ \pi_8(S^3) &= \mathbf{Z}/2, \\ \pi_{11}(S^3) &= \mathbf{Z}/2, \\ \pi_{12}(S^3) &= \mathbf{Z}/2 \oplus \mathbf{Z}/2, \\ \pi_{15}(S^3) &= \mathbf{Z}/2 \oplus \mathbf{Z}/2. \end{aligned}$$

There is an interesting challenge to obtain a description of set of those indices  $k$ , such that  $\pi_k(S^3)$  is a 2-torsion group.

### APPENDIX A. COMPUTATIONS

**A.1. Explicit formulas for structure maps of  $\mathbb{P}$ .** In this section we give formulas for faces and degeneracies of simplicial bunch  $\mathbb{P}$ . Since faces and degeneracies can sometimes throw out braids  $z_n$  and  $A_{0,j}$ , the computational complexity of closed forms for  $d_i^{\mathbb{P}}$ 's and  $s_i^{\mathbb{P}}$ 's in the alphabet  $\{A_{i,j} \mid 1 \leq i < j \leq n\}$  is  $\mathcal{O}(n^2)$ . We provide calculations for the extended alphabet  $\{A_{i,j}, A_{0,k}, z_n \mid 1 \leq i < j \leq n, 1 \leq k \leq n\}$ , and obtain closed forms of length  $\mathcal{O}(1)$ .

In [LW09], authors provide the explicit formulas for the actions of faces and degeneracies of AP on standard generating set  $\{A_{s,k} \mid 1 \leq s < k \leq n+1\}$  of  $\text{AP}_n = \mathcal{P}_{n+1}$ . For any

$n \geq 1$  and  $i \in \{0, \dots, n\}$  one has:

$$d_i^{\text{AP}}(A_{s,k}) = \begin{cases} A_{s,k}, & 1 \leq s < k < i + 1, \\ A_{s,k-1}, & 1 \leq s < i + 1 < k \leq n + 1, \\ \mathbf{1}, & i + 1 = s < k \leq n + 1 \text{ or } 1 \leq s < k = i + 1, \\ A_{s-1,k-1}, & i + 1 < s < k \leq n + 1; \end{cases}$$

and for any  $n \geq 0$  and  $i \in \{0, \dots, n\}$  one has:

$$s_i^{\text{AP}}(A_{s,k}) = \begin{cases} A_{s,k}, & 1 \leq s < k < i + 1, \\ A_{s,k}A_{s,k+1}, & 1 \leq s < k = i + 1, \\ A_{s,k+1}, & 1 \leq s < i + 1 < k \leq n + 1, \\ A_{s,k+1}A_{s+1,k+1}, & i + 1 = s < k \leq n + 1, \\ A_{s+1,k+1}, & i + 1 < s < k \leq n + 1. \end{cases}$$

**Proposition A.1.** *Let  $n \geq 2$ . Then the following formulas do hold.*

- (1) *We have  $d_0^{\text{P}}(A_{s,k}) = A_{s-1,k-1}$  for any  $s, k \in \{1, 2, \dots, n\}$  such that  $s < k$ .*
- (2) *We have*

$$d_i^{\text{P}}(A_{s,k}) = \begin{cases} A_{s,k}, & 1 \leq s < k < i \text{ or } 0 = s < k < i, \\ A_{s,k-1}, & 1 \leq s < i < k \leq n, \\ \mathbf{1}, & i = s < k \leq n \text{ or } 1 \leq s < k = i, \\ A_{s-1,k-1}, & i < s < k \leq n, \end{cases}$$

for any  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ .

- (3) *We have  $s_0^{\text{P}}(A_{s,k}) = A_{s+1,k+1}$  for any  $s, k \in \{1, 2, \dots, n\}$  where  $s < k$ .*
- (4) *We have*

$$s_i^{\text{P}}(A_{s,k}) = \begin{cases} A_{s,k}, & 1 \leq s < k < i, \\ A_{s,k}A_{s,k+1}, & 1 \leq s < k = i, \\ A_{s,k+1}, & 1 \leq s < i < k \leq n, \\ A_{s,k+1}A_{s+1,k+1}, & i = s < k \leq n, \\ A_{s+1,k+1}, & i < s < k \leq n. \end{cases}$$

for any  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ .

*Proof.* The first formula holds since  $d_0^{\text{P}} = \partial_n$ .

The second and the forth formulas do hold since  $d_i^{\text{P}} = d_{i-1}^{\text{P}}$  and  $s_i^{\text{P}} = s_{i-1}^{\text{P}}$  for any  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ .

The third formula is straightforward:

$$s_0^{\text{P}}(A_{s,k}) = s_0^{\text{P}}(\sigma_{k-1}\sigma_{k-2} \dots \sigma_{s+1}\sigma_s^2\sigma_{s+1}^{-1} \dots \sigma_{k-2}^{-1}\sigma_{k-1}^{-1}) = \sigma_k\sigma_{k-1} \dots \sigma_{s+2}\sigma_{s+1}^2\sigma_{s+2}^{-1} \dots \sigma_{k-1}^{-1}\sigma_k^{-1} = A_{s+1,k+1}. \quad \square$$

**Lemma A.2.** *For any  $n \geq 2$  and  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  in  $\mathcal{P}_{n+1}$  one has  $s_i^{\text{P}}(z_n) = z_{n+1}A_{i,i+1}^{-1}$ .*

*Proof.* Recall that

$$z_n = A_{1,2}(A_{1,3}A_{2,3}) \dots (A_{1,n}A_{2,n} \dots A_{n-1,n}).$$

Hence,

$$s_i^{\text{P}}(z_n) = s_i^{\text{P}}\left(\prod_{k=2}^n \prod_{s=1}^{k-1} A_{s,k}\right) = s_i^{\text{P}}\left(\prod_{k=2}^{i-1} \prod_{s=1}^{k-1} A_{s,k}\right) \cdot s_i^{\text{P}}\left(\prod_{s=1}^{i-1} A_{s,i}\right) \cdot s_i^{\text{P}}\left(\prod_{k=i+1}^n \prod_{s=1}^{k-1} A_{s,k}\right). \quad (\text{A.1})$$

First, we have

$$s_i^{\mathbb{P}} \left( \prod_{k=2}^{i-1} \prod_{s=1}^{k-1} A_{s,k} \right) = \prod_{k=2}^{i-1} \prod_{s=1}^{k-1} s_i^{\mathbb{P}}(A_{s,k}) = \prod_{k=2}^{i-1} \prod_{s=1}^{k-1} A_{s,k}. \quad (\text{A.2})$$

Second, we have

$$s_i^{\mathbb{P}} \left( \prod_{s=1}^{i-1} A_{s,i} \right) = \prod_{s=1}^{i-1} s_i^{\mathbb{P}}(A_{s,i}) = \prod_{s=1}^{i-1} A_{s,i} A_{s,i+1}. \quad (\text{A.3})$$

Next, we claim that

$$\prod_{s=1}^m A_{s,i} A_{s,i+1} = \prod_{s=1}^m A_{s,i} \cdot \prod_{s=1}^m A_{s,i+1} \quad (\text{A.4})$$

for any  $m \in \{1, 2, \dots, i-1\}$ . The proof is by induction on  $m$ . For the base case  $m = 1$  there is nothing to prove. Next, we prove the inductive step. For  $m \geq 2$ , we have

$$\begin{aligned} \prod_{s=1}^m A_{s,i} A_{s,i+1} &= \prod_{s=1}^{m-1} A_{s,i} A_{s,i+1} \cdot A_{m,i} A_{m,i+1} \\ &= \prod_{s=1}^{m-1} A_{s,i} \cdot \prod_{s=1}^{m-1} A_{s,i+1} \cdot A_{m,i} A_{m,i+1} \quad \text{by inductive hypothesis} \\ &= \prod_{s=1}^{m-1} A_{s,i} \cdot A_{m,i} \cdot \prod_{s=1}^{m-1} A_{s,i+1} \cdot A_{m,i+1} \\ &= \prod_{s=1}^m A_{s,i} \cdot \prod_{s=1}^m A_{s,i+1}. \end{aligned}$$

The equality of the expressions in second and third lines is followed from the fact that the braid  $A_{m,i}$  commutes with the braid  $A_{s,i+1}$ , whenever  $s \in \{1, 2, \dots, m-1\}$ . The claim follows.

Therefore,

$$s_i^{\mathbb{P}} \left( \prod_{s=1}^{i-1} A_{s,i} \right) \stackrel{(\text{A.3})}{=} \prod_{s=1}^{i-1} A_{s,i} A_{s,i+1} \stackrel{(\text{A.4})}{=} \prod_{s=1}^{i-1} A_{s,i} \cdot \prod_{s=1}^{i-1} A_{s,i+1} = \prod_{k=i}^{i+1} \prod_{s=1}^{k-1} A_{s,k} \cdot A_{i,i+1}^{-1}. \quad (\text{A.5})$$

Third, we have

$$\begin{aligned} s_i^{\mathbb{P}} \left( \prod_{k=i+1}^n \prod_{s=1}^{k-1} A_{s,k} \right) &= \prod_{k=i+1}^n \left( \prod_{s=1}^{i-1} s_i^{\mathbb{P}}(A_{s,k}) \cdot s_i^{\mathbb{P}}(A_{i,k}) \cdot \prod_{s=i+1}^{k-1} s_i^{\mathbb{P}}(A_{s,k}) \right) \\ &= \prod_{k=i+1}^n \left( \prod_{s=1}^{i-1} A_{s,k+1} \cdot A_{i,k+1} A_{i+1,k+1} \cdot \prod_{s=i+1}^{k-1} A_{s+1,k+1} \right) = \prod_{k=i+2}^{n+1} \prod_{s=1}^{k-1} A_{s,k}. \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

By (A.2), (A.5) and (A.6), we have

$$s_i^{\mathbb{P}}(z_n) \stackrel{(\text{A.1})}{=} \prod_{k=2}^{i-1} \prod_{s=1}^{k-1} A_{s,k} \cdot \prod_{k=i}^{i+1} \prod_{s=1}^{k-1} A_{s,k} \cdot A_{i,i+1}^{-1} \cdot \prod_{k=i+2}^{n+1} \prod_{s=1}^{k-1} A_{s,k} = \prod_{k=2}^{i+1} \prod_{s=1}^{k-1} A_{s,k} \cdot A_{i,i+1}^{-1} \cdot \prod_{k=i+2}^{n+1} \prod_{s=1}^{k-1} A_{s,k}. \quad (\text{A.7})$$

We set  $a_m := A_{m,m+1}$ ,  $b_m := \prod_{s=1}^{m-1} A_{s,m} \cdot \prod_{s=1}^m A_{s,m+1}$ . Next, we claim that  $a_m$  and  $b_m$  commute for any  $m \in \{1, 2, \dots, i\}$ . The proof is by induction on  $m$ . For the base case  $m = 1$  there is nothing to prove.

Next, we prove the inductive step. Let  $m \geq 2$ . Note that the braids  $a_m$  and  $b_m$  are fixed points of the endomorphism  $s_1^{\mathbb{P}} \circ d_1^{\mathbb{P}} \in \text{End}(\mathcal{P}_{n+1})$ . Indeed, we have

$$\begin{aligned} d_1^{\mathbb{P}}(a_m) &= A_{m-1,m} = a_{m-1}, \\ d_1^{\mathbb{P}}(b_m) &= \prod_{s=2}^{m-1} A_{s-1,m-1} \cdot \prod_{s=2}^m A_{s-1,m} = \prod_{s=1}^{m-2} A_{s,m-1} \cdot \prod_{s=1}^{m-1} A_{s,m} = b_{m-1}, \end{aligned} \tag{A.8}$$

and

$$\begin{aligned} s_1^{\mathbb{P}}(a_{m-1}) &= s_1^{\mathbb{P}}(A_{m-1,m}) = A_{m,m+1} = a_m, \\ s_1^{\mathbb{P}}(b_{m-1}) &= s_1^{\mathbb{P}}\left(\prod_{s=1}^{m-2} A_{s,m-1} \cdot \prod_{s=1}^{m-1} A_{s,m}\right) \\ &= \left(A_{1,m}A_{2,m} \cdot \prod_{s=2}^{m-2} A_{s+1,m}\right) \cdot \left(A_{1,m+1}A_{2,m+1} \cdot \prod_{s=2}^{m-1} A_{s+1,m+1}\right) \\ &= \prod_{s=1}^{m-1} A_{s,m} \cdot \prod_{s=1}^m A_{s,m+1} = b_m. \end{aligned} \tag{A.9}$$

Hence,

$$\begin{aligned} a_m b_m &= (s_1^{\mathbb{P}} \circ d_1^{\mathbb{P}})(a_m b_m) \stackrel{(A.8)}{=} s_1^{\mathbb{P}}(a_{m-1} b_{m-1}) \\ &= s_1^{\mathbb{P}}(b_{m-1} a_{m-1}) \text{ by inductive hypothesis} \\ &\stackrel{(A.9)}{=} b_m a_m. \end{aligned}$$

Therefore, the claim is proved.

Hence, the braid  $A_{i,i+1}^{-1}$  commutes with the braid  $\prod_{k=i}^{i+1} \prod_{s=1}^{k-1} A_{s,k}$ . Since the braid  $A_{i,i+1}^{-1}$  commutes also with the braid  $A_{s,k}$ , whenever  $s, k \in \{1, 2, \dots, i-1\}$ , we have

$$s_i^{\mathbb{P}}(z_n) \stackrel{(A.7)}{=} A_{i,i+1}^{-1} \cdot \prod_{k=2}^{i+1} \prod_{s=1}^{k-1} A_{s,k} \cdot \prod_{k=i+2}^{n+1} \prod_{s=1}^{k-1} A_{s,k} = A_{i,i+1}^{-1} \cdot \prod_{k=2}^{n+1} \prod_{s=1}^{k-1} A_{s,k} = A_{i,i+1}^{-1} z_{n+1} = z_{n+1} A_{i,i+1}^{-1}.$$

□

**Proposition A.3.** *Let  $n \geq 2$ .*

*Firstly, we have*

$$s_0^{\mathbb{P}}(A_{0,k}) = A_{0,k+1} A_{1,k+1}$$

*for any  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ .*

*Secondly, for any  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  we have*

$$s_i^{\mathbb{P}}(A_{0,k}) = \begin{cases} A_{0,k}, & 1 \leq k < i, \\ A_{0,i} A_{0,i+1} A_{i,i+1}^2, & k = i, \\ A_{0,k+1}, & i < k \leq n. \end{cases}$$

*Proof.* The first part of this proposition is easy:

$$\begin{aligned} s_0^{\mathbb{P}}(A_{0,k}) &= s_0^{\mathbb{P}}\left(\left(A_{1,k} A_{2,k} \dots A_{n,k}\right)^{-1}\right) = \left(A_{2,k+1} A_{3,k+1} \dots A_{n+1,k+1}\right)^{-1} \\ &= \left(A_{1,k+1}^{-1} A_{1,k+1} \cdot A_{2,k+1} A_{3,k+1} \dots A_{n+1,k+1}\right)^{-1} = A_{0,k+1} A_{1,k+1}. \end{aligned}$$

The second part is not hard either, but it requires some computations.

Let  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ .

First, if  $k \in \{1, 2, \dots, i-1\}$  then

$$s_i^{\mathbb{P}}(A_{0,k}) = s_i^{\mathbb{P}}\left((A_{1,k}A_{2,k} \dots A_{n,k})^{-1}\right) = (A_{1,k}A_{2,k} \dots A_{n,k})^{-1} = A_{0,k}.$$

Second, if  $k \in \{i+1, i+2, \dots, n\}$  then

$$\begin{aligned} s_i^{\mathbb{P}}(A_{0,k}) &= s_i^{\mathbb{P}}\left((A_{1,k}A_{2,k} \dots A_{i-1,k} \cdot A_{i,k} \cdot A_{i+1,k}A_{i+2,k} \dots A_{n,k})^{-1}\right) \\ &= (A_{1,k+1}A_{2,k+1} \dots A_{i-1,k+1} \cdot A_{i,k+1}A_{i+1,k+1} \cdot A_{i+2,k+1} \dots A_{n+1,k+1})^{-1} = A_{0,k+1}. \end{aligned}$$

By Lemma 3.2 we have

$$A_{0,i} = (A_{0,1} \dots A_{0,i-1})^{-1}(A_{0,i+1} \dots A_{0,n})^{-1}z_n^{-2}. \quad (\text{A.10})$$

Hence,

$$s_i^{\mathbb{P}}(A_{0,i}) \stackrel{(\text{A.10})}{=} (A_{0,1} \dots A_{0,i-1})^{-1}(A_{0,i+1} \dots A_{0,n+1})s_i^{\mathbb{P}}(z_n)^{-2}. \quad (\text{A.11})$$

Note that by Lemma A.2 we have  $s_i^{\mathbb{P}}(z_n)^{-2} = z_{n+1}^{-2}A_{i,i+1}^2$ . Hence,

$$s_i^{\mathbb{P}}(A_{0,i}) \stackrel{(\text{A.11})}{=} A_{0,i} \cdot (A_{0,1} \dots A_{0,i})^{-1}(A_{0,i+1} \dots A_{0,n+1})^{-1}z_{n+1}^{-2} \cdot A_{i,i+1}^2 \stackrel{(\text{A.10})}{=} A_{0,i}A_{0,i+1}A_{i,i+1}^2. \quad \square$$

**Proposition A.4.** *Let  $n \geq 2$ .*

Firstly, we have

$$d_0^{\mathbb{P}}(A_{0,k}) = \begin{cases} z_{n-1}^2, & k = 1, \\ \mathbf{1}, & 2 \leq k \leq n. \end{cases}$$

Secondly, we have

$$d_i^{\mathbb{P}}(A_{0,k}) = \begin{cases} A_{0,k}, & 1 \leq k < i, \\ \mathbf{1}, & k = i, \\ A_{0,k-1}, & i < k \leq n, \end{cases}$$

for any  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ .

*Proof.* Let us prove the first part of this proposition. Recall that  $d_0^{\mathbb{P}} = \partial_n$ . By [BC<sup>+</sup>06, Part (1) of Lemma 6.5.2], for any  $k \in \{2, 3, \dots, n\}$ , one has  $\partial_n(A_{0,k}) = \mathbf{1}$ . The equality  $\partial_n(A_{0,1}) = z_{n-1}^2$  is pretty straightforward knowing Lemma 3.2:

$$\begin{aligned} \partial_n(A_{0,1}) &= (d_1 \circ \theta_n)\left(A_{1,n}^{-1}A_{1,n-1}^{-1} \dots A_{1,2}^{-1}\right) \\ &= d_1\left(\left(A_{1,n}^{-1}A_{0,n}A_{1,n}\right)^{-1}\left(A_{1,n-1}^{-1}A_{0,n-1}A_{1,n-1}\right)^{-1} \dots \left(A_{1,2}^{-1}A_{0,2}A_{1,2}\right)^{-1}\right) \quad (\text{A.12}) \\ &= A_{0,n-1}^{-1}A_{0,n-2}^{-1} \dots A_{0,1}^{-1} = z_{n-1}^2. \end{aligned}$$

Now we are in position of proving the second part of this proposition. Let  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ .

If  $1 \leq k < i$  then

$$\begin{aligned} d_i^{\mathbb{P}}(A_{0,k}) &= d_i^{\mathbb{P}}\left((A_{1,k} \dots A_{k,i-1} \cdot A_{k,i} \cdot A_{k,i+1} \dots A_{k,n})^{-1}\right) = \\ &= (A_{1,k} \dots A_{k,i-1} \cdot \mathbf{1} \cdot A_{k,i} \dots A_{k,n-1})^{-1} = A_{0,k}. \end{aligned}$$

If  $k = i$  then

$$d_i^{\mathbb{P}}(A_{0,i}) = d_i^{\mathbb{P}}\left((A_{1,i}A_{2,i} \dots A_{n,i})^{-1}\right) = \mathbf{1}.$$

If  $i < k \leq n$  then

$$\begin{aligned} d_i^{\mathbb{P}}(A_{0,k}) &= d_i^{\mathbb{P}}\left((A_{1,k} \dots A_{i-1,k} \cdot A_{i,k} \cdot A_{k,i+1} \dots A_{k,n})^{-1}\right) = \\ &= (A_{1,k-1} \dots A_{i-2,k} \cdot \mathbf{1} \cdot A_{k-1,i-1} \dots A_{k-1,n-1})^{-1} = A_{0,k-1}. \end{aligned}$$

□

**A.2. Verification of identities in the proofs of Lemma 5.7 and Theorem 5.10.** In this section we provide computations needed in proofs of Lemma 5.7 and Theorem 5.10.

range of $s$ and $k$	$A_{s,k} \xrightarrow{\Psi_{\sigma_1^{-1}}} \bullet \xrightarrow{d_0^{\mathbb{P}}} \bullet$
	$A_{s,k} \xrightarrow{d_0^{\mathbb{P}}} \bullet \xrightarrow{\theta_n} \bullet$
$3 \leq s < k$	$A_{s,k} \mapsto A_{s,k} \mapsto A_{s-1,k-1}$
	$A_{s,k} \mapsto A_{s,k} \mapsto A_{s-1,k-1}$
$2 = s < k$	$A_{2,k} \mapsto A_{1,k}^{A_{2,k}} \mapsto A_{0,k-1}^{A_{1,k-1}}$
	$A_{2,k} \mapsto A_{1,k-1} \mapsto A_{0,k-1}^{A_{1,k-1}}$
$1 = s, 3 \leq k$	$A_{1,k} \mapsto A_{2,k} \mapsto A_{1,k-1}$
	$A_{1,k} \mapsto A_{0,k-1} \mapsto A_{1,k-1}$

TABLE 1. Proof of the identity  $\partial_{n+1} \circ \Psi_{\sigma_1^{-1}}(A_{s,k}) = \theta_n \circ \partial_{n+1}(A_{s,k})$  where  $(s,k) \neq (1,2)$ .

range of $s$ and $k$	$A_{s,k} \xrightarrow{\Psi_{\sigma_j}} \bullet \xrightarrow{d_j^{\mathbb{P}}} \bullet$
	$A_{s,k} \xrightarrow{d_{j+1}^{\mathbb{P}}} \bullet$
$j+1 = s < k$	$A_{j+1,k} \mapsto A_{j,k} \mapsto \mathbf{1}$
	$A_{j+1,k} \mapsto \mathbf{1}$
$j = s < k-1$	$A_{j,k} \mapsto A_{j+1,k}^{A_{j,j+1}} \mapsto A_{j,k-1}$
	$A_{j,k} \mapsto A_{j,k-1}$
$s < k-1 = j$	$A_{s,j+1} \mapsto A_{s,j} \mapsto \mathbf{1}$
	$A_{s,j+1} \mapsto \mathbf{1}$
$s < k = j$	$A_{s,j} \mapsto A_{s,j+1}^{A_{j,j+1}} \mapsto A_{s,j}$
	$A_{s,j} \mapsto A_{s,j}$
otherwise	$A_{s,k} \mapsto A_{s,k} \mapsto d_j^{\mathbb{P}}(A_{s,k}) =: A_{s',k'}$
	$A_{s,j} \mapsto A_{s',k'}$ , since $j$ and $j+1$ are in the same interval from $\{1, \dots, s-1\}$ , $\{s+1, \dots, k-1\}$ and $\{k+1, \dots, n\}$

TABLE 2. Proof of the identity  $d_j^{\mathbb{P}} \circ \Psi_{\sigma_j} = d_{j+1}^{\mathbb{P}}$ .

range of $s$ and $k$	$A_{s,k} \xrightarrow{\theta_n^{-1}} \bullet \xrightarrow{d_1^{\mathbb{P}}} \bullet$
	$A_{s,k} \xrightarrow{d_0^{\mathbb{P}}} \bullet$
$1 = s < k$	$A_{1,k} \mapsto A_{0,k} \mapsto A_{0,k-1}$
	$A_{1,k} \mapsto A_{0,k-1}$
$1 < s < k$	$A_{s,k} \mapsto A_{s,k} \mapsto A_{s-1,k-1}$
	$A_{s,k} \mapsto A_{s-1,k-1}$

TABLE 3. Proof of the identity  $d_1^{\mathbb{P}} \circ \theta_n^{-1} = d_0^{\mathbb{P}}$ .

range of $s$ and $k$	$A_{s,k} \xrightarrow{\Psi_{\sigma_{i-1}}} \bullet \xrightarrow{s_0^{\mathbb{P}}} \bullet$
	$A_{s,k} \xrightarrow{s_0^{\mathbb{P}}} \bullet \xrightarrow{\Psi_{\sigma_i}} \bullet$
$i = s < k$	$A_{i,k} \mapsto A_{i-1,k} \mapsto A_{i,k+1}$
	$A_{i,k} \mapsto A_{i+1,k+1} \mapsto A_{i,k+1}$
$i - 1 = s < k - 1$	$A_{i-1,k} \mapsto A_{i,k}^{A_{i-1,i}} \mapsto A_{i+1,k+1}^{A_{i,i+1}}$
	$A_{i-1,k} \mapsto A_{i,k+1} \mapsto A_{i+1,k+1}^{A_{i,i+1}}$
$s < k - 1 = i - 1$	$A_{s,i} \mapsto A_{s,i-1} \mapsto A_{s+1,i}$
	$A_{s,i} \mapsto A_{s+1,i+1} \mapsto A_{s+1,i}$
$k = i - 1$	$A_{s,i-1} \mapsto A_{s,i}^{A_{i-1,i}} \mapsto A_{s+1,i+1}^{A_{i,i+1}}$
	$A_{s,i-1} \mapsto A_{s+1,i} \mapsto A_{s+1,i+1}^{A_{i,i+1}}$
otherwise	$A_{s,k} \mapsto A_{s,k} \mapsto A_{s+1,k+1}$
	$A_{s,k} \mapsto A_{s+1,k+1} \mapsto A_{s+1,k+1}$

TABLE 4. Proof of the identity  $s_0^{\mathbb{P}} \circ \Psi_{\sigma_{i-1}} = \Psi_{\sigma_i} \circ s_0^{\mathbb{P}}$ .

APPENDIX B. COMPACTIFICATIONS OF CONFIGURATION SPACES

The Fulton-MacPherson compactification first appeared in algebro-geometric setting in [FM94], where it was defined as some closure in a product of blow-ups. This definition was translated in manifold-theoretic setting in [AS94]. We are interested in a particular version of this compactification proposed by Kontsevich (see [Kon99, Definition 12]). In [Sin04], Dev Sinha developed a plethora of such compactifications and established their equivalence. In particular, the Proposition 6.2 follows from the results of his paper.

**B.1. Explanation of Proposition 6.2.** We quickly recall the kaleidoscope of configuration spaces appearing in [Sin04].

Let  $d, n \geq 1$  be some integers. If  $M$  is a space, let  $C_n(M)$  be the subspace of  $(x_i) \in M^n$  such that  $x_i \neq x_j$  if  $i \neq j$ . Note that the group of translations and of scale transformations  $\mathbb{R}^d \rtimes \mathbb{R}_{>0}$  acts canonically on  $\mathbb{R}^d$  and hence diagonally on  $C_n(M)$ . Let  $\tilde{C}_n(\mathbb{R}^d)$  denotes a resulting quotient space.

For  $(i, j) \in C_2(\underline{n})$ , let  $\pi_{i,j}: C_n(\mathbb{R}^d) \rightarrow S^{d-1}$  be the map which sends  $(x_i)$  to the unit vector in the direction of  $x_i - x_j$ .

For  $(i, j, k) \in C_3(\underline{n})$ , let  $s_{i,j,k}: C_n(\mathbb{R}^d) \rightarrow [0, \infty]$  be the map which sends  $(x_i)$  to the fraction  $|x_i - x_j|/|x_i - x_k|$ .

Consider the following four spaces obtained as closures of the images of some maps in their codomains:

$$\begin{aligned}
 C_n[\mathbb{R}^d] &:= \text{Im} \left( \overline{C_n(\mathbb{R}^d) \xrightarrow{\iota \times (\pi_{i,j}) \times (s_{i,j,k})} M^n \times (S^{d-1})C_2(\underline{n}) \times [0, \infty]C_3(\underline{n})} \right), \\
 C_n\langle[\mathbb{R}^d]\rangle &:= \text{Im} \left( \overline{C_n(\mathbb{R}^d) \xrightarrow{\iota \times (\pi_{i,j})} M^n \times (S^{d-1})C_2(\underline{n})} \right), \\
 \tilde{C}_n[\mathbb{R}^d] &:= \text{Im} \left( \overline{C_n(\mathbb{R}^d) \xrightarrow{(\pi_{i,j}) \times (s_{i,j,k})} (S^{d-1})C_2(\underline{n}) \times [0, \infty]C_3(\underline{n})} \right), \\
 \tilde{C}_n\langle[\mathbb{R}^d]\rangle &:= \text{Im} \left( \overline{C_n(\mathbb{R}^d) \xrightarrow{(\pi_{i,j})} (S^{d-1})C_2(\underline{n})} \right).
 \end{aligned}$$

Note that the space  $C_n(\mathbb{R}^2)$  coincides with the space  $\text{Conf}(\mathbb{C}, n)$  if we identify  $\mathbb{C}$  with  $\mathbb{R}^2$ . Also note that  $\pi_{j,i} = -\pi_{i,j} = \text{pr}_{(i,j)} \circ \blacktriangleright$  for every pair of indices  $(i, j) \in C_2(\underline{n})$  such

that  $i < j$ , where  $\blacktriangleleft: \text{Conf}(\mathbb{C}, n) \rightarrow (S^1)^{\binom{n}{2}}$  is defined in Section 6. Hence, the restriction along the obvious inclusion  $\underline{n} \blacktriangleleft \underline{n} \hookrightarrow C_2(\underline{n})$  composed with the swapping  $(i, j) \mapsto (j, i)$  yields a homeomorphism  $\tilde{C}_n\langle[\mathbb{R}^2]\rangle \cong \tilde{C}(n)$ . Hence, it is enough to show that the natural map  $C_n(\mathbb{R}^d) \rightarrow \tilde{C}_n\langle[\mathbb{R}^d]\rangle$  is a homotopy equivalence.

By [Sin04, Corollary 5.9], the natural map  $\tilde{C}_n[\mathbb{R}^d] \rightarrow \tilde{C}_n\langle[\mathbb{R}^d]\rangle$  is a homotopy equivalence. Hence, it is enough to show that the map  $C_n(\mathbb{R}^d) \rightarrow \tilde{C}_n[\mathbb{R}^d]$  is a homotopy equivalence. There are essentially two ways to perform it.

*Direct way.* We can decompose this arrow into the composition of two maps

$$C_n(\mathbb{R}^d) \rightarrow C_n[\mathbb{R}^d] \rightarrow \tilde{C}_n[\mathbb{R}^d].$$

The first arrow in this composition is a homotopy equivalence by [Sin04, Corollary 4.5].

By [Sin04, Lemma 4.12], the second map is isomorphic to the projection to the orbit space  $C_n[\mathbb{R}^d] \rightarrow C_n[\mathbb{R}^d]/\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_{>0}$  where the group acts on the copies of  $S^{d-1}$  and  $[0, \infty]$  trivially. It is easy to see that if  $G$  is a Lie group acting freely and properly on a smooth manifold  $M$ , then  $M$  becomes a principle  $G$ -bundle; in particular, a projection  $M \rightarrow M/G$  to an orbit space is a locally trivial fibration, where the fibers are homeomorphic to  $G$ . Hence, the second map is a locally trivial fibration with contractible fibers.

Therefore, the map  $C_n(\mathbb{R}^d) \rightarrow \tilde{C}_n[\mathbb{R}^d]$  is a homotopy equivalence, being the composition of two homotopy equivalences.

*External proof.* Note that the space  $\tilde{C}_n[\mathbb{R}^d]$  coincides with the Fulton-MacPherson compactification  $FM_n(\mathbb{R}^d)$  considered in [AS94] by the name  $M[V]$ , where  $M = \mathbb{R}^d$  and  $V = n$ . There is an obvious continuous map from the  $n$ th component of the little  $d$ -disks operad to the classical configuration space  $E_d(n) \rightarrow C_n(\mathbb{R}^d)$  which associates a collection of disjoint discs with the collection of their centers. This function is a locally trivial fibration with contractible fibers, hence, a homotopy equivalence. On the other hand, it is known that the little  $n$ -disk operad is equivalent to the Fulton-MacPherson compactification (see [Sal01, Proposition 3.9], summarized in [LV14, Proposition 5.6]). Therefore, the map  $C_n(\mathbb{R}^d) \rightarrow \tilde{C}_n[\mathbb{R}^d] = FM_n(\mathbb{R}^d)$  is a homotopy equivalence by the 2-out-of-3 property.  $\square$

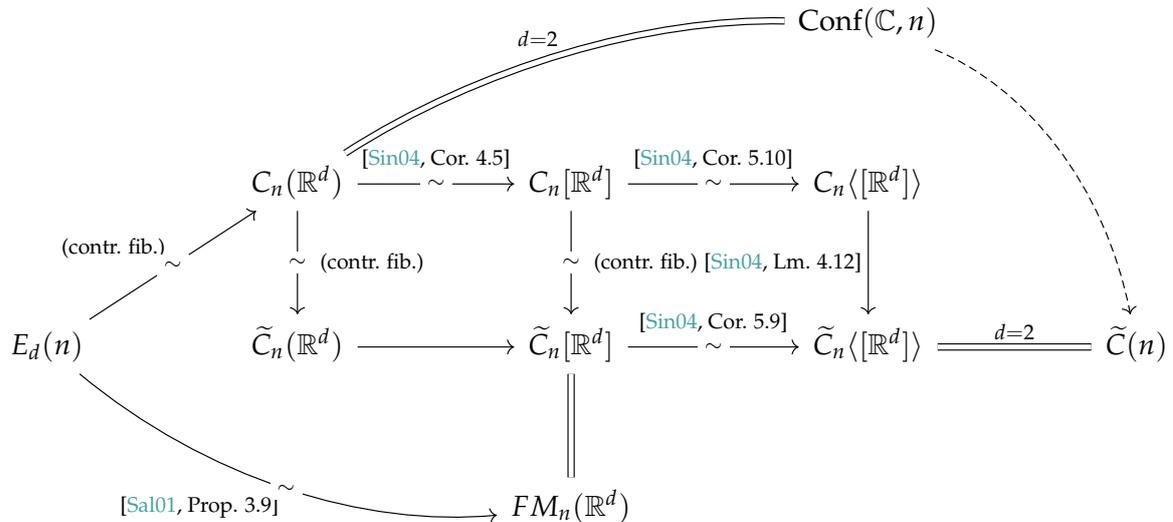


FIGURE 14. The remaining arrows are also equivalences by the 2-out-of-3.

## REFERENCES

- [AIM21] I. Alekseev, V. Ionin, M. Mikhailov, *Actions of automorphisms of pure braid groups on homotopy groups of two-sphere*, 2021, [arxiv:2112.05805](#).
- [AS94] S. Axelrod and I. Singer, *Chern-Simons perturbation theory II*, Jour. Diff. Geom. 39 (1994), no. 1, 173–213.
- [BM<sup>+</sup>12] V. G. Bardakov, R. Mikhailov, V. V. Vershinin, J. Wu, *Brunnian braids on surfaces*, Algebraic & Geometric Topology, 12 (2012), 1607–1648.
- [BNS18] V. G. Bardakov, M. V. Neshchadim, M. Singh, *Automorphisms of pure braid groups*, Monatsh. Math. 187 (2018), no. 1, 1–19.
- [BC<sup>+</sup>06] J. A. Berrick, F. R. Cohen, Y. L. Wong, J. Wu, *Configurations, braids, and homotopy groups*, J. Amer. Math. Soc. 19 (2006), 265–326.
- [BM07] R. W. Bell, D. Margalit, *Injections of Artin groups*, Comment. Math. Helv. 82 (2007), 725–751. University Press, 1974.
- [Bi21] A. Bianchi, *On the homology of the commutator subgroup of the pure braid group*, Proceedings of the American Mathematical Society, Vol. 149, No. 6, 2021, p. 2387–2401.
- [Co12] D. C. Cohen, *Automorphism groups of some pure braid groups*, Topology Appl. 159 (2012), 3404–3416.
- [CW08] F. R. Cohen, J. Wu, *On braid groups and homotopy groups*, Geometry & Topology Monographs, 13 (2008), 169–193.
- [CW04] F. R. Cohen, J. Wu, *On braid groups, free groups, and the loop space of the 2-sphere*, from: “Categorical decomposition techniques in algebraic topology”, Progr. Math. 215, Birkhäuser, Basel (2004), 93–105.
- [CW10] F. R. Cohen, J. Wu *Artin’s braids groups, free groups, and the loop space of the 2-sphere*, The Quarterly Journal of Mathematics, 62(4), 2010, 891–921.
- [Cur97] E. B. Curtis, *Simplicial Homotopy Theory*, Advances in Mathematics 6 (1971), 107–209.
- [DG81] J. L. Dyer and E. K. Grossman, *The automorphism groups of the braid groups*, Amer. J. Math. 103 (1981), 1151–1169.
- [FB62] E. Fadell, J. Van Buskirk, *The braidgroups of  $E^2$  and  $S^2$* , Duke Math. J. 29 (1962), 243–258.
- [FM94] W. Fulton, R. MacPherson, *Compactification of configuration spaces*, Annals of Mathematics 139 (1994), 183–225.
- [GJP15] J. Guaschi, D. Juan-Pineda, *A survey of surface braid groups and the lower algebraic K-theory of their group rings*, Handbook of Group Actions 2, 23–75. Advanced Lectures in Mathematics (ALM) 32. Somerville, MA: Int. Press, 2015. MR 3382024.
- [IMW15] S. O. Ivanov, R. Mikhailov, J. Wu, *On nontriviality of homotopy groups of spheres*, 2015, [arXiv:1506.00952](#).
- [Kon99] M. Kontsevich, *Operads and motives in deformation quantization*, Lett. Math. Phys. 48 (1999), 35–72.
- [LV14] P. Lambrechts, I. Volić, *Formality of the little  $N$ -disks operad*, Memoirs of the American Mathematical Society; no. 1079, 2014.
- [LW09] J. Li, J. Wu, *Artin braid groups and homotopy groups*, Proc. London Math. Soc. (3) 99 (2009), 521–556.
- [McL18] A. McLeay, *Normal subgroups of the braid group and the metaconjecture of Ivanov*, 2018, [arxiv:1801.05209](#).
- [Mik21] R. Mikhailov, *Homotopy patterns in group theory*, 2021, [arXiv:2111.00737](#).
- [Or17] S. Y. Orevkov, *Automorphism group of the commutator subgroup of the braid group*, Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6), 26(5):1137–1161, 2017.
- [Sal01] P. Salvatore, *Configuration spaces with summable labels*, Cohomological methods in homotopy theory. Birkhäuser, Basel, 2001, 375–395.
- [Sin04] D. P. Sinha, *Manifold-theoretic compactifications of configuration spaces*, Sel. math., New ser. 10, 391 (2004).
- [Wu02] J. Wu, *A braided simplicial group*, Proc. London Math. Soc. (3) 84 (2002), 645–662.

CHEBYSHEV LABORATORY, ST. PETERSBURG STATE UNIVERSITY, 14TH LINE 29B, VASILYEVSKY ISLAND, SAINT PETERSBURG, 199178, RUSSIA

*Email address:* [ionin.code@gmail.com](mailto:ionin.code@gmail.com)

### Заявление о новизне

Сообщаю, что новыми в моей представленной на Смотр выпускной квалификационной работе (далее – работа) под названием **«Разработка и исследование вычислительного алгоритма для решения трехмерного уравнения теплопроводности разрывным методом Галёркина»** являются: программный модуль fem-dg-heat с реализацией локального разрывного метода Галёркина для решения трехмерных начально-краевых задач теплопроводности на равномерных гексаэдральных сетках, созданный в рамках проекта charm\_3d\_v2 (ссылка на репозиторий проекта charm\_3d\_v2 с модулем fem-dg-heat на GitHub приведена в Приложении 1), и порядки точности вычислительного алгоритма локального разрывного метода Галёркина, рассчитанные для нескольких вариантов дискретных потоков между ячейками расчётной сетки на серии тестовых задач (Таблицы 2–11).

Также сообщаю, что для проверки новизны мною было проделано следующее:

- В период с апреля по май 2024 г. мною был произведён поиск в поисковой системе Google по следующим ключевым словам: разрывный метод Галеркина для решения задач теплопроводности, discontinuous Galerkin method for solving heat equations, в выдаче поисковика было исследовано 12 статей и препринтов, часть из которых была использована в качестве источников в выпускной квалификационной работе (см. Список использованных источников), и все они не содержали материала, заявляемого автором выпускной квалификационной работы в качестве нового. При поиске не было встречено работ или упоминаний работ, позволяющих усомниться в новизне материала. При этом вычислительные схемы, предложенные в работах [4], [6], [15], были модифицированы под конкретные задачи, решаемые в настоящей выпускной квалификационной работе.

- Проведена серия консультаций с моим научным руководителем Владимиром Федоровичем Тишкиным, членом-корреспондентом РАН, профессором кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики факультета математики и информационных технологий Национального исследовательского Мордовского государственного университета им. Н. П. Огарёва, заведующим отделом Института прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН.

- Проведены консультации с преподавателями кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики факультета математики и информационных технологий Национального исследовательского Мордовского государственного университета им. Н. П. Огарёва: доцентами Русланом Викторовичем Жалниным и Елизаветой Евгеньевной Песковой.

- 6 июня 2024 года проведено выступление с секционным докладом по теме «Исследование одного вычислительного алгоритма решения трёхмерных задач теплопроводности разрывным методом Галёркина» на XVIII Всероссийской с международным участием научно-технической конференции молодых специалистов, аспирантов и студентов «Математическое и компьютерное моделирование естественно-научных и социальных проблем» (МКМ–2024) с конкурсом научно-

исследовательских работ обучающихся, организованной Пензенским государственным университетом.

Таким образом, по результатам поиска в сети Интернет, обсуждений с указанными выше специалистами, а также из выступления на конференции следует, что, по-видимому, мною разработан уникальный программный код, эффективность которого подтверждается результатами, представленными в данной выпускной квалификационной работе.

Подтверждаю, что являюсь автором предоставляемой на Смотр работы и прошу принять её для участия в Смотре. Принимаю на себя обязательство соблюдать правила Смотра. Также (в соответствии с п. 4 Положения о Смотре) принимаю на себя обязательство оценить 5 работ участников Смотра, выданных мне Оргкомитетом в результате жеребьевки и сверх того оценить 2-5 работ других участников Смотра на мой выбор. Я понимаю правила оценки работ, приведённые в п. 4.3 Положения о Смотре. Даю согласие на публикацию адреса моей электронной почты.

Защита работы состоится 25.06.2024. На Смотр представлен проект текста работы.



Казакова Ирина Сергеевна

14 июня 2024 г.  
Саранск, Россия

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
МОРДОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
им. Н.П. ОГАРЁВА»  
(ФГБОУ ВО «МГУ им. Н.П. Огарёва»)

Факультет математики и информационных технологий

Кафедра прикладной математики, дифференциальных уравнений и  
теоретической механики

УТВЕРЖДАЮ  
И.о. зав. кафедрой  
канд. физ.-мат. наук  
\_\_\_\_\_ Е.В. Десяев  
подпись  
«\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2024 г.

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА МАГИСТРА  
по теме:  
РАЗРАБОТКА И ИССЛЕДОВАНИЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО АЛГОРИТМА  
ДЛЯ РЕШЕНИЯ ТРЕХМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ  
РАЗРЫВНЫМ МЕТОДОМ ГАЛЁРКИНА

Автор магистерской диссертации \_\_\_\_\_ И.С. Казакова  
подпись, дата

Обозначение магистерской диссертации МД-02069964-01.04.02-02-24

Направление подготовки 01.04.02 Прикладная математика и информатика

Профиль Математическое моделирование

Руководитель работы,  
д-р физ.-мат. наук, проф. \_\_\_\_\_ В.Ф. Тишкин  
подпись, дата

Саранск 2024

Продолжение на следующем листе

Продолжение титульного листа

Нормоконтролёр,  
канд. физ.-мат. наук, доц.

\_\_\_\_\_ Д.К. Егорова  
подпись, дата

Рецензент,  
канд. физ.-мат. наук, доц.

\_\_\_\_\_ А.Н. Андронов  
подпись, дата

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
МОРДОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
им. Н.П. ОГАРЁВА»  
(ФГБОУ ВО «МГУ им. Н.П. Огарёва»)

Факультет математики и информационных технологий

Кафедра прикладной математики, дифференциальных уравнений и  
теоретической механики

УТВЕРЖДАЮ  
И.о. зав. кафедрой  
канд. физ.-мат. наук  
\_\_\_\_\_ Е.В. Десяев  
подпись  
« \_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 2024 г.

ЗАДАНИЕ НА ВЫПУСКНУЮ КВАЛИФИКАЦИОННУЮ РАБОТУ  
МАГИСТРА

Студентке Казаковой Ирине Сергеевне

1 Тема Разработка и исследование вычислительного алгоритма для решения  
трехмерного уравнения теплопроводности разрывным методом Галёркина

Утверждена приказом № 2801-с от 05.04.2024 г.

2 Срок представления работы к защите \_\_\_\_\_ г.

3 Исходные данные для научного исследования: специальная литература по  
методу Галёркина и численным методам решения задач теплопроводности,  
официальные сайты использованных программных продуктов.

4 Содержание выпускной квалификационной работы

4.1 Теоретические основы разрывного метода Галёркина

Продолжение на следующем листе

4.2 Особенности численного решения уравнения теплопроводности разрывным методом Галёркина

4.3 Программная реализация и исследование порядка точности вычислительного алгоритма локального разрывного метода Галёркина

5 Приложения: листинг программного кода

Руководитель работы  
д-р физ.-мат. наук, проф.

\_\_\_\_\_

подпись, дата

В.Ф. Тишкин

Задание приняла к исполнению

\_\_\_\_\_

подпись, дата

И.С. Казакова

## РЕФЕРАТ

Выпускная квалификационная работа магистра 76 с., 9 рис., 4 листинга, 11 табл., 15 источн., 2 прил.

РАЗРЫВНЫЙ МЕТОД ГАЛЁРКИНА, ЗАДАЧА ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ, ДИСКРЕТНЫЕ ПОТОКИ, CHARM\_3D\_V2, ПОРЯДОК ТОЧНОСТИ, РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ, ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ, РАСЧЁТНАЯ СЕТКА, GMSH, PARAVIEW

Объектом исследования являются современные численные методы решения задач диффузионного типа, предметом исследования стали особенности программной реализации и вычисление порядков точности разрывного метода Галёркина для решения задач теплопроводности.

Цель работы – разработка и исследование вычислительного алгоритма, реализующего метод Галёркина с разрывными базисными функциями, применительно к решению трёхмерных задач теплопроводности.

В ходе исследования были изучены математические основания вариантов метода Галёркина и уже существующие вычислительные алгоритмы.

В итоге, был создан программный код локального разрывного метода Галёркина, работоспособность которого была проверена на нескольких тестовых задачах. Также были высчитаны порядки точности реализованного метода в трёх нормах на двух расчётных областях с использованием трёх вариантов дискретных потоков и проанализированы полученные результаты.

Степень внедрения – частичная.

Созданная программа может быть использована для решения трёхмерных задач теплопроводности с различными начальными и граничными условиями в разнообразных расчётных областях.

Эффективность разработанного алгоритма состоит в достаточной точности результатов вычислений и его адаптивности к изменению начально-краевых условий и параметров решаемой задачи.

## СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ .....	8
1 Теоретические основы разрывного метода Галёркина .....	10
1.1 Общая характеристика вариационных задач. Некоторые основные аспекты метода конечных элементов .....	10
1.2 Теоретические основания метода Галёркина .....	14
1.3 Некоторая теория по разрывному методу Галёркина .....	19
2 Особенности численного решения уравнения теплопроводности разрывным методом Галёркина .....	24
2.1 Алгоритм для решения одномерного уравнения теплопроводности разрывным методом Галёркина .....	24
2.2 Алгоритм решения трёхмерного уравнения теплопроводности методом Галёркина с разрывными базисными функциями .....	29
3 Программная реализация и исследование порядка точности вычислительного алгоритма локального разрывного метода Галёркина ...	34
3.1 Построение геометрии и расчётной сетки средствами конечно- элементного генератора сеток Gmsh .....	36
3.2 Особенности реализации разрывного метода Галёркина в проекте charm_3d_v2 .....	41
3.3 Анализ результатов и исследование порядка точности локального разрывного метода Галёркина .....	48
ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....	67
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ .....	69
ПРИЛОЖЕНИЕ А (обязательное) Ссылка на версию проекта charm_3d_v2 с модулем fem-dg-heat для решения трёхмерных задач теплопроводности на равномерных гексаэдральных сетках разрывным методом Галёркина .....	72

ПРИЛОЖЕНИЕ Б (обязательное) Программный код основных вычислительных методов из файла src/method/fem-dg- heat/MethodFemDgHeat.cpp проекта charm_3d_v2, написанного на языке программирования C++, с реализованным модулем fem-dg-heat .....	73
---	----

## ВВЕДЕНИЕ

Для развития науки, наряду с решением фундаментальных теоретических задач, также существует необходимость постановки и решения разнообразных прикладных задач, возникающих при попытках адекватно описать явления и процессы окружающего мира. Математические модели позволяют с определённой степенью точности воспроизвести рассматриваемую систему путём включения в модель дополнительных факторов. Исключением не стали и задачи диффузионного типа, в том числе задачи теплопроводности: для их описания создана модель, представляющая собой начально-краевую задачу с различными вариантами граничных условий.

Не для всех задач теплопроводности может быть получено аналитическое решение, в таких случаях широко применяются численные методы. Одними из основных классов численных методов являются метод конечных объёмов и метод конечных элементов, при этом обычно методы второго класса являются более затратными по использованию процессорного времени и компьютерной памяти, а также сложнее в программной реализации, но дают более точные результаты.

Целью данной выпускной квалификационной работы является разработка и исследование вычислительного алгоритма, реализующего одну из разновидностей метода конечных элементов, а именно, метод Галёркина с разрывными базисными функциями, применительно к решению трёхмерных задач теплопроводности. Для достижения цели были поставлены следующие задачи:

- ознакомиться с теорией по вариационным задачам и методу конечных элементов;
- изучить математические основы разрывного метода Галёркина;
- изучить варианты алгоритмов разрывного метода Галёркина, в частности, локальный разрывный метод Галёркина;

- написать на языке программирования C++ реализацию метода Галёркина с разрывными базисными функциями с явной разностной схемой;
- выполнить расчёты на выборке тестовых трёхмерных задач теплопроводности;
- проанализировать полученные численные результаты, в том числе вычислить порядок точности данной реализации разрывного метода Галёркина в зависимости от вида используемых дискретных потоков;
- сделать вывод о пригодности реализованного алгоритма для решения конкретных задач.

Магистерская диссертация состоит из введения, трёх разделов и заключения.

В первом разделе рассматривается базовая теория по вариационным задачам и основные аспекты метода конечных элементов, а также представляются теоретические основы современной модификации метода Галёркина с разрывными базисными функциями.

Во втором разделе приведена математическая модель начально-краевой задачи теплопроводности. Кроме этого, на одномерной задаче рассматривается алгоритм локального разрывного метода Галёркина, а также даётся его расширенная на трёхмерный случай формулировка, которая будет использована в программной реализации далее.

Третий раздел включает в себя разбор основных фрагментов кода, реализующего разрывный метод Галёркина, и проведение подготовительных действий по типу формирования расчётной сетки. Также анализируются рассчитанные в дополнительном Python-скрипте порядки точности текущей реализации разрывного метода Галёркина, в зависимости от использованных методов для расчёта численных потоков, и полученные для тестовых задач распределения температуры с помощью графического пакета ParaView.

# 1 Теоретические основы разрывного метода Галёркина

## 1.1 Общая характеристика вариационных задач. Некоторые основные аспекты метода конечных элементов

Рассматриваемая в данной работе разновидность метода Галёркина, принадлежащего классу методов конечных элементов, относится к вариационным методам. Ниже приведём некоторую основную теорию по вариационным методам, опираясь на источник [7].

Рассмотрим абстрактную задачу минимизации на примере задач теории упругости. Заметим, что нижеприведённая формулировка является общей для многих аналогичных примеров.

Формулировка абстрактной задачи минимизации следующая: необходимо найти такой элемент  $u$ , что выполняется соотношение:

$$u \in U \text{ и } J(u) = \inf_{v \in U} J(v), \quad (1.1)$$

где функционал  $J: V \rightarrow \mathbf{R}$  определён следующим образом:

$$J: v \in V \rightarrow J(v) = 0.5 * a(v, v) - f(v), \quad (1.2)$$

где  $u$  – неизвестное, обозначающее перемещение механической системы,  $U$  – непустое подмножество пространства  $V$  (множество допустимых перемещений),  $V$  – нормированное векторное пространство с нормой  $\|\cdot\|$  (так называемое «пространство конечной энергии»),  $J$  – энергия рассматриваемой системы,  $a(\cdot, \cdot): V \times V \rightarrow \mathbf{R}$  – непрерывная билинейная форма,  $f: V \rightarrow \mathbf{R}$  – непрерывная линейная форма.

Существование и единственность решения задачи (1.1) обеспечивается при выполнении следующих дополнительных условий:

- 1) Пространство  $V$  полно.

2)  $U$  – замкнутое выпуклое подмножество из  $V$ .

3) Билинейная форма  $a(\cdot, \cdot)$  симметрична и  $V$ -эллиптическая, то есть выполнено соотношение:

$$\exists \alpha > 0, \forall v \in V: \alpha \|v\|^2 \leq a(v, v). \quad (1.3)$$

Также в источнике [7] приводится эквивалентная формулировка задачи (1.1): элемент  $u$  является решением абстрактной задачи минимизации (1.1) тогда и только тогда, когда он удовлетворяет соотношениям:

$$u \in U \text{ и } \forall v \in U: a(u, v - u) \geq f(v - u) \quad (1.4)$$

в общем случае. Соотношение (1.4) – вариационная формулировка исходной задачи минимизации, а конкретно – вариационное неравенство.

Далее введём в рассмотрение абстрактную вариационную задачу, для которой справедлива лемма Лакса–Мильграма [7], её формулировка приведена ниже.

Пусть  $V$  – гильбертово пространство, билинейная форма  $a(\cdot, \cdot): V \times V \rightarrow \mathbf{R}$  непрерывна и  $V$ -эллиптическая, линейная форма  $f: V \rightarrow \mathbf{R}$  непрерывна. Тогда абстрактная вариационная задача: найти элемент  $u$  такой, что выполняется соотношение:

$$u \in V \text{ и } \forall v \in V: a(u, v) = f(v), \quad (1.5)$$

имеет единственное решение.

Таким образом, вариационная задача (1.5) поставлена корректно, то есть её решение существует, единственно и непрерывно зависит от начальных данных  $f$ , при этом все другие данные не меняются.

Далее в работе [7] вводится метод конечных элементов, использующийся для аппроксимации решений рассматриваемых задач в вариационной форме на пространстве  $V$ .

Методом конечных элементов в его простейшей форме является метод Галёркина, в котором определены сходные задачи, называемые дискретными задачами, на конечномерных подпространствах  $V_h$  пространства  $V$ .

Формулировка дискретной задачи, вводящаяся по аналогии с задачей (1.5) и соответствующая конечномерному подпространству  $V_h$  из  $V$ , следующая: нужно найти такое  $u_h \in V_h$ , что справедлива формула:

$$\forall v_h \in V_h: a(u_h, v_h) = f(v_h). \quad (1.6)$$

Согласно лемме Лакса–Мильграма задача (1.6) имеет единственное решение, которое назовём дискретным решением.

Если  $a(\cdot, \cdot)$  – симметричная билинейная форма, то дискретное решение обладает свойством:

$$J(u_h) = \inf_{v_h \in V_h} J(v_h), \quad (1.7)$$

где для функционала  $J$  справедливо соотношение (1.2). Альтернативное определение дискретного решения, задаваемого формулой (1.7), есть метод Ритца.

Для метода конечных элементов, в том числе и для метода Галёркина, также существуют три основных аспекта в построении подпространств  $V_h$  – пространств конечных элементов [7], подробнее они будут приведены ниже.

Первый аспект состоит в осуществлении триангуляции  $\Gamma_h$  на множестве  $\bar{\Omega}$ , то есть оно разбивается на конечное число подмножеств  $K$  – конечных элементов – так, что выполняются следующие свойства:

- 1) Справедливо соотношение:

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{K \in \Gamma_h} K. \quad (1.8)$$

2) Для каждого  $K \in \Gamma_h$  множество  $K$  является замкнутым, а его множество внутренних точек  $K^\circ \neq \emptyset$ .

3) Для произвольных различных  $K_1, K_2 \in \Gamma_h$  справедливо условие:

$$K_1^\circ \cap K_2^\circ = \emptyset. \quad (1.9)$$

4) Для каждого конечного элемента  $K \in \Gamma_h$  граница  $\partial K$  непрерывна по Липшицу.

5) Всякая грань произвольного  $n$ -симплекса  $K_1$  в триангуляции – это подмножество границы  $\Gamma$  или грань другого  $n$ -симплекса  $K_2$  в триангуляции.

После триангуляции  $\Gamma_h$  на множестве  $\bar{\Omega}$  определяем пространство конечных элементов  $X_h$  – конечномерное пространство функций, определённых на  $\bar{\Omega}$ .

Далее определяем конечномерные пространства:

$$P_K = \{v_{h|K} : v_h \in X_h\}, \quad (1.10)$$

натянутые на сужения  $v_{h|K}$  функций  $v_h \in X_h$  на конечные элементы  $K \in \Gamma_h$ .

Вторым аспектом метода конечных элементов является тот факт, что пространства  $P_K, K \in \Gamma_h$  состоят из многочленов или, как минимум, функций, близких к многочленам.

Этот аспект обеспечивает получение оценок сходимости метода и позволяет достаточно просто вычислять коэффициенты результирующей линейной системы.

На практике дискретная задача (1.6) решается следующим образом. Пусть  $(\omega_k)_{k=1}^M$  – базис в пространстве  $V_h$ , тогда коэффициенты  $u_k$  решения  $u_h = \sum_{k=1}^M u_k \omega_k$  задачи (1.6) – решения линейной системы:

$$\sum_{k=1}^M a(\omega_k, \omega_l) u_k = f(\omega_l), \quad 1 \leq l \leq M, \quad (1.11)$$

матрица которой обратима всегда. Следуя терминам из теории упругости, матрицу  $a(\omega_k, \omega_l)$  называют матрицей жёсткости, а  $f(\omega_l)$  – вектором нагрузки.

Для ускорения вычислений нужно, чтобы выбранный базис  $(\omega_k)_{k=1}^M$  обеспечивал как можно большее число нулей в матрице  $a(\omega_k, \omega_l)$ .

Исходя из вышеизложенного, третьим аспектом метода конечных элементов будет являться существование в пространстве  $V_h$  по крайней мере одного «канонического» базиса из функций с «минимальными» носителями.

Таким образом, была рассмотрена вариационная постановка конечно-элементных методов, а также приведены основные аспекты, возникающие при построении пространств конечных элементов  $V_h$ . Перейдём к частичному разбору теории по базовому методу Галёркина.

## 1.2 Теоретические основания метода Галёркина

В источнике [8] говорится, что, по существу, любая задача, если для неё можно выписать определяющие уравнения, может быть решена с помощью одной из разновидностей метода Галёркина. Так, с его помощью можно решать задачи гидрогазодинамики, механики конструкций, теории тепло- и массообмена, акустики. Также поддаётся методу Галёркина решение обыкновенных дифференциальных уравнений и интегральных уравнений, задач на собственные значения.

После установления связи метода Галёркина с методом конечных элементов стало возможным решение последним методом многих задач гидрогазодинамики и теории теплопередачи.

Кратко сформулируем важнейшие особенности метода Галёркина на примере двумерной задачи. Пусть она описывается линейным дифференциальным уравнением:

$$L(u) = 0 \quad (1.12)$$

в области  $D(x, y)$  при выполнении на границе  $\partial D$  области  $D$  граничных условий:

$$S(u) = 0. \quad (1.13)$$

Предположением метода Галёркина является возможность представления неизвестной  $u$  приближённым решением:

$$u_a = u_0(x, y) + \sum_{j=1}^N a_j \varphi_j(x, y) \quad (1.14)$$

с достаточной точностью. Здесь  $\varphi_j$  – известные аналитические функции,  $u_0$  – функция, удовлетворяющая граничным условиям,  $a_j$  – подлежащие определению коэффициенты. Подставляя выражение (1.14) в уравнение (1.12), получаем отличную от нуля невязку  $R$ , определяемую формулой:

$$R(a_0, a_1, \dots, a_N, x, y) = L(u_a) = L(u_0) + \sum_{j=1}^N a_j L(\varphi_j). \quad (1.15)$$

Скалярное произведение определим следующим образом:

$$(f, g) = \iint_D fg \, dx \, dy. \quad (1.16)$$

Входящие в формулу (1.14) неизвестные коэффициенты  $a_j$ , согласно методу Галёркина, должны быть определены из системы уравнений:

$$(R, \varphi_k) = 0, \quad k = \overline{1, N}, \quad (1.17)$$

где  $R$  – невязка данного уравнения,  $\varphi_k$  – аналитические функции из соотношения (1.14). В силу того, что мы рассматриваем решение линейного дифференциального уравнения, система (1.17) может быть записана в форме матричного уравнения относительно коэффициентов  $a_j$ :

$$\sum_{j=1}^N a_j (L(\varphi_j), \varphi_k) = -(L(u_0), \varphi_k). \quad (1.18)$$

Величины  $a_j$ , полученные из уравнения (1.18), подставляем в формулу (1.14) и получаем искомое приближённое решение  $u_a$ .

Метод Галёркина входит в класс методов, известных, согласно источнику [8], как методы взвешенных невязок. Приведём описание этого метода.

Пусть дифференциальное уравнение (1.12) должно быть решено при граничных условиях  $S(u) = 0$  и начальных условиях  $I(u) = 0$ . Вводится приближённое решение  $u_a$ , удовлетворяющее условиям:

$$L(u_a) = R, \quad I(u_a) = R_I, \quad S(u_a) = R_b. \quad (1.19)$$

Построение приближённого решения  $u_a$  можно осуществить одним из следующих способов:

1) Граничный метод: дифференциальное уравнение удовлетворяется точно, то есть  $R = 0$ .

2) Внутренний метод: точно выполнены граничные условия, то есть  $R_b = 0$ .

3) Смешанный метод: ни дифференциальные уравнения, ни граничные условия не удовлетворяются точно.

Здесь разберём только внутренний метод. При его использовании приближённое решение  $u_a$  представляется в виде:

$$u_a(\mathbf{x}, t) = u_0(\mathbf{x}, t) + \sum_{j=1}^N a_j(t) \varphi_j(\mathbf{x}), \quad (1.20)$$

где  $\varphi_j$ ,  $j = \overline{1, N}$  – известные аналитические функции, их часто называют пробными, а выражение (1.20) – пробным решением, где числа  $a_j$  должны быть определены. Функция  $u_0(\mathbf{x}, t)$  выбирается по возможности точно удовлетворяющей начальным и граничным условиям.

Из вида соотношения (1.20) становится ясно, что мы стремимся привести (1.12) к виду обыкновенного дифференциального уравнения с аргументом  $t$ . Если решаемая задача стационарна или если  $\varphi_j = \varphi_j(\mathbf{x}, t)$ , то  $a_j = \text{const}$  и уравнение (1.12) приводимо к системе алгебраических уравнений.

Функции  $a_j$  мы определим с помощью уравнений следующего вида:

$$(R, \omega_k(\mathbf{x})) = 0, \quad k = \overline{1, N}, \quad (1.21)$$

где  $\omega_k$  – весовая или поверочная функция. Здесь скалярное произведение взвешенных невязок полагается равным нулю. Из-за соотношения (1.21) метод взвешенных невязок и получил название.

Заметим, что функции  $\omega_k(\mathbf{x})$  должны быть независимыми, если они представлены в очевидной аналитической форме. Если  $\omega_k$  суть полная система функций, то уравнение (1.21) при  $N \rightarrow \infty$  показывает, что невязка  $R$

должна быть ортогональна каждому элементу полной системы функций. Это утверждение эквивалентно сходимости величин  $R$  к нулю в среднем при  $N \rightarrow \infty$ . Если в представлении (1.20) точно выполнены граничные условия и имеется подобная сходимость к нулю в среднем, то можно ожидать сходимости в среднем приближённого решения  $u_a$  к точному решению  $u_e$  уравнения (1.12):

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|u_a - u_e\|_2 = 0. \quad (1.22)$$

Форма уравнения (1.21) – аналогия слабой формы соотношения (1.12):

$$(L(u), \omega) = 0, \quad (1.23)$$

где  $\omega$  – весовая функция общего вида.

Если скалярное произведение определить дискретным образом:

$$(f, g) = \sum_{i=1}^N f_i g_i, \quad (1.24)$$

то мы будем использовать дискретный метод взвешенных невязок.

Важнейшее свойство системы (1.21) состоит в том, что благодаря ей можно объединить многие внешне не связанные методы, различие между которыми обусловлено выбором весовых функций. Так, в источнике [8] упоминаются метод моментов, метод коллокаций, метод подобластей, метод наименьших квадратов, а также несколько вариантов метода Галёркина. Описание одного из них мы и приведём ниже.

В традиционной реализации метода Галёркина как подтипа метода взвешенных невязок семейства поверочных и пробных функций совпадают:

$$\omega_k(\mathbf{x}) = \varphi_k(\mathbf{x}), \quad k = \overline{1, N}. \quad (1.25)$$

Для возможности применения традиционного метода Галёркина, помимо соблюдения соотношения (1.25), должны быть выполнены следующие условия:

- 1) Пробные и весовые функции выбираются линейно независимыми.
- 2) Пробные и поверочные функции суть первые  $N$  элементов полной системы функций.
- 3) Пробные функции должны точно удовлетворять граничным условиям, а также начальным условиям, при наличии таковых.

Первое из вышеуказанных условий обеспечивает возможность получения независимых уравнений, из которых определяются неизвестные  $a_i$ . Нарушение второго и третьего условий приводит к снижению эффективности метода.

Если выполняются все три условия, а также соотношение (1.25), то точность результатов частично обуславливается выбором пробных функций.

Если говорить о преимуществах метода Галёркина по сравнению с другими подвидами метода взвешенных невязок, то в источнике [8] утверждается, что метод Галёркина имеет широкий диапазон приложений и всегда даёт результаты высокой степени точности.

Практически важным в последние десятилетия становится такой класс методов конечных элементов, как разрывный метод Галёркина, подробнее о нём будет рассказано далее.

### **1.3 Некоторая теория по разрывному методу Галёркина**

Согласно источнику [15] разрывный метод Галёркина – класс методов конечных элементов, использующих полностью разрывное кусочно-полиномиальное пространство для численного решения задач.

Ключевым компонентом этого метода является разработка подходящих обработок границ между элементами (так называемые численные потоки) для получения высокоточных и стабильных схем при решении сложных задач.

Исторически первый разрывный метод Галёркина был предложен в 1973 году Ридом и Хиллом для стационарных линейных скалярных законов сохранения. Дальнейшие исследования данного метода проводились уже другими учёными. Так, в 1974 году была произведена первая оценка ошибки разрывного метода Галёркина для сетки тензорного произведения, а в 1986 году были произведены оценки ошибки данного метода в более общем случае. Исследования по данному направлению активно ведутся и в настоящее время, в том числе, разрабатываются новые вычислительные алгоритмы и схемы численных расчётов.

Перечислим некоторые преимущества разрывного метода Галёркина. Во-первых, это простота, не зависящая от порядка точности по пространству и времени. Во-вторых, лёгкость метода при адаптации (улучшении или укрупнении) сетки, без учёта ограничений на непрерывность. В-третьих, разрывный метод Галёркина сочетает в себе преимущества метода конечных элементов в простой обработке сложной геометрии с высокой разрешающей способностью метода конечных объёмов, достигающейся с помощью монотонных численных потоков или приближённых решателей Римана, применённых к интерфейсам элементов, и лимитеров, применительно к разрывным решениям. Кроме того, данный метод имеет очень компактную структуру, позволяющую создавать эффективные параллельные реализации.

Для начала кратко опишем суть разрывного метода Галёркина на примере закона сохранения первого порядка:

$$u_t - u_x = 0, \quad (1.26)$$

где  $x \in [0, 2\pi]$ , заданы периодические граничные условия и начальное условие  $u(x, 0) = \sin(x)$ .

Обозначим через  $I_j = [x_{j-1/2}, x_{j+1/2}]$ , где  $j = \overline{1, N}$ , сетку на отрезке  $[0, 2\pi]$ , где  $x_{1/2} = 0$ ,  $x_{N+1/2} = 2\pi$ . Центры ячеек обозначим как  $x_j = 0.5 * (x_{j-1/2} + x_{j+1/2})$ , а их размеры как  $\Delta x_j = x_{j+1/2} - x_{j-1/2}$ . Далее для простоты будем предполагать, что все ячейки имеют одинаковый размер  $\Delta x$ .

При умножении уравнения (1.26) на произвольную пробную функцию  $v(x)$  и интегрировании результата на интервале  $I_j$  по частям получим:

$$\int_{I_j} u_t v dx + \int_{I_j} u v_x dx - u(x_{j+1/2}, t)v(x_{j+1/2}) + u(x_{j-1/2}, t)v(x_{j-1/2}) = 0. \quad (1.27)$$

С этого момента, собственно, и начинается разрывный метод Галёркина. Заменяем решение  $u$  и пробную функцию  $v$  кусочными полиномами степени не выше  $k$ , но не изменяем обозначений. Таким образом,  $u, v \in V_{\Delta x}$ , где:

$$V_{\Delta x} = \{v: v - \text{полином степени не выше } k \text{ для } x \in I_j, j = \overline{1, N}\}. \quad (1.28)$$

При таком выборе возникает неопределённость в двух последних слагаемых соотношения (1.27), поскольку решение  $u$  и пробная функция  $v$  разрывны в граничных точках. Именно в этом моменте метод Галёркина с разрывными базисными функциями показывает свою гибкость в сравнении с другими численными методами: можно сконструировать слагаемые таким образом, чтобы полученный метод был устойчивым и точным. Рассмотрим простейший случай, когда  $k = 0$ , то есть решение и пробная функция – кусочно-константные. Обозначив через  $u_j$  значение  $u$  в ячейке  $I_j$ ,

соотношение (1.27) приняло бы форму противопоточной конечно-объёмной схемы первого порядка:

$$\frac{d}{dt}u_j - \frac{1}{\Delta x}(u_{j+1} - u_j) = 0, \quad (1.29)$$

если бы мы проделали с ним следующие действия:

1) Заменяли граничные члены  $u(x_{j\pm 1/2}, t)$  однозначными числовыми потоками  $\hat{u}_{j\pm 1/2} = \hat{u}(u_{j\pm 1/2}^-, u_{j\pm 1/2}^+)$ , что имеет решающее значение для сохранения консервативности. В общем случае, эти потоки зависят как от предела слева ( $u_{j\pm 1/2}^- = \lim_{x \rightarrow x_{j\pm 1/2}^-} u(x, t)$ ), так и от предела справа ( $u_{j\pm 1/2}^+ = \lim_{x \rightarrow x_{j\pm 1/2}^+} u(x, t)$ ). Для уравнения (1.26) поток  $\hat{u}_{j\pm 1/2}$  берётся как  $u_{j\pm 1/2}^+$  согласно противопоточности, поскольку в этом случае поток информации направлен справа налево.

2) Заменяли пробную функцию  $v$  на границах значениями, взятыми из ячейки  $I_j$ , а именно  $v_{j+1/2}^-$  и  $v_{j-1/2}^+$ .

Теперь схема (1.27) принимает следующий вид: найти решение  $u \in V_{\Delta x}$  такое, что для всех пробных функций  $v \in V_{\Delta x}$  выполнено соотношение:

$$\int_{I_j} u_t v \, dx + \int_{I_j} u v_x \, dx - \hat{u}_{j+1/2} v_{j+1/2}^- + \hat{u}_{j-1/2} v_{j-1/2}^+ = 0, \quad (1.30)$$

где численный поток  $\hat{u}_{j\pm 1/2} = u_{j\pm 1/2}^+$ .

Выбрав локальный базис и обратив локальную массовую матрицу размерности  $(k + 1) \times (k + 1)$ , схема (1.30) может быть записана следующим образом:

$$\frac{d}{dt}u_j - \frac{1}{\Delta x}(Au_j + Bu_{j+1}) = 0, \quad (1.31)$$

где  $u_j$  – малый вектор длины  $k + 1$ , содержащий коэффициенты решения  $u$  в локальном базисе внутри ячейки  $I_j$ , а  $A$  и  $B$  – постоянные матрицы размерности  $(k + 1) \times (k + 1)$ , которые можно вычислить один раз в начале выполнения алгоритма и сохранить в коде. Выбрав иной базис, можно сделать  $A$  и/или  $B$  разреженными для экономии вычислительных ресурсов, особенно для схем более высокого порядка точности.

Метод Галёркина, в том числе и разрывный, применим к широкому кругу задач. Далее мы будем рассматривать задачу теплопроводности, как пример классической задачи конвекции-диффузии, содержащей вторые производные, и приведём алгоритмы её решения методом Галёркина с разрывными базисными функциями применительно к одномерному и трёхмерному случаям.

## 2 Особенности численного решения уравнения теплопроводности разрывным методом Галёркина

### 2.1 Алгоритм для решения одномерного уравнения теплопроводности разрывным методом Галёркина

Некоторые задачи теплопроводности могут быть решены аналитическими методами, но решение нелинейных и неоднородных задач часто не представляется возможным получить без использования численных методов. Улучшение производительности вычислительной техники позволяет решать, в том числе, нестационарные трёхмерные задачи теплопереноса.

Приведём общий вид одномерного уравнения теплопроводности на примере стержня радиуса  $R$  с неоднородным распределением температуры по длине и одинаковой температурой по сечению, опираясь на источник [1]:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - h(T - T_0) + \bar{Q}(x, t), \quad (2.1)$$

где  $h = \frac{2\alpha}{c\rho R}$ ,  $\bar{Q}(x, t) = \frac{Q(x, t)}{c\rho}$ . Здесь  $T$  – температура (К),  $a = \lambda/(c\rho)$  – коэффициент температуропроводности, измеряемый в  $\text{м}^2/\text{с}$ ,  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности, измеряемый в  $\text{Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$ ,  $c$  – удельная теплоёмкость ( $\text{Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$ ),  $\rho$  – плотность, измеряемая в  $\text{кг}/\text{м}^3$ ,  $\alpha$  – коэффициент теплообмена с окружающей средой,  $T_0$  – температура окружающей среды (К), а  $Q(x, t)$  – функция, описывающая интенсивность источников и стоков тепла ( $\text{Вт}/\text{м}^3$ ).

Если нет теплообмена с окружающей средой, а также источников и стоков тепла, то уравнение теплопроводности (2.1) принимает вид:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}. \quad (2.2)$$

Соотношение (2.2) – одномерное уравнение теплопроводности. Но если температура  $T$  меняется во всех пространственных направлениях и во времени, то соотношение (2.2) записывается в виде:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \Delta T, \quad (2.3)$$

где  $\Delta$  – оператор Лапласа. Форма записи уравнения (2.3) зависит от того, в какой системе координат оно решается. Мы приведём запись соотношения (2.3) лишь в декартовой системе координат  $x, y, z$ , поскольку далее мы будем использовать именно её:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right). \quad (2.4)$$

По классификации уравнений в частных производных второго порядка уравнение (2.2) относится к параболическому типу.

Решением уравнения (2.2) является функция двух переменных  $T(x, t)$ . Само по себе уравнение (2.2), имеющее множество решений, должно быть дополнено начальными и граничными условиями для получения единственного решения, моделирующего определённую физическую ситуацию.

Начальные условия представляют из себя поле температур внутри тела в некоторый момент времени  $t_0$ , обычно принимаемый за начало отсчёта, так что  $t_0 = 0$ :  $T = T(x, y, z, t_0)$ . В одномерной постановке начальные условия принимают вид:  $T = T(x, t_0)$ .

Приведём также соотношения, описывающие граничные условия I и II рода, моделирующие определённые теплофизические условия на границе рассматриваемого объекта.

В граничном условии I рода задаются значения температуры поверхности тела, в общем случае в виде функции от времени:

$$T(M, t) = f(M, t), \quad (2.5)$$

где  $M$  – точка на поверхности тела. Например, граничное условие I рода служит для моделирования теплообмена тела с нагревателем, которые находятся в идеальном контакте друг с другом.

Граничное условие II рода задаёт значения теплового потока в каждой точке поверхности тела через функцию времени:

$$\lambda \frac{\partial T(M, t)}{\partial n} \vec{l}_n = q(M, t), \quad (2.6)$$

где  $\vec{l}_n$  – вектор нормали к поверхности тела,  $q(M, t)$  – величина теплового потока на поверхность тела в точке  $M$ , измеряемая в Дж/(м<sup>2</sup> · с), которая может быть постоянной. Моделирование лучистого нагрева поверхности непрозрачного тела от внешнего источника осуществляется с помощью данного граничного условия.

Численное решение уравнения теплопроводности имеет свои особенности, о некоторых из них будет рассказано при разборе алгоритма локального разрывного метода Галёркина, изложенного в работе [15], далее.

Для простоты изложения будет решаться одномерное уравнение теплопроводности:

$$u_t - u_{xx} = 0 \quad (2.7)$$

для  $x \in [0, 2\pi]$  с периодическими граничными условиями и начальным условием:  $u(x, 0) = \sin x$ .

Нижеизложенный алгоритм может быть распространён на более общие многомерные нелинейные уравнения конвекции-диффузии, в том числе на трёхмерные уравнения теплопроводности.

В источнике [15] содержатся результаты вычислительных экспериментов, подтверждающих, что применение аналога схемы (1.27) метода Галёркина с разрывными базисными функциями к уравнению (2.7) приводит к получению численно устойчивого, но совершенно неверного решения. Если не знать точного решения, то при проведении исследования по уточнению сетки можно сделать неверный вывод о сходимости метода.

Поэтому вводится локальный разрывный метод Галёркина. Если переписать уравнение теплопроводности (2.7) как систему уравнений в частных производных первого порядка:

$$u_t - q_x = 0, \quad q - u_x = 0, \quad (2.8)$$

то формально можно использовать тот же разрывный метод Галёркина для решения задач конвекции-диффузии применительно к системе (2.8).

Если проделать для уравнений системы (2.8) действия, аналогичные операциям с уравнением переноса (1.26) и получением схемы (1.27), то получим следующую вычислительную схему.

Найдём решения  $u, q \in V_{\Delta x}$  такие, что для всех пробных функций  $v, w \in V_{\Delta x}$  справедливо:

$$\int_{I_j} u_t v \, dx + \int_{I_j} q v_x \, dx - \hat{q}_{j+1/2} v_{j+1/2}^- + \hat{q}_{j-1/2} v_{j-1/2}^+ = 0, \quad (2.9)$$

$$\int_{I_j} q w \, dx + \int_{I_j} u w_x \, dx - \hat{u}_{j+1/2} w_{j+1/2}^- + \hat{u}_{j-1/2} w_{j-1/2}^+ = 0, \quad (2.10)$$

где лучшим выбором для потоков как в плане точности, так и в плане компактности конечного шаблона, согласно источнику [15], будут следующие соотношения:

$$\hat{u}_{j\pm 1/2} = u_{j\pm 1/2}^+, \quad \hat{q}_{j\pm 1/2} = q_{j\pm 1/2}^-, \quad (2.11)$$

$$\hat{u}_{j\pm 1/2} = u_{j\pm 1/2}^-, \quad \hat{q}_{j\pm 1/2} = q_{j\pm 1/2}^+, \quad (2.12)$$

то есть мы поочередно берём правый и левый либо левый и правый пределы для потоков в решениях  $u$  и  $q$ .

Соотношения (2.9)–(2.11) (или (2.9)–(2.10), (2.12)) суть формулировка локального разрывного метода Галёркина для решения уравнения теплопроводности (2.7), переписанного в форме системы (2.8). Этот вариант был разработан и проанализирован Кокбурном и Шу на основе численных результатов Басси и Ребэя для сжимаемых уравнений Навье-Стокса [15].

В реальных вычислениях схема (2.9)–(2.10) принимает вид, аналогичный схеме (1.31):

$$\frac{d}{dt} u_j - \frac{1}{\Delta x} (A_1 q_{j-1} + B_1 q_j + C_1 q_{j+1}) = 0, \quad (2.13)$$

$$q_j - \frac{1}{\Delta x} (A_2 u_{j-1} + B_2 u_j + C_2 u_{j+1}) = 0, \quad (2.14)$$

где  $u_j$  и  $q_j$  – малые векторы длины  $k + 1$  ( $k$  – степень используемых полиномов), содержащие коэффициенты решений  $u$  и  $q$  в локальном базисе внутри ячейки  $I_j$ , а  $A_m, B_m, C_m$ ,  $m = 1, 2$  – постоянные матрицы размерности  $(k + 1) \times (k + 1)$ , которые могут быть посчитаны один раз и сохранены в начале кода.

В источнике [15] приведены ошибки в нормах  $L^2$  и  $L^\infty$  и численно наблюдаемые порядки точности для  $u$  и  $q$  в случаях, когда  $k = 1$  и  $k = 2$  (кусочно-линейный и кусочно-квадратичный случаи), полученные при

решении начально-краевой задачи (2.7) с помощью формулировки локального разрывного метода Галёркина на момент времени  $t = 1$ . Не приводя конкретных данных, упомянем, что  $(k + 1)$ -й порядок точности достигается в обоих случаях как для решения  $u$ , так и для вспомогательной переменной  $q$ , что демонстрирует потенциал данного метода для решения задач теплопроводности.

Рассмотрим, как локальный разрывный метод Галёркина может быть обобщён на задачи теплопроводности большей размерности, конкретно – на трёхмерные задачи.

## 2.2 Алгоритм решения трёхмерного уравнения теплопроводности методом Галёркина с разрывными базисными функциями

Постановку начально-краевой задачи теплопроводности и вычислительный алгоритм в трёхмерном случае приведём, основываясь на информации из источников [3, 6].

Заметим, что в работе [6] приведён алгоритм для решения задач на тетраэдральной сетке, а нами будет использована гексаэдральная сетка.

Трёхмерная начально-краевая задача теплопроводности может быть записана как:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}, \quad t > 0, (x, y, z) \in \Omega, \quad (2.15)$$

$$T(0, x, y, z) = T_0, \quad (x, y, z) \in \Omega, \quad (2.16)$$

$$T(t, x, y, z) = T_1(x, y, z), \quad t > 0, (x, y, z) \in \partial\Omega, \quad (2.17)$$

здесь  $\Omega$  – трёхмерная односвязная область.

Метод Галёркина с разрывными базисными функциями применительно к решению уравнения (2.15) подразумевает его приведение к системе дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка, то

есть, фактически, применяется расширение схемы (2.9)–(2.10) на трёхмерный случай. Градиенты искомой функций должны быть рассмотрены отдельно, поэтому можем переписать уравнение (2.15) в виде системы:

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z}, \\ q_x = \frac{\partial T}{\partial x}, \\ q_y = \frac{\partial T}{\partial y}, \\ q_z = \frac{\partial T}{\partial z}, \end{cases} \quad (x, y, z) \in G, \quad t > 0. \quad (2.18)$$

Область  $\Omega$  накроем структурированной кубической сеткой:

$$c = \{c_m = c(P_{i1_m}, P_{i2_m}, \dots, P_{i8_m}), P_{i1_m}, P_{i2_m}, \dots, P_{i8_m} \in \omega, m = \overline{1, M}\}, \quad (2.19)$$

где  $\omega = \{P_i = (x_i, y_i, z_i), i = \overline{1, N}\}$  – множество узлов.

На каждом кубе  $c_i \in c$  введём аналогичную двумерному случаю систему линейных базисных функций  $\{\phi_j^i\} \in P^1, j = \overline{0, 3}, \phi_0^i = 1, \phi_1^i = \frac{x-x_{ci}}{\Delta x_i}, \phi_2^i = \frac{y-y_{ci}}{\Delta y_i}, \phi_3^i = \frac{z-z_{ci}}{\Delta z_i}$ , где  $(x_{ci}, y_{ci}, z_{ci})$  – центр соответствующей кубической ячейки  $c_i, \Delta x_i, \Delta y_i, \Delta z_i$  – проекции кубической ячейки на соответствующие оси координат.

Приближённые решения  $T_i, q_{xi}, q_{yi}, q_{zi}$  на каждом кубе  $c_i$  ищем в виде проекций на соответствующие базисные функции  $\{\phi_j^i\}$  при  $(x, y, z) \in c_i, j = \overline{0, 3}$ :

$$T_i = T_{i0} + T_{i1} \frac{x - x_{ci}}{\Delta x_i} + T_{i2} \frac{y - y_{ci}}{\Delta y_i} + T_{i3} \frac{z - z_{ci}}{\Delta z_i}, \quad T_{ij} = T_{ij}(t), \quad (2.20)$$

$$q_{xi} = q_{xi0} + q_{xi1} \frac{x - x_{ci}}{\Delta x_i} + q_{xi2} \frac{y - y_{ci}}{\Delta y_i} + q_{xi3} \frac{z - z_{ci}}{\Delta z_i}, \quad q_{xij} = q_{xij}(t), \quad (2.21)$$

$$q_{yi} = q_{yi0} + q_{yi1} \frac{x - x_{ci}}{\Delta x_i} + q_{yi2} \frac{y - y_{ci}}{\Delta y_i} + q_{yi3} \frac{z - z_{ci}}{\Delta z_i}, \quad q_{yij} = q_{yij}(t), \quad (2.22)$$

$$q_{zi} = q_{zi0} + q_{zi1} \frac{x - x_{ci}}{\Delta x_i} + q_{zi2} \frac{y - y_{ci}}{\Delta y_i} + q_{zi3} \frac{z - z_{ci}}{\Delta z_i}, \quad q_{zij} = q_{zij}(t). \quad (2.23)$$

Теперь нужно найти коэффициенты разложения  $T_{ij}, q_{xij}, q_{yij}, q_{zij}$  по базису  $\{\phi_j^i\}$ .

Для поиска коэффициентов  $T_{ij}$  умножим первое уравнение системы (2.18) на пробную функцию  $\phi_l^i$ ,  $l = \overline{0, 3}$ , проинтегрируем произведение по каждому из  $M$  кубов  $c_p$ ,  $p = \overline{1, m}$ . Точное решение  $T$  заменяется приближённым  $T_i$  на всех ячейках сетки. С использованием формулы Грина получаем систему для определения коэффициентов разложения  $T_{ij}$  по базису  $\{\phi_j^i\}$ :

$$\sum_{j=0}^3 \frac{\partial T_{ij}}{\partial t} \int_{c_i} \phi_j^i \phi_l^i dV = \oint_{\partial c_i} n_x q_x^\Gamma \phi_l^i dS + \oint_{\partial c_i} n_y q_y^\Gamma \phi_l^i dS + \oint_{\partial c_i} n_z q_z^\Gamma \phi_l^i dS - \int_{c_i} q_{xi} \frac{\partial(\phi_l^i)}{\partial x} dV - \int_{c_i} q_{yi} \frac{\partial(\phi_l^i)}{\partial y} dV - \int_{c_i} q_{zi} \frac{\partial(\phi_l^i)}{\partial z} dV, \quad l = \overline{0, 3}. \quad (2.24)$$

По аналогии из второго, третьего и четвёртого уравнений системы (2.18) можно получить системы для определения коэффициентов разложения  $q_{xij}, q_{yij}$  и  $q_{zij}$  по базису:

$$\sum_{j=0}^3 q_{xij} \int_{c_i} \phi_j^i \phi_l^i dV = \oint_{\partial c_i} n_x T^\Gamma \phi_l^i dS - \int_{c_i} T_i \frac{\partial(\phi_l^i)}{\partial x} dV, \quad l = \overline{0, 3}, \quad (2.25)$$

$$\sum_{j=0}^3 q_{yij} \int_{c_i} \phi_j^i \phi_l^i dV = \oint_{\partial c_i} n_y T^\Gamma \phi_l^i dS - \int_{c_i} T_i \frac{\partial(\phi_l^i)}{\partial y} dV, \quad l = \overline{0, 3}, \quad (2.26)$$

$$\sum_{j=0}^3 q_{zij} \int_{c_i} \phi_j^i \phi_l^i dV = \oint_{\partial c_i} n_z T^\Gamma \phi_l^i dS - \int_{c_i} T_i \frac{\partial(\phi_l^i)}{\partial z} dV, \quad l = \overline{0,3}. \quad (2.27)$$

Потоковая величина  $T^\Gamma$  на границе между элементами может быть вычислена по следующей формуле:

$$T^\Gamma(T^+, T^-) = 0.5 * (T^- + T^+), \quad (2.28)$$

а потоковые величины  $q_x^\Gamma, q_y^\Gamma$  и  $q_z^\Gamma$ , следуя источнику [3], предлагается вычислить, используя стабилизирующие добавки:

$$q^\Gamma(T^+, T^-, \mathbf{n}) = q + C_{11}((T^+ - T^-), \mathbf{n}), \quad (2.29)$$

где величина  $T^-$  вычисляется на границе  $\partial c_i$  элемента  $c_i$  по значениям внутри элемента, а величины  $T^+$  для внутренних рёбер вычисляются на границе  $\partial c_i$  по значениям в соседней к данному элементу ячейке, а для граничных рёбер – в соответствии с граничными условиями, при этом  $\mathbf{n}$  – единичная нормаль к ребру элемента,  $C_{11}$  – определяемый нами множитель (в источнике [3] используется  $C_{11} = 1$ , далее нами будет применено аналогичное значение).

Производную по времени в источнике [3] предлагается аппроксимировать как:

$$\left. \frac{\partial T_{ij}}{\partial t} \right|_{t=n\tau} \approx \frac{T_{ij}^{n+1} - T_{ij}^n}{\tau}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (2.30)$$

где  $\tau$  – временной шаг дискретизации. При этом, естественно, для шага по времени должно быть выполнено условие Куранта–Фридрихса–Леви.

Как уже было упомянуто в подразделе 1.3, на порядок точности вычислительной схемы большое влияние оказывает используемый метод расчёта дискретных потоков между ячейками. В описываемой далее реализации алгоритма для решения трёхмерных начально-краевых задач теплопроводности локальным разрывным методом Галёркина будут использоваться следующие три варианта расчёта численных потоков:

1) Вычисление температуры  $T$  с использованием центрального потока (2.28) и компонент градиента температуры  $q_x, q_y$  и  $q_z$  с использованием стабилизирующих добавок по формуле (2.29).

2) Расчёт температуры  $T$  по внешним значениям, а компонент градиента температуры  $q_x, q_y$  и  $q_z$  – по значениям внутри элемента, опираясь на соотношение (2.11).

3) Вычисление температуры  $T$  по внутренним значениям и компонент градиента температуры  $q_x, q_y$  и  $q_z$  – по внешним для текущего элемента значениям, опираясь на соотношение (2.12).

Все три варианта расчёта дискретных потоков между ячейками будут применены для решения тестовых задач теплопроводности и сравнены по эффективности применения для решения задач с различными типами граничных условий.

Таким образом, выше были приведены формулировки и основные особенности локального разрывного метода Галёркина применительно к решению начально-краевых задач теплопроводности разных размерностей и введены несколько вариантов расчёта численных потоков.

Теперь перейдём непосредственно к разбору особенностей реализации программного кода для решения трёхмерных задач теплопроводности, протестируем его на заранее выбранных задачах и проведём подробный анализ полученных результатов.

### 3 Программная реализация и исследование порядка точности вычислительного алгоритма локального разрывного метода Галёркина

На текущий день существует множество реализаций метода конечных элементов, применяемых для решения разнообразных задач, в частности уравнений конвекции-диффузии, к которым относится и начально-краевая задача для уравнения теплопроводности.

В рамках данной работы в структуру проекта *charm\_3d\_v2* [9], написанного на языке программирования C++, был добавлен модуль для решения трёхмерных задач теплопроводности на гексаэдральных сетках локальным методом Галёркина с разрывными базисными функциями. Ниже будут разобраны основные этапы решения поставленных задач, в том числе подготовительные действия, например, построение геометрии, расчётной сетки, а также некоторые фрагменты кода реализованной программы.

Ссылка на полный код проекта *charm\_3d\_v2* с реализованным модулем для решения трёхмерных начально-краевых задач теплопроводности разрывным методом Галёркина приведена в приложении А.

Будем решать следующие тестовые задачи теплопроводности из источников [3, 5, 6] на единичном кубе:

1) Начально-краевая задача теплопроводности с граничным условием II рода (теплоизоляция) [5]:

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}, & 0 < x, y, z < 1, t > 0, \\ T(0, x, y, z) = \cos(\pi x) \cos(\pi y) \cos(\pi z), \\ \left. \frac{\partial T}{\partial \vec{n}} \right|_{\partial \Omega} = 0. \end{cases} \quad (3.1)$$

2) Начально-краевая задача теплопроводности с граничными условиями I и II рода на разных границах тела (фиксированная температура и теплоизоляция, соответственно) [6]:

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}, & 0 < x, y, z < 1, \quad t > 0, \\ T(0, x, y, z) = 1 + x^2 + y^2 + z^2, \\ T(t, 1, y, z) = T(t, x, 1, z) = T(t, x, y, 1) = 1 + x^2 + y^2 + z^2, \\ \left. \frac{\partial T}{\partial \vec{n}} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial T}{\partial \vec{n}} \right|_{x=1} = \left. \frac{\partial T}{\partial \vec{n}} \right|_{x=0} = 0. \end{cases} \quad (3.2)$$

3) Начально-краевая задача теплопроводности с граничным условием I рода (постоянная температура на границах и нагревание куба от одной из стенок) [3]:

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}, & 0 < x, y, z < 1, \quad t > 0, \\ T(0, x, y, z) = 0, \\ T(t, 0, y, z) = T(t, 1, y, z) = T(t, x, 0, z) = \\ = T(t, x, 1, z) = T(t, x, y, 1) = 0, \\ T(t, x, y, 0) = 1. \end{cases} \quad (3.3)$$

Время, до которого ведётся расчёт задач, составляет  $t_{max} = 0.005$ .

Заметим, что тестовая задача (3.1) имеет аналитическое решение, задаваемое следующей формулой:

$$T(t, x, y, z) = e^{-3\pi^2 t} \cos(\pi x) \cos(\pi y) \cos(\pi z). \quad (3.4)$$

Сперва мы должны построить нужную нам для расчётов равномерную кубическую сетку и геометрию задачи. Далее будет подробно разобрано, как это можно сделать.

### 3.1 Построение геометрии и расчётной сетки средствами конечно-элементного генератора сеток Gmsh

Согласно сайту [11], Gmsh – генератор трёхмерных конечно-элементных сеток со встроенным движком САПР и постпроцессором с открытым исходным кодом.

Gmsh построен вокруг четырёх основных модулей: геометрического модуля, модуля для построения сеток, модуля-решателя и модуля для постобработки. Работа с перечисленными модулями может осуществляться либо через графический интерфейс пользователя, либо через командную строку, либо через текстовые файлы формата *.geo*, написанные на собственном скриптовом языке Gmsh, либо с использованием прикладного программного интерфейса, доступного, в том числе, и для языка программирования C++.

Для конкретной геометрии могут быть сгенерированы одномерная, двумерная или трёхмерная сетки. Алгоритмы генерации 2D- и 3D-сеток могут быть структурированными и неструктурированными – от этого зависит итоговый вид ячеек сетки. Так, например, неструктурированный алгоритм в трёхмерном случае генерирует для тела сетку из тетраэдров и/или пирамид. Структурированный же алгоритм в трёхмерном случае на выходе даёт, в зависимости от типа поверхностных сеток, тетраэдральные, гексаэдральные, призматические или пирамидальные ячейки.

Также доступны дополнительные опции: улучшение, разделение, оптимизация и сглаживание сеток.

Для решения тестовых задач (3.1)–(3.3) нам нужна равномерная гексаэдральная сетка, построенная на единичном кубе. Рассмотрим, как её можно получить в Gmsh.

Нам нужно построить куб со следующими параметрами:

$$C_1 = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}. \quad (3.5)$$

Один из предустановленных в Gmsh примеров соответствует геометрии, задаваемой соотношением (3.5), но по умолчанию для него генерируется тетраэдральная сетка с крупными ячейками, как на рисунке 1.

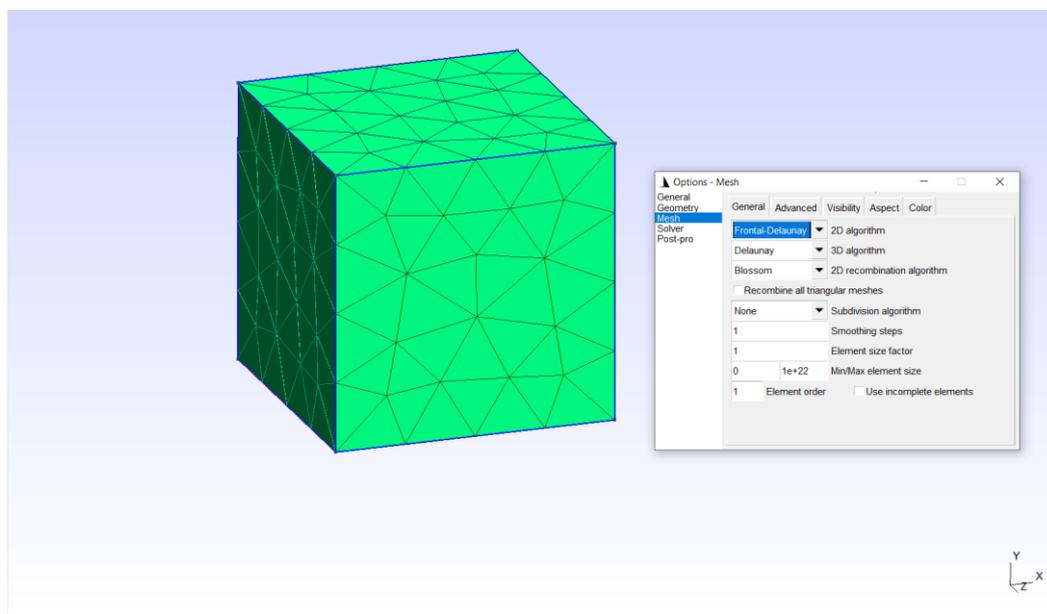


Рисунок 1 – Сгенерированная с параметрами по умолчанию сетка для единичного куба в Gmsh

Поскольку для дальнейших расчётов с помощью проекта [9] нам нужно создать не только равномерную гексаэдральную сетку, но также добавить физические группы, а именно, плоскости и объём, для задания начальных и граничных условий, то создадим файл *test.geo* со следующим содержанием (листинг 1).

```
N = 10;  
CellSize = 0;  
  
Point(1)={ 0, 0, 0, CellSize};  
Point(2)={ 1, 0, 0, CellSize};  
Point(3)={ 1, 1, 0, CellSize};  
Point(4)={ 0, 1, 0, CellSize};  
  
Line(1) = {1,2};
```

Листинг 1, лист 1 – Содержание файла *test.geo*

```

Line(2) = {2,3};
Line(3) = {3,4};
Line(9) = {1,4};

Line Loop(101) = {1,2,3,-9};
Plane Surface(1) = {101};

Transfinite Line { 1,2,3,-9 } = N+1 Using Progression 1;
Transfinite Surface (1);

Recombine Surface (1);

Extrude {0, 0, 1} {
  Surface{1}; Layers{N}; Recombine;
}

//+
Physical volume("CUBE") = {1};

//+
Physical surface("FRONT") = {123};
//+
Physical surface("BACK") = {1};
//+
Physical surface("LEFT") = {122};
//+
Physical surface("RIGHT") = {114};
//+
Physical surface("TOP") = {118};
//+
Physical surface("BOTTOM") = {110};

Mesh.MshFileVersion = 2.2;

```

#### Листинг 1, лист 2

Разберём чуть подробнее команды из данного файла. Сначала задаётся количество точек для построения сетки  $N$  и целевой размер сетки для точек в переменной *CellSize*, затем определяются четыре угловые точки одной из граней куба, которые соединяются между собой линиями (*Line*), замыкаемыми в цикл (*Line Loop*). На каркасе из линий строится плоскость – грань куба (*Plane Surface*).

Далее будет определена структурированная сетка. Используется команда *Transfinite Line*. Эта команда определяет противоположные грани четырёхсторонних фигур, к которым мы будем применять структурированную сетку, а также количество точек сетки, которые будут использоваться при рисовании линий сетки между двумя определёнными

гранями. *Using Progression 1* означает, что структурированная сетка должна иметь равномерную градацию. После указания трансфинитных линий для каждой поверхности должна быть добавлена возможность создания структурированной сетки с помощью команды *Transfinite Surface*. Команда *Recombine Surface* должна быть добавлена, чтобы сетка состояла из четырёхугольников, так как по умолчанию Gmsh создаёт для поверхностей треугольную сетку.

Построенная поверхность «выдавливается» в объём (*Extrude*) вдоль оси *z*. Далее из «выдавленной» в объём плоскости формируется физический объём «*CUBE*» с помощью команды *Physical Volume* и задаются физические поверхности «*FRONT*», «*BACK*», «*LEFT*», «*RIGHT*», «*TOP*» и «*BOTTOM*» на шести гранях куба (*Physical Surface*). Также указываем версию файла с сеткой *.msh*, равную 2.2, поскольку в проекте [9] реализовано чтение геометрии и сетки именно для структуры файла *.msh* такой версии.

Построенную в трёхмерном конечно-элементном генераторе сеток Gmsh равномерную гексаэдральную сетку с пространственным шагом  $h = 0.1$  для единичного куба можно увидеть на рисунке 2.

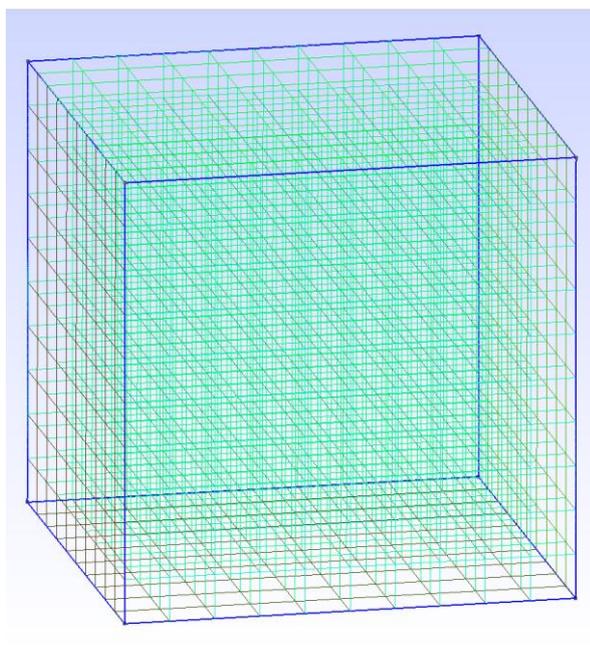


Рисунок 2 – Равномерная гексаэдральная сетка на единичном кубе в Gmsh

Теперь эту сетку можно экспортировать в файл *test.msh*. В силу большого количества однотипных строк в файле, ниже в листинге 2 будут приведены и разобраны лишь основные его фрагменты.

```

$MeshFormat
2.2 0 8
$EndMeshFormat
$PhysicalNames
7
2 2 "FRONT"
2 3 "BACK"
2 4 "LEFT"
2 5 "RIGHT"
2 6 "TOP"
2 7 "BOTTOM"
3 1 "CUBE"
$EndPhysicalNames
$Nodes
1331
1 0 0 0
2 1 0 0
3 1 1 0
4 0 1 0
5 0 0 1
6 1 0 1
7 1 1 1
8 0 1 1
9 0.099999999999981414 0 0
10 0.19999999999995569 0 0
11 0.2999999999999265 0 0
12 0.39999999999989731 0 0
...
1326 0.8999999999995989 0.8999999999997362 0.4
1327 0.8999999999995989 0.8999999999997362 0.5
1328 0.8999999999995989 0.8999999999997362 0.6
1329 0.8999999999995989 0.8999999999997362 0.7
1330 0.8999999999995989 0.8999999999997362 0.8
1331 0.8999999999995989 0.8999999999997362 0.9
$EndNodes
$Elements
1600
1 3 2 3 1 1 9 117 36
2 3 2 3 1 36 117 118 37
3 3 2 3 1 37 118 119 38
4 3 2 3 1 38 119 120 39
5 3 2 3 1 39 120 121 40
...
1596 5 2 1 1 1327 355 103 364 1328 356 104 365
1597 5 2 1 1 1328 356 104 365 1329 357 105 366
1598 5 2 1 1 1329 357 105 366 1330 358 106 367
1599 5 2 1 1 1330 358 106 367 1331 359 107 368
1600 5 2 1 1 1331 359 107 368 602 62 7 63
$EndElements

```

Листинг 2 – Частичное содержание файла *test.msh*

Разберём содержание файла *test.msh*. В разделе *\$MeshFormat ... \$EndMeshFormat* указаны номер версии Gmsh, тип файла (0 соответствует ASCII-формату файла) и размер чисел с плавающей точкой, используемых в данном файле. В разделе *\$PhysicalNames ... \$EndPhysicalNames* указано количество физических регионов (в нашем случае – 7), а затем перечислены размерности регионов (2 – поверхность, 3 – объём), их порядковые номера и названия. Раздел *\$Nodes ... \$EndNodes* содержит количество узлов в сетке (здесь – 1331), индексы и координаты каждого узла в трёхмерном пространстве. Последний раздел данного файла сетки *\$Elements ... \$EndElements* содержит данные об элементах (гранях и ячейках) сетки в следующем порядке: индекс элемента, геометрический тип элемента (3 соответствует четырёхугольнику с четырьмя узлами (грани), 5 – гексаэдру с восемью узлами (ячейке)), число тегов (в нашем случае – 2), сами теги (первый тег отвечает номеру физического объекта, которому принадлежит текущий элемент, второй тег – номеру элементарного геометрического объекта, которому принадлежит элемент), а также список номеров узлов, образующих данный элемент.

Теперь перейдём к разбору модуля с реализацией метода Галёркина с разрывными базисными функциями для решения трёхмерных задач теплопроводности в коде проекта [9].

### **3.2 Особенности реализации разрывного метода Галёркина в проекте *charm\_3d\_v2***

В базовой версии проекта [9], написанного на языке программирования C++, уже было реализовано решение трёхмерных задач газовой динамики с использованием метода конечных объёмов. Для решения тестовых задач теплопроводности (3.1)–(3.3) мною был реализован модуль с разрывным методом Галёркина, некоторые особенности реализации которого будут рассмотрены далее.

Структура проекта [9] с реализованным методом Галёркина с разрывными базисными функциями может быть изучена по ссылке в приложении А, а мы приведём лишь краткий разбор основных структурных компонентов данной программы.

В директории *contrib* содержится сторонний модуль [10] с *yaml*-парсером и анализатором, написанном на языке программирования C++.

Директория *src* содержит основные файлы программного кода, в том числе, файлы кода с определением глобальных структур и функций проекта, файлы, определяющие геометрию и расчётную сетку, и файл *task.yaml*, содержащий значения глобальных параметров проекта.

Поддиректория *mesh* включает в себя файлы, обрабатывающие элементы расчётной сетки (узлы, грани и ячейки), а также создающие геометрию задачи в проекте. Поддиректория *readers* включает в себя файлы кода, которые переводят содержимое файла формата *.msh* в структуры, используемые в проекте.

В поддиректорию *method* включены файлы, непосредственно реализующие решение задач: в поддиректориях *fem-dg-heat* и *fvm* реализованы, соответственно, разрывный метод Галёркина для решения задач теплопроводности и метод конечных объёмов для решения задач газовой динамики; также представлены файлы, осуществляющие обработку начальных и граничных условий, заданных в файле *task.yaml*, и расчёт численных потоков между ячейками сетки.

Кратко разберём функциональность, реализованную в файлах из директории *fem-dg-heat*.

В файлах *ConfigFemDgHeat.h* и *ConfigFemDgHeat.cpp* реализовано чтение некоторых параметров из конфигурационного файла с параметрами решаемой задачи *task.yaml*, а также создание объекта типа *Method*. Файлы *DataDgHeat.h* и *DataDgHeat.cpp* содержат реализацию арифметических операций и некоторых других действий над консервативными и примитивными переменными.

Подробнее остановимся на реализации разрывного метода Галёркина в файлах *MethodFemDgHeat.h* и *MethodFemDgHeat.cpp*.

Файл заголовков *MethodFemDgHeat.h* включает в себя объявления функций и переменных внутри класса *MethodFemDgHeat*, расширяющего класс *Method*, при этом их реализация должна содержаться в файле *MethodFemDgHeat.cpp*.

Роль каркаса алгоритма выполняют функции *init()*, *run()* и *done()*, которые должны быть переопределены в соответствующем *cpp*-файле. Они отвечают за инициализацию расчётного метода, его основное содержание и очистку памяти после завершения работы метода, соответственно. С помощью функций *save()* и *saveVtk()* осуществляется сохранение результатов в файлы *.vtk* для их последующего просмотра в специализированных графических пакетах, например, в ParaView [14]. Во вспомогательных методах *calcDt()* и *calcMassMatrix()* реализовано получение временного шага из конфигурационного *yaml*-файла и вычисление матрицы жёсткости при инициализации расчётного метода. Функции *getT(...)*, *getQx(...)*, *getQy(...)*, *getQz(...)* включают в себя реализацию получения значений полей температуры и компонент градиента температуры. Методы *getF(...)*, *getDfDx(...)*, *getDfDy(...)* и *getDfDz(...)* вычисляют базисные функции и их производные в ячейках сетки. В функциях *convertToParam(...)* и *flux(...)* реализовано присвоение значений полям *T*, *qx*, *qy* и *qz* и расчёт дискретных потоков между ячейками, соответственно.

Основная вычислительная логика разрывного метода Галёркина содержится в следующих функциях, последовательно вызываемых на каждой временной итерации в опорном методе *run()*: *calcGradients()* – вычисление градиентов температуры; *calcDiffusionVol()* – вычисление объёмных интегралов; *calcDiffusionSurf()* – вычисление поверхностных интегралов; *calcNewValues()* – вычисление температуры на новом шаге по времени. Код этих четырёх ключевых расчётных методов приведён в приложении Б.

Численное интегрирование по граням ячеек и их объёмам проводится с использованием квадратурных формул Гаусса, параметры для которых вычисляются для конкретной расчётной сетки в реализованных в файле *Mesh.cpp* функциях.

Ниже будут приведены краткие пояснения к основным вычислительным методам из приложения Б.

В методе *calcGradients()* (приложение Б) на каждой итерации расчёт градиентов температуры состоит из нескольких этапов. Сначала вычисляются объёмные интегралы по ячейкам, затем – поверхностные интегралы по граням с расчётом потоков между ячейками, проверкой грани на статус границы и применением граничных условий в соответствии с решаемой задачей, а в конце рассчитываются градиенты на новом временном шаге через предварительно рассчитанную и сохранённую для каждой ячейки матрицу жёсткости.

Метод *calcDiffusionVol()* (приложение Б) предполагает вычисление объёмных интегралов температуры для каждой ячейки с использованием предварительно рассчитанных весов интегрирования для метода Гаусса, градиентов температуры и производных базисных функций.

В методе *calcDiffusionSurf()* (приложение Б) расчёт поверхностных температурных интегралов ведётся по граням ячеек с получением граничных условий, соответствующих решаемой задаче, вычислением тепловых потоков между ячейками и использованием некоторых гауссовых параметров для численного интегрирования.

Метод *calcNewValues()* (приложение Б) предполагает при вычислении температуры в каждой ячейке на новом временном шаге использовать полученные с помощью предыдущих трёх методов интегралы температуры, а также вычисленные ранее элементы матрицы жёсткости.

Также следует обратить внимание на структуру конфигурационного файла *task.yaml*, в листинге 3 приведено его содержание.

```

method: CHARM_3D
version: 2.0.2
control:
  RESTART_OUTPUT_STEP: 0
  STEP_START: 0
  TIME_START: 0
  FLUX_TYPE: HLLC
  LIMITER: BJ
  MAX_ERROR: 0.01
  REFINER_PERIOD: 10
  REPARTITION_PERIOD: 10
  MIN_LEVEL: 0
  MAX_LEVEL: 1
  CFL: 2.5e-5 # число Куранта
  TAU: 6.25e-6 # шаг по времени, используется
меньшее значение из этого или из полученного из числа Куранта
  TMAX: 0.005 # время, до которого выполняется
расчет
  FILE_OUTPUT_STEP: 10 # количество итераций, через
которые выполняется вывод результатов в файл
  LOG_OUTPUT_STEP: 1 # интервал вывода краткой
информации в лог-файл
  MODEL:
    name: HEAT_FEM_DG
    use_visc: 0
    use_diffusion: 0
    t_ref: 298.15
mesh:
  files_type: gmsh_msh
  name: test_h_0.025.msh # имя файлов с данными сетки
components:
  -
    id: 0
    name: AIR
    cp_type: CONST
    kp_type: CONST
    ml_type: CONST
    M: 0.02869409 # молярная масса
    Cp: [1014.16]
    KPO: 0 # теплопроводность вещества
    при температуре T0
    MLO: 0 # динамическая вязкость
    вещества при температуре T0
    T0: 273.15 # константа для формулы
    Сазерленда
    TS: 218.0 # константа для формулы
    Сазерленда
    Sig: 3.512 # параметры Леннарда-Джонса
    ек: 139.8 # параметры Леннарда-Джонса
    h0: -8.386329e+4 # энтальпия образования
    вещества
materials:
  -
    id: 0
    name: MIXTURE
    eof_type: IDEAL # IDEAL, MIX

```

Листинг 3, лист 1 – Содержание конфигурационного файла *task.yaml*

```

regions:
-
  id: 0
  name: CUBE
  cell_type: 0
  material_id: 0
  components:
  - {id: 0, concentration: 1}
  parameters:
    V: {x: 0, y: 0, z: 0}
    T: 0
    P: 101325.0
    G: {x: 0, y: 0, z: 0}
boundaries:
-
  name: BACK
  # z = 0
  type: BOUND_OUTLET
  material_id: 0
  components:
  - {id: 0, concentration: 1}
  parameters:
    V: {x: 0, y: 0, z: 0}
    T: 0
    P: 101325.0
-
  name: FRONT
  # z = 1
  type: BOUND_SYMMETRY
  material_id: 0
  components:
  - {id: 0, concentration: 1}
  parameters:
    V: {x: 0, y: 0, z: 0}
    T: 0
    P: 101325.0
-
  name: LEFT
  # x = 0
  type: BOUND_OUTLET
  material_id: 0
  components:
  - {id: 0, concentration: 1}
  parameters:
    V: {x: 0, y: 0, z: 0}
    T: 0
    P: 101325.0
-
  name: RIGHT
  # x = 1
  type: BOUND_SYMMETRY
  material_id: 0
  components:
  - {id: 0, concentration: 1}
  parameters:
    V: {x: 0, y: 0, z: 0}
    T: 0

```

```

    P: 101325.0
-
  name: TOP
  # y = 1
  type: BOUND_SYMMETRY
  material_id: 0
  components:
    - {id: 0, concentration: 1}
  parameters:
    V: {x: 0, y: 0, z: 0}
    T: 0
    P: 101325.0
-
  name: BOTTOM
  # y = 0
  type: BOUND_OUTLET
  material_id: 0
  components:
    - {id: 0, concentration: 1}
  parameters:
    V: {x: 0, y: 0, z: 0}
    T: 0
    P: 101325.0

```

### Листинг 3, лист 3

Кратко опишем, за что отвечают разделы вышеприведённого файла. В *control* указаны общие параметры задачи, например, число Куранта–Фридрихса–Леви *CFL*, шаг по времени *TAU*, расчётное время *TMAX* и так далее. Раздел *mesh* содержит информацию об используемом файле с данными сетки, а раздел *components* – параметры компонентов в текущей задаче (в нашем случае – воздуха). В *materials* и *regions* указаны, соответственно, параметры используемых веществ и начальные параметры заданных по условию задачи регионов (например, начальная температура единичного куба, равная нулю, задаётся, как  $T: 0$ ). Последний раздел *boundaries* содержит описание всех границ и граничных условий: их названия *name*, тип граничных условий *type* (например, для тестовой задачи, задаваемой системой (3.2), используем граничные условия *BOUND\_OUTLET* с задаваемым в файле *BoundaryCondition.cpp* нулевым тепловым потоком на границах  $x = 0$ ,  $y = 0$  и  $z = 0$  и *BOUND\_SYMMETRY* для задания температуры согласно системе (3.2) на границах  $x = 1$ ,  $y = 1$  и  $z = 1$  в файле *MethodFemDgHeat.cpp*).

Более подробное представление о структуре проекта *charm\_3d\_v2* и о реализации в нём разрывного метода Галёркина для решения задач теплопроводности, как уже было сказано ранее, можно получить по ссылке, приведённой в приложении А.

Отметим также, что в процессе решения задачи в рамках вышеразобранного проекта данные записываются в *vtk*-файлы с названиями формата *charm\_<номер итерации>.vtk*, содержащие в себе данные о точках, ячейках, типах ячеек, значениях температуры и температурных градиентов в ячейках и номерах ячеек.

Теперь перейдём к просмотру полученных результатов в графическом пакете ParaView [14], а также проведём некоторый их анализ, в частности, вычислим порядки точности данной реализации локального разрывного метода Галёркина, в зависимости от использованного варианта метода расчёта дискретных потоков между ячейками, и сравним их между собой в рамках каждой тестовой задачи.

### **3.3 Анализ результатов и исследование порядка точности локального разрывного метода Галёркина**

Для просмотра полученных решений трёхмерных начально-краевых задач теплопроводности (3.1)–(3.3) воспользуемся открытым графическим кроссплатформенным пакетом для интерактивной визуализации ParaView [14]. Данное ПО поддерживает несколько форматов данных, в том числе и вышеупомянутый формат *.vtk*.

Не рассматривая детально интерфейс программы ParaView, загрузим полученные при решении задач *vtk*-файлы и продемонстрируем на рисунках 3–5, какой вид имеет температурное поле единичного куба в каждой из тестовых задач (3.1)–(3.3) при использовании первого варианта дискретного потока, а именно, центрального потока, на конечный момент времени  $t_{max} = 0.005$ . Шаг по сетке составляет  $h = 0.025$ .

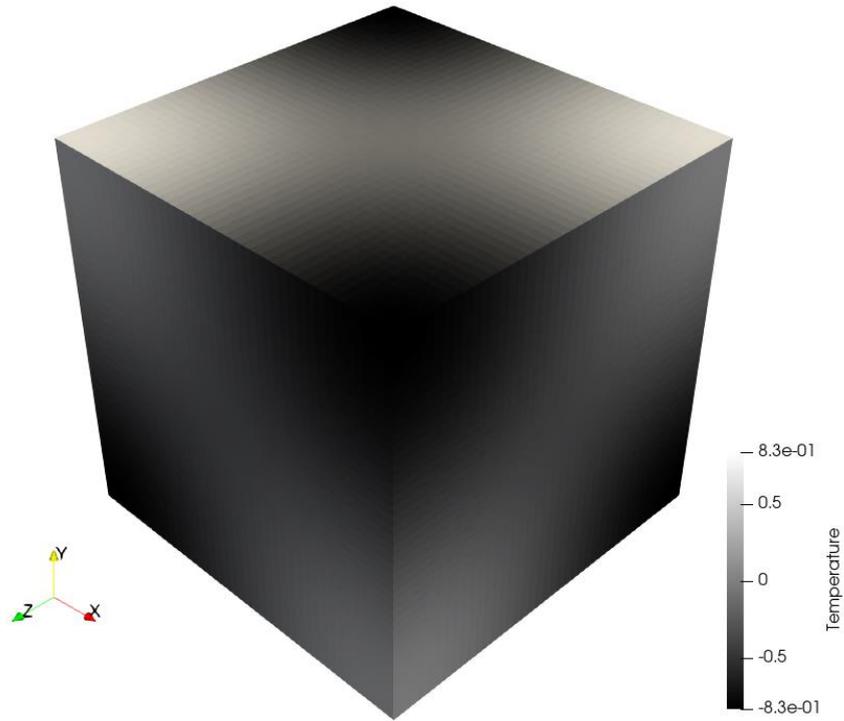


Рисунок 3 – Температурное поле тестовой задачи (3.1) при  $t = 0.005$

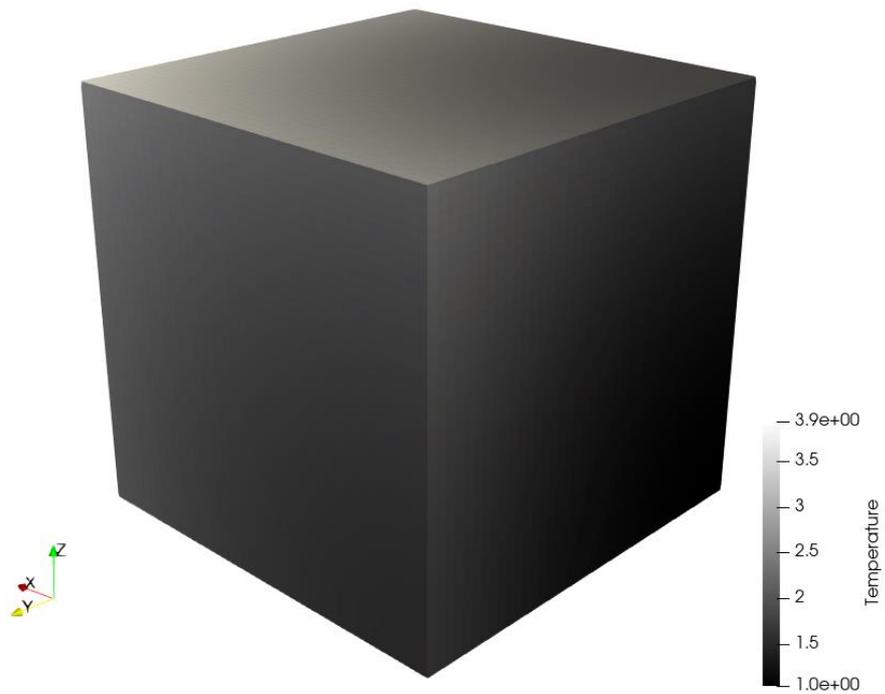


Рисунок 4 – Температурное поле тестовой задачи (3.2) при  $t = 0.005$

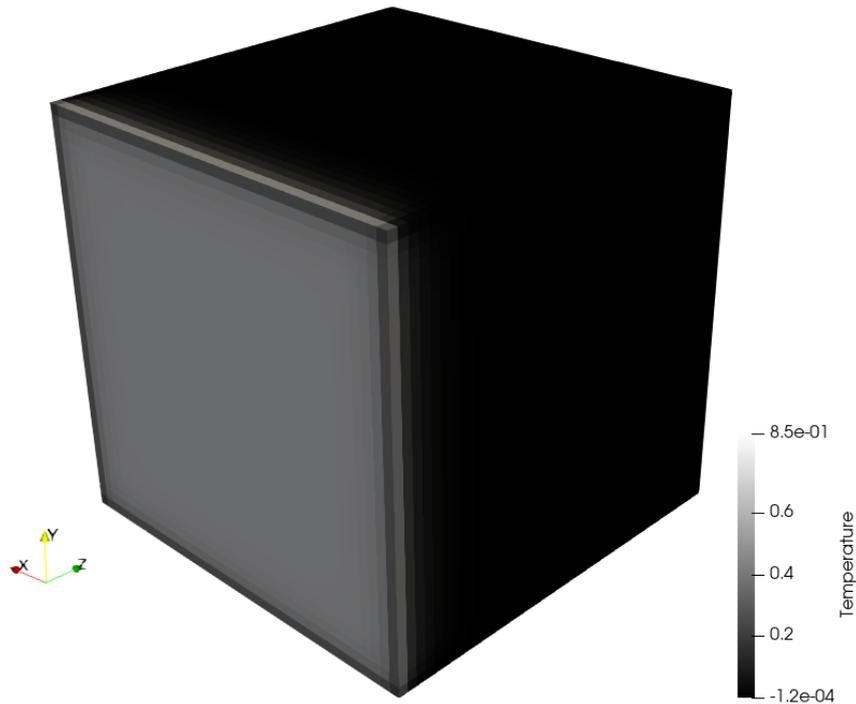


Рисунок 5 – Температурное поле тестовой задачи (3.3) при  $t = 0.005$

Как мы видим, итоговое распределение температуры в единичном кубе выглядит физично и в первом приближении согласуется с начально-краевыми условиями задач (3.1)–(3.3).

Чтобы оценить, насколько хорошо данная реализация разрывного метода Галёркина проявляет себя на задачах теплопроводности (3.1)–(3.3), нужно вычислить порядок точности численного метода. Для его вычисления будем использовать сеточные нормы  $C$ ,  $L_1$  и  $L_2$ .

Опираясь на источник [2], общая формула для расчёта порядка точности численного метода при отсутствии точного решения имеет вид:

$$r = \log_2 \frac{\|U_h - U_{h/2}\|}{\|U_{h/2} - U_{h/4}\|}, \quad (3.6)$$

где  $U_h$ ,  $U_{h/2}$  и  $U_{h/4}$  – численные решения задачи с шагами по пространству  $h$ ,  $h/2$  и  $h/4$ , соответственно.

Если задача имеет точное решение, то формула (3.6) принимает вид:

$$r = \log_2 \frac{\|U - U_h\|}{\|U - U_{h/2}\|}, \quad (3.7)$$

где  $U$  – точное решение задачи.

Очевидно, что нормы в формулах (3.6)–(3.7) могут быть различными. Мы будем использовать три вида сеточных норм, а именно, вычисляемую через максимум модуля норму  $C$  и интегральные нормы  $L_1$  и  $L_2$ . Формулы для их определения приведены ниже:

$$\|U_h - U_{h/2}\|_C = \max_{(x,y,z) \in \omega_h} |U_h(x, y, z) - U_{h/2}(x, y, z)|, \quad (3.8)$$

$$\|U_h - U_{h/2}\|_{L_1} = \sum_{k=1}^N \int_{C_k} |U_h - U_{h/2}| dV, \quad (3.9)$$

$$\|U_h - U_{h/2}\|_{L_2} = \left( \sum_{k=1}^N \int_{C_k} (U_h - U_{h/2})^2 dV \right)^{1/2}, \quad (3.10)$$

где  $\omega_h$  – сетка, введённая в замкнутой ограниченной области  $\Omega$ . При этом сеточные аналоги норм (3.9)–(3.10) на единичном кубе (3.5) в случае равномерной кубической сетки с пространственным шагом  $h$ , по каждому из трёх направлений разбитой на  $N + 1$  узлов вида  $x_n = h \cdot n$ ,  $n = \overline{0, N}$ , без учёта граничных ячеек вдоль каждого пространственного направления можно определять с помощью следующих интегральных сумм:

$$\|U_h\|_{L_1} = h^3 \sum_{i,j,k=1}^{N-1} |U_h(x_i, y_j, z_k)|, \quad (3.11)$$

$$\|U_h\|_{L_2} = \left( h^3 \sum_{i,j,k=1}^{N-1} U_h^2(x_i, y_j, z_k) \right)^{1/2}. \quad (3.12)$$

Стоит заметить, что при уменьшении шага по пространству в 2 раза, одной начальной ячейке будет соответствовать 8 уменьшенных, это важно учитывать при вычислении соответствующих друг другу значений температуры по различным сеткам.

Интересующий нас для вычисления порядка точности метода Галёркина с разрывными базисными функциями фрагмент итогового vtk-файла включает в себя распределение температуры в ячейках расчётной сетки в определённый момент времени. Пример фрагмента файла для тестовой задачи (3.1) при  $h = 0.1$ ,  $t = t_{max} = 0.005$  представлен в листинге 4, часть строк пропущена.

```
CELL_DATA 1000
SCALARS Temperature double 1
LOOKUP_TABLE default
0.765005
0.705206 0.561937 0.360794 0.124311 -0.124311 -0.360794 -
0.561937 -0.705206
-0.765005 0.705206 0.650033 0.517967 0.332564 0.114585 -0.114585
-0.332564
-0.517967 -0.650033 -0.705206 0.561937 0.517967 0.412735
0.264999 0.0913056
...
0.332564 0.264999 0.170145 0.0586235 -0.0586235 -0.170145 -
0.264999 -0.332564
-0.360794 0.561937 0.517967 0.412735 0.264999 0.0913056 -
0.0913056 -0.264999
-0.412735 -0.517967 -0.561937 0.705206 0.650033 0.517967
0.332564 0.114585
-0.114585 -0.332564 -0.517967 -0.650033 -0.705206 0.765005
0.705206 0.561937
0.360794 0.124311 -0.124311 -0.360794 -0.561937 -0.705206 -
0.765005
```

Листинг 4 – Фрагмент одного из vtk-файлов, сформированных при решении задачи (3.1) в проекте *charm\_3d\_v2*

После ключевого слова *CELL\_DATA* указывается количество ячеек расчётной сетки. Далее после ключевых слов *SCALARS Temperature* перечислены в порядке id ячеек значения температуры в них.

При построении сетки с использованием конечно-элементного генератора сеток Gmsh на геометрии единичного куба ячейки сетки нумеруются, начиная с ячейки с координатами (0,0,0), затем идёт сдвиг вдоль осей  $Oz$ ,  $Oy$  и  $Ox$ , соответственно, что видно на рисунке 6.

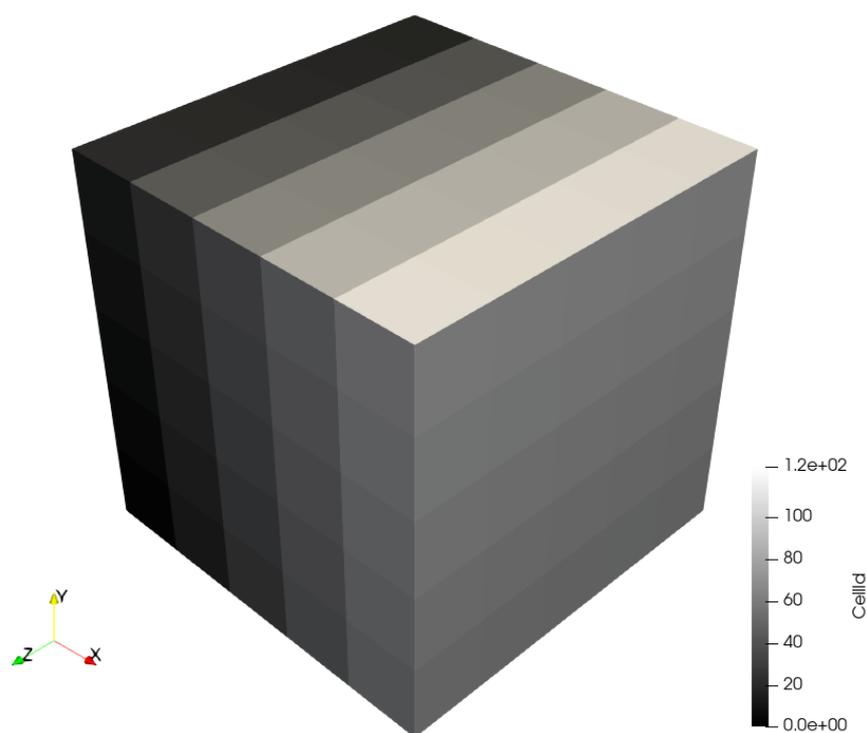


Рисунок 6 – Пример нумерации ячеек в единичном кубе ( $h = 0.2$ )

Для вычисления порядка точности локального разрывного метода Галёркина при решении тестовых задач (3.1)–(3.3) будем использовать приведённые в таблице 1 значения шага по времени  $\tau$  и шага по сетке  $h$ , чтобы число Куранта оставалось постоянным для каждой из решаемых задач.

Т а б л и ц а 1 – Значения параметров  $\tau$  и  $h$  для решения тестовых задач

Тестовая задача №	$\tau$	$h$
1, 2, 3	$5 \cdot 10^{-4}$	0.2
	$1.25 \cdot 10^{-4}$	0.1
	$3.125 \cdot 10^{-5}$	0.05
	$7.8125 \cdot 10^{-6}$	0.025

Временной шаг  $\tau$  будем использовать при настройке файла *task.yaml*, а шаг по пространству  $h$  – для построения файла сетки *.msh* с помощью конечно-элементного генератора сеток Gmsh.

Заметим, что согласно формулам (3.11)–(3.12) порядки точности исследуемого метода и ошибки численного решения будем рассчитывать, с учётом максимального значения  $h = 0.2$  из таблицы 1, в области  $C_{norm} = [0.2, 0.8] \times [0.2, 0.8] \times [0.2, 0.8]$ .

Порядки точности локального разрывного метода Галёркина по значениям температуры  $T$  в ячейках расчётной сетки были рассчитаны на тестовых задачах (3.1)–(3.3) в трёх нормах с тремя вариантами численных потоков с помощью специально написанного скрипта на языке программирования Python.

Сведём полученные результаты в таблицы. В таблицах 2–4 представлены ошибки численного решения тестовой задачи (3.1) и порядки точности разрывного метода Галёркина для данной задачи, вычисленные в нормах  $C$ ,  $L_1$  и  $L_2$  в области  $C_{norm}$  для трёх различных вариантов расчёта дискретных потоков между ячейками, соответственно.

В таблицах 2–6 и далее  $N$  обозначает количество ячеек в расчётной сетке.

Т а б л и ц а 2 – Ошибки численного решения и порядок точности метода на тестовой задаче №1 в области  $C_{norm}$  при использовании центрального потока со стабилизирующими добавками

$N$	$\ \cdot\ _C$		$\ \cdot\ _{L_1}$		$\ \cdot\ _{L_2}$	
	Ошибка	$r$	Ошибка	$r$	Ошибка	$r$
125	$3.018 \cdot 10^{-3}$	–	$1.93 \cdot 10^{-4}$	–	$7.64 \cdot 10^{-4}$	–
1000	$1.79 \cdot 10^{-3}$	0.754	$9.3 \cdot 10^{-5}$	1.061	$2.82 \cdot 10^{-4}$	1.436
8000	$9.27 \cdot 10^{-4}$	0.95	$2.8 \cdot 10^{-5}$	1.734	$9.4 \cdot 10^{-5}$	1.592
64000	$5.23 \cdot 10^{-4}$	0.827	$9 \cdot 10^{-6}$	1.578	$3.5 \cdot 10^{-5}$	1.434

Т а б л и ц а 3 – Ошибки численного решения и порядок точности метода на тестовой задаче №1 в области  $C_{norm}$  при использовании для потока внешних значений температуры и внутренних значений компонент градиента температуры

$N$	$\ \cdot\ _C$		$\ \cdot\ _{L_1}$		$\ \cdot\ _{L_2}$	
	Ошибка	$r$	Ошибка	$r$	Ошибка	$r$
125	$1.679 \cdot 10^{-2}$	–	$1.054 \cdot 10^{-3}$	–	$4.165 \cdot 10^{-3}$	–
1000	$7.945 \cdot 10^{-3}$	1.08	$3.89 \cdot 10^{-4}$	1.438	$1.19 \cdot 10^{-3}$	1.808
8000	$2.703 \cdot 10^{-3}$	1.556	$9.5 \cdot 10^{-5}$	2.037	$2.97 \cdot 10^{-4}$	2.004
64000	$8.58 \cdot 10^{-4}$	1.656	$2.1 \cdot 10^{-5}$	2.16	$6.7 \cdot 10^{-5}$	2.147

Т а б л и ц а 4 – Ошибки численного решения и порядок точности метода на тестовой задаче №1 в области  $C_{norm}$  при использовании для потока внутренних значений температуры и внешних значений компонент градиента температуры

$N$	$\ \cdot\ _C$		$\ \cdot\ _{L_1}$		$\ \cdot\ _{L_2}$	
	Ошибка	$r$	Ошибка	$r$	Ошибка	$r$
125	$1.633 \cdot 10^{-2}$	–	$9.67 \cdot 10^{-4}$	–	$3.818 \cdot 10^{-3}$	–
1000	$7.477 \cdot 10^{-3}$	1.127	$3.78 \cdot 10^{-4}$	1.354	$1.148 \cdot 10^{-3}$	1.734
8000	$2.355 \cdot 10^{-3}$	1.667	$9.6 \cdot 10^{-5}$	1.976	$3.01 \cdot 10^{-4}$	1.93
64000	$6.51 \cdot 10^{-4}$	1.856	$2.4 \cdot 10^{-5}$	1.991	$7.6 \cdot 10^{-5}$	1.979

Таблицы 5 и 6 содержат рассчитанные на второй и третьей тестовых задачах (3.2)–(3.3) порядки точности метода Галёркина с разрывными

базисными функциями в нормах  $C$ ,  $L_1$  и  $L_2$  в области  $C_{norm}$  с тремя и двумя вариантами дискретных потоков, соответственно.

Т а б л и ц а 5 – Порядок точности метода на тестовой задаче №2 в области  $C_{norm}$

N	Норма	$r_C$			$r_{L_1}$			$r_{L_2}$		
	Поток	1	2	3	1	2	3	1	2	3
125		–			–			–		
1000		–			–			–		
8000		2.03	1.896	2.282	1.683	1.992	2.301	1.814	1.988	2.272
64000		1.063	1.88	1.13	1.429	1.956	2.183	1.499	1.958	2.059

Т а б л и ц а 6 – Порядок точности метода на тестовой задаче №3 в области  $C_{norm}$

N	Норма	$r_C$		$r_{L_1}$		$r_{L_2}$	
	Поток	1	2	1	2	1	2
125		–		–		–	
1000		–		–		–	
8000		0.862	2.238	1.454	2.991	1.296	2.697
64000		0.882	2.334	1.462	2.812	1.284	2.671

Считается, что расчёт порядка точности в интегральных нормах  $L_1$  и  $L_2$  является более надёжным, чем в норме  $C$ . Это подтверждается расчётами по всем трём задачам: порядки точности, вычисленные в интегральных нормах, практически везде оказались выше, чем рассчитанные в непрерывной норме  $C$ . Также в задаче (3.1) для всех вариантов расчёта дискретных потоков ошибки численного решения при любых значениях пространственного шага  $h$ , вычисленные в интегральных нормах, на порядок меньше, чем в случае нормы, рассчитанной через максимум модуля разности.

Также заметно, что для всех тестовых задач использование второй и третьей разновидностей численных потоков, а именно – комбинированных потоков, рассчитанных согласно формулам (2.11)–(2.12), даёт гораздо лучшие порядки точности, но при этом значения ошибок для первой тестовой

задачи, имеющей аналитическое решение, не столь существенно отличаются друг от друга.

Если рассматривать полученные на первой тестовой задаче (3.1) порядки точности метода, то видно, что второй и третий варианты потоков предпочтительнее, чем первый, для расчёта поля температур внутри единичного куба без учёта границ. Так, порядки точности увеличиваются при измельчении  $h$ , достигая в некоторых случаях значения  $r = 2$ .

Вторая задача (3.2) даёт наихудшие порядки точности при использовании центральных дискретных потоков со стабилизирующими добавками, при этом порядки точности уменьшаются при измельчении сетки во всех трёх нормах.

Для решения третьей тестовой задачи (3.3) третий вариант метода расчёта потоков, в котором берутся значения температуры внутри ячеек и внешние значения компонент градиента температуры, не подходит, поскольку совсем не учитывает заданные граничные условия I рода, так что независимо от значения пространственного шага  $h$  куб не прогревается и имеет нулевую температуру, несмотря на одну нагревающуюся стенку. Таким образом, для данной задачи применимы только первый и второй методы вычисления потоков, при этом второй метод даёт точность на порядок выше, чем первый.

Заметим, что приведённые в таблицах 2–6 результаты не позволяют в полной мере сделать вывод о применимости различных методов расчёта дискретных потоков в зависимости от того, какие граничные условия используются в той или иной задаче теплопроводности, так что нужно вычислить порядки точности на всей расчётной области  $\tilde{C}_{norm} = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$ .

Для полной расчётной области  $\tilde{C}_{norm}$  применять при расчёте норм формулы (3.11)–(3.12) некорректно, поэтому введём их аналоги, учитывающие вклад граничных ячеек в интегральную сумму:

$$\begin{aligned}
\|U_h\|_{L_1} = & \frac{h^3}{8} \sum_{i,j,k=0,N} |U_h(x_i, y_j, z_k)| + \frac{h^3}{4} \left( \sum_{i,j=0,N, k=1}^{N-1} |U_h(x_i, y_j, z_k)| + \right. \\
& + \sum_{i,k=0,N, j=1}^{N-1} |U_h(x_i, y_j, z_k)| + \sum_{j,k=0,N, i=1}^{N-1} |U_h(x_i, y_j, z_k)| \left. \right) + \\
& + \frac{h^3}{2} \left( \sum_{i=0,N, j,k=1}^{N-1} |U_h(x_i, y_j, z_k)| + \sum_{j=0,N, i,k=1}^{N-1} |U_h(x_i, y_j, z_k)| + \right. \\
& \left. + \sum_{k=0,N, i,j=1}^{N-1} |U_h(x_i, y_j, z_k)| \right) + h^3 \sum_{i,j,k=1}^{N-1} |U_h(x_i, y_j, z_k)|, \quad (3.13)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|U_h\|_{L_2} = & \left( \frac{h^3}{8} \sum_{i,j,k=0,N} U_h^2(x_i, y_j, z_k) + \frac{h^3}{4} \left( \sum_{i,j=0,N, k=1}^{N-1} U_h^2(x_i, y_j, z_k) + \right. \right. \\
& + \sum_{i,k=0,N, j=1}^{N-1} U_h^2(x_i, y_j, z_k) + \sum_{j,k=0,N, i=1}^{N-1} U_h^2(x_i, y_j, z_k) \left. \right) + \\
& + \frac{h^3}{2} \left( \sum_{i=0,N, j,k=1}^{N-1} U_h^2(x_i, y_j, z_k) + \sum_{j=0,N, i,k=1}^{N-1} U_h^2(x_i, y_j, z_k) + \right. \\
& \left. + \sum_{k=0,N, i,j=1}^{N-1} U_h^2(x_i, y_j, z_k) \right) + h^3 \sum_{i,j,k=1}^{N-1} U_h^2(x_i, y_j, z_k) \left. \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (3.14)
\end{aligned}$$

где ячейки при вершинах единичного куба входят в интегральную сумму с коэффициентом  $h^3/8$ , расположенные на рёбрах – с коэффициентом  $h^3/4$ , находящиеся на гранях – с коэффициентом  $h^3/2$ , а ячейки, не являющиеся граничными, используются, по аналогии с соотношениями (3.11)–(3.12), с коэффициентом  $h^3$ .

Сведём новые результаты в таблицы. Как и ранее, в таблицах 7–9 представлены ошибки численного решения тестовой задачи (3.1) и порядки точности разрывного метода Галёркина для данной задачи, вычисленные в

нормах  $C$ ,  $L_1$  и  $L_2$  в полной области  $\tilde{C}_{norm}$  для трёх различных вариантов расчёта дискретных потоков между ячейками, соответственно.

Т а б л и ц а 7 – Ошибки численного решения и порядок точности метода на тестовой задаче №1 в полной области  $\tilde{C}_{norm}$  при использовании центрального потока со стабилизирующими добавками

$N$	$\ \cdot\ _C$		$\ \cdot\ _{L_1}$		$\ \cdot\ _{L_2}$	
	Ошибка	$r$	Ошибка	$r$	Ошибка	$r$
125	$6.841 \cdot 10^{-2}$	–	$3.392 \cdot 10^{-3}$	–	$9.915 \cdot 10^{-3}$	–
1000	$6.61 \cdot 10^{-2}$	0.05	$3.203 \cdot 10^{-3}$	0.082	$7.363 \cdot 10^{-3}$	0.429
8000	$5.041 \cdot 10^{-2}$	0.391	$2.397 \cdot 10^{-3}$	0.418	$5.194 \cdot 10^{-3}$	0.504
64000	$3.131 \cdot 10^{-2}$	0.687	$1.57 \cdot 10^{-3}$	0.61	$3.277 \cdot 10^{-3}$	0.664

Т а б л и ц а 8 – Ошибки численного решения и порядок точности метода на тестовой задаче №1 в полной области  $\tilde{C}_{norm}$  при использовании для потока внешних значений температуры и внутренних значений компонент градиента температуры

$N$	$\ \cdot\ _C$		$\ \cdot\ _{L_1}$		$\ \cdot\ _{L_2}$	
	Ошибка	$r$	Ошибка	$r$	Ошибка	$r$
125	$1.447 \cdot 10^{-1}$	–	$6.596 \cdot 10^{-3}$	–	$1.691 \cdot 10^{-2}$	–
1000	$7.809 \cdot 10^{-2}$	0.89	$3.681 \cdot 10^{-3}$	0.842	$7.068 \cdot 10^{-3}$	1.258
8000	$1.118 \cdot 10^{-1}$	–0.518	$2.392 \cdot 10^{-3}$	0.622	$5.659 \cdot 10^{-3}$	0.321
64000	$1.254 \cdot 10^{-1}$	–0.166	$2.448 \cdot 10^{-3}$	–0.034	$6.415 \cdot 10^{-3}$	–0.181

Т а б л и ц а 9 – Ошибки численного решения и порядок точности метода на тестовой задаче №1 в полной области  $\tilde{C}_{norm}$  при использовании для потока внутренних значений температуры и внешних значений компонент градиента температуры

$N$	$\ \cdot\ _C$		$\ \cdot\ _{L_1}$		$\ \cdot\ _{L_2}$	
	Ошибка	$r$	Ошибка	$r$	Ошибка	$r$
125	$7.557 \cdot 10^{-2}$	–	$6.058 \cdot 10^{-3}$	–	$1.441 \cdot 10^{-2}$	–
1000	$2.788 \cdot 10^{-2}$	1.439	$3.226 \cdot 10^{-3}$	0.909	$5.257 \cdot 10^{-3}$	1.455
8000	$8.66 \cdot 10^{-3}$	1.687	$1.056 \cdot 10^{-3}$	1.611	$1.581 \cdot 10^{-3}$	1.734
64000	$2.415 \cdot 10^{-3}$	1.842	$3.03 \cdot 10^{-4}$	1.804	$4.33 \cdot 10^{-4}$	1.867

Таблицы 10 и 11, по аналогии, содержат рассчитанные на второй и третьей тестовых задачах (3.2)–(3.3) порядки точности метода Галёркина с разрывными базисными функциями в нормах  $C$ ,  $L_1$  и  $L_2$  в полной области  $\tilde{C}_{norm}$  с тремя и двумя вариантами дискретных потоков, соответственно.

Т а б л и ц а 10 – Порядок точности метода на тестовой задаче №2 в полной области  $\tilde{C}_{norm}$

N	Норма	$r_C$			$r_{L_1}$			$r_{L_2}$		
	Поток	1	2	3	1	2	3	1	2	3
125		–			–			–		
1000		–			–			–		
8000		0.171	1.328	0.775	0.291	1.527	1.03	0.275	1.686	0.98
64000		1.151	1.135	0.755	0.352	1.419	0.727	0.507	1.478	0.779

Т а б л и ц а 11 – Порядок точности метода на тестовой задаче №3 в полной области  $\tilde{C}_{norm}$

N	Норма	$r_C$		$r_{L_1}$		$r_{L_2}$	
	Поток	1	2	1	2	1	2
125		–		–		–	
1000		–		–		–	
8000		–0.069	0.726	0.234	1.651	0.159	1.715
64000		0.571	–0.296	0.55	1.775	0.541	1.254

Проанализируем результаты из таблиц 7–11 применительно к выбору оптимального варианта вычисления численных потоков в зависимости от вида граничных условий в начально-краевых задачах теплопроводности.

Касательно первой тестовой задачи (3.1), был сделан вывод, что второй вариант вычисления потоков, где используются внешние значения температуры и внутренние значения компонент градиента температуры, не совсем целесообразно применять для её решения. Это обусловлено видом краевых условий для данной задачи: на всех границах сохраняется нулевой поток, а внутри куба задано начальное распределение температуры, так что для задач с граничным условием II рода имеет смысл применять третий

вариант вычисления потоков с внутренними значениями температуры и внешними значениями компонент градиента температуры. Однако вычисление дискретных потоков как центральных с использованием стабилизирующих добавок более универсально, так как не зависит от вида граничных условий задачи.

Вторая задача (3.2), с учётом граничных ячеек, даёт наихудшие порядки точности при использовании центральных дискретных потоков. Так как в данной задаче используются граничные условия I и II рода, то комбинированные варианты потоков дают более хорошие результаты, причём для второго потока точность выше при любых  $h$ . В данной задаче граничные условия, накладываемые на температуру, имеют решающее значение по сравнению с граничными условиями II рода.

Учитывая граничные условия при расчёте сеточных норм, решение третьей тестовой задачи (3.3) на крупных сетках с использованием центральных потоков не является целесообразным из-за резких перепадов температуры при переходе от нагреваемой стенки к основному объёму тела. Второй вариант вычисления дискретных потоков со взятыми из соседних элементов или граничных условий значениями компонент градиента температуры и значениями температуры внутри ячейки даёт хорошие порядки точности, поэтому данный метод вычисления потоков является более предпочтительным при решении задачи (3.3).

На рисунках 7–9 продемонстрируем графики распределения температуры в задачах (3.1)–(3.3) вдоль прямой, проходящей через точки  $(0.5125, 0.5125, 0)$  и  $(0.5125, 0.5125, 1)$ , построенные в ParaView с использованием фильтра *Plot Over Line*. Для первой тестовой задачи (3.1) с известным аналитическим решением (3.4) во вспомогательном Python-скрипте дополнительно был реализован экспорт значений температуры, полученных по формуле (3.4) вдоль заданной прямой, в csv-файл, чтобы на графиках сравнить численные решения, полученные при использовании различных дискретных потоков, с точным. Все распределения на рисунках 7–

9 приведены на момент времени  $t = t_{max} = 0.005$  для шага по пространству  $h = 0.025$ .

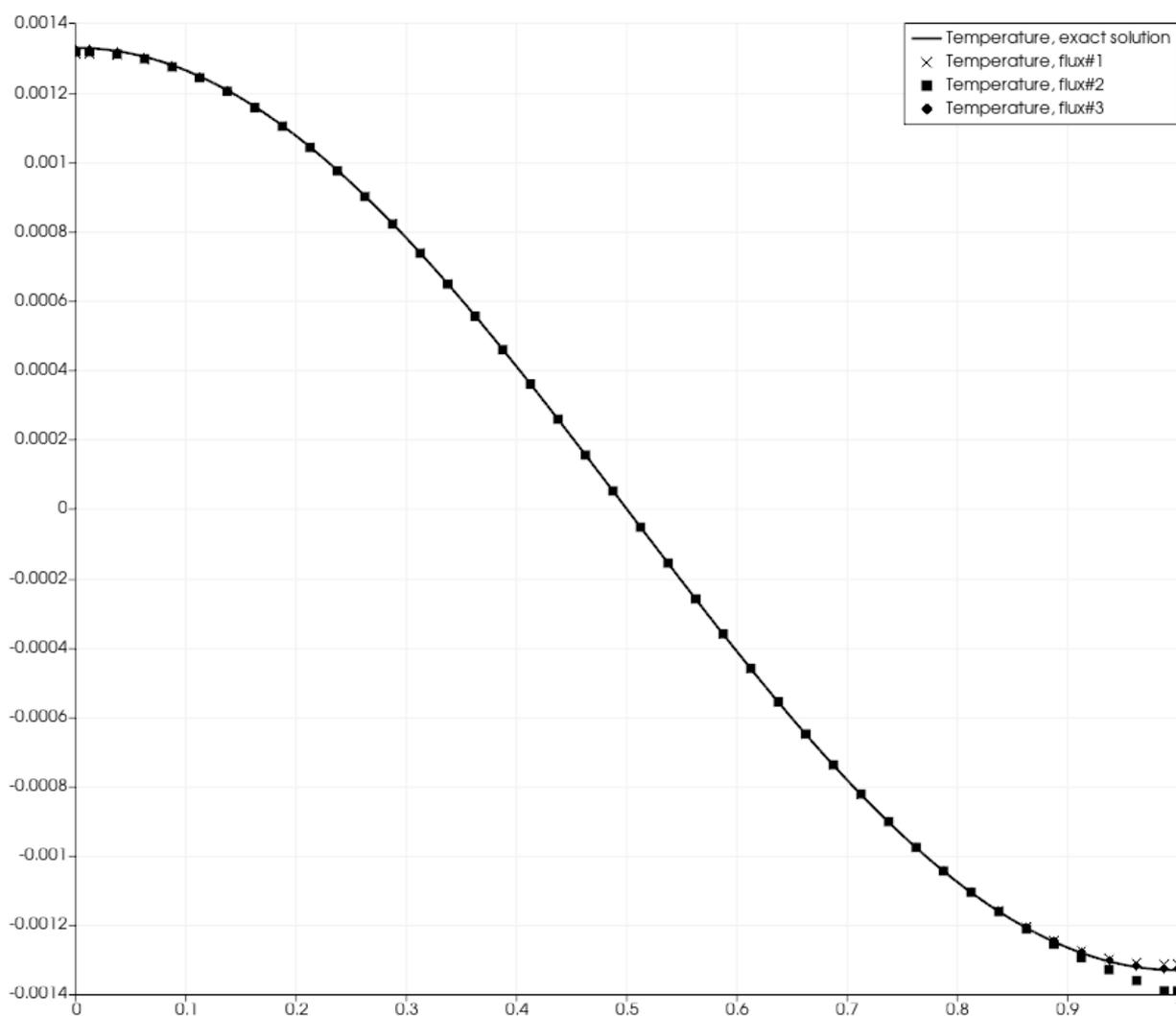


Рисунок 7 – Распределение температуры в тестовой задаче №1

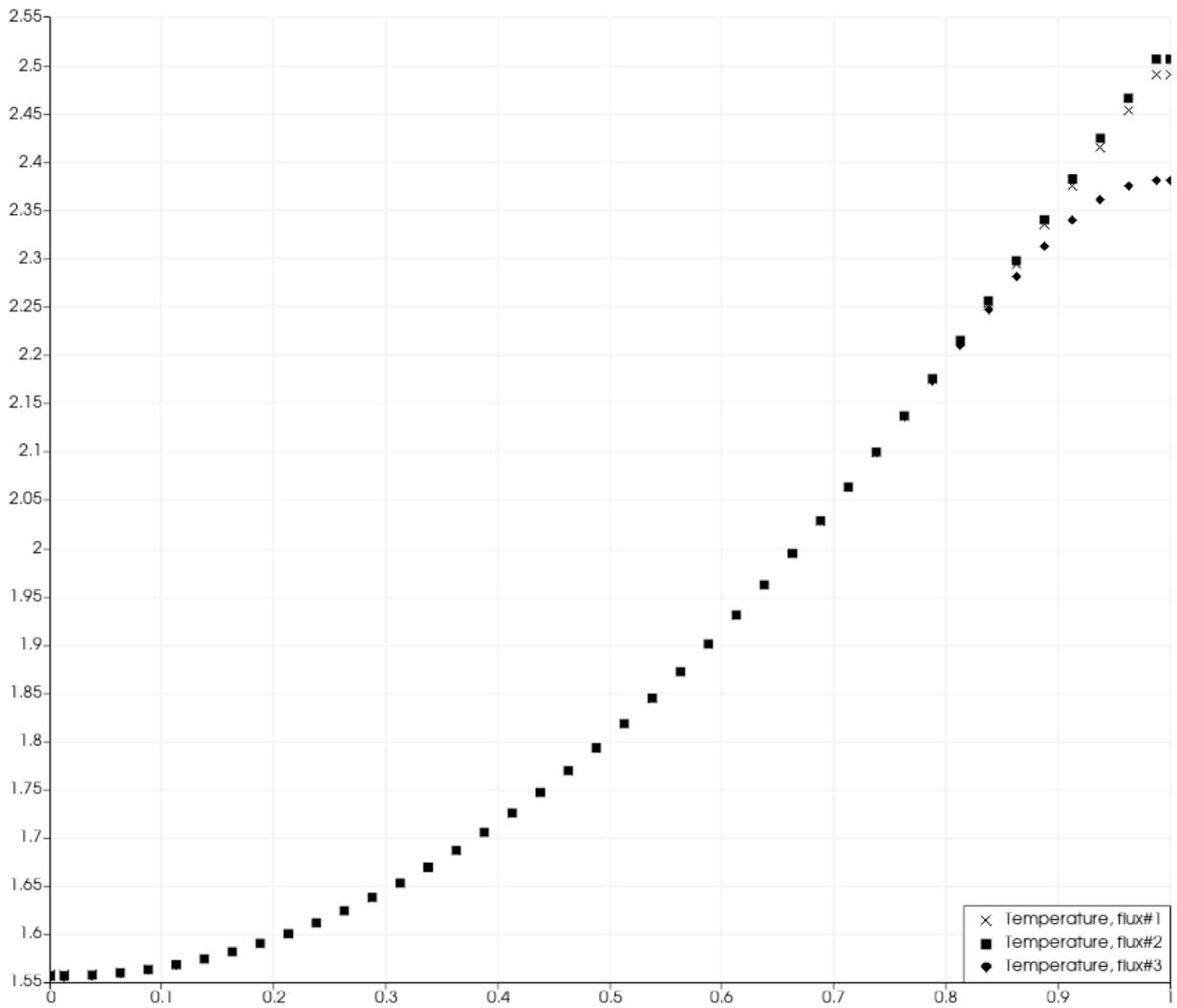


Рисунок 8 – Распределение температуры в тестовой задаче №2

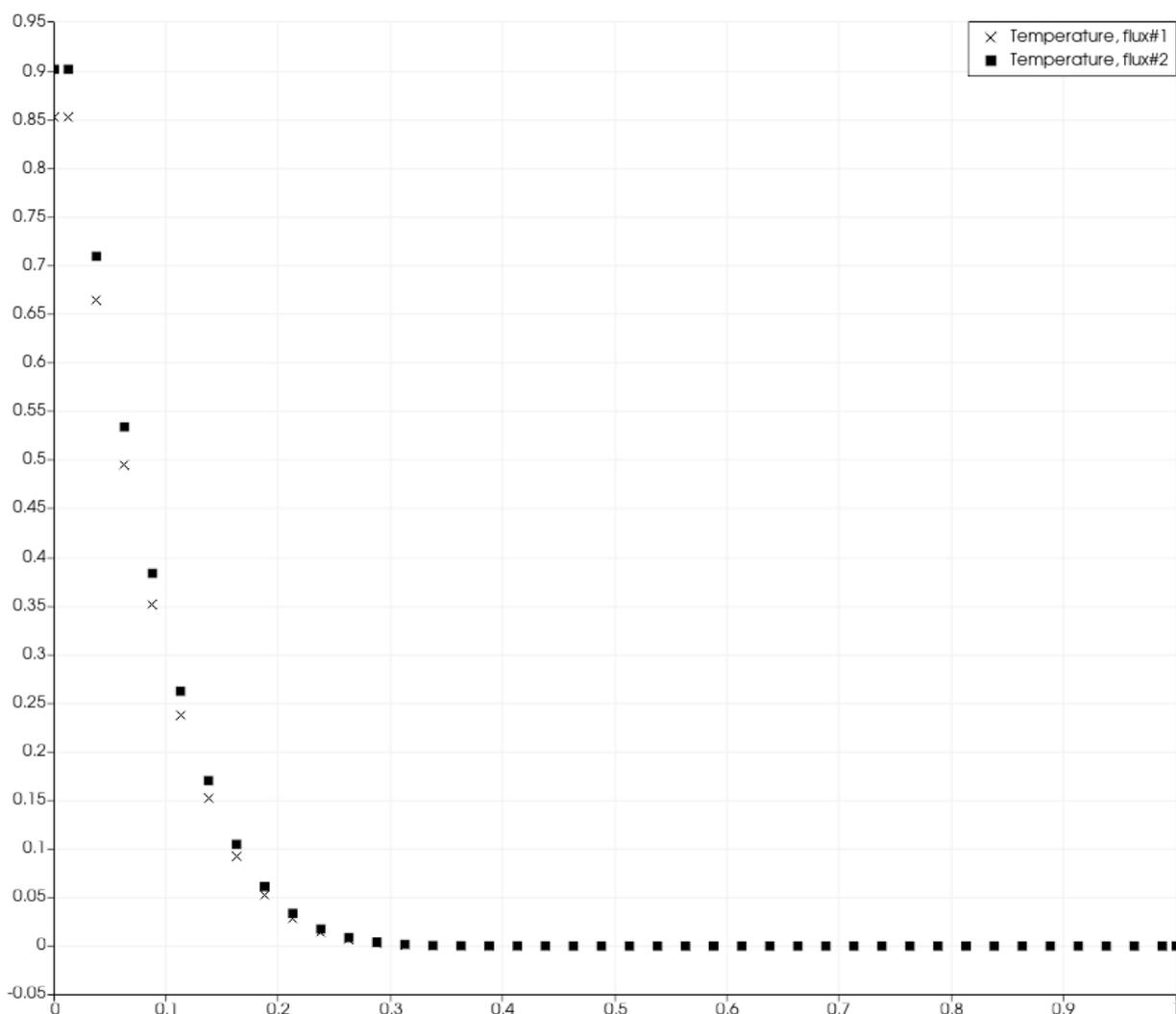


Рисунок 9 – Распределение температуры в тестовой задаче №3

На рисунках 7–9 температурная кривая, полученная при различных вариантах дискретных потоков, обозначена различными маркерами: центральный поток со стабилизирующими добавками – крестиками, комбинированный поток с внешними значениями температуры и внутренними значениями компонент градиента температуры – квадратами, а комбинированный поток с внутренними значениями температуры и внешними значениями компонент градиента температуры – ромбами. На рисунке 7 точное решение для первой тестовой задачи обозначается сплошной чёрной линией.

Проанализируем распределение температуры на графиках, представленных на рисунках 7–9. Так, в первой тестовой задаче (3.1) лучше всего точное решение приближают численные решения, полученные при первом и третьем варианте расчёта дискретных потоков, что подтверждает результаты, приведённые в таблицах 7–9.

Во второй тестовой задаче (3.2) значительно отличается от двух других в сторону меньшей точности решение, полученное с третьим вариантом вычисления дискретных потоков – комбинированным потоком с внутренними значениями температуры и внешними значениями компонент градиента температуры, при приближении к границе  $z = 1$ . В соответствии с порядками точности из таблицы 10 можно сделать вывод, что наиболее правильным является решение, полученное с использованием второго варианта расчёта дискретных потоков.

Для третьей тестовой задачи (3.3) вывод по графикам на рисунке 9 следующий: общий характер решения не зависит от используемого варианта расчёта дискретных потоков, при этом центральный поток со стабилизирующими добавками занижает значения температуры при приближении к границе  $z = 0$  по сравнению с комбинированным потоком с внешними значениями температуры и внутренними значениями компонент градиента температуры. Данная особенность, вероятно, вызвана резким перепадом температуры между нагреваемой стенкой куба и ненагретой внутренней областью в данной задаче.

Общий вывод по решению всех тестовых задач теплопроводности таков: чем меньше шаг по пространству  $h$ , тем лучше качество полученного численного решения, но при этом нужно учитывать существенно увеличивающиеся с уменьшением  $h$  временные затраты. Таким образом, только в процессе проведения численных экспериментов можно найти компромиссный вариант решения конкретной задачи, который совмещал бы достаточную точность решения с относительной быстротой его получения. Также заметно, что разрывный метод Галёркина с комбинированными

вариантами расчёта потоков согласно соотношениям (2.11)–(2.12) на начально-краевых задачах теплопроводности с граничными условиями I или II рода имеет существенно более высокие порядки точности, чем при использовании центрального потока со стабилизирующими добавками, но последний вариант универсальнее и не настолько зависит от граничных условий. При этом для выбора подвида комбинированного потока важно учитывать, какие параметры заданы на границе тела – температура или компоненты градиента температуры.

Таким образом, в рамках практической части данной работы в проекте *charm\_3d\_v2* [9], написанном на C++, нами был реализован модуль *fem-dg-heat*, в котором осуществляется решение трёхмерных начально-краевых задач теплопроводности методом Галёркина с разрывными базисными функциями. Для исследования порядка точности текущей реализации численного метода были выбраны несколько тестовых задач теплопроводности из различных источников, при этом задачи были решены с использованием трёх различных вариантов численных потоков между ячейками. Также был написан скрипт на Python, в котором осуществлялись необходимые для получения порядков точности и ошибок численного решения расчёты.

Распределения температуры были визуализированы в графическом пакете ParaView [14] применительно ко всем задачам, а затем проанализированы на физичность.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе были рассмотрены математические основания вариационных методов и разрывного метода Галёркина, приведена формулировка локального метода Галёркина с разрывными базисными функциями, дающего хорошую точность и адекватные результаты при решении задач теплопроводности. Кроме того, был приведён вычислительный алгоритм локального разрывного метода Галёркина для решения трёхмерных начально-краевых задач теплопроводности.

В практической части магистерской диссертации в проект *charm\_3d\_v2* [9] для решения трёхмерных задач газовой динамики методом конечных объёмов мною был добавлен модуль, реализующий локальный разрывный метод Галёркина для решения задач теплопроводности на равномерных гексаэдральных сетках. Программный код был написан на языке программирования C++, обеспечивающем относительное быстродействие работы программы, по сравнению с другими языками программирования. Для генерации расчётной сетки был использован конечно-элементный генератор сеток Gmsh.

Также была выполнена апробация разработанного алгоритма на нескольких тестовых задачах, полученные результаты, а именно, распределения температурных полей, были проанализированы на адекватность с помощью графического пакета ParaView. Кроме того, на языке программирования Python был написан скрипт для расчёта порядка точности разрывного метода Галёркина и ошибок численного решения в трёх различных нормах на двух расчётных областях с использованием трёх вариантов дискретных потоков между ячейками, эти результаты также были проанализированы.

Программная реализация метода Галёркина с разрывными базисными функциями для решения трёхмерных начально-краевых задач теплопроводности имеет следующие преимущества: во-первых,

применимость проекта *charm\_3d\_v2* не зависит от геометрии расчётных областей, что расширяет круг задач, которые могут быть решены с его помощью; во-вторых, передача основных параметров начально-краевых задач через считываемый в коде *yaml*-файл позволяет легко переключаться между задачами с различными начальными и граничными условиями без внесения существенных изменений в основной код программы; в-третьих, вывод решения в *vtk*-файлы предоставляет широкие возможности для его анализа в графических пакетах. Реализованный в отдельном Python-скрипте расчёт порядка точности показал, что текущая реализация разрывного метода Галёркина на выбранных тестовых задачах выдаёт адекватные результаты, улучшающиеся при измельчении расчётной сетки, но различающиеся для решаемых задач в зависимости от применяемого метода для расчёта численных потоков.

Заметим, что данная реализация алгоритма является достаточно требовательной к процессорному времени, но при этом относительно экономна по отношению к компьютерной памяти, поскольку позволяет решать задачи даже на сетках с большим количеством ячеек.

Решение задач теплопроводности востребовано во многих прикладных науках, так что потребность в численных алгоритмах, комбинирующих высокое качество получаемого решения с оптимальными затратами по времени и памяти, будет только возрастать.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Крайнов А. Ю. Численные методы в задачах теплопереноса : учеб.-метод. пособие / А. Ю. Крайнов, Ю. Н. Рыжих, А. М. Тимохин. – Томск : Том. ун-т, 2009. – 114 с. – Текст : непосредственный.

2. Ладонкина М. Е. О связи разрывного метода Галеркина и методов типа Годунова высокого порядка точности /М. Е. Ладонкина, В. Ф. Тишкин. – Текст : электронный // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. – 2014. – № 49. – 10 с. – URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2014-49> (дата обращения: 26.04.2024).

3. Масыгин В. Ф. Современные вычислительные методы прикладной математики: учеб. пособие / В. Ф. Масыгин, Р. В. Жалнин. – Саранск : СВМО, 2019. – 87 с. – ISBN 978-5-901661-41-3. – Текст : непосредственный.

4. Применение разрывного метода Галеркина для решения параболических задач в анизотропных средах на треугольных сетках / Р. В. Жалнин, М. Е. Ладонкина, В. Ф. Масыгин, В. Ф. Тишкин. – DOI 10.14529/mmp160313. – Текст : электронный // Вестник ЮУрГУ ММП. – 2016. – Т. 9, № 3. – С. 144–151. – URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/primenenie-razryvnogo-metoda-galerkina-dlya-resheniya-parabolicheskikh-zadach-v-anizotropnyh-sredah-na-treugolnyh-setkah> (дата обращения: 26.04.2024).

5. Решение трехмерного нестационарного уравнения теплопроводности методом конечных элементов с учетом фазовых переходов / М. П. Галанин, Н. Н. Прошунин, А. С. Родин, Д. Л. Сорокин. – DOI 10.20948/prepr-2016-66. – Текст : электронный // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. – 2016. – № 66. – 27 с. – URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2016-66> (дата обращения: 23.04.2024).

6. Решение трехмерных уравнений теплопроводности с помощью разрывного метода Галёркина на неструктурированных сетках / Р. В. Жалнин, М. Е. Ладонкина, В. Ф. Масыгин, В. Ф. Тишкин. – DOI

10.14498/vsgtu1351. – Текст : электронный // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. – 2015. – Т. 19, № 3. – С. 523-533. – URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/reshenie-trehmernyh-uravneniy-teploprovodnosti-s-pomoschyu-razryvnogo-metoda-galyorkina-na-nestrukturirovannyh-setkah> (дата обращения: 19.04.2024).

7. Сьярле Ф. Метод конечных элементов для эллиптических задач / Ф. Сьярле ; [пер. с англ. Б. И. Квасова под ред. Н. Н. Яненко]. – Москва : Мир, 1980. – 512 с. – Текст : непосредственный.

8. Флетчер К. Численные методы на основе метода Галёркина / К. Флетчер ; [пер. с англ. Л. В. Соколовской под ред. В. П. Шидловского]. – Москва : Мир, 1988. – 352 с. – Текст : непосредственный.

9. CHARM\_3D, version 2 : сайт. – URL: [https://github.com/zhrv/charm\\_3d\\_v2](https://github.com/zhrv/charm_3d_v2) (дата обращения: 23.04.2024). – Режим доступа: свободный. – Текст : электронный.

10. GitHub – jbeder/yaml-cpp: A YAML parser and emitter in C++ : сайт. – URL: <https://github.com/jbeder/yaml-cpp> (дата обращения: 25.04.2024). – Режим доступа: свободный. – Текст : электронный.

11. Gmsh | Open CASCADE Technology : сайт. – URL: <https://dev.opencascade.org/project/gmsh> (дата обращения: 25.04.2024). – Режим доступа: свободный. – Текст : электронный.

12. Li F. A Tutorial on Discontinuous Galerkin Methods : [презентация : Banff International Research Station Workshop 11w5086: Advancing Numerical Methods for Viscosity Solutions and Applications, February 14-18, 2011] / F. Li. – Текст : электронный // Home | Banff International Research Station. – URL: <https://www.birs.ca> (дата обращения: 23.04.2024).

13. Numerica.pt : a bit about science and models : сайт. – URL: <https://numerica.pt> (дата обращения: 25.04.2024). – Режим доступа: свободный. – Текст : электронный.

14. ParaView - Open-source, multi-platform data analysis and visualization application : сайт. – URL: <https://www.paraview.org> (дата обращения: 25.04.2024). – Режим доступа: свободный. – Текст : электронный.

15. Zhang M. An Analysis of Three Different Formulations of the Discontinuous Galerkin Method for Diffusion Equations / M. Zhang, C.-W. Shu. – Текст : непосредственный // *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*. – 2011. – Vol. 13, No. 03. – 25 p.

## **ПРИЛОЖЕНИЕ А**

**(обязательное)**

**Ссылка на версию проекта charm\_3d\_v2 с модулем fem-dg-heat для  
решения трёхмерных задач теплопроводности на равномерных  
гексаэдральных сетках разрывным методом Галёркина**

[https://github.com/iskaz-12/charm\\_3d\\_v2/tree/heat-fem-dg](https://github.com/iskaz-12/charm_3d_v2/tree/heat-fem-dg)

## ПРИЛОЖЕНИЕ Б

(обязательное)

**Программный код основных вычислительных методов из файла  
src/method/fem-dg-heat/MethodFemDgHeat.cpp проекта charm\_3d\_v2,  
написанного на языке программирования C++, с реализованным  
модулем fem-dg-heat**

1) Код метода *calcGradients()*:

```
void MethodFemDgHeat::calcGradients() {
    // объёмные интегралы
    for (int i = 0; i < mesh->cells.size(); i++) {
        for (int j = 0; j < BASE_FUNC_COUNT; j++) {
            double tmpIntQx = 0.0, tmpIntQy = 0.0, tmpIntQz =
0.0;
            for (int z = 0; z < mesh->cells[i].gp.size(); z++) {
                tmpIntQx +=
>cells[i].gp[z],    mesh->cells[i].gw[z] * getT(i, mesh-
>cells[i].gp[z]),    data[i].flds) * getDfDx(j, i, mesh-
>cells[i].gp[z]);
                tmpIntQy +=
>cells[i].gp[z],    mesh->cells[i].gw[z] * getT(i, mesh-
>cells[i].gp[z]),    data[i].flds) * getDfDy(j, i, mesh-
>cells[i].gp[z]);
                tmpIntQz +=
>cells[i].gp[z],    mesh->cells[i].gw[z] * getT(i, mesh-
>cells[i].gp[z]),    data[i].flds) * getDfDz(j, i, mesh-
>cells[i].gp[z]);
            }
            data[i].flds.intQx[j] -= tmpIntQx;
            data[i].flds.intQy[j] -= tmpIntQy;
            data[i].flds.intQz[j] -= tmpIntQz;
        }
    }

    // поверхностные интегралы
    Index cCount = Config::getCompCount();
    for (int i = 0; i < mesh->faces.size(); i++) {
        Face &f = mesh->faces[i];
        Index c1 = f.cells[0];
        Index c2;
        bool isBnd = f.cells.size() == 1;
        Index cCount = Config::getCompCount();
        for (int j = 0; j < BASE_FUNC_COUNT; j++) {
            double tmpIntQx1 = 0.0, tmpIntQx2 = 0.0, tmpIntQy1 =
0.0, tmpIntQy2 = 0.0, tmpIntQz1 = 0.0, tmpIntQz2 = 0.0;
            for (int iGP = 0; iGP < f.gp.size(); iGP++) {
                Point &pt = f.gp[iGP];
                PrimHeat p1(BASE_FUNC_COUNT);
                PrimHeat p2(BASE_FUNC_COUNT);
                convertToParam(c1, pt, p1, data[c1].flds);
            }
        }
    }
}
```

```

        if (isBnd) {
            f.bnd->calcHeat(p1, p2, f.n);
            if (f.bnd->name == "FRONT" || f.bnd->name ==
"RIGHT" || f.bnd->name == "TOP") {
                p2.t = 1 + pt.x * pt.x + pt.y * pt.y +
pt.z * pt.z;
            }
        } else {
            c2 = f.cells[1];
            convertToParam(c2, pt, p2, data[c2].flds);
        }
        double fT, fqx, fqy, fqz;
        flux(p1, p2, f.n, fT, fqx, fqy, fqz);
        tmpIntQx1 += f.n.x * fT * getF(j, c1, pt) *
f.gw[iGP];
        tmpIntQy1 += f.n.y * fT * getF(j, c1, pt) *
f.gw[iGP];
        tmpIntQz1 += f.n.z * fT * getF(j, c1, pt) *
f.gw[iGP];
        if (!isBnd) {
            tmpIntQx2 += f.n.x * fT * getF(j, c2, pt) *
f.gw[iGP];
            tmpIntQy2 += f.n.y * fT * getF(j, c2, pt) *
f.gw[iGP];
            tmpIntQz2 += f.n.z * fT * getF(j, c2, pt) *
f.gw[iGP];
        }
    }
    tmpIntQx1 *= f.gj;
    tmpIntQy1 *= f.gj;
    tmpIntQz1 *= f.gj;
    tmpIntQx2 *= f.gj;
    tmpIntQy2 *= f.gj;
    tmpIntQz2 *= f.gj;
    data[c1].flds.intQx[j] += tmpIntQx1;
    data[c1].flds.intQy[j] += tmpIntQy1;
    data[c1].flds.intQz[j] += tmpIntQz1;
    if (!isBnd) {
        data[c2].flds.intQx[j] -= tmpIntQx2;
        data[c2].flds.intQy[j] -= tmpIntQy2;
        data[c2].flds.intQz[j] -= tmpIntQz2;
    }
}
}

// вычисляем градиенты на новом шаге по времени
for (int i = 0; i < mesh->cells.size(); i++) {
    for (int j = 0; j < BASE_FUNC_COUNT; j++) {
        double tmpQx = 0.0, tmpQy = 0.0, tmpQz = 0.0;
        for (int z = 0; z < BASE_FUNC_COUNT; z++) {
            tmpQx += mesh->cells[i].invA[j*BASE_FUNC_COUNT +
z] * data[i].flds.intQx[z];
            tmpQy += mesh->cells[i].invA[j*BASE_FUNC_COUNT +
z] * data[i].flds.intQy[z];
            tmpQz += mesh->cells[i].invA[j*BASE_FUNC_COUNT +
z] * data[i].flds.intQz[z];
        }
    }
}

```

```

        data[i].flds.qx[j] = tmpQx;
        data[i].flds.qy[j] = tmpQy;
        data[i].flds.qz[j] = tmpQz;
    }
}

```

2) Код метода *calcDiffusionVol()*:

```

void MethodFemDgHeat::calcDiffusionVol() {
    for (int i = 0; i < mesh->cells.size(); i++) {
        for (int j = 0; j < BASE_FUNC_COUNT; j++) {
            double tmpIntT = 0.0;
            for (int z = 0; z < mesh->cells[i].gp.size(); z++) {
                tmpIntT +=
                    mesh->cells[i].gw[z] * getQx(i, mesh-
>cells[i].gp[z], data[i].flds) * getDfdx(j, i, mesh-
>cells[i].gp[z]);
                tmpIntT +=
                    mesh->cells[i].gw[z] * getQy(i, mesh-
>cells[i].gp[z], data[i].flds) * getDfdy(j, i, mesh-
>cells[i].gp[z]);
                tmpIntT +=
                    mesh->cells[i].gw[z] * getQz(i, mesh-
>cells[i].gp[z], data[i].flds) * getDfdz(j, i, mesh-
>cells[i].gp[z]);
            }
            data[i].flds.intT[j] -= tmpIntT;
        }
    }
}

```

3) Код метода *calcDiffusionSurf()*:

```

void MethodFemDgHeat::calcDiffusionSurf() {
    for (int i = 0; i < mesh->faces.size(); i++) {
        Face &f = mesh->faces[i];
        Index c1 = f.cells[0];
        Index c2;
        bool isBnd = f.cells.size() == 1;
        Index cCount = Config::getCompCount();
        for (int j = 0; j < BASE_FUNC_COUNT; j++) {
            double tmpIntT1 = 0.0, tmpIntT2 = 0.0;
            for (int iGP = 0; iGP < f.gp.size(); iGP++) {
                Point &pt = f.gp[iGP];
                PrimHeat p1(BASE_FUNC_COUNT);
                PrimHeat p2(BASE_FUNC_COUNT);
                convertToParam(c1, pt, p1, data[c1].flds);
                if (isBnd) {
                    f.bnd->calcHeat(p1, p2, f.n);
                    if (f.bnd->name == "FRONT" || f.bnd->name ==
"RIGHT" || f.bnd->name == "TOP") {
                        p2.t = 1 + pt.x * pt.x + pt.y * pt.y +
pt.z * pt.z;
                    }
                }
            }
        }
    }
}

```

```

    }
  } else {
    c2 = f.cells[1];
    convertToParam(c2, pt, p2, data[c2].flds);
  }
  double fT, fqx, fqy, fqz;
  flux(p1, p2, f.n, fT, fqx, fqy, fqz);
  tmpIntT1 += f.n.x * fqx * getF(j, c1, pt) *
f.gw[iGP];
  tmpIntT1 += f.n.y * fqy * getF(j, c1, pt) *
f.gw[iGP];
  tmpIntT1 += f.n.z * fqz * getF(j, c1, pt) *
f.gw[iGP];
  if (!isBnd) {
    tmpIntT2 += f.n.x * fqx * getF(j, c2, pt) *
f.gw[iGP];
    tmpIntT2 += f.n.y * fqy * getF(j, c2, pt) *
f.gw[iGP];
    tmpIntT2 += f.n.z * fqz * getF(j, c2, pt) *
f.gw[iGP];
  }
  }
  tmpIntT1 *= f.gj;
  tmpIntT2 *= f.gj;
  data[c1].flds.intT[j] += tmpIntT1;
  if (!isBnd) {
    data[c2].flds.intT[j] -= tmpIntT2;
  }
}
}
}
}

```

4) Код метода *calcNewValues()*:

```

void MethodFemDgHeat::calcNewValues() {
  Index cCount = Config::getCompCount();
  Real dt = calcDt();
  for (int i = 0; i < mesh->cells.size(); i++) {
    PrimHeat p(BASE_FUNC_COUNT);
    for (int j = 0; j < BASE_FUNC_COUNT; j++) {
      double tmpT = 0.0;
      for (int z = 0; z < BASE_FUNC_COUNT; z++) {
        tmpT += mesh->cells[i].invA[j*BASE_FUNC_COUNT +
z] * data[i].flds.intT[z];
      }
      data[i].flds.t[j] += dt * tmpT;
      convertToParam(i, mesh->cells[i].center, data[i].p,
data[i].flds);
    }
  }
}

```

## Приложение

В Оргкомитет Смотра дипломных работ математиков России  
от Кузьмина Никиты Александровича

### Заявление о новизне

Сообщаю, что новыми в моей представленной на Смотр выпускной квалификационной работе (далее - работа) под названием “Исследование количеств паросочетаний в некоторых классах графов” являются: Лемма 1.2.1, Следствие 1.2.1, Следствие 1.2.2, Леммы 2.2.1 - 2.2.7, Теорема 2.2.1, Таблица 2.1, Таблица 2.2, Леммы 2.3.1 - 2.3.11, Теорема 2.3.1, Таблица 2.3, Таблица 2.4, Теорема 2.4.1, Леммы 2.4.1 - 2.4.5, Леммы 3.2.1 - 3.2.4, Леммы 3.3.1 - 3.3.2, Лемма 3.4.1, Леммы 3.5.1 - 3.5.3, Теорема 3.6.1, Леммы 4.2.1 - 4.2.2, Лемма 4.3.1, Теорема 4.3.1, Леммы 4.4.1 - 4.4.3, Теорема 4.4.1, Таблица 4.1.

Также сообщаю, что для проверки новизны было проделано следующее:

- В период с 01 января 2019 г. по 1 мая 2024 г. мною был произведён поиск в следующих поисковых системах: Google, ScienceDirect, Web of Science, arxiv.org по следующим ключевым словам: Hosoya index, matching, maximal matching, maximal Hosoya index и т.п. В частности, в тексте настоящей дипломной работы приводится обзор 48 статей по данной тематике. Все найденные автором работы не содержали материала, заявляемого автором выпускной квалификационной работы в качестве нового. При поиске не было встречено работ или упоминаний работ, позволяющих усомниться в новизне материала.

- Проведена серия консультаций с моим научным руководителем д. ф.-м.н., проф. Малышевым Дмитрием Сергеевичем.

- Проведена переписка с научным сотрудником ЛАТАС ВШЭ Талецким Дмитрием Сергеевичем.

- Результаты работы докладывались и обсуждались на следующих семинарах:

1. Международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых <<Ломоносов>> (Москва, 2021).
2. Заочный семинар XIX международной конференции <<Проблемы теоретической кибернетики>> (Москва, 2021).
3. Международная конференция <<Актуальные тренды 2022 года в комбинаторике и геометрии: исследование и преподавание>> (Сочи, 2021).
4. XIV международный научный семинар <<Дискретная математика и ее приложения>> (Москва, 2022).
5. Международная научная конференция <<Графы, игры и модели>> (Майкоп, 2022).
6. Международная научная конференция <<Анализ данных, сети и аппроксимации>> (Сочи, 2023).
7. Третья конференция математических центров России (Майкоп, 2023).
8. Семинар международной лаборатории теоретической информатики НИУ ВШЭ.
9. Семинар лаборатории комбинаторных и геометрических структур МФТИ.

10. Общегородской семинар г. Н. Новгорода по дискретной математике.

11. Семинары лаборатории алгоритмов и технологий анализа сетевых структур НИУ ВШЭ.

- По теме работы имеется 5 публикаций в изданиях из перечня Министерства науки и высшего образования РФ:

1. Кузьмин Н.А. О деревьях радиуса 2 с максимальным количеством паросочетаний // Журнал Средневолжского математического общества. — 2020. — Т. 22, № 2. — С. 177-187.

2. Кузьмин Н.А., Малышев Д.С. Новое доказательство результата о полном описании  $(n, n+2)$ -графов с максимальным значением индекса Хосойи // Математические заметки. — 2022. — Т. 111, № 2. — С. 258-276.

3. Кузьмин Н.А., Малышев Д.С. Перечисление паросочетаний в полных  $S_q$ -арных деревьях // Математические заметки. — 2022. — Т. 111, № 3. — С. 393-402.

4. Кузьмин Н.А., Малышев Д.С. О деревьях диаметра 5 с максимальным количеством паросочетаний // Математический сборник. — 2023. — Т. 214, № 2. — С. 143-154.

5. Кузьмин Н.А., Малышев Д.С. О 5- и 6-листных деревьях, имеющих наибольшее количество паросочетаний // Математические заметки. — 2024. — Т. 115, № 3. — С. 372-385.

Таким образом, представленный в моей выпускной квалификационной работе указанный выше математический материал действительно является новым.

Подтверждаю, что являюсь автором предоставляемой на Смотр работы и прошу принять её для участия в Смотре. Принимаю на себя обязательство соблюдать правила Смотра. Также (в соответствии с п. 4 Положения о Смотре) принимаю на себя обязательство оценить 5 работ участников Смотра, выданных мне Оргкомитетом в результате жеребьёвки и сверх того оценить 2-5 работ других участников Смотра на мой выбор. Я понимаю правила оценки работ, приведённые в п. 4.3 Положения о Смотре. Даю согласие на публикацию адреса моей электронной почты.

Защита работы состоялась 06.06.2024. На Смотр представлен окончательный текст работы.

Подпись



Кузьмин Никита Александрович

15.06.2024

Нижний Новгород, Россия

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ  
«ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ»  
ФАКУЛЬТЕТ ИНФОРМАТИКИ, МАТЕМАТИКИ И КОМПЬЮТЕРНЫХ НАУК

**Кузьмин Никита Александрович**

## **Исследование количеств паросочетаний в некоторых классах графов**

Выпускная квалификационная работа — магистерская работа  
по направлению подготовки 01.04.02 — "Прикладная математика и информатика"

Рецензент:  
кандидат физико-математических наук  
Грибанов Дмитрий Владимирович

Научный руководитель:  
доктор физико-математических наук,  
профессор  
Мальшев Дмитрий Сергеевич

Нижний Новгород 2024

# Оглавление

<b>Введение</b>	4
<b>1 Терминология, обозначения и некоторый класс преобразований графов</b>	10
1.1 Некоторые понятия и обозначения теории графов	10
1.1.1 Множества, графы и их подграфы	10
1.1.2 Метрические характеристики, специальные вершины и ребра	11
1.1.3 Паросочетания, индекс Хосойи и его разложение по ребру	11
1.2 Лемма о разложении $z$ -индекса и следствия из нее	11
<b>2 О максимальных деревьях из некоторых классов</b>	14
2.1 О максимальных деревьях диаметра не более чем 3	14
2.2 О максимальных деревьях диаметра 4	14
2.2.1 Некоторые преобразования графов, увеличивающие индекс Хосойи	14
2.2.2 Центры максимальных деревьев диаметра 4 и смежные с ними поддеревья	16
2.2.3 Об отсутствии листа в максимальных деревьях диаметра 4, смежного с центральной вершиной	17
2.2.4 Настройка параметров $a$ и $b$ в максимальных деревьях диаметра 4	18
2.2.5 Полное описание максимальных деревьев диаметра 4	18
2.3 О максимальных деревьях диаметра 5	19
2.3.1 Некоторые новые преобразования графов, увеличивающие $z$ -индекс	19
2.3.2 О свойствах максимальных деревьев диаметра 5	21
2.3.3 Описание всех максимальных деревьев диаметра 5	24
2.4 О максимальных 5- или 6-листных деревьях	27
2.4.1 Стяжки деревьев с 5 или 6 листьями	27
2.4.2 Формулировка основного результата второй части второй главы	28
2.4.3 Преобразования графов, увеличивающие $z$ -индекс	28
2.4.4 Доказательство теоремы 2.4.1	31
<b>3 О максимальных <math>(n, n + 2)</math>-графах</b>	34
3.1 Стяжки $(n, n + 2)$ -графов	34
3.2 Преобразования порожденных путей и циклов	34
3.3 Преобразование порожденных подграфов $H_{a,b,c}$	37
3.4 Преобразование висячих циклов	39
3.5 Некоторые дополнительные преобразования циклов	41
3.6 Основной результат этой главы	44

<b>4</b>	<b>Перечисление паросочетаний в полных <math>q</math>-арных деревьях</b>	<b>47</b>
4.1	Рекуррентные соотношения для количеств паросочетаний и порожденных паросочетаний в $\{T_{q,h}\}$	47
4.2	Некоторые вспомогательные результаты из математического анализа	48
4.3	Асимптотика количества паросочетаний в деревьях $\{T_{q,h}\}$	49
4.4	Асимптотика количества порожденных паросочетаний в деревьях $\{T_{q,h}\}$	50
4.4.1	Случай $1 \leq q \leq 3$	50
4.4.2	Случай больших $q$ – разрешимость одной системы нелинейных уравнений	51
4.4.3	Случай больших $q$ – предельные равенства	51
4.4.4	Основной результат этого раздела	52
	<b>Заключение</b>	<b>53</b>
	<b>Литература</b>	<b>54</b>

# Введение

## 1. Актуальность и степень разработанности темы исследований, формулировки основных результатов работы

Химические соединения часто рассматриваются в форме *молекулярных графов*, где атомам соответствуют вершины графа, а связям между ними — ребра графа. При этом свойства химических соединений описываются в терминах *топологических индексов*, которые представляют собой некоторые инварианты графов относительно переобозначения вершин и которые позволяют аналитически исследовать ряд аспектов химической структуры вещества. Например, значение *индекса Винера*, который определяется как сумма длин кратчайших путей между всеми парами вершин заданного графа, связан с точками кипения парафинов [41].

В данной работе (если явным образом не оговаривается иное) рассматриваются только *обыкновенные графы*, т.е. конечные неориентированные графы без петель и кратных ребер. *Паросочетанием графа* называется произвольное множество попарно несмежных его ребер. *Индекс Хосойи* (называемый еще *z-индексом*), предложенный в работе [21] японским химиком Харуо Хосойя, определяется как количество его паросочетаний, включая и пустое. Значения индекса Хосойи определяют некоторые физико-химические свойства соответствующих химических соединений, в частности, точки кипения алканов, энергию сопряженных  $\pi$ -электронных систем, см., например, обзоры [22, 23, 24, 25]. С индексом Хосойи через понятие *реберного графа* (т.е. графа смежности ребер) непосредственно связан индекс Меррифилда-Симмонса [31], определяемый как количество подмножеств попарно несмежных вершин графа (*независимых множеств*), также влияющий на некоторые свойства углеводородов. Отметим высокоцитируемые работы [15, 16, 28, 40], посвященные некоторым вопросам теории индексов Винера и Меррифилда-Симмонса.

Поскольку топологические индексы определяют ту или иную «энергию» химических соединений, то интересна задача по выявлению графов из заданных классов с экстремальным (минимальным или максимальным) значением того или иного индекса. На настоящее время накоплено большое количество результатов такого рода. Например, известно, что для многих классов одни и те же графы максимизируют значение индекса Меррифилда-Симмонса и минимизируют значение индекса Хосойи, и наоборот.

По всей видимости, исторически первый результат о максимизации индекса Хосойи в классах графов был получен И. Гутманом в работе [17]. Именно, там было показано, что среди ациклических полиэнов максимальное значение значения  $z$ -индекса имеет линейный изомер. В графовых терминах это можно переформулировать (и несколько обобщить) так: для любого  $n$  в классе  $n$ -вершинных деревьев единственным максимальным графом является  $n$ -путь. Структура оптимального дерева мотивировала исследователей варьировать ассоциированные с ним ограниченные параметры (количество листьев, максимальную степень, наличие совершенного паросочетания и т.д.), выявлять соответствующие максимальные деревья и находить значение индекса Хосойи на них. Значительный интерес также вызывают аналогичные постановки задач для недревесных случаев.

В той же работе [17] было доказано, что для любого  $n \geq 6$  в классе  $n$ -вершинных деревьев предмаксимальный граф единственен и получается соединением ребрами висячей вершины  $(n - 4)$ -пути с двумя 2-путями. Данный граф имеет 3 листа и поэтому является максимальным элементом класса  $n$ -вершинных деревьев с 3 листьями. Случай  $n$ -вершинных деревьев с 4 листьями рассматривался в работе [40]. Оказалось, что для любого  $n \geq 9$  максимальное дерево получается соединением ребрами каждой висячей вершины  $(n - 8)$ -пути с двумя 2-путями. В других работах рассматривался случай деревьев с большим количеством листьев. Например, в работе [47] установлено, что для любого  $n = 2k + r$ , где  $k \geq 2$

и  $r \in \{0, 1\}$ , в классе  $n$ -вершинных деревьев с  $k + 1$  висячей вершиной максимальный граф единственен. Если  $r = 0$ , то соответствующий граф получается соединением ребрами  $k - 1$  изолированной вершины со всеми нелистовыми вершинами  $(k + 1)$ -пути. Если  $r = 1$ , то соответствующий граф получается соединением ребрами  $k - 1$  изолированной вершины со всеми, кроме одной предлистовой, нелистовыми вершинами  $(k + 2)$ -пути.

В работе [40] показано, что для любого  $n \geq 4$  и любого допустимого  $d$  в классе  $n$ -вершинных деревьев с максимальной степенью вершины  $d$  максимальный граф единственен. Если  $d \geq \frac{n-1}{2}$ , то соответствующий граф получается соединением ребрами центральной вершины звезды порядка  $2d - n + 1$  с  $n - 1 - d$  копиями 2-пути. Если  $d \leq \frac{n-1}{2}$ , то соответствующий граф получается соединением ребрами висячей вершины  $(2d - n + 1)$ -пути с  $d - 1$  копией 2-пути.

В работе [32] рассматривался класс  $n$ -вершинных деревьев диаметра 5, содержащих *совершенное паросочетание*, т.е. паросочетание, которое покрывает все вершины. Оказалось, что для любого  $n = 4p + r$ , где  $p \geq 2$  и  $r \in \{0, 2\}$ , максимальный граф единственен. Если  $r = 0$ , то соответствующий максимальный граф получается присоединением ребрами  $p$  копий 2-пути к одной вершине 2-пути и  $p - 1$  копии 2-пути к другой. Если  $r = 2$ , то соответствующий максимальный граф получается присоединением ребрами  $p$  копий 2-пути к каждой вершине 2-пути.

В работе [33] рассматривался класс  $n$ -вершинных графов, не содержащих совершенного паросочетания. В ней было доказано, что для любого  $n = 4p + r$ , где  $r \in \{0, 2\}$ , максимальный граф единственен. Если  $r = 0$ , то соответствующий граф получается соединением ребром изолированной вершины с центральной вершиной  $(n - 1)$ -пути. Если  $r = 2$ , то соответствующий граф получается соединением ребром изолированной вершины с вершиной  $(n - 1)$ -пути, смежной с его центральной вершиной.

В работе [37] для некоторых  $n$  и  $\gamma$  были описаны максимальные  $n$ -вершинные деревья с числом доминирования  $\gamma$ , причем такое дерево в каждом случае оказалось единственным.

*Квази-деревом* называется граф, получаемый соединением ребрами некоторых вершин дерева с изолированной вершиной. Такие графы рассматривались в работе [29]. В ней было доказано, что для любого  $n \geq 2$  в классе  $n$ -вершинных квази-деревьев максимальный граф единственен и получается соединением ребрами изолированной вершины со всеми вершинами  $(n - 1)$ -пути.

Заметное количество работ посвящено максимизации  $z$ -индекса для классов  $(n, n + k)$ -графов, т.е. связанных графов с  $n$  вершинами и  $n + k$  ребрами. В работе [18] (с исправлением в [19]) было установлено, что для любого  $n \geq 3$  в классе  $(n, n)$ -графов единственным максимальным элементом является  $n$ -цикл. В работах [42] для любого  $n \geq 5$  были описаны все предмаксимальные  $(n, n)$ -графы, таких графов получилось 2 (кроме случая  $n = 6$ ). Первый получается соединением ребром  $(n - 2)$ -цикла с листовой вершиной 2-пути, второй граф получается соединением ребром 4-цикла с листовой вершиной  $(n - 4)$ -пути. В классе  $(n, n + 1)$ -графов единственный максимальный граф получается соединением ребром 4-цикла и  $(n - 4)$ -цикла. Это было доказано в работах [12, 30], работа [12] содержала ошибку, приводящую к неправильному ответу и исправленную в [30]. Заметим, что аналогичная задача для  $(n, n + 1)$ -графов но без висячих вершин была уже решена в [18, 19]. В работе [30] установлено, что для любого  $n \geq 15$  в классе  $(n, n + 2)$ -графов максимальный граф единственен и получается соединением ребрами двух 4-циклов с последовательными вершинами  $(n - 8)$ -цикла.

Для любых  $n \geq 3$  и  $g \geq 3$  в классе  $(n, n)$ -графов с заданным *обхватом*  $g$ , т.е. длиной кратчайшего цикла, максимальный граф является единственным [13]. Оказалось, что такой граф получается соединением ребром  $g$ -цикла с висячей вершиной  $(n - g)$ -пути. В работах [45, 46] для любых  $n \geq 6$  и  $d \geq 3$  в классах  $(n, n)$ -графов и  $(n, n + 1)$ -графов с максимальной степенью вершины  $d$  были найдены все экстремальные графы. Отметим, что в некоторых случаях таких графов было несколько.

Шестиугольные цепи играют важную роль в математической химии как природные представления бензоидных углеводородов. Так в работах [10, 20, 35, 36, 38, 48] рассматривались различные типы шестиугольных цепей и были описаны соответствующие максимальные графы. Аналогичные результаты для одного из классов многоугольных цепей были получены в работе [39].

В работах [43, 44] рассматривалась и решалась задача максимизации  $z$ -индекса для  $n$ -вершинных графов с заданным кликовым числом и связностью. Оказалось, что в обоих случаях оптимальные графы единственны для всех значений параметров. Отметим некоторые недавние результаты [11, 34] о максимизации  $z$ -индекса в некоторых классах графов.

При поиске графов с экстремальным значением индекса Хосойи обычно используется ряд стандартных приемов. Среди этих приемов отметим доказательство отсутствия висячих вершин стандартными преобразованиями графов, установление формы возникающих графов, их параметризация и настройка параметров с использованием стандартных расщеплений циклов и прокаток циклов вдоль пути или цикла с использованием свойств чисел Фибоначчи.

В данной работе предлагается новый метод поиска графов из заданных классов, имеющих максимальное значение  $z$ -индекса, основанный на специальных локальных преобразованиях. Данный метод описывается в первой главе, где также приводятся некоторые используемые в работе определения и обозначения теории графов. Во второй главе работы рассматривается задача максимизации  $z$ -индекса в классе  $n$ -вершинных деревьев диаметра не более чем 5, которая там полностью решается с помощью упомянутого метода. Данные результаты опубликованы в [2, 5] и обобщают результат из [32]. Во второй главе работы также рассматривается и полностью решается методом локальных преобразований графов задача максимизации  $z$ -индекса в классе деревьев с  $n$  вершинами и 5 или 6 листьями при всех достаточно больших  $n$ , продолжая результаты работ [17] и [40]. Этот результат опубликован в [6]. В третьей главе приводится новое, более короткое и комбинаторное, доказательство известного результата (см. работу [30]) о структуре максимальных  $(n, n + 2)$ -графов при  $n \geq 17$ . Оно было получено независимо от содержания работы [30] и использует несколько новых локальных преобразований графов, увеличивающих  $z$ -индекс и не представленных в работе [30]. Соответствующий результат опубликован в работе [3].

В работе [27] была найдена асимптотика количества всех независимых множеств в полных  $q$ -арных деревьях при стремлении высоты дерева к бесконечности. Выяснилось, что вид асимптотики при  $1 \leq q \leq 4$  отличается от вида асимптотики при  $q \geq 5$ , в этом случае он зависит от четности высоты дерева. В работе [7] рассматривалась аналогичная задача для максимальных независимых множеств. Там было показано, что при  $q = 2$  вид асимптотики такой же, как и в случае всех независимых множеств при  $1 \leq q \leq 4$ , а при всех достаточно больших  $q$  вид асимптотики зависит от остатка при делении на 3 высоты дерева.

В четвертой главе работы исследуются асимптотики количеств паросочетаний и *порожденных паросочетаний* (т.е. паросочетаний, в которых никакие два ребра одновременно несмежны ни с каким другим) в полных  $q$ -арных деревьях при стремлении их высоты к бесконечности. В ней показывается, что для просто паросочетаний вид асимптотики не зависит от  $q$  и что для порожденных паросочетаний имеется одна картина при  $1 \leq q \leq 3$ , а при всех достаточно больших  $q$  ее вид зависит от остатка при делении на 3 высоты дерева. Там же проводятся вычислительные эксперименты по выяснению области справедливости последнего утверждения в терминах  $q$ . Эти результаты опубликованы в работе [4].

## 2. Цели и задачи работы

Целями данного исследования являются развитие методов установления экстремальности графов по значению их индекса Хосойи, а также решение, с возможным использованием данных методов, нескольких задач экстремальной и перечислительной комбинаторики, связанных с паросочетаниями в графах.

Задачи исследования:

1. Предложить новый метод для построения локальных замен в графах, которые увеличивают индекс Хосойи.

2. Выявить все графы, имеющие максимальный индекс Хосойи среди  $n$ -вершинных деревьев диаметра не более чем 5, деревьев с 5 или с 6 листьями, а также связных  $n$ -вершинных графов с  $n + 2$  ребрами.

3. Исследовать количества паросочетаний и порожденных паросочетаний в полных  $q$ -арных деревьях при стремлении высоты деревьев к бесконечности.

### **3. Научная новизна работы**

В данной работе при помощи известных и оригинальных (таких, как новые локальные замены в графах) приемов решается несколько ранее открытых задач экстремальной и перечислительной комбинаторики паросочетаний в графах. Все основные результаты данного исследования являются новыми.

### **4. Теоретическая и практическая значимость работы**

Работа носит теоретический характер. Результаты работы могут найти применения в исследованиях по теории графов и комбинаторике. Они могут также применяться при разработке и чтении курсов и спецкурсов по дискретной математике.

### **5. Методология и методы исследования**

В работе использованы методы теории графов, комбинаторики, математического и численного анализа.

### **6. Положения, выносимые на защиту, и личный вклад соискателя**

На защиту выносятся следующие результаты:

1. Предложен метод построения локальных преобразований графов, увеличивающих индекс Хосойи.

2. Для любых  $n$  и  $4 \leq d \leq 5$  найдены все  $n$ -вершинные деревья диаметра  $d$ , имеющие максимальный индекс Хосойи среди всех таких деревьев.

3. Найдены все  $n$ -вершинные деревья с 5 листьями (при  $n \geq 20$ ) или с 6 листьями (при  $n \geq 26$ ), имеющие максимальный индекс Хосойи среди всех таких деревьев.

4. Предложено новое, более короткое и менее техническое, доказательство известного результата о структуре связных графов с  $n \geq 17$  вершинами и  $n + 2$  ребрами, имеющих максимальный индекс Хосойи среди всех таких графов.

5. Получены виды асимптотик количеств паросочетаний и порожденных паросочетаний в полных  $q$ -арных деревьях при стремлении их высоты к бесконечности.

Все основные результаты работы получены лично соискателем. Научному руководителю принадлежат общее руководство исследованием, предложения по редакции текста и оптимизация некоторых доказательств.

### **7. Объем и структура работы**

Работа состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы, включающего 48 наименований. Общий объем работы составляет 56 страниц и включает 32 иллюстрации. Нумерация всех теорем, лемм и следствий ведется независимо внутри каждой главы, причем номер каждого такого утверждения состоит из трех частей, первая из которых соответствует номеру главы, вторая номеру раздела, а третья порядковому номеру внутри раздела. Точно также нумеруются рисунки. Нумерация теорем, лемм, следствий ведется независимо.

Во *введении* обосновывается актуальность данной работы, представлены обзор литературы по теме исследований, цели и задачи работы, научная новизна работы, теоретическая и практическая значимость работы, методы данного исследования, основные результаты работы, структура работы, а также представлены степень достоверности результатов работ, апробации результатов работ и публикации по теме данной работы.

В *первой главе* работы приводятся некоторые понятия и обозначения теории графов, а также излагается новый метод построения локальных замен, увеличивающих индекс Хосойи.

Во *второй главе* работы для любых  $n$  и  $1 \leq d \leq 5$  полностью описываются  $n$ -вершинные деревья диаметра  $d$ , имеющие максимальный  $z$ -индекс среди всех таких деревьев. Там же для полностью описываются все  $n$ -вершинные деревья с 5 листьями (при  $n \geq 20$ ) или с 6 листьями (при  $n \geq 26$ ), имеющие максимальный  $z$ -индекс среди всех таких деревьев.

В *третьей главе* работы излагается новое доказательство известного результата о структуре связных графов с  $n \geq 17$  вершинами и  $n + 2$  ребрами, имеющих максимальный  $z$ -индекс среди всех таких графов.

В *четвертой главе* работы исследуются асимптотики количеств паросочетаний и порожденных паросочетаний в полных  $q$ -арных деревьях в полных  $q$ -арных деревьях в зависимости от значения параметра  $q$  при стремлении высоты дерева к бесконечности. Для паросочетаний при любом  $q$  получен вид этой асимптотики. Для порожденных паросочетаний получен вид этой асимптотики при  $1 \leq q \leq 3$  и при всех достаточно больших  $q$ . Там же численно-аналитическим образом устанавливается область справедливости этого утверждения (в терминах  $q$ ).

В *заключении* подводится итог к проделанной работе и обсуждаются перспективы дальнейшего развития тематики данного исследования.

## **8. Степень достоверности и апробации результатов работы, публикации автора по теме работы**

Все результаты, выносимые на защиту, являются новыми и достоверными. Это подтверждается наличием строгих математических доказательств, опубликованных в рецензируемых научных изданиях из перечня изданий Министерства науки и высшего образования РФ. Результаты работы докладывались и обсуждались на следующих семинарах:

1. Международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов» (Москва, 2021).
2. Заочный семинар XIX международной конференции «Проблемы теоретической кибернетики» (Москва, 2021).
3. Международная конференция «Актуальные тренды 2022 года в комбинаторике и геометрии: исследование и преподавание» (Сочи, 2021).
4. XIV международный научный семинар «Дискретная математика и ее приложения» (Москва, 2022).
5. Международная научная конференция «Графы, игры и модели» (Майкоп, 2022).
6. Международная научная конференция «Анализ данных, сети и аппроксимации» (Сочи, 2023).
7. Третья конференция математических центров России (Майкоп, 2023).
8. Семинар международной лаборатории теоретической информатики НИУ ВШЭ.
9. Семинар лаборатории комбинаторных и геометрических структур МФТИ.
10. Общегородской семинар г. Н. Новгорода по дискретной математике.
11. Семинары лаборатории алгоритмов и технологий анализа сетевых структур НИУ ВШЭ.

По теме работы имеется 5 работ в изданиях из перечня Министерства науки и высшего образования РФ:

1. Кузьмин Н.А. О деревьях радиуса 2 с максимальным количеством паросочетаний // Журнал Средневолжского математического общества. — 2020. — Т. 22, № 2. — С. 177–187.
2. Кузьмин Н.А., Малышев Д.С. Новое доказательство результата о полном описании  $(n, n + 2)$ -графов с максимальным значением индекса Хосойи // Математические заметки. — 2022. — Т. 111, № 2. — С. 258–276.

3. Кузьмин Н.А., Малышев Д.С. Перечисление паросочетаний в полных  $q$ -арных деревьях // Математические заметки. — 2022. — Т. 111, № 3. — С. 393–402.
4. Кузьмин Н.А., Малышев Д.С. О деревьях диаметра 5 с максимальным количеством паросочетаний // Математический сборник. — 2023. — Т. 214, № 2. — С. 143–154.
5. Кузьмин Н.А., Малышев Д.С. О 5- и 6-листных деревьях, имеющих наибольшее количество паросочетаний // Математические заметки. — 2024. — Т. 115, № 3. — С. 372–385.

Автор работы выражает глубокую признательность своему научному руководителю д.ф.-м.н., проф. Дмитрию Сергеевичу Малышеву за постоянное внимание к работе, полезные советы и замечания.

## Глава 1

# Терминология, обозначения и некоторый класс преобразований графов

В первой главе определяются некоторые понятия и обозначения теории графов, которые будут использоваться на протяжении всей данной работы. Все основные понятия и факты, которые в этой и следующих главах не приводятся, можно найти, например, в учебниках [1, 8, 9, 14]. В первой главе работы также излагается метод для построения локальных преобразований графов, увеличивающих индекс Хосойи. Этот метод был предложен в работе [3].

### 1.1 Некоторые понятия и обозначения теории графов

#### 1.1.1 Множества, графы и их подграфы

Через  $\mathbb{N}$  обозначается множество натуральных чисел. Для множеств  $A$  и  $B$  через  $A \cup B$ ,  $A \cap B$ ,  $A \setminus B$  обозначены объединение, пересечение и разность множеств  $A$  и  $B$ .

Все рассматриваемые в данной работе графы (если явным образом не оговаривается противное) являются *обыкновенными*, т.е. конечными неориентированными графами без петель и кратных ребер. Множества вершин и ребер графа  $G$  будем обозначать через  $V(G)$  и  $E(G)$ , соответственно.

*Мультиграфом* называется неориентированный граф, в котором допускаются кратные ребра. *Псевдографом* называется неориентированный граф, в котором допускаются петли и кратные ребра.

В работе используются следующие обозначения для некоторых стандартных графов:

- через  $P_n$  обозначается  $n$ -*путь*, т.е. простой путь, содержащий  $n$  верши,
- через  $C_n$  обозначается  $n$ -*цикл*, т.е. простой цикл, содержащий  $n$  вершин,
- через  $K_{p,q}$  обозначается *полный двудольный граф* (т.е. двудольный граф, в котором все вершины из первой доли соединены со всеми вершинами из второй) с размерами долей  $p$  и  $q$ , соответственно.

Граф  $K_{p,1}$  иногда называется  $p$ -*звездой*. *Вилкой* называется результат подразделения произвольного ребра 3-звезды. Связный граф с  $n$  вершинами и  $m$  ребрами называется  $(n, m)$ -*графом*.

*Деревом* называется связный граф без циклов. *Полным  $q$ -арным деревом высоты  $h$*  называется корневое дерево, все листья которого находятся на расстоянии  $h$  от корня, степень корня равна  $q$ , а степень всех остальных вершин, кроме вершин степени 1, равна  $q + 1$ . Такое дерево будет обозначаться через  $T_{q,h}$ .

Граф  $H$  называется *подграфом* графа  $G$ , если  $H$  получается из  $G$  удалением вершин и ребер, где операция удаления вершины подразумевает удаление всех инцидентных ей ребер. Граф  $H$  называется *порожденным подграфом* графа  $G$ , если  $H$  получается из  $G$  только удалениями вершин.

Изоморфизм графов  $G_1$  и  $G_2$  обозначается через  $G_1 \cong G_2$ . Пусть  $G$  — граф,  $v \in V(G)$ ,  $V' \subseteq V(G)$ ,  $E' \subseteq E(G)$ . Степень вершины  $v$  обозначается через  $\deg_G(v)$ , а ее окрестность через  $N_G(v)$ . Графы  $G \setminus V'$  и  $G \setminus E'$  получаются из  $G$  удалением всех вершин из  $V'$  и всех ребер из  $E'$ , соответственно, имея в виду, что удаление вершины подразумевает удаление всех инцидентных ей ребер. Подграф графа  $G$ , порожденный подмножеством  $V'$ , обозначается через  $G[V']$ .

### 1.1.2 Метрические характеристики, специальные вершины и ребра

*Эксцентриситетом вершины* графа называется максимальное из расстояний между ней и остальными вершинами. *Диаметр графа* — максимальный из эксцентриситетов его вершин. *Центральная вершина* графа — вершина с минимальным эксцентриситетом. *Центр графа* — множество его центральных вершин. По теореме Жордана [26] центр любого дерева состоит либо из одной вершины, либо из двух смежных вершин. Вершина степени один графа называется *листом* (или *висячей вершиной*). *Мостом графа* называется ребро, удаление которого увеличивает количество его компонент связности.

### 1.1.3 Паросочетания, индекс Хосойи и его разложение по ребру

*Паросочетанием графа* называется произвольное множество попарно несмежных его ребер. *Индекс Хосойи* (называемый еще  *$z$ -индексом*) графа определяется как количество его паросочетаний, включая и пустое множество ребер. Для графа  $G$  значение этого индекса принято обозначать через  $z(G)$ .

Для любых графов  $G_1$  и  $G_2$  с непересекающимися множествами вершин выполнено  $z(G_1 + G_2) = z(G_1) \cdot z(G_2)$ , где  $G_1 + G_2$  — дизъюнктное объединение  $G_1$  и  $G_2$ .

Пусть  $G$  — граф,  $e \in E(G)$ . Равенство  $z(G) = z_+(G, e) + z_-(G, e)$ , где  $z_+(G, e)$  и  $z_-(G, e)$  — количества паросочетаний  $G$ , содержащих и не содержащих  $e$ , соответственно, будем называть *разложением  $z(G)$  по ребру  $e$* . Например, воспользовавшись этим разложением, нетрудно установить, что при любом  $i$  индекс Хосойи пути на  $i$  вершинах равен  $F_{i+1}$ , где

$$F_0 = 0, F_1 = F_2 = 1, F_i = F_{i-1} + F_{i-2}, i \geq 3 \text{ — числа Фибоначчи.}$$

Важным свойством чисел Фибоначчи, которое мы будем использовать в данной работе, является следующее тождество:

$$F_{n+m} = F_{n+1} \cdot F_m + F_n \cdot F_{m-1}, n \geq 0, m \geq 1.$$

Оно может быть доказано разложением  $z$ -индекса  $(n + m - 1)$ -пути по  $n$ -ому его ребру.

Граф  $G$  из заданного класса графов  $\mathcal{X}$  будем называть *максимальным*, если он имеет наибольший индекс Хосойи среди всех  $|V(G)|$ -вершинных графов из  $\mathcal{X}$ .

## 1.2 Лемма о разложении $z$ -индекса и следствия из нее

Пусть  $G$  — некоторый граф, а  $H$  — его подграф. Любое подмножество  $S \subseteq V(H)$  такое, что никакая вершина из  $V(G) \setminus V(H)$  несмежна ни с какой вершиной из  $V(H) \setminus S$ , назовем  *$H$ -отделяющим*. Пусть  $S$

— некоторое  $H$ -отделяющее множество. Через  $G_S$  обозначим граф

$$((V(G) \setminus V(H)) \cup S, E(G) \setminus E(H)).$$

Пусть  $A, B \subseteq V(G)$  и  $A \cap B = \emptyset$ . Через  $z(G, A, B)$  обозначается количество паросочетаний графа  $G$ , покрывающих все вершины из  $A$  и не покрывающих ни одной вершины из  $B$ .

**Лемма 1.2.1.** *Справедливо равенство*

$$z(G) = \sum_{S' \subseteq S} z(G_S, S', S \setminus S') \cdot z(H \setminus S').$$

*Доказательство.* Каждое паросочетание графа  $G$  может быть разбито на две части — паросочетание графа  $G_S$  и паросочетание графа  $H$ . В графе  $G_S$  оно покрывает некоторое подмножество  $S' \subseteq S$  и не покрывает подмножество  $S \setminus S'$ . Для любого  $S' \subseteq S$  количество таких паросочетаний графа  $G$  равно  $z(G_S, S', S \setminus S') \cdot z(H \setminus S')$ . Суммируя по всем подмножествам множества  $S$ , мы получаем количество всех паросочетаний графа  $G$ .  $\square$

Предположим, что  $G_S$  состоит из двух компонент связности  $G_S^1$  и  $G_S^2$ . Положим  $S_1 = V(G_S^1) \cap S, S_2 = V(G_S^2) \cap S$ . Тогда для любого  $S' \subseteq S$  по лемме **1.2.1** справедливо

$$z(G_S, S', S \setminus S') = z(G_S^1, S_1 \cap S', S_1 \setminus S') \cdot z(G_S^2, S_2 \cap S', S_2 \setminus S').$$

Откуда получаем

$$z(G) = \sum_{S' \subseteq S} z(G_S^1, S_1 \cap S', S_1 \setminus S') \cdot z(G_S^2, S_2 \cap S', S_2 \setminus S') \cdot z(H \setminus S').$$

Предположим, что некоторые графы  $G^1$  и  $G^2$  содержат подграфы  $H_1$  и  $H_2$ , соответственно, причем одновременно выполнены следующие два условия:

1. некоторое подмножество  $S \subseteq V(G^1) \cap V(G^2)$  одновременно является и  $H_1$ -отделяющим и  $H_2$ -отделяющим,
2. подграфы  $G_S^1$  и  $G_S^2$  изоморфны.

По лемме **1.2.1** выполнено

$$z(G^2) - z(G^1) = \sum_{S' \subseteq S} z(G_S^1, S', S \setminus S') \cdot \Delta(S'),$$

где  $\Delta(S') = z(H_2 \setminus S') - z(H_1 \setminus S')$ . Из нее же прямо следует справедливость следующего утверждения:

**Следствие 1.2.1.** *Если для любого подмножества  $S' \subseteq S$  справедливо  $\Delta(S') \geq 0$ , причем для некоторого  $\tilde{S}' \subseteq S$  выполнено*

$$\Delta(\tilde{S}') > 0, z(G_S^1, \tilde{S}', S \setminus \tilde{S}') \neq 0,$$

*то  $z(G^2) > z(G^1)$ .*

Это следствие оказывается полезным для доказательства того факта, что то или иное преобразование графов увеличивает  $z$ -индекс. Данные преобразования будут сохранять принадлежность результата преобразования рассматриваемому классу графов. Следствие **1.2.1** и связанные с ним обозначения будут использоваться в этой работе. Нам также понадобится еще одно следствие из леммы **1.2.1** которое будет сформулировано и доказано ниже.

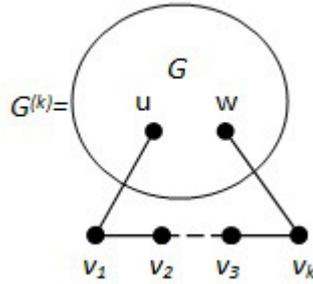


Рис. 1.1: Граф  $G^{(k)}$

Предположим, что в некотором графе  $G$  выделены вершины  $u$  и  $w$ , не обязательно различные. Для  $k \geq 1$  через  $G^{(k)}$  обозначим граф, получаемый добавлением к  $G$  простого пути  $(v_1, \dots, v_k)$  и ребер  $v_1u, v_kw$  (см. рисунок 1.1). Уточним, что в случае  $u = w, k = 1$  граф  $G^{(1)}$  будет мультиграфом с ребром  $uv_1$  кратности 2.

Переобозначим  $G$  через  $G^{(0)}$ . Справедливо следующее утверждение:

**Следствие 1.2.2.** Для любого  $k \geq 2$  верно  $z(G^{(k)}) = z(G^{(k-1)}) + z(G^{(k-2)})$ .

*Доказательство.* Предположим, что  $u \neq w$ . По лемме 1.2.1 для  $S = \{u, w\}$  и любого  $p \geq 1$  имеем

$$z(G^{(p)}) = \sum_{S' \subseteq S} z(G_S^{(p)}, S', S \setminus S') \cdot F_{k-|S'|+1}.$$

Очевидно, что графы  $G_S^{(0)}, G_S^{(1)}, G_S^{(2)} \dots$  изоморфны между собой. Тем самым, для любого  $S' \subseteq S$  имеем

$$z(G_S^{(0)}, S', S \setminus S') = z(G_S^{(1)}, S', S \setminus S') = z(G_S^{(2)}, S', S \setminus S') = \dots$$

Для любого  $i \geq 2$  выполнено  $z(P_i) = z(P_{i-1}) + z(P_{i-2})$ . Значит, утверждение следствия справедливо, когда  $u \neq w$ .

Если  $u = w$ , то для  $S = \{u\}$  доказательство проводится по аналогии. Случай  $k = 2$  разбирается отдельно. При  $k \geq 3$  используется равенство  $z(C_i) = z(C_{i-1}) + z(C_{i-2})$ , верное при всех  $i \geq 3$ .  $\square$

## Глава 2

# О максимальных деревьях из некоторых классов

Во второй главе данной работы рассматривается и для любого  $n$  полностью решается задача максимизации  $z$ -индекса в  $n$ -вершинных деревьях диаметра не более чем 5. В ней также рассматривается и для любого достаточно большого  $n$  полностью решается задача максимизации  $z$ -индекса в  $n$ -вершинных деревьях с 5 или с 6 листьями. Эти результаты опубликованы в работах [2, 5, 6].

### 2.1 О максимальных деревьях диаметра не более чем 3

Задачи максимизации индекса Хосойи в деревьях диаметра 1 и 2 являются тривиальными. Первая из них осмыслена только для  $n = 2$ , а для второй единственным допустимым решением является  $(n - 1)$ -звезда, где  $n \geq 3$ . Любое  $n$ -вершинное дерево диаметра 3 получается соединением ребром центральных вершин  $a$ -звезды и  $b$ -звезды, где  $a + b = n - 2, n \geq 4$ . Его  $z$ -индекс равен

$$(a + 1) \cdot (b + 1) + 1 = (a + 1) \cdot (n - 1 - a) + 1.$$

Нетрудно видеть, что единственным оптимальным параметром будет

$$a = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1.$$

### 2.2 О максимальных деревьях диаметра 4

#### 2.2.1 Некоторые преобразования графов, увеличивающие индекс Хосойи

Предположим, что граф  $G_1$  состоит из подграфа  $G'_S$  и связного подграфа  $G''_S$  и отделенного от них вершинами  $s_1$  и  $s_2$  порожденного 3-пути  $(v, s_2, s_1)$ , а граф  $G_2$  состоит из подграфов  $G'_S$  и  $G''_S$  и отделенного от них вершинами  $s_1$  и  $s_2$  порожденного 3-пути  $(s_2, v, s_1)$  так, как показано на рисунке 2.1

**Лемма 2.2.1.** Если  $V(G''_S) \neq \{s_2\}$ , то  $z(G_2) > z(G_1)$ .

*Доказательство.* Для доказательства этого утверждения воспользуемся следствием 1.2.1 и его обозначениями. Положим

$$G^1 = G_1, G^2 = G_2, S = \{s_2\}, H_1 = G_1[V(G'_S) \cup \{v, s_2\}], H_2 = G_2[V(G'_S) \cup \{v, s_2\}].$$

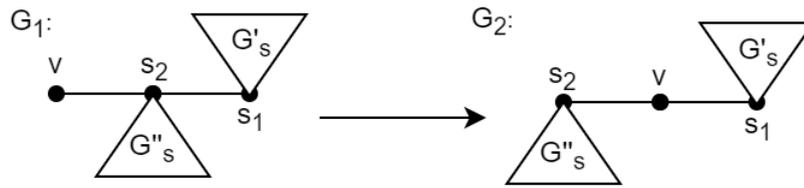


Рис. 2.1: Преобразование 2-1

Очевидно, что

$$\Delta(\emptyset) = 0, \Delta(\{s_2\}) = z(H_2 \setminus \{s_2\}) - z(G'_S) = z(G'_S \setminus \{s_1\}) > 0, z(G''_S, \{s_2\}, \emptyset) \neq 0,$$

т.к.  $G''_S$  связан и  $V(G''_S) \neq \{s_2\}$ . Поэтому  $z(G_2) > z(G_1)$ . □

Предположим, что граф  $G_1$  состоит из подграфа  $G_S$  и отделенной от него вершиной  $s_1$  звездой  $H_1$  с  $q + 1$  листьями, см. рисунок 2.2.

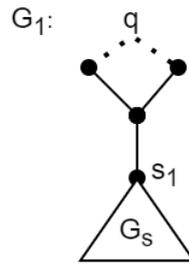


Рис. 2.2: Граф  $G_1$

В случае четного  $q$  граф  $G_2$  состоит из подграфа  $G_S$  и отделенного от него вершиной  $s_1$  подграфа  $H_2$  так, как показано на рисунке 2.3.

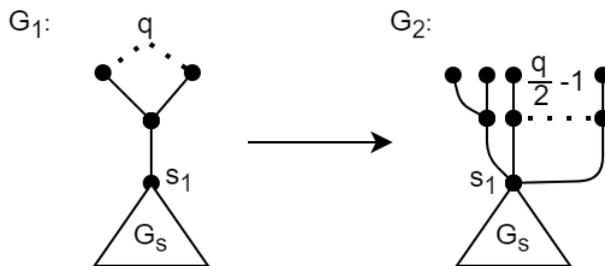


Рис. 2.3: Преобразование 2-2

**Лемма 2.2.2.** Для каждого четного  $q \geq 4$  верно, что  $z(G_2) > z(G_1)$ .

*Доказательство.* Для доказательства этого утверждения воспользуемся следствием 1.2.1 и его обозначениями. Положим

$$G^1 = G_1, G^2 = G_2, S = \{s_1\}.$$

Очевидно, что

$$\Delta(\emptyset) = 3 \cdot \left(\frac{q}{2} - 1\right) \cdot 2^{\frac{q}{2}-2} + 2^{\frac{q}{2}+1} - (q+2) > 0, \Delta(\{s_1\}) = 3 \cdot 2^{\frac{q}{2}-1} - (q+1) \geq 0,$$

$$z(G_S, \emptyset, \{s_1\}) > 0.$$

Поэтому  $z(G_2) > z(G_1)$ . □

В случае нечетного  $q$  граф  $G_2$  состоит из подграфа  $G_S$  и отделенного от него вершиной  $s_1$  подграфа  $H_2$  так, как показано на рисунке 2.4

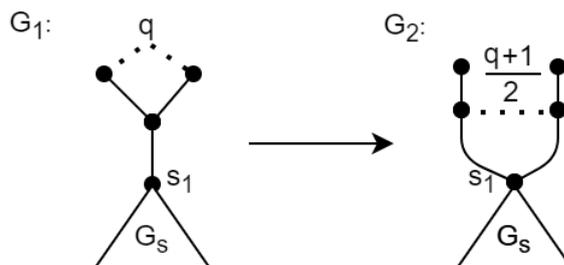


Рис. 2.4: Преобразование 2-3

**Лемма 2.2.3.** Для каждого нечетного  $q \geq 3$  верно, что  $z(G_2) > z(G_1)$ .

*Доказательство.* Для доказательства этого утверждения воспользуемся следствием 1.2.1 и его обозначениями. Положим

$$G^1 = G_1, G^2 = G_2, S = \{s_1\}.$$

Очевидно, что

$$\Delta(\emptyset) = \frac{q+1}{2} \cdot 2^{\frac{q-1}{2}} + 2^{\frac{q+1}{2}} - (q+2) > 0, \Delta(\{s_1\}) = 2^{\frac{q+1}{2}} - (q+1) \geq 0,$$

$$z(G_S, \emptyset, \{s_1\}) > 0.$$

Поэтому  $z(G_2) > z(G_1)$ . □

## 2.2.2 Центры максимальных деревьев диаметра 4 и смежные с ними поддеревья

Напомним, что по теореме Жордана центр любого дерева состоит либо из одной вершины, либо из двух смежных вершин.

**Лемма 2.2.4.** Центр каждого максимального дерева диаметра 4 состоит из одной вершины.

*Доказательство.* Пусть  $T$  — максимальное дерево диаметра 4, имеющее две центральные вершины  $s_1$  и  $s_2$ . Применим к нему преобразование 2-1 и получим дерево  $\tilde{T}$  диаметра 4 с тем же количеством вершин. По лемме 2.2.1 имеем, что  $z(\tilde{T}) > z(T)$ . □

**Лемма 2.2.5.** В любом максимальном дереве диаметра 4 центральная вершина смежна не более чем с одним листом.

*Доказательство.* Пусть  $T$  — максимальное дерево диаметра 4, центральная вершина  $s_2$  которого смежна с  $q \geq 2$  листьями. Обозначим через  $G''_S$  подграф  $T$ , порожденный  $s_2$  и  $q-1$  листом, смежным с  $s_2$ , а оставшийся лист обозначим через  $v$ . Отсоединим листья, смежные с  $s_2$  и принадлежащие  $G''_S$ , а затем присоединим их к листу  $v$ . Получим дерево  $\tilde{T}$  диаметра 4. Тогда из леммы 2.2.1 следует, что  $z(\tilde{T}) > z(T)$ . □

Из лемм 2.2.1 2.2.5 заключаем, что каждое максимальное дерево  $T^*$  имеет один из двух видов из рисунка 2.5. Через  $a$  и  $b$  обозначены количества соответствующих вхождений 2-путей и 3-путей в дерево.

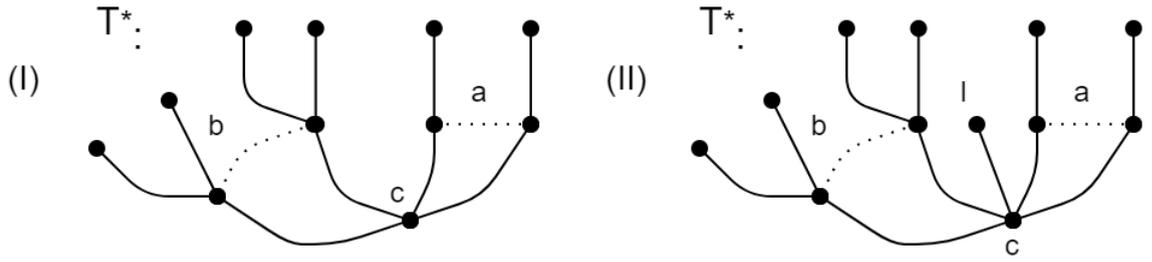


Рис. 2.5: Структура любого максимального дерева диаметра 4

### 2.2.3 Об отсутствии листа в максимальных деревьях диаметра 4, смежного с центральной вершиной

Предположим, что  $T^*$  содержит лист  $l$ , см. рисунок 2.5(II).

#### Случай $a \neq 0$

Удалим  $l$  и добавим его в качестве листового соседа к вершине степени 2 одного из  $a$  путей  $P_3$  в  $n$ -вершинном дереве  $T^*$ . Полученное дерево обозначим через  $T_1^{**}$ . Очевидно, что диаметры деревьев  $T^*$  и  $T_1^{**}$  равны 4 и имеют одинаковые количества вершин.

**Лемма 2.2.6.** Если  $n \geq 12$ , то  $z(T_1^{**}) > z(T^*)$ .

*Доказательство.* Несложно посчитать, что количество паросочетаний в дереве  $T^*$ , не покрывающих вершины  $c$ , равно  $2^a \cdot 3^b$  штук. В случае, когда вершину  $c$  покрывает ребро  $lc$ , их так же  $2^a \cdot 3^b$  штук. В случае же, когда вершину  $c$  покрывают остальные смежные с ней ребра, то количество паросочетаний равно  $a \cdot 2^{a-1} \cdot 3^b + b \cdot 2^a \cdot 3^{b-1}$ . Тем самым, справедливо равенство

$$z(T^*) = 2^{a+1} \cdot 3^b + a \cdot 2^{a-1} \cdot 3^b + b \cdot 2^a \cdot 3^{b-1} = 2^{a-1} \cdot 3^{b-1} \cdot (12 + 3a + 2b).$$

Аналогичным способом получаются соотношения

$$z(T_1^{**}) = 2^{a-1} \cdot 3^{b+1} + (a-1) \cdot 2^{a-2} \cdot 3^{b+1} + (b+1) \cdot 2^{a-1} \cdot 3^b = 2^{a-2} \cdot 3^b \cdot (6 + 3(a-1) + 2(b+1)),$$

$$z(T_1^{**}) - z(T^*) = 2^{a-2} \cdot 3^{b-1} \cdot (3a + 2b - 9).$$

Очевидно, что  $3a + 2b = n - 2$ , поэтому  $3a + 2b - 9 = n - 11$ . Из чего следует, что  $z(T_1^{**}) - z(T^*) > 0$ , при  $n \geq 12$ .  $\square$

#### Случай $a = 0$

В  $T^*$  удалим лист, отличный от  $l$ , и прикрепим его к  $l$  в качестве листового соседа. Полученное дерево обозначим через  $T_2^{**}$ .

**Лемма 2.2.7.** Справедливо неравенство  $z(T_2^{**}) > z(T^*)$ .

*Доказательство.* Справедливы следующие соотношения:

$$z(T^*) = 2 \cdot 3^b + b \cdot 3^{b-1}, z(T_2^{**}) = 2^3 \cdot 3^{b-1} + 4 \cdot (b-1) \cdot 3^{b-2}.$$

Очевидно, что  $z(T_2^{**}) - z(T^*) = (b+2) \cdot 3^{b-2} > 0$ . Значит,  $z(T_2^{**}) > z(T^*)$ .  $\square$

Из лемм 2.2.6 и 2.2.7 следует, что при  $n \geq 12$  каждое максимальное дерево диаметра 4 не содержит листа, смежного с центральной вершиной.

## 2.2.4 Настройка параметров $a$ и $b$ в максимальных деревьях диаметра 4

Предположим, что  $n \geq 12$ . Тогда каждое максимальное дерево диаметра 4 имеет вид, представленный на рисунке 2.5(I). Данное  $n$ -вершинное дерево будем обозначать через  $T_{a,b}^*$ . Несложно проверить, что верны следующие равенства:

$$z(T_{a,b}^*) = 2^a \cdot 3^b + a \cdot 2^{a-1} \cdot 3^b + b \cdot 2^a \cdot 3^{b-1} = 2^{a-1} \cdot 3^{b-1} \cdot (6 + 3a + 2b), 2a + 3b = n - 1.$$

Пусть  $f(a, b) = z(T_{a,b}^*)$ . Тогда поиск максимальных деревьев диаметра 4 сводится к нахождению глобального максимума функции  $f$  при соответствующих ограничениях. Имеем, что  $b = \frac{n-1-2a}{3}$  и подставим это в  $f$  (предполагая, что  $a \in \mathbb{R}$ ):

$$\begin{aligned} f(a) &= 2^{a-1} \cdot 3^{\frac{n-4-2a}{3}} \cdot \frac{2n+5a+16}{3}, \\ f'_a &= 2^{a-1} \cdot 3^{\frac{n-4-2a}{3}} \cdot \left( (\ln 2 - \frac{2}{3} \ln 3) \cdot \frac{2n+5a+16}{3} + \frac{5}{3} \right), \\ f'_a = 0 &\Leftrightarrow a = \frac{3}{2 \ln 3 - 3 \ln 2} - \frac{16}{5} - \frac{2}{5}n. \end{aligned}$$

Пусть  $a^*(n) = \frac{3}{\ln \frac{3}{2}} - \frac{16}{5} - \frac{2}{5}n$ . Функция  $f$  возрастает на  $(-\infty, a^*(n))$  и убывает на  $(a^*(n), +\infty)$ . Нетрудно видеть, что  $a^*(n) < 0$  уже при  $n \geq 56$ .

## 2.2.5 Полное описание максимальных деревьев диаметра 4

Из рассуждений подраздела 2.2.4 и целочисленности  $a$  и  $b$  следует, что справедлива следующая

**Теорема 2.2.1.** При любом  $n \geq 56$ , где  $n = 3k + r$  и  $k \in \mathbb{N}, r \in \{0, 1, 2\}$ , максимальное дерево диаметра 4 единственно и имеет вид дерева, представленного на рисунке 2.5(I), где  $b = k + \frac{r-1-2a}{3}$  и  $(r, a) \in \{(0, 1), (1, 0), (2, 2)\}$ .

С целью выявления максимальных деревьев диаметра 4 при  $12 \leq n \leq 55$  был проведен вычислительный эксперимент по поиску оптимальных целочисленных  $a$  и  $b$ , показавший следующие результаты (см. таблицу 2.1):

$n$	$a$	$b$									
12	4	1	23	11	0	34	9	5	45	4	12
13	6	0	24	10	1	35	8	6	46	3	13
14	5	1	25	12	0	36	7	7	47	2	14
15	7	0	26	11	1	37	6	8	48	4	13
16	6	1	27	10	2	38	8	7	49	3	14
17	8	0	28	12	1	39	7	8	50	2	15
18	7	1	29	11	2	40	6	9	51	1	16
19	9	0	30	10	3	41	5	10	52	0	17
20	8	1	31	9	4	42	4	11	53	2	16
21	10	0	32	8	5	43	6	10	54	1	17
22	9	1	33	10	4	44	5	11	55	0	18

Таблица 2.1: Значения параметров  $a, b$  и  $12 \leq n \leq 55$ , соответствующие максимальным деревьям диаметра 4

Напомним, что в случае  $n = 5$  единственным максимальным деревом диаметра 4 будет  $n$ -путь. По леммам [2.2.1](#)–[2.2.5](#) случай  $6 \leq n \leq 11$  отличается от случая  $n \geq 12$  возможным наличием листа, смежного с центральной вершиной. С целью поиска всех максимальных деревьев диаметра 4 при  $6 \leq n \leq 11$  был проведен вычислительный эксперимент, результат которого представлен в таблице 2.2. Параметр  $l$  в таблице отвечает за наличие листа, смежного с центральной вершиной, т.е. если  $l = 1$ , то такой лист существует, а если  $l = 0$ , то такого листа в дереве нет.

$n$	$a$	$b$	$l$	$n$	$a$	$b$	$l$	$n$	$a$	$b$	$l$
6	2	0	1	8	3	0	1	11	5	0	0
7	3	0	0	9	4	0	0				
8	2	1	0	10	3	1	0				

Таблица 2.2: Описание оставшихся максимальных деревьев диаметра 4

## 2.3 О максимальных деревьях диаметра 5

### 2.3.1 Некоторые новые преобразования графов, увеличивающие $z$ -индекс

Предположим, что граф  $G_1$  состоит из связного подграфа  $G_S$  и отделенного от него вершинами  $s_1$  и  $s_2$  порожденного 4-пути  $H_1 = (u, s_1, s_2, v)$ , а граф  $G_2$  состоит из подграфа  $G_S$  и отделенного от него вершинами  $s_1$  и  $s_2$  порожденного 4-пути  $H_2 = (s_1, s_2, v, u)$  так, как показано на рисунке [2.6](#).

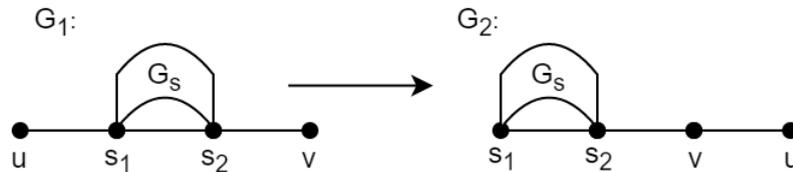


Рис. 2.6: Преобразование 2-4

**Лемма 2.3.1.** Если  $V(G_S) \neq \{s_1\}$ , то  $z(G_2) > z(G_1)$ .

*Доказательство.* Для доказательства этого утверждения воспользуемся следствием [1.2.1](#) и его обозначениями. Положим

$$G^1 = G_1, G^2 = G_2, S = \{s_1, s_2\}.$$

Несложно проверить, что

$$\Delta(\emptyset) = 5 - 5 = 0, \Delta(\{s_1\}) = 3 - 2 = 1,$$

$$\Delta(\{s_2\}) = 2 - 2 = 0, \Delta(\{s_1, s_2\}) = 2 - 1 = 1.$$

Т.к.  $G_S$  связан и  $V(G_S) \neq \{s_1\}$ , то  $z(G_S, \{s_1\}, \{s_2\}) > 0$ . Поэтому  $z(G_2) > z(G_1)$ .  $\square$

Предположим, что граф  $G_1$  состоит из подграфа  $G_S$  и отделенной от него вершиной  $s_1$  порожденной вилкой  $H_1$  на множестве вершин  $\{v, u, v_1, u_1, s_1\}$ , а граф  $G_2$  состоит из подграфа  $G_S$  и отделенного от него вершиной  $s_1$  порожденного 5-пути  $H_2 = (u_1, u, s_1, v, v_1)$  так, как показано на рисунке [2.7](#).

**Лемма 2.3.2.** Верно, что  $z(G_2) > z(G_1)$ .

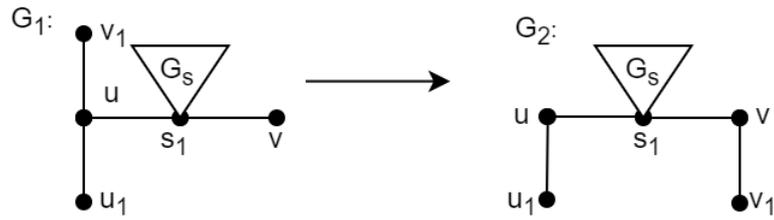


Рис. 2.7: Преобразование 2-5

*Доказательство.* Для доказательства этого утверждения воспользуемся следствием [1.2.1](#) и его обозначениями. Положим

$$G^1 = G_1, G^2 = G_2, S = \{s_1\}.$$

Несложно проверить, что

$$\Delta(\emptyset) = 8 - 7 = 1, \Delta(\{s_1\}) = 4 - 3 = 1.$$

Поэтому  $z(G_2) > z(G_1)$ . □

Предположим, что граф  $G_1$  состоит из подграфа  $G_S$  и отделенного от него вершинами  $s_1$  и  $s_2$  порожденного подграфа  $H_1$  на множестве вершин  $\{v, u, v_1, u_1, s_1, s_2\}$ , а граф  $G_2$  состоит из подграфа  $G_S$  и отделенного от него вершинами  $s_1$  и  $s_2$  порожденного 6-пути  $H_2 = (u_1, u, s_1, s_2, v, v_1)$  так, как показано на рисунке [2.8](#)

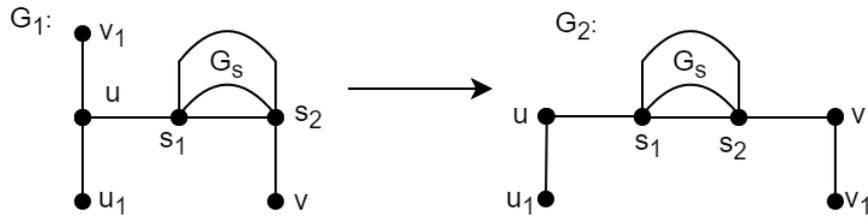


Рис. 2.8: Преобразование 2-6

**Лемма 2.3.3.** Верно, что  $z(G_2) > z(G_1)$ .

*Доказательство.* Для доказательства этого утверждения воспользуемся следствием [1.2.1](#) и его обозначениями. Положим

$$G^1 = G_1, G^2 = G_2, S = \{s_1, s_2\}.$$

Несложно проверить, что

$$\begin{aligned} \Delta(\emptyset) &= 13 - 11 = 2, \Delta(\{s_1\}) = 6 - 6 = 0, \\ \Delta(\{s_2\}) &= 6 - 4 = 2, \Delta(\{s_1, s_2\}) = 4 - 3 = 1. \end{aligned}$$

Поэтому  $z(G_2) > z(G_1)$ . □

## 2.3.2 О свойствах максимальных деревьев диаметра 5

### Структура максимальных деревьев диаметра 5 и некоторые ее свойства

Из лемм [2.2.1](#) [2.2.3](#) следует, что каждое максимальное дерево диаметра 5 имеет вид, представленный на рисунке [2.9](#). Уточним, что  $l_i \in \{0, 1\}$ , где  $l_i = 1$  тогда и только тогда, когда соответствующий лист содержится в дереве. Через  $a_i$  и  $b_i$  обозначено количество соответствующих вхождений 2-путей и 3-путей в дерево.

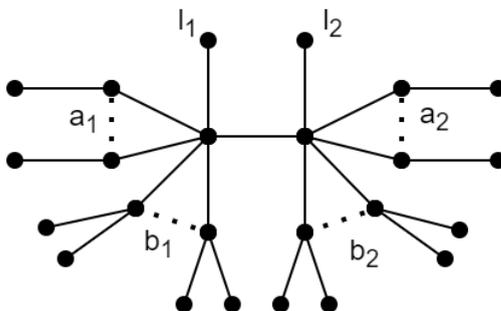


Рис. 2.9: Структура каждого максимального дерева диаметра 5

Индекс Хосойи такого дерева обозначим через  $f(l_1, l_2, a_1, a_2, b_1, b_2)$ . Очевидно, что если в данном дереве имеется  $n$  вершин, то

$$2a_1 + 2a_2 + 3b_1 + 3b_2 = n - l_1 - l_2 - 2. \quad (2.1)$$

**Лемма 2.3.4.** В любом максимальном дереве диаметра 5 выполнены следующие свойства:

1. Если дерево содержит центральный лист, то он единственный и  $b_1 = b_2 = 0$ .
2. Если  $n$  — четное, то дерево не содержит центральных листьев.

*Доказательство.* Из леммы [2.3.1](#) следует, что в любом максимальном дереве диаметра 5 либо  $l_1 = 0$ , либо  $l_2 = 0$ . Если в нем есть центральные листья, то можно считать, что  $l_1 = 1$ . Из лемм [2.3.2](#) и [2.3.3](#) следует, что  $b_1 = b_2 = 0$ . Подставив эти значения в равенство [\(2.1\)](#) получим, что  $2a_1 + 2a_2 = n - 3$ , что невозможно в случае четного  $n$ .  $\square$

#### Случай наличия центрального листа

Предположим, что  $l_1 = 1$ . Тогда по лемме [2.3.4](#) имеем, что  $l_2 = 0, b_1 = b_2 = 0$  и  $n$  является нечетным. Пусть  $n = 4k + r$ , где

$$r \in \{1, 3\}, g(a_1, a_2) = f(1, 0, a_1, a_2, 0, 0).$$

Тогда задача поиска максимальных деревьев диаметра 5, содержащих центральный лист (если таковые существуют), сводится к нахождению максимума функции  $g$  при ограничении

$$2a_1 + 2a_2 = n - 3. \quad (2.2)$$

Нетрудно проверить, что верно следующее равенство:

$$g(a_1, a_2) = 2^{a_1+a_2-2} \cdot (12 + 2a_1 + 4a_2 + a_1a_2).$$

Подставив  $a_1 = \frac{n-3}{2} - a_2$  в функцию  $g$ , получим

$$g(a_2) = 2^{\frac{n-3}{2}-2} \cdot (-a_2^2 + (2 + \frac{n-3}{2}) \cdot a_2 + (n+9)).$$

Очевидно, что максимум этой функции находится в точке  $a_2 = 1 + \frac{n-3}{4}$ . Прямой подстановкой этого значения в функцию доказывается следующее утверждение:

**Лемма 2.3.5.** Если выполняется (2.2), то

$$g(a_1, a_2) \leq 2^{\frac{n-15}{2}} \cdot (n^2 + 18n + 145).$$

### Случай отсутствия центрального листа

Пусть  $g(a_1, a_2, b_1, b_2) = f(0, 0, a_1, a_2, b_1, b_2)$ . Тогда задача поиска максимальных деревьев диаметра 5, не содержащих центральных листьев (если таковые существуют), сводится к нахождению максимума функции  $g$  при ограничении

$$2a_1 + 2a_2 + 3b_1 + 3b_2 = n - 2.$$

Не уменьшая общности можем считать, что  $a_1 \geq a_2$ , поэтому далее в этом пункте всегда будем предполагать, что это неравенство выполняется. Нетрудно проверить, что верно следующее равенство:

$$g(a_1, a_2, b_1, b_2) = 2^{a_1+a_2-2} \cdot 3^{b_1+b_2-2} \cdot ((3a_1 + 2b_1 + 6) \cdot (3a_2 + 2b_2 + 6) + 36).$$

**Лемма 2.3.6.** Если  $b_1 \geq b_2$ , то

$$g(a_1, a_2, b_2, b_1) \geq g(a_1, a_2, b_1, b_2)$$

*Доказательство.* Нетрудно проверить, что

$$\frac{g(a_1, a_2, b_2, b_1) - g(a_1, a_2, b_1, b_2)}{2^{a_1+a_2-2} \cdot 3^{b_1+b_2-2}} = 6(a_1b_1 + a_2b_2 - a_1b_2 - a_2b_1).$$

В силу того, что  $a_1 \geq a_2$  и  $b_1 \geq b_2$ , получаем

$$a_1b_1 + a_2b_2 - a_1b_2 - a_2b_1 = (a_1 - a_2)(b_1 - b_2) \geq 0.$$

Откуда следует, что  $g(a_1, a_2, b_2, b_1) - g(a_1, a_2, b_1, b_2) \geq 0$ . □

Далее будем считать, что  $b_2 \geq b_1$ . Введем обозначения:

$$c_1 = a_1 - a_2, c_2 = b_2 - b_1.$$

**Лемма 2.3.7.** Выполнены следующие утверждения:

1. Если  $c_1 > \frac{2}{3}c_2 + 1$ , то  $g(a_1 - 1, a_2 + 1, b_1, b_2) > g(a_1, a_2, b_1, b_2)$ ,
2. Если  $c_1 < \frac{2}{3}c_2 - 1$ , то  $g(a_1 + 1, a_2 - 1, b_1, b_2) > g(a_1, a_2, b_1, b_2)$ ,
3. Если  $c_1 > \frac{2}{3}(c_2 + 1)$ , то  $g(a_1, a_2, b_1 - 1, b_2 + 1) > g(a_1, a_2, b_1, b_2)$ ,
4. Если  $c_1 < \frac{2}{3}(c_2 - 1)$ , то  $g(a_1, a_2, b_1 + 1, b_2 - 1) > g(a_1, a_2, b_1, b_2)$ .

*Доказательство.* Нетрудно проверить, что

$$\frac{g(a_1 - 1, a_2 + 1, b_1, b_2) - g(a_1, a_2, b_1, b_2)}{2^{a_1+a_2-2} \cdot 3^{b_1+b_2-2}} = 3(3(a_1 - a_2 - 1) - 2(b_2 - b_1)).$$

Очевидно, что

$$3(a_1 - a_2 - 1) - 2(b_2 - b_1) = 3(c_1 - 1) - 2c_2 > 0.$$

Пункты 2-4 доказываются аналогично. □

Пусть

$$x_k = (a_1 - k, a_2 + k, b_1, b_2), c_1(x_k) = (a_1 - k) - (a_2 + k).$$

Очевидно, что  $c_1(x_{k-1}) - 2 = c_1(x_k)$ . Тогда, если для  $x_0$  верно, что  $c_1(x_0) > \frac{2}{3}c_2 + 1$ , то по п.1 леммы 2.3.7 существует такое  $k$ , что  $\frac{2}{3}c_2 - 1 \leq c_1(x_k) \leq \frac{2}{3}c_2 + 1$  и  $g(x_k) > g(x_0)$ . В то же время, пусть

$$y_k = (a_1 + k, a_2 - k, b_1, b_2), c_1(y_k) = (a_1 + k) - (a_2 - k).$$

Очевидно, что  $c_1(y_{k-1}) + 2 = c_1(y_k)$ . Тогда, если для  $y_0$  верно, что  $c_1(y_0) < \frac{2}{3}c_2 - 1$ , то по п.2 леммы 2.3.7 существует такое  $k$ , что  $\frac{2}{3}c_2 - 1 \leq c_1(y_k) \leq \frac{2}{3}c_2 + 1$  и  $g(y_k) > g(y_0)$ .

Тем самым доказано, что для любого набора параметров  $x = (a_1, a_2, b_1, b_2)$ , такого что  $c_1 \notin [\frac{2}{3}c_2 - 1, \frac{2}{3}c_2 + 1]$  существует набор  $x' = (a'_1, a'_2, b'_1, b'_2)$ , такой что  $c'_1 \in [\frac{2}{3}c'_2 - 1, \frac{2}{3}c'_2 + 1]$  и  $g(x') > g(x)$ . То есть, для любого оптимального набора параметров  $(a_1, a_2, b_1, b_2)$  выполняется неравенство

$$\frac{2}{3}c_2 - 1 \leq c_1 \leq \frac{2}{3}c_2 + 1. \quad (2.3)$$

Аналогично, используя п.3–4 леммы 2.3.7 можно доказать, что для любого такого набора будет также выполняться неравенство

$$\frac{2}{3}(c_2 - 1) \leq c_1 \leq \frac{2}{3}(c_2 + 1). \quad (2.4)$$

Очевидно, что из (2.4) следует (2.3). По определению  $c_1$  и  $c_2$  неравенство (2.4) эквивалентно неравенству

$$3a_2 + 2b_2 - 2 \leq 3a_1 + 2b_1 \leq 3a_2 + 2b_2 + 2.$$

**Лемма 2.3.8.** Если функция  $g$  достигает максимума в точке  $(a_1, a_2, b_1, b_2)$ , то выполняется

$$|3a_1 + 2b_1 - (3a_2 + 2b_2)| \leq 2. \quad (2.5)$$

**Лемма 2.3.9.** Если  $n \geq c$ , то

$$a_1 + 3a_2 + 2b_1 + 2b_2 \geq \frac{2}{3}(c - 2).$$

*Доказательство.* Очевидно, что

$$3a_1 + 3a_2 + 2b_1 + 2b_2 = \frac{3}{2}(2a_1 + 2a_2) + \frac{2}{3}(3b_1 + 3b_2).$$

Поскольку  $n - 2 = 2a_1 + 2a_2 + 3b_1 + 3b_2$ , то получаем, что

$$\frac{3}{2}(2a_1 + 2a_2) + \frac{2}{3}(3b_1 + 3b_2) \geq \frac{2}{3}(n - 2) \geq \frac{2}{3}(c - 2).$$

□

**Лемма 2.3.10.** Если  $n \geq 122$ ,  $a_1 \geq 2$ ,  $a_2 \geq 1$  и выполняется (2.5), то

$$g(a_1 - 2, a_2 - 1, b_1 + 1, b_2 + 1) > g(a_1, a_2, b_1, b_2).$$

*Доказательство.* Нетрудно проверить, что

$$\begin{aligned} & \frac{g(a_1 - 2, a_2 - 1, b_1 + 1, b_2 + 1) - g(a_1, a_2, b_1, b_2)}{2^{a_1+a_2-5} \cdot 3^{b_1+b_2-2}} = \\ & = ((3a_1 + 2b_1 - 3) \cdot (3a_2 + 2b_2 - 30) - 252). \end{aligned}$$

По лемме 2.3.9 имеем

$$(3a_1 + 2b_1) + (3a_2 + 2b_2) \geq 80.$$

Тогда из неравенства (2.5) следует, что

$$(3a_1 + 2b_1) \geq 39, (3a_2 + 2b_2) \geq 38.$$

Таким образом, выполнено неравенство

$$(3a_1 + 2b_1 - 3) \cdot (3a_2 + 2b_2 - 30) \geq 280.$$

□

**Лемма 2.3.11.** Если  $n \geq 137$ ,  $a_1 \geq 3$  и выполняется (2.5), то

$$g(a_1 - 3, 0, b_1 + 1, b_2 + 1) > g(a_1, 0, b_1, b_2).$$

*Доказательство.* Нетрудно проверить, что

$$\frac{g(a_1 - 3, 0, b_1 + 1, b_2 + 1) - g(a_1, 0, b_1, b_2)}{2^{a_1-5} \cdot 3^{b_1+b_2-2}} = ((3a_1 + 2b_1 - 57) \cdot (2b_2 + 24) + 1044).$$

По лемме 2.3.9 имеем  $(3a_1 + 2b_1) + 2b_2 \geq 90$ . Тогда из неравенства (2.5) следует, что  $(3a_1 + 2b_1 - 57) \geq -14$ . Поэтому выполнено

$$((3a_1 + 2b_1 - 57) \cdot (2b_2 + 24) \geq -994.$$

□

### 2.3.3 Описание всех максимальных деревьев диаметра 5

**Случай  $n \geq 105$**

При  $n \geq 105$  верно следующее утверждение:

**Теорема 2.3.1.** Пусть  $n = 6k + (3l + m)$ , где  $l \in \{0, 1\}$ ,  $m \in \{0, 1, 2\}$ . Тогда, если  $n \geq 105$ , то максимальное  $n$ -вершинное дерево диаметра 5 единственно и имеет вид, представленный на рисунке 2.9, где

$$b_1 = k - 2 + m, b_2 = k + l,$$

$$a_2 = \begin{cases} 1, r = 0 \\ 0, r \neq 0 \end{cases}, a_1 = \frac{6k + r - 2(a_2 + 1) - 3(b_1 + b_2)}{2}, l_1 = l_2 = 0.$$

*Доказательство.* Предположим, что максимальное дерево диаметра 5 не содержит центральных листьев и  $a_1 \geq a_2$ . Тогда из лемм 2.3.10 и 2.3.11 следует, что  $(a_1, a_2) \in \{(0, 0), (1, 0), (1, 1), (2, 0)\}$  и поэтому  $c_1 \in \{0, 1, 2\}$ . Из неравенства (2.5) получаем, что если  $c_1 = 0$ , то  $c_2 \in \{0, 1\}$ , если  $c_1 = 1$ , то  $c_2 \in \{1, 2\}$ , если  $c_1 = 2$ , то  $c_2 \in \{2, 3, 4\}$ . Пусть  $n = 6k + r$ , где  $r \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ , тогда

$$2a_1 + 2a_2 + 3b_1 + 3b_2 = 6k + r - 2.$$

Если  $r = 0$ , то, в силу целочисленности параметров  $b_1$  и  $b_2$ , либо  $a_1 = a_2 = 1$ , тогда  $b_1 = b_2 = k - 1$ , либо  $a_1 = 2, a_2 = 0$ , тогда по лемме 2.3.6 либо  $b_1 = k - 2, b_2 = k$ , либо  $b_1 = k - 3, b_2 = k + 1$ . Несложно проверить, что

$$g(2, 0, k - 2, k) = g(2, 0, k - 3, k + 1) = 3^{2k-4} \cdot ((2k + 8) \cdot (2k + 6) + 36),$$

$$g(1, 1, k - 2, k) = 3^{2k-4} \cdot ((2k + 7)^2 + 36).$$

Очевидно, что

$$g(1, 1, k - 2, k) > g(2, 0, k - 2, k) = g(2, 0, k - 3, k + 1).$$

Если  $r = 1$ , то, в силу целочисленности параметров  $b_1$  и  $b_2$ , получим, что  $a_1 = 1, a_2 = 0$ , тогда по лемме 2.3.6 выполнено  $b_1 = k - 1, b_2 = k$ .

Если  $r = 2$ , то, в силу целочисленности параметров  $b_1$  и  $b_2$ , получим, что  $a_1 = a_2 = 0$ , тогда  $b_1 = b_2 = k$ . Если  $r = 3$ , то, в силу целочисленности параметров  $b_1$  и  $b_2$ , либо  $a_1 = a_2 = 1$ , тогда  $b_1 = b_2 = k - 1$ , либо  $a_1 = 2, a_2 = 0$ , тогда по лемме 2.3.6 выполнено  $b_1 = k - 2, b_2 = k + 1$ . Несложно проверить, что

$$g(2, 0, k - 2, k + 1) = 3^{2k-4} \cdot ((2k + 8)^2 + 36),$$

$$g(1, 1, k - 2, k) = 3^{2k-4} \cdot ((2k + 7) \cdot (2k + 9) + 36).$$

Откуда следует, что

$$g(2, 0, k - 2, k + 1) > g(1, 1, k - 2, k)$$

Если  $r = 4$ , то, в силу целочисленности параметров  $b_1$  и  $b_2$ , получим, что  $a_1 = 1, a_2 = 0$ , тогда по лемме 2.3.6 имеем  $b_1 = k - 1, b_2 = k + 1$ .

Если  $r = 5$ , то, в силу целочисленности параметров  $b_1$  и  $b_2$ , получим, что  $a_1 = a_2 = 0$ , тогда по лемме 2.3.6 имеем  $b_1 = k, b_2 = k + 1$ .

Из леммы 2.3.4 и доказанного выше следует результат теоремы для  $r \in \{0, 2, 4\}$ . В случае  $r \in \{1, 3, 5\}$  по лемме 2.3.4 максимальное дерево диаметра 5 может содержать единственный центральный лист, поэтому сравним соответствующие максимальные значения функций  $g$ . Напомним, что по лемме 2.3.5 выполнено

$$g(a_1, a_2) \leq 2^{\frac{n-15}{2}} \cdot (n^2 + 18n + 145).$$

Если  $r = 1$ , то по доказанному выше выполнено

$$g(1, 0, k - 1, k) = \frac{1}{2} \cdot 3^{\frac{n-16}{3}} \cdot (n^2 + 37n + 664).$$

Если  $r = 3$ , то по доказанному выше выполнено

$$g(2, 0, k - 2, k) = 3^{\frac{n-21}{3}} \cdot (n^2 + 36n + 621).$$

Если  $r = 5$ , то по доказанному выше выполнено

$$g(0, 0, k, k + 1) = \frac{1}{4} \cdot 3^{\frac{n-14}{3}} \cdot (n^2 + 32n + 521).$$

Нетрудно проверить, что уже при  $n \geq 127$  выполнено

$$g(a_1, a_2) < g(1, 0, k - 1, k) < g(2, 0, k - 2, k) < g(0, 0, k, k + 1).$$

Тем самым, теорема доказана для  $n \geq 137$ . Проведя компьютерные вычисления несложно убедиться, что теорема имеет место уже при  $n \geq 105$ .  $\square$

### Случай $n \leq 104$

При  $n \leq 5$  деревьев диаметра 5 не существует. С целью выявления максимальных деревьев диаметра 5 при  $6 \leq n \leq 104$  был проведен вычислительный эксперимент по поиску оптимальных целочисленных  $l_1, l_2, a_1, a_2, b_1$  и  $b_2$ , показавший, что центральный лист в максимальном дереве диаметра 5 может содержаться только при  $6 \leq n \leq 13$ , соответствующие значения параметров представлены в таблице 2.3.

При  $14 \leq n \leq 104$  центральных листьев в максимальных деревьях диаметра 5 не содержится, то есть  $l_1 = l_2 = 0$ . Соответствующие значения оптимальных параметров представлены в таблице 2.4.

$n$	$l_1$	$l_2$	$a_1$	$a_2$	$b_1$	$b_2$	$n$	$l_1$	$l_2$	$a_1$	$a_2$	$b_1$	$b_2$
6	0	0	1	1	0	0	10	0	0	2	2	0	0
7	1	0	1	1	0	0	11	1	0	1	3	0	0
8	0	0	2	1	0	0	12	0	0	3	2	0	0
9	1	0	1	2	0	0	13	1	0	2	3	0	0

Таблица 2.3: Значения параметров, соответствующие максимальным деревьям диаметра 5 при  $6 \leq n \leq 13$

$n$	$a_1$	$a_2$	$b_1$	$b_2$	$n$	$a_1$	$a_2$	$b_1$	$b_2$	$n$	$a_1$	$a_2$	$b_1$	$b_2$
14	3	3	0	0	45	10	10	1	0	76	12	1	0	16
15	3	2	0	1	46	11	11	0	0	77	11	1	1	16
16	4	3	0	0	47	11	10	0	1	78	11	0	1	17
17	3	3	1	0	48	12	11	0	0	79	12	1	0	17
18	4	4	0	0	49	11	11	1	0	80	12	0	0	18
19	4	3	0	1	50	12	12	0	0	81	11	0	1	18
20	5	4	0	0	51	12	11	0	1	82	9	1	4	16
21	4	4	1	0	52	11	11	1	1	83	9	0	4	17
22	5	5	0	0	53	11	10	1	2	84	11	0	2	18
23	5	4	0	1	54	12	11	0	2	85	10	0	3	18
24	6	5	0	0	55	12	10	0	3	86	9	0	4	18
25	5	5	1	0	56	12	9	0	4	87	7	1	7	16
26	6	6	0	0	57	11	9	1	4	88	7	0	7	17
27	6	5	0	1	58	11	8	1	5	89	9	0	5	18
28	7	6	0	0	59	12	9	0	5	90	8	0	6	18
29	6	6	1	0	60	12	8	0	6	91	7	0	7	18
30	7	7	0	0	61	12	7	0	7	92	5	1	10	16
31	7	6	0	1	62	11	7	1	7	93	5	0	10	17
32	8	7	0	0	63	11	6	1	8	94	7	0	8	18
33	7	7	1	0	64	12	7	0	8	95	6	0	9	18
34	8	8	0	0	65	12	6	0	9	96	5	0	10	18
35	8	7	0	1	66	12	5	0	10	97	3	1	13	16
36	9	8	0	0	67	11	5	1	10	98	3	0	13	17
37	8	8	1	0	68	11	4	1	11	99	5	0	11	18
38	9	9	0	0	69	12	5	0	11	100	4	0	12	18
39	9	8	0	1	70	12	4	0	12	101	3	0	13	18
40	10	9	0	0	71	12	3	0	13	102	1	1	16	16
41	9	9	1	0	72	11	3	1	13	103	1	0	16	17
42	10	10	0	0	73	11	2	1	14	104	3	0	14	18
43	10	9	0	1	74	12	3	0	14	105	2	0	15	18
44	11	10	0	0	75	12	2	0	15	106	1	0	16	18

Таблица 2.4: Значения параметров, соответствующие максимальным деревьям диаметра 5 при  $14 \leq n \leq 104$

## 2.4 О максимальных 5- или 6-листных деревьях

### 2.4.1 Стяжки деревьев с 5 или 6 листьями

Псевдограф  $G'$ , т.е. неориентированный граф, в котором допускаются петли и кратные ребра, называется *стяжкой* обыкновенного графа  $G$ , если  $G$  получается подразбиением ребер  $G'$  и  $G'$  содержит минимальное количество вершин. Ясно, что стяжка любого обыкновенного графа существует и единственна. Также понятно, что для каждого связного графа  $G$ , отличного от простого цикла, имеем

$$V(G') = \{v \in V(G) : \deg_G(v) \neq 2\}, \forall v \in V(G') [\deg_{G'}(v) = \deg_G(v)].$$

Нетрудно перебрать всевозможные стяжки деревьев с 5 или с 6 листьями. Они изображены на рисунках [2.10](#) и [2.11](#)

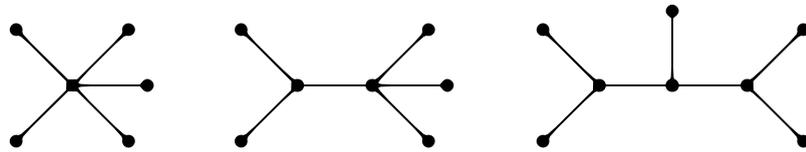


Рис. 2.10: Всевозможные стяжки деревьев с 5 листьями.

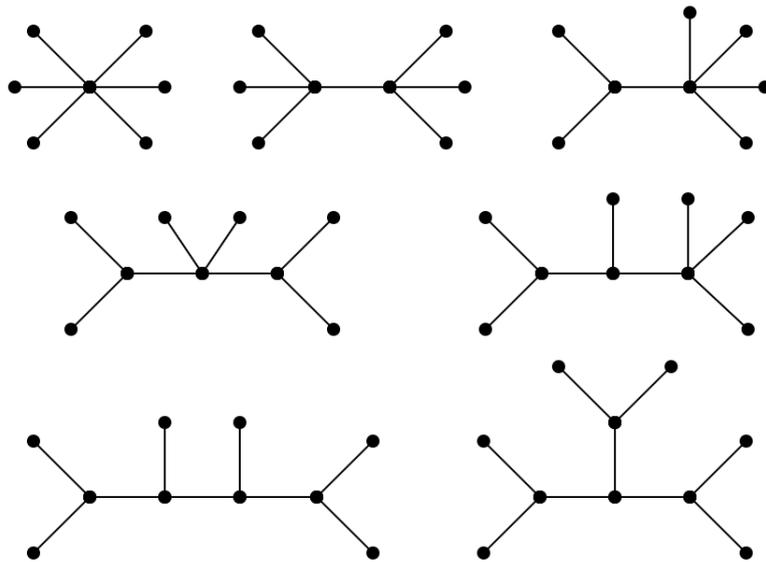


Рис. 2.11: Всевозможные стяжки деревьев с 6 листьями.

Тем самым, каждое дерево с 5 или с 6 листьями получается подразделениями некоторых ребер деревьев, изображенных на рисунках [2.10](#) и [2.11](#)

### 2.4.2 Формулировка основного результата второй части второй главы

Пусть  $a_i, b_j, c_k$  — натуральные числа, причем выполнено

$$\sum_{i=1}^7 a_i - 1 = \sum_{j=1}^9 b_j - 2 = \sum_{k=1}^9 c_k - 2 = n.$$

Через  $T_5(a_1, \dots, a_7)$ ,  $T_6^1(b_1, \dots, b_9)$  и  $T_6^2(c_1, \dots, c_9)$  обозначим деревья, изображенные на рисунках [2.12](#) и [2.13](#) соответственно.

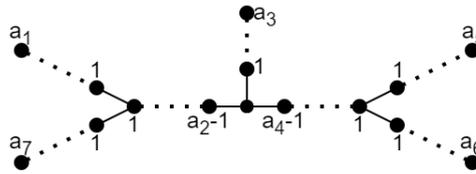


Рис. 2.12: Дерево  $T_5(a_1, \dots, a_7)$ .

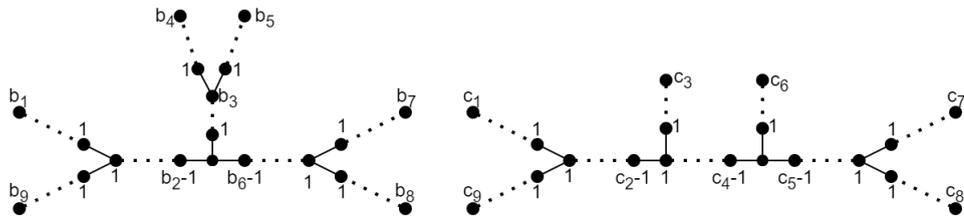


Рис. 2.13: Деревья  $T_6^1(b_1, \dots, b_9)$  и  $T_6^2(c_1, \dots, c_9)$ .

Справедливо следующее утверждение, которое является основным во второй части второй главы настоящей работы:

**Теорема 2.4.1.** Для любого  $n \geq 20$  множество максимальных 5-листных деревьев состоит из следующих трех деревьев:

$$T_5(n - 11, 2, \dots, 2), T_5(2, n - 11, 2, \dots, 2), T_5(2, 2, n - 11, 2, \dots, 2).$$

Для любого  $n \geq 26$  множество максимальных 6-листных деревьев образовано двумя деревьями  $T_6^1(n - 14, 2, \dots, 2)$  и  $T_6^1(2, n - 14, 2, \dots, 2)$ , а также следующими четырьмя деревьями:

$$T_6^2(n - 14, 2, \dots, 2), T_6^2(2, n - 14, 2, \dots, 2),$$

$$T_6^2(2, 2, n - 14, 2, \dots, 2), T_6^2(2, 2, 2, n - 14, 2, \dots, 2).$$

### 2.4.3 Преобразования графов, увеличивающие $z$ -индекс

Пусть  $k = p + q + 1 \geq 4$ , где  $p, q \geq 1$  — натуральные числа. Предположим, что графы  $G_1$  и  $G_2$  состоят из подграфа  $G_S$  и отделенного от него вершиной  $s_1$  порожденного подграфа  $P_k$  так, как показано на рисунке [2.14](#). Преобразование 2-7 переводит  $G_1$  в  $G_2$ .

Преобразование 2-7 было предложено в работе [\[40\]](#), где также было доказано следующее утверждение:

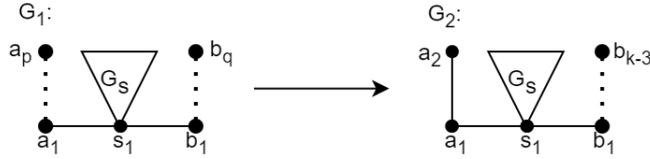


Рис. 2.14: Преобразование 2-7.

**Лемма 2.4.1.** Если  $p \neq 2, q \neq 2$  и  $\deg_{G_S}(s_1) \neq 0$ , то  $z(G_2) > z(G_1)$ .

Пусть  $k = t + p + q \geq 7$ , где  $t \geq 3$  и  $p, q \geq 1$  — натуральные числа. Преобразование 2-8 переводит граф  $G_1$  в граф  $G_2$ , где графы  $G_1$  и  $G_2$  состоят из подграфов  $G'_S$  и  $G''_S$ , где  $V(G'_S) \cap V(G''_S) = \emptyset$ , и отделенного от них вершинами  $s_1$  и  $s_2$  порожденного подграфа  $P_k$  так, как показано на рисунке [2.15](#).

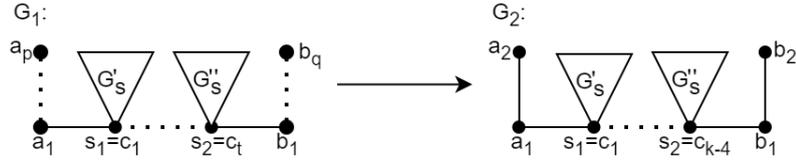


Рис. 2.15: Преобразование 2-8.

**Лемма 2.4.2.** Если  $p \neq 2, q \neq 2, \deg_{G'_S}(s_1) \neq 0, \deg_{G''_S}(s_2) \neq 0$ , то  $z(G_2) > z(G_1)$ .

*Доказательство.* Нетрудно проверить, что  $\Delta(\emptyset) = 0$ ,

$$\begin{aligned} \Delta(\{s_1\}) &= F_3 \cdot F_{k-2} - F_{p+1} \cdot F_{k-p} = 2F_{k-2} - F_k + F_p \cdot F_{k-p-1} = F_p \cdot F_{k-p-1} - F_{k-3} = \\ &= F_p \cdot F_{k-p-1} - (F_p \cdot F_{k-p-2} + F_{p-1} \cdot F_{k-p-3}) = (F_p - F_{p-1}) \cdot F_{k-p-3} \geq 0, \\ \Delta(\{s_2\}) &= F_3 \cdot F_{k-2} - F_{q+1} \cdot F_{k-q} = (F_q - F_{q-1}) \cdot F_{k-q-3} \geq 0, \\ \Delta(\{s_1, s_2\}) &= F_3 \cdot F_3 \cdot F_{k-5} - F_{q+1} \cdot F_{p+1} \cdot F_{t-1} = 4F_{k-5} - (F_{p+q+1} - F_p \cdot F_q) \cdot F_{t-1} = \\ &= 4F_{k-4} - F_{k-1} + F_p \cdot F_q \cdot F_{t-1} + F_{p+q} \cdot F_{t-2} = -F_{k-7} + F_p \cdot F_q \cdot F_{t-1} + F_{p+q} \cdot F_{t-2} = \\ &= F_{k-4} + F_{k-6} + F_p \cdot F_q \cdot F_{t-1} - F_{k-t-1} \cdot F_{t-3} = F_{k-4} + F_{k-6} + F_p \cdot F_q > 0 (t = 3) \vee \\ &\quad \vee 2F_{k-6} + F_p \cdot F_q \cdot F_{t-1} + F_{k-t-2} \cdot F_{t-4} > 0 (t \geq 4). \end{aligned}$$

Если  $\Delta(\{s_1\}) = \Delta(\{s_2\}) = 0$ , то  $p = q = 2$ , что невозможно по условию леммы. Т.к.  $\deg_{G'_S}(s_1) \neq 0, \deg_{G''_S}(s_2) \neq 0$ , то

$$z(G'_S, \{s_1\}, \emptyset) \neq 0, z(G''_S, \{s_2\}, \emptyset) \neq 0.$$

Поэтому либо  $\Delta(\{s_1\}) > 0$ , либо  $\Delta(\{s_2\}) > 0$ , что по следствию [1.2.1](#) означает, что  $z(G_2) > z(G_1)$ .  $\square$

Пусть  $k = p + q + 2 \geq 5$ , где  $p$  и  $q$  — натуральные числа. Преобразование 2-9 переводит граф  $G_1$  в граф  $G_2$ , где графы  $G_1$  и  $G_2$  состоят из подграфов  $G'_S$  и  $G''_S$ , где  $V(G'_S) \cap V(G''_S) = \emptyset$ , и отделенного от них вершинами  $s_1$  и  $s_2$  порожденного подграфа  $P_k$  так, как показано на рисунке [2.16](#).

Будем предполагать, что  $\deg_{G'_S}(s_1) \neq 0, \deg_{G''_S}(s_2) \neq 0$ . Если

$$z(G'_S, \{s_1\}, \emptyset) \cdot z(G''_S, \emptyset, \{s_2\}) > z(G'_S, \emptyset, \{s_1\}) \cdot z(G''_S, \{s_2\}, \emptyset),$$

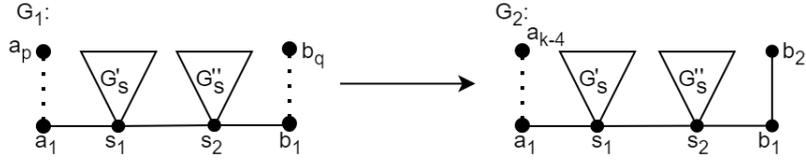


Рис. 2.16: Преобразование 2-9.

то включим в преобразование 2-9 еще и перестановку местами подграфов  $G'_S$  и  $G''_S$ . Поэтому далее будем считать, что

$$z(G'_S, \emptyset, \{s_1\}) \cdot z(G''_S, \{s_2\}, \emptyset) \geq z(G'_S, \{s_1\}, \emptyset) \cdot z(G''_S, \emptyset, \{s_2\}) > 0.$$

**Лемма 2.4.3.** Если  $p \notin \{1, 2\}, q \neq 2$ , то  $z(G') > z(G)$ .

*Доказательство.* Очевидно, что  $\Delta(\emptyset) = 0$ ,

$$\begin{aligned} \Delta(\{s_1\}) &= 3F_{p+q-1} - F_{p+1} \cdot F_{q+2} = 3F_{p+q-1} - F_{p+q+2} + F_p \cdot F_{q+1} = F_p \cdot F_{q+1} - 2F_{p+q-2} = \\ &= -F_{p-3} \quad (q = 1) \vee F_p \cdot F_{q+1} - 2(F_p \cdot F_{q-1} + F_{p-1} \cdot F_{q-2}) = -F_{p-3} \cdot F_{q-2} \quad (q \geq 3), \end{aligned}$$

$$\Delta(\{s_2\}) = 2F_{p+q} - F_{p+2} \cdot F_{q+1} = 2(F_p \cdot F_{q+1} + F_{p-1} \cdot F_q) - F_{p+2} \cdot F_{q+1} = F_{p-1} \cdot (F_q - F_{q-1}),$$

$$\Delta(\{s_1, s_2\}) = 2F_{(p-1)+q} - F_{p+1}F_{q+1} = F_{p-2} > 0 \quad (q = 1) \vee F_{p-2} \cdot F_{q-2} > 0 \quad (q \geq 3).$$

Заметим, что

$$\Delta(\{s_1\}) + \Delta(\{s_2\}) = F_{p-2} > 0 \quad (q = 1) \vee F_{p-2} \cdot F_{q-2} > 0 \quad (q \geq 3).$$

Тогда из леммы [1.2.1](#) следует, что

$$z(G_2) - z(G_1) \geq F_{p-2} \cdot F_{q-2} \cdot z(G'_S, \{s_1\}, \emptyset) \cdot z(G''_S, \emptyset, \{s_2\}) > 0.$$

□

Пусть  $q, p, d, t \geq 1$  — натуральные числа и граф  $G_1$  состоит из подграфов  $G'_S, G''_S, G'''_S$  и отделенного от них вершинами  $s_1, s_2$  и  $s_3$  подграфа  $H$  так, как показано на рисунке [2.17](#). Преобразование 2-10 переводит граф  $G_1$  в граф  $G_2$ , удаляя ребро  $b_1s_3$  и добавляя ребро  $b_1a_1$  (см. рисунок [2.17](#)). При этом подграф  $H$  переходит в подграф  $H'$ . Будем предполагать, что  $q \geq 2$ , если  $\deg_{G'_S}(s_1) \neq 0$ .

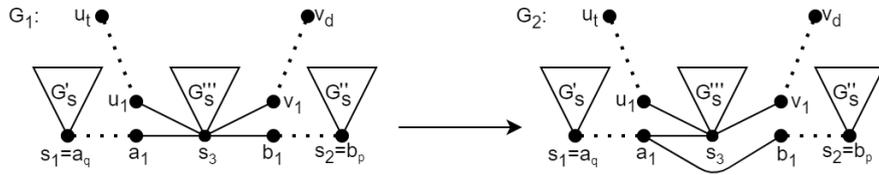


Рис. 2.17: Преобразование 2-10.

**Лемма 2.4.4.** Выполнено неравенство  $z(G_2) \geq z(G_1)$ , причем равенство достигается тогда и только тогда, когда  $q = t = d = 2, G'_S \cong G'''_S \cong P_1$ .

*Доказательство.* Выполнив разложение  $z$ -индексов подграфов  $H$  и  $H'$  по ребру  $s_3a_1$ , получим что

$$\begin{aligned} z(H) &= F_{q+1} \cdot (F_{p+d+t+2} - F_p \cdot F_d \cdot F_t) + F_q \cdot F_{p+1} \cdot F_{d+1} \cdot F_{t+1}, \\ z(H') &= F_{q+p+1} \cdot F_{d+t+2} + F_q \cdot F_{p+1} \cdot F_{d+1} \cdot F_{t+1}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\Delta(\emptyset) = F_p \cdot F_q \cdot (F_{t+d} + F_t \cdot F_d) - F_p \cdot F_{q-1} \cdot (F_{t+d} + F_{t-1} \cdot F_{d-1}) \geq 0.$$

Откуда очевидно следует

$$\begin{aligned} \Delta(\{s_1\}) &= F_p \cdot F_{q-1} \cdot (F_{t+d} + F_t \cdot F_d) - F_p \cdot F_{q-2} \cdot (F_{t+d} + F_{t-1} \cdot F_{d-1}) \geq 0, \\ \Delta(\{s_2\}) &= F_{p-1} \cdot F_q \cdot (F_{t+d} + F_t \cdot F_d) - F_{p-1} \cdot F_{q-1} \cdot (F_{t+d} + F_{t-1} \cdot F_{d-1}) \geq 0, \\ \Delta(\{s_1, s_2\}) &= F_{p-1} \cdot F_{q-1} \cdot (F_{t+d} + F_t \cdot F_d) - F_{p-1} \cdot F_{q-2} \cdot (F_{t+d} + F_{t-1} \cdot F_{d-1}) \geq 0. \end{aligned}$$

Несложно проверить, что

$$\Delta(\emptyset) = 0 \iff q = t = d = 2, \Delta(\{s_1\})|_{q=t=d=2} = 4F_p, \Delta(\{s_2\})|_{q=t=d=2} = 0.$$

Имеем

$$\Delta(\{s_3\}) = F_{p+q+1} \cdot F_{t+1} \cdot F_{d+1} - F_{p+1} \cdot F_{q+1} \cdot F_{t+1} \cdot F_{d+1}.$$

Откуда получим

$$\begin{aligned} \Delta(\{s_3\}) &= F_p \cdot F_q \cdot F_{t+1} \cdot F_{d+1} > 0, \Delta(\{s_1, s_3\}) = F_p \cdot F_{q-1} \cdot F_{t+1} \cdot F_{d+1} > 0, \\ \Delta(\{s_2, s_3\}) &= F_{p-1} \cdot F_q \cdot F_{t+1} \cdot F_{d+1} \geq 0, \Delta(\{s_1, s_2, s_3\}) = F_{p-1} \cdot F_{q-1} \cdot F_{t+1} \cdot F_{d+1} \geq 0. \end{aligned}$$

Из наших рассуждений и леммы [1.2.1](#) следует справедливость данной леммы.  $\square$

#### 2.4.4 Доказательство теоремы [2.4.1](#)

Для доказательства теоремы [2.4.1](#) нам понадобится следующее утверждение:

**Лемма 2.4.5.** Для любого  $n \geq 20$  среди  $n$ -вершинных деревьев вида  $T_5(a_1, \dots, a_7)$  наибольшее значение индекса Хосойи достигается при значениях параметров

$$\exists i^* \in \{1, 2, 3\}, a_{i^*} = n - 11, \forall i \neq i^* a_i = 2.$$

Для любого  $n \geq 26$  наибольшие значения индекса Хосойи среди  $n$ -вершинных деревьев вида  $T_6^1(b_1, \dots, b_9)$  и  $T_6^2(c_1, \dots, c_9)$  одинаковы и достигаются при значениях параметров

$$\exists j^* \in \{1, 2\}, \exists k^* \in \{1, 2, 3, 4\}, b_{j^*} = c_{k^*} = n - 14, \forall j \neq j^*, \forall k \neq k^* b_j = c_k = 2.$$

*Доказательство.* Рассмотрим деревья вида  $T_5(a_1, \dots, a_7)$ . В ходе вычислительного эксперимента было установлено, что для  $n = 20$  и  $n = 21$  утверждение первого пункта настоящей леммы выполняется. Это является базой индукции. Пусть  $n \geq 22$ , тогда для любого набора  $(a_1, \dots, a_7)$  существует такое  $i^*$ , что  $a_{i^*} \geq 4$ . По следствию [1.2.2](#) выполнено

$$z(T_5(a_1, \dots, a_{i^*}, \dots, a_7)) = z(T_5(a_1, \dots, a_{i^*} - 1, \dots, a_7)) + z(T_5(a_1, \dots, a_{i^*} - 2, \dots, a_7)),$$

откуда следует индукционный переход.

Второй пункт доказывается аналогично. Действительно, посредством компьютерных вычислений можно убедиться, что для  $n = 26$  и  $n = 27$  данное утверждение выполняется, а ограничение  $n \geq 28$  гарантирует, что для любых наборов  $(b_1, \dots, b_9)$  и  $(c_1, \dots, c_9)$  существуют такие  $j^*, k^*$ , что  $b_{j^*}, c_{k^*} \geq 4$ .  $\square$

Вернемся к доказательству теоремы [2.4.1](#). Рассмотрим стяжки, изображенные на рисунке [2.10](#) и предположим, что  $n \geq 20$ . В случае первой стяжки к соответствующему дереву всегда можно применить преобразование 2-10. После настройки параметров преобразованиями 2-7, 2-8 и 2-9, преобразование 2-10 всегда можно применить к дереву со второй стяжкой и оно увеличивает  $z$ -индекс. Третья стяжка является стяжкой дерева  $T_5(a_1, \dots, a_7)$ , оптимальные параметры которого найдены в лемме [2.4.5](#). Тем самым, доказан первый пункт теоремы [2.4.1](#).

Рассмотрим стяжки, изображенные на рисунке [2.11](#). Предположим, что  $n \geq 26$ . Стяжки, изображенные в первой строке, не могут быть стяжками никакого максимального 6-листного дерева, т.к. после настройки параметров преобразованиями 2-7, 2-8 и 2-9 к ним всегда можно применить преобразование 2-10, увеличивающее  $z$ -индекс. В случае первой стяжки из второй строки либо преобразование 2-10 нельзя применить (только если вершина степени 4 смежна с обеими вершинами степени 3), либо оно увеличивает  $z$ -индекс. Рассмотрим вторую стяжку из второй строки. К соответствующему дереву нельзя применить преобразование 2-10 только если его вершина степени 4 одновременно смежна с тремя листьями и с вершиной степени 3. Если же возможно применить преобразование 2-10 и оно не является увеличивающим, то достигается равенство  $z$ -индекса с первым графом из третьей строки, причем по лемме [2.4.5](#) такой граф имеет не оптимальные параметры.

Из наших рассуждений и преобразований 2-7–2-9 следует, что каждое максимальное 6-листное дерево имеет вид либо деревьев  $T_6^1(b_1, \dots, b_9)$  и  $T_6^2(c_1, \dots, c_9)$  с параметрами из леммы [2.4.5](#), либо деревьев  $A, B, C, D, E$ , см. рисунок [2.18](#), причем подразбиваться могут только отмеченные ребра.

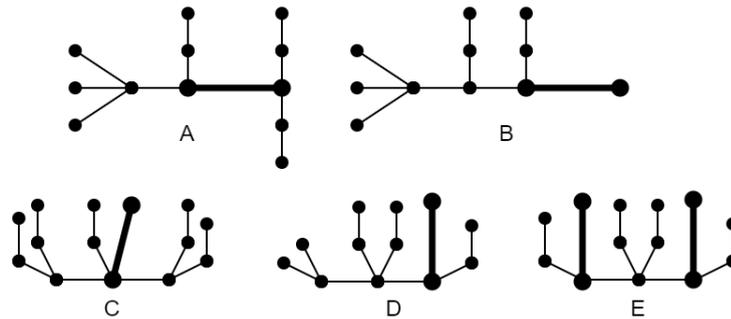


Рис. 2.18: Деревья типов A–E.

Через  $T_n$  переобозначим дерево  $T_6^1(n - 14, 2, \dots, 2)$ . Для каждого  $X \in \{A, B, C, D, T\}$  через  $X_n$  обозначим граф типа  $X$  с  $n$  вершинами, если такой граф существует. Для любого  $n \geq 26$  выполнено

$$z(X_{n+2}) = z(X_{n+1}) + z(X_n)$$

по следствию [1.2.2](#). Можно проверить, что

$$z(A_{26}) = 121016, z(A_{27}) = 195808; z(B_{26}) = 120262, z(B_{27}) = 194588;$$

$$z(C_{26}) = 150464, z(C_{27}) = 243456; z(D_{26}) = 140756, z(D_{27}) = 227748;$$

$$z(T_{26}) = 156160, z(T_{27}) = 252672.$$

Поэтому выполнено

$$\text{Arg max}_{n \geq 26} \{z(A_n), z(B_n), z(C_n), z(D_n), z(T_n)\} = \{T_n\}.$$

Пусть  $p \geq q$  — неотрицательные целые числа, причем  $p + q = n - 13$ . Через  $E_{n,p}$  обозначим дерево типа  $E$ , получающееся  $p$ - и  $q$ -подразбиениями соответствующих ребер. Тогда для  $n \geq 26$  выполнено

$$z(E_{n+2,p+2}) = z(E_{n+1,p+1}) + z(E_{n,p}).$$

Можно убедиться, что для любого  $p$  выполнено

$$z(E_{26,p}) \leq 151888 < z(T_{26}) = 156160, z(E_{27,p+1}) \leq 245760 < z(T_{27}) = 252672.$$

Поэтому  $z(E_{n,p}) < z(T_n)$  для любых  $n \geq 26$  и  $n - 13 \geq p \geq 0$ . Теорема 2.4.1 доказана.

## Глава 3

# О максимальных $(n, n + 2)$ -графах

В третьей главе приводится новое, более короткое и комбинаторное, доказательство ранее известного результата (см. работу [30]) о полном описании максимальных  $(n, n + 2)$ -графов при всех  $n \geq 17$ . Оно опубликовано в работе [4].

### 3.1 Стяжки $(n, n + 2)$ -графов

Напомним, что псевдограф  $G'$  называется *стяжкой* обыкновенного графа  $G$ , если  $G$  получается подразбиениями ребер  $G'$  и  $G'$  содержит минимальное количество вершин. Ясно, что стяжка любого обыкновенного графа существует и единственна. Также понятно, что для каждого связного графа  $G$ , отличного от простого цикла, имеем

$$V(G') = \{v \in V(G) : \deg_G(v) \neq 2\}, \forall v \in V(G') [\deg_{G'}(v) = \deg_G(v)].$$

Понятие стяжки оказывается полезным для описания всех  $(n, m)$ -графов без висячих вершин при небольших значениях  $m - n$ . Действительно, если  $(d_1, \dots, d_n)$  — степенная последовательность  $(n, m)$ -графа без висячих вершин, где  $d_1 \leq \dots \leq d_n$ , то  $d_1 \geq 2$  и  $d_1 + \dots + d_n = 2m$ . При небольших значениях  $m - n$  нетрудно перечислить все соответствующие степенные последовательности. В частности, если  $m = n + 2$ , то такими последовательностями будут только такие последовательности

$$(2, \dots, 2, 6), (2, \dots, 2, 3, 5), (2, \dots, 2, 4, 4), \\ (2, \dots, 2, 3, 3, 4), (2, \dots, 2, 3, 3, 3, 3).$$

Это дает возможность полностью перечислить все стяжки  $(n, n + 2)$ -графов без висячих вершин (см. рисунок [3.1]).

Далее будет показано, что при любых  $m \geq n$  каждый максимальный  $(n, m)$ -граф не содержит висячих вершин, а также будут сформулированы и обоснованы некоторые другие свойства максимальных  $(n, m)$ -графов. Это, в частности, позволит выявить стяжки именно максимальных  $(n, n + 2)$ -графов и настроить параметры (т.е. количества подразбиений ребер) в них.

### 3.2 Преобразования порожденных путей и циклов

Пусть  $G$  — граф, в котором имеется простой путь  $(v_1, \dots, v_a)$ , где

$$\deg_G(v_a) \geq 3, \deg_G(v_{a-1}) = \dots = \deg_G(v_2) = 2, \deg_G(v_1) = 1.$$

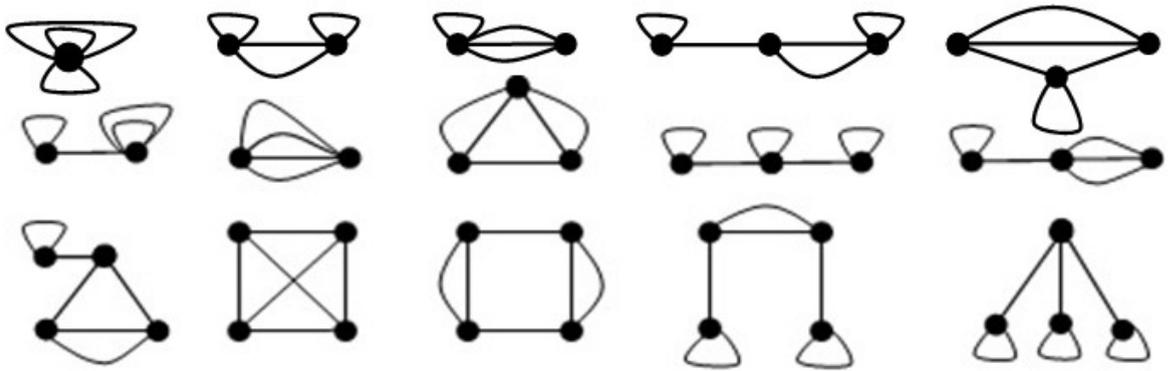


Рис. 3.1: Всевозможные стяжки  $(n, n + 2)$ -графов без висячих вершин

Преобразование 3-1 переводит  $G$  в граф  $G'$ , удаляя ребро  $v_a u$ , где  $u$  — произвольный элемент множества  $N_G(v_a) \setminus \{v_{a-1}\}$ , и добавляя ребро  $uv_1$  (см. рисунок 3.2).

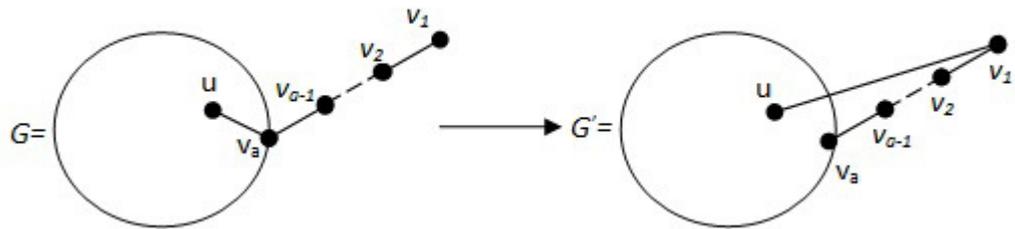


Рис. 3.2: Преобразование 3-1

**Лемма 3.2.1.** *Справедливо неравенство  $z(G') > z(G)$ .*

*Доказательство.* Для доказательства этого утверждения воспользуемся следствием 1.2.1 и его обозначениями. Положим

$$G^1 = G, G^2 = G', S = \{v_a, u\}, H_i = G^i[\{u, v_1, \dots, v_a\}], i = 1, 2.$$

Графы  $G_S^1$  и  $G_S^2$  изоморфны. Очевидно, что для любого  $S' \subseteq S$ , кроме  $S' = \{v_a\}$ , выполнено  $\Delta(S') = 0$ . Очевидно также, что

$$\Delta(\{v_a\}) = F_{a+1} - F_a = F_{a-1} > 0.$$

В условиях леммы очевидно, что  $z(G_S^1, \{v_a\}, \{u\}) \neq 0$ . Тем самым, по следствию 1.2.1 выполнено неравенство  $z(G') > z(G)$ .  $\square$

Если в некотором максимальном  $(n, m)$ -графе, где  $m \geq n$ , имеется лист, то в нем существует порожденный путь от данного листа до некоторой вершины степени не менее чем 3, в котором все внутренние вершины имеют степень 2. Тем самым, из леммы 3.2.1 следует, что если  $m \geq n$ , то каждый максимальный  $(n, m)$ -граф не содержит висячих вершин.

Предположим, что в некотором графе  $G$  имеется порожденный цикл  $(v_1, \dots, v_a)$ , в котором все вершины, кроме  $v_1$ , имеют степень 2,  $\deg_G(v_1) \geq 4$ ,  $u \in N_G(v_1) \setminus \{v_2, v_a\}$ . Преобразование 3-2 переводит  $G$  в граф  $G'$ , удаляя ребро  $uv_1$  и добавляя ребро  $uv_2$  (см. рисунок 3.3).

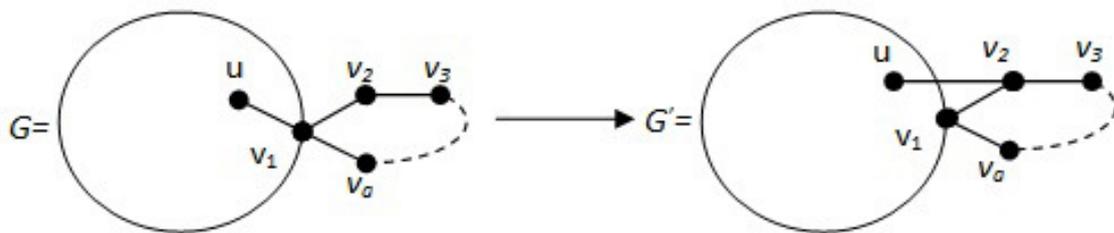


Рис. 3.3: Преобразование 3-2.

**Лемма 3.2.2.** *Справедливо неравенство  $z(G') > z(G)$ .*

*Доказательство.* Для доказательства этой леммы воспользуемся следствием 1.2.1 и его обозначениями.

Положим

$$G^1 = G, G^2 = G', S = \{v_1, u\}, H_i = G^i[\{u, v_1, \dots, v_a\}], i = 1, 2.$$

Графы  $G_S^1$  и  $G_S^2$  изоморфны. Очевидно, что для любого  $S' \subseteq S$ , кроме  $S' = \{v_1\}$ , выполнено  $\Delta(S') = 0$ .

Очевидно также, что

$$\Delta(\{v_1\}) = F_{a+1} - F_a = F_{a-1} > 0.$$

В условиях леммы очевидно, что  $z(G_S^1, \{v_1\}, S \setminus \{v_1\}) \neq 0$ . Поэтому по следствию 1.2.1 выполнено неравенство  $z(G') > z(G)$ .  $\square$

Пусть  $a \geq 3, b \geq 1$  и  $G$  — произвольный граф, в котором имеется порожденный цикл  $(v_1, \dots, v_{a+b})$ , причем все его вершины, кроме  $v_1$  и  $v_a$ , имеют в  $G$  степень 2. Преобразование 3-3 переводит  $G$  в граф  $G'$ , удаляя все ребра  $v_1u$ , где  $u \in N_G(v_1) \setminus \{v_2, v_{a+b}\}$ , и добавляя ребра  $v_{a-1}u$ , где  $u \in N_G(v_1) \setminus \{v_2, v_{a+b}\}$ , а также меняя местами имена вершин  $v_1$  и  $v_{a-1}$  (см. рисунок 3.4).

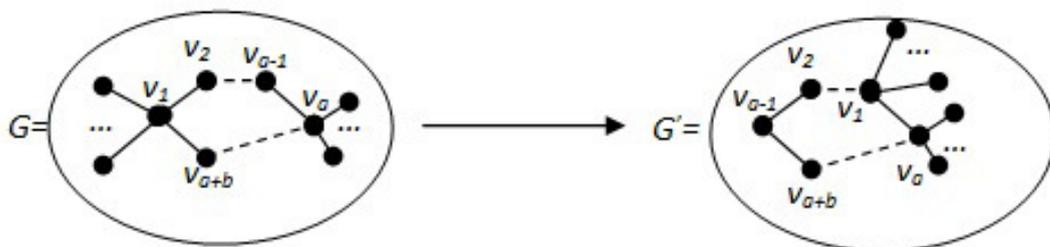


Рис. 3.4: Преобразование 3-3.

Для формулировки следующей леммы воспользуемся обозначениями следствия 1.2.1. Положим

$$G^1 = G, G^2 = G', S = \{v_1, v_a\}, H_i = G^i[\{v_1, \dots, v_{a+b}\}], i = 1, 2.$$

**Лемма 3.2.3.** *Выполнено неравенство  $z(G') \geq z(G)$ , причем равенство достигается только при  $z(G_S^1, S, \emptyset) = 0$ .*

*Доказательство.* Графы  $G_S^1$  и  $G_S^2$  изоморфны. Очевидно, что для любого  $S' \subset S$  выполнено  $\Delta(S') = 0$ .

Очевидно также, что

$$z(H_1 \setminus S) = F_{a-1} \cdot F_{b+1}, z(H_2 \setminus S) = F_{a+b-1}.$$

Т.к. выполнено

$$F_{a+b-1} = F_{a-1} \cdot F_{b+1} + F_{a-2} \cdot F_b,$$

то по лемме [1.2.1](#) имеем

$$z(G') - z(G) = F_{a-2} \cdot F_b \cdot z(G_S^1, S, \emptyset).$$

Данная лемма доказана. □

Пусть  $a \geq 2, b \geq 2$  и пусть  $G$  — произвольный граф, в котором имеется порожденный цикл  $(v_1, \dots, v_{a+b+1})$ , причем все его вершины, кроме  $v_1, v_2, v_{a+2}$ , имеют в  $G$  степень 2. Преобразование 3-4 переводит граф  $G$  в граф  $G'$ , удаляя все ребра  $v_{a+2}u$ , где  $u \in N_G(v_{a+2}) \setminus \{v_{a+1}, v_{a+3}\}$ , добавляя все ребра  $v_3u$ , где  $u \in N_G(v_{a+2}) \setminus \{v_{a+1}, v_{a+3}\}$ , а также меняя местами имена вершин  $v_3$  и  $v_{a+2}$  (см. рисунок [3.5](#)).

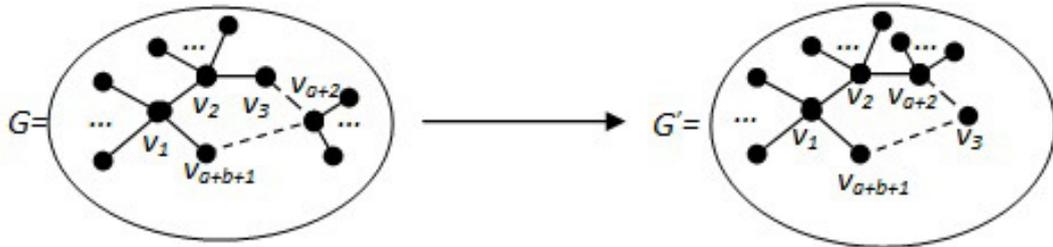


Рис. 3.5: Преобразование 3-4

Для формулировки следующей леммы воспользуемся обозначениями следствия [1.2.1](#). Положим

$$G^1 = G, G^2 = G', S = \{v_1, v_2, v_{a+2}\}, H_i = G^i[\{v_1, \dots, v_{a+b+1}\}], i = 1, 2.$$

Из соображений симметрии можно считать, что

$$z(G_S^1, \{v_2, v_{a+2}\}, S \setminus \{v_2, v_{a+2}\}) \geq z(G_S^1, \{v_1, v_{a+2}\}, S \setminus \{v_1, v_{a+2}\}),$$

т.к. иначе можно поменять местами имена вершин  $v_1$  и  $v_2$ . Используя лемму [1.2.1](#) по аналогии с доказательством леммы [3.2.3](#) нетрудно установить справедливость следующего утверждения:

**Лемма 3.2.4.** *Выполнено неравенство  $z(G') \geq z(G)$ , причем равенство достигается, только если*

$$z(G_S^1, \{v_2, v_{a+2}\}, S \setminus \{v_2, v_{a+2}\}) = 0.$$

### 3.3 Преобразование порожденных подграфов $H_{a,b,c}$

Граф  $H_{a,b,c}$ , где  $a \geq 3, b \geq 3, c \geq 2$ , изображен на рисунке [3.6](#), где пунктирными линиями изображены порожденные пути соответствующей длины.

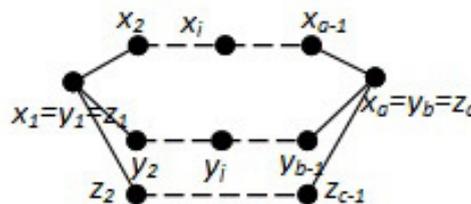


Рис. 3.6: Граф  $H_{a,b,c}$

Напомним, что обозначение  $Arg \max_{x \in D} f(x)$  означает множество тех точек области  $D$ , на которых функция  $f(x)$  в этой области принимает максимальное значение.

**Лемма 3.3.1.** *Справедливы следующие утверждения:*

1.  $Arg \max_{\{i,j:x_i \neq y_j\}} z(H_{a,b,c} \setminus \{x_i, y_j\}) = \{(2, b-1), (a-1, 2)\},$
2.  $Arg \max_i z(H_{a,b,c} \setminus \{x_i\}) = \{2, a-1\}.$

*Доказательство.* Докажем утверждение (1). Очевидно, что при удалении  $x_i$  и  $y_j$  образуется лес. По лемме 3.2.1 все компоненты связности данного леса должны быть путями. Воспользовавшись разложением индекса Хосойи пути по соответствующему ребру (возможно, несколько раз), нетрудно заключить, что компонента должна быть единственной. Следовательно,  $H_{a,b,c} \setminus \{x_i, y_j\}$  должен быть простым путем, т.е.

$$Arg \max_{\{i,j:x_i \neq y_j\}} z(H_{a,b,c} \setminus \{x_i, y_j\}) = \{(2, b-1), (a-1, 2)\}.$$

Докажем утверждение (2). Из соображений симметрии считаем, что удаляется  $x_i$ . Можно считать, что  $i \notin \{1, a\}$ , т.к. иначе  $H_{a,b,c} \setminus \{x_i\}$  — дерево и

$$z(H_{a,b,c} \setminus \{x_i\}) < z(P_{a+b+c-5}) < z(H_{a,b,c} \setminus \{x_2\}),$$

в чем можно убедиться разложением  $z(H_{a,b,c} \setminus \{x_2\})$  по ребру  $x_{a-1}x_a$ . Проверим, что если  $i \notin \{2, a-1\}$ , то

$$z(H_{a,b,c} \setminus \{x_i\}) < z(H_{a,b,c} \setminus \{x_2\}) = z(H_{a,b,c} \setminus \{x_{a-1}\}).$$

Можно считать, что  $|i-2| \leq |i-(a-1)|$ . Разложим  $z(H_{a,b,c} \setminus \{x_i\})$  по ребру  $x_1x_2$  и  $z(H_{a,b,c} \setminus \{x_2\})$  по ребру  $x_i x_{i+1}$

$$\begin{aligned} z(H_{a,b,c} \setminus \{x_i\}) &= z(H_{a,b,c} \setminus \{x_2, \dots, x_i\}) \cdot z(P_{i-2}) + \\ &\quad + z(H_{a,b,c} \setminus \{x_1, \dots, x_i\}) \cdot z(P_{i-3}), \\ z(H_{a,b,c} \setminus \{x_2\}) &= z(H_{a,b,c} \setminus \{x_2, \dots, x_i\}) \cdot z(P_{i-2}) + \\ &\quad + z(H_{a,b,c} \setminus \{x_2, \dots, x_{i+1}\}) \cdot z(P_{i-3}). \end{aligned}$$

Граф  $H_{a,b,c} \setminus \{x_1, \dots, x_i\}$  является деревом и поэтому

$$z(H_{a,b,c} \setminus \{x_1, \dots, x_i\}) < z(P_{a+b+c-i-4}).$$

Разложив  $z(H_{a,b,c} \setminus \{x_2, \dots, x_{i+1}\})$  по ребру  $y_{b-1}y_b$  получаем, что

$$z(H_{a,b,c} \setminus \{x_2, \dots, x_{i+1}\}) > z(P_{a+b+c-i-4}).$$

Значит,  $z(H_{a,b,c} \setminus \{x_2\}) > z(H_{a,b,c} \setminus \{x_i\})$ . Тем самым,

$$Arg \max_i z(H_{a,b,c} \setminus \{x_i\}) = \{2, a-1\}.$$

□

Предположим, что в некотором графе  $G$  имеется порожденный подграф  $H_{a,b,c}$  и что  $A = N_G(x_i) \setminus V(H_{a,b,c}) \neq \emptyset$ . Предположим также, что в  $V(H_{a,b,c}) \setminus \{x_i\}$  имеется не более одной вершины, имеющей соседей вне  $V(H_{a,b,c})$ , и, если такая вершина существует, то это вершина  $y_j \neq x_i$ . Положим  $B = N_G(y_j) \setminus V(H_{a,b,c})$ . Предположим также, что  $i \notin \{2, a-1\}$ , если  $y_j$  не существует, и что  $(i, j) \notin \{(2, b-1), (a-1, 2)\}$ , когда  $j$  существует.

Преобразование 3-5 переводит  $G$  в граф  $G'$ , удаляя все ребра  $x_i v, v \in A$  и проводя все ребра  $x_2 v, v \in A$ , а также, если  $y_j$  существует, то удаляя все ребра  $y_j v, v \in B$ , проводя все ребра  $y_{b-1} v, v \in B$  и меняя местами имена вершин  $x_i$  и  $x_2$ ,  $y_j$  и  $y_{b-1}$  (см. рисунок 3.7).

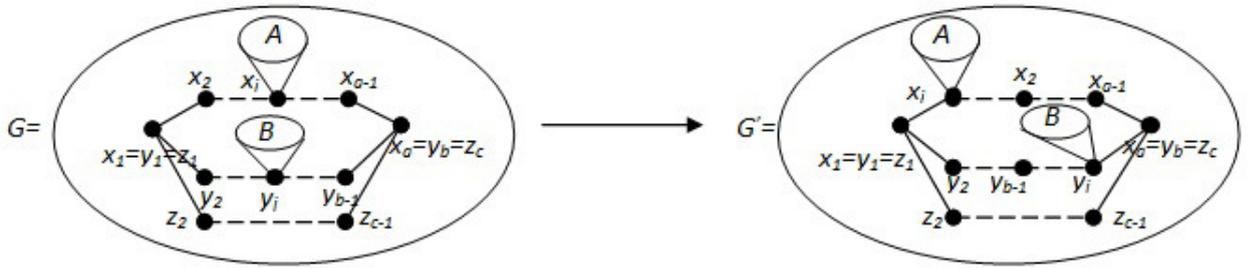


Рис. 3.7: Преобразование 3-5

**Лемма 3.3.2.** *Выполнено неравенство  $z(G') > z(G)$ .*

*Доказательство.* Будем рассматривать более общий случай существования вершины  $y_j$ , доказательство для первого случая выполняется по аналогии. Из соображений симметрии можно считать, что  $i \notin \{2, a-1\}$ . Для доказательства этой леммы воспользуемся следствием 1.2.1 и его обозначениями. Положим,  $H_1 = H_2 = H_{a,b,c}$ . Множество  $S = \{x_i, y_j\}$  является  $H_1$ - и  $H_2$ -отделяющим в графах  $G^1 = G$  и  $G^2 = G'$ , причем  $G_S^1$  и  $G_S^2$  изоморфны. Нетрудно видеть, что для любого  $S' \in \{\{x_i\}, \{y_j\}\}$  выполнено  $z(G_S^1, S', S \setminus S') \neq 0$ . Отсюда, в силу следствия 1.2.1 и леммы 3.3.1, выполнено неравенство  $z(G') > z(G)$ .  $\square$

### 3.4 Преобразование висячих циклов

Предположим, что граф  $G$  содержит порожденный цикл  $C = (v_1, \dots, v_a)$ ,  $a \geq 4$ , причем  $\deg_G(v_1) = 3$ ,  $\deg_G(v_i) = 2, \forall i \geq 2$ , а также либо

(1) порожденный путь

$$P = (u_1 = v_1, \dots, u_b = w, w_1, w''), b \geq 2, a + b \geq 7, \deg_G(u_j) = 2, \forall j \in \overline{2, b-1},$$

$$N_G(w) = \{u_{b-1}, w_1, w'\}, \deg_G(w_1) = 2 \vee \deg_G(w_1) = 3, w'w_1 \in E(G),$$

$$w' \neq w'', \min(\deg_G(w'), \deg_G(w'')) \geq 2, \text{ либо}$$

(2) при  $a \geq 5$  порожденный путь

$$P = (u_1 = v_1, \dots, u_b = w), b \geq 2, \deg_G(u_j) = 2, \forall j \in \overline{2, b-1},$$

$$N_G(w) = \{u_{b-1}, w_1, w'\}, \deg_G(w_1) = \deg_G(w') = 3.$$

Преобразование 3-6 переводит  $G$  в граф  $G'$ , в случае (1) удаляя  $v_1v_a, w'w$  и добавляя  $v_av_{a-3}, w'v_{a-4}$ , где  $v_0 = u_2$ , а в случае (2) удаляя  $v_1v_a$  и добавляя  $v_av_{a-3}$ , см. рисунок 3.8.

**Лемма 3.4.1.** *Выполнено неравенство  $z(G') > z(G)$ .*

*Доказательство.* Для доказательства этой леммы воспользуемся следствием 1.2.1 и его обозначениями. Рассмотрим случай (1). Положим

$$G^1 = G, G^2 = G', S = \{w', w''\}, H_i = G^i[V(C) \cup V(P) \cup \{w'\}] \setminus \{w_1w'\}, i = 1, 2.$$

Графы  $G_S^1$  и  $G_S^2$  изоморфны. Нетрудно проверить, что выполнены следующие соотношения (используем разложение индекса Хосойи в  $G$  по ребрам  $w'w, v_av_1$  и в  $G'$  по ребрам  $w'v_{a-4}, v_av_{a-3}$ ):

$$\Delta(S) = F_{a+b+1} + 2F_{a+b-3} - (F_{a+b+1} + F_{a-1} \cdot F_{b+1}) = 2(F_{a-1} \cdot F_{b-1} + F_{a-2} \cdot F_{b-2}) -$$

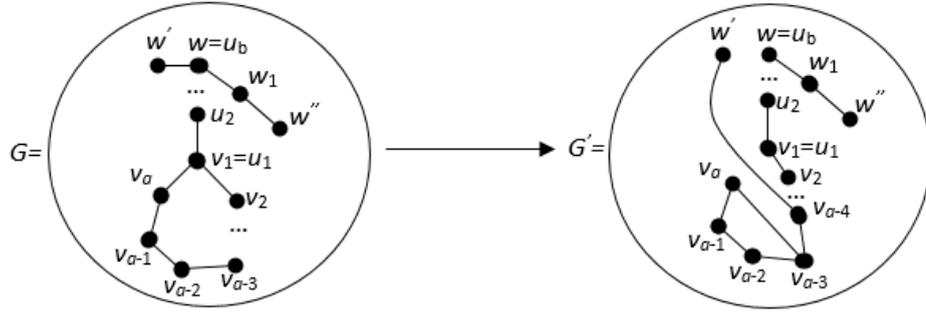


Рис. 3.8: Преобразование 3-6 в случае (1)

$$\begin{aligned}
 -F_{a-1} \cdot F_{b+1} &= F_{a-4} \cdot F_{b-2}, \Delta(\{w'\}) = F_{a-4} \cdot F_{b-1}, \\
 \Delta(\{w''\}) &= F_{a-4} \cdot F_{b-2} + 7F_{a+b-4} - (F_{a+b-1} + F_{a-1} \cdot F_{b-1}) = \\
 &= 2(F_{a+b-4} + F_{a+b-6}) + F_{a-4} \cdot F_{b-2} - F_{a-1} \cdot F_{b-1} = \\
 &= 2F_{a+b-6} + 2(F_{a-2} \cdot F_{b-1} + F_{a-3} \cdot F_{b-2}) + F_{a-4} \cdot F_{b-2} - F_{a-1} \cdot F_{b-1} = \\
 &= 2F_{a+b-6} + F_{a-1} \cdot F_{b-2} + F_{a-4} \cdot F_{b-1}, \\
 \Delta(\emptyset) &= F_{a-4} \cdot F_{b-1} + 7F_{a+b-3} - 2(F_{a+b-1} + F_{a-1} \cdot F_{b-1}) = \\
 &= F_{a-2} \cdot F_{b-2} + 2(F_{a+b-5} - F_{a-3} \cdot F_{b-1}) = (F_{a-2} + 2F_{a-4}) \cdot F_{b-2}.
 \end{aligned}$$

Отсюда и следствия [1.2.1](#) следует, что  $z(G') > z(G)$  при  $b \geq 3$ . При  $b = 2$  выполнено  $a \geq 5$  и  $\Delta(w'') > 0, \Delta(S) > 0$ . Вместе с тем, выполнено хотя бы одно из неравенств

$$z(G_S^1, S, \emptyset) > 0, z(G_S^1, \{w''\}, \{w'\}) > 0.$$

Поэтому по лемме [1.2.1](#) имеем  $z(G') > z(G)$ .

Рассмотрим случай (2). Положим

$$G^1 = G, G^2 = G', S = \{w\}, H_i = G^i[V(C) \cup V(P)], i = 1, 2.$$

Графы  $G_S^1$  и  $G_S^2$  изоморфны. Выполнены соотношения

$$\begin{aligned}
 \Delta(\{w\}) &= F_{a+b-1} + 2F_{a+b-5} - (F_{a+b-1} + F_{a-1} \cdot F_{b-1}) = 2(F_{a-3} \cdot F_{b-1} + F_{a-4} \cdot F_{b-2}) - \\
 &\quad - F_{a-1} \cdot F_{b-1} = F_{a-4} \cdot (2F_{b-2} - F_{b-1}), \\
 \Delta(\emptyset) &= F_{a+b} + 2F_{a+b-4} - (F_{a+b} + F_{a-1} \cdot F_b) = 2(F_{a-3} \cdot F_b + F_{a-4} \cdot F_{b-1}) - \\
 &\quad - F_{a-1} \cdot F_b = F_{a-4} \cdot (F_{b-1} - F_{b-2}).
 \end{aligned}$$

Ясно, что  $\Delta(\emptyset) \geq 0$ , причем равенство достигается только при  $b = 3$ . Вместе с тем, при  $b \geq 3$  выполнено  $\Delta(\{w\}) \geq 0$ , причем равенство достигается только при  $b = 4$ . При  $b = 2$  имеем  $\Delta(\{w\}) = -F_{a-4}, \Delta(\emptyset) = F_{a-4}$ . Т.к.  $\deg_G(w_1) = \deg_G(w') = 3$ , то

$$z(G_S^1, \emptyset, \{w\}) > z(G_S^1, \{w\}, \emptyset) > 0.$$

Отсюда и леммы [1.2.1](#) следует, что  $z(G') > z(G)$ . □

### 3.5 Некоторые дополнительные преобразования циклов

Предположим, что граф  $G$  содержит треугольник  $(v_1, v_2, v_3)$ , в котором

$$N_G(v_1) = \{u, v_2, v_3\} \text{ и либо}$$

$$(1) N_G(v_2) = \{v_1, v_3, w\}, N_G(v_3) = \{v_1, v_2, w\},$$

$$N_G(u) = \{v_1, u_1\}, u_1 \neq w, \deg_G(u_1) \geq 2, \text{ либо}$$

$$(2) N_G(u) = \{v_1, u_1\}, \deg_G(v_2) = 2, N_G(u_1) \setminus \{u, v_3\} \neq \emptyset, \text{ либо}$$

$$(3) N_G(u) = \{v_1, u_1, u_2\}, \deg_G(v_2) = \deg_G(v_3) = 2, N_G(u_1) \setminus \{u, u_2\} \neq \emptyset, \text{ либо}$$

$$(4) N_G(u) = \{v_1, u_1, u_2\}, \deg_G(v_3) = 2, \deg_G(v_2) = 3,$$

$$N_G(u_2) = \{u, u'\}, u' \neq v_2, \deg_G(u') \geq 2.$$

Преобразование 3-7 переводит граф  $G$  в граф  $G'$ , в случае (1) удаляя  $v_1u, v_2v_3$  и добавляя  $uv_2, uv_3$ , в случаях (2)–(4) удаляя ребро  $v_1v_3$  и ребро  $uu_2$  (если  $uu_2 \in E(G)$ ), а также добавляя ребро  $uv_3$  и ребро  $v_3u_2$  (если  $uu_2 \in E(G)$ ) (см. рисунок 3.9).

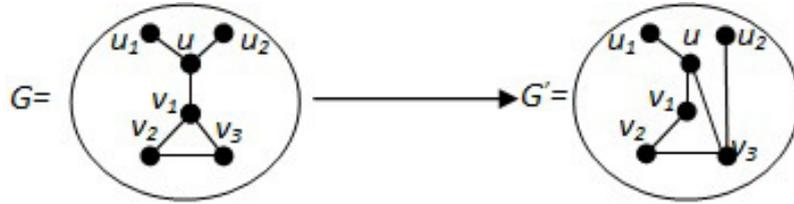


Рис. 3.9: Преобразование 3-7 в случае (4)

**Лемма 3.5.1.** *Справедливо неравенство  $z(G') > z(G)$ .*

*Доказательство.* Для доказательства этой леммы воспользуемся следствием 1.2.1 и его обозначениями.

Рассмотрим случай (1). Положим

$$G^1 = G, G^2 = G', S = \{u_1, w\}, H_i = G^i[\{u, u_1, v_1, v_2, v_3, w\}] \setminus \{u_1w\}, i = 1, 2.$$

Графы  $G_S^1$  и  $G_S^2$  изоморфны. Верны соотношения

$$\Delta(S) = 7 - 6 = 1, \Delta(\{u\}) = 13 - 12 = 1,$$

$$\Delta(\{v_2'\}) = 10 - 10 = 0, \Delta(\emptyset) = 21 - 21 = 0.$$

Т.к.  $\deg_G(u_1) \geq 2$ , то выполнено хотя бы одно из неравенств

$$z(G_S^1, S, \emptyset) > 0, z(G_S^1, \{u_1\}, \{w\}) > 0.$$

Поэтому по лемме 1.2.1 имеем  $z(G') > z(G)$ .

Рассмотрим случай (2). Положим

$$G^1 = G, G^2 = G', S = \{u, v_3\}, H_i = G^i[\{u, v_1, v_2, v_3\}] \setminus \{u_1v_3\}, i = 1, 2.$$

Графы  $G_S^1$  и  $G_S^2$  изоморфны. Верны соотношения

$$\Delta(\emptyset) = 7 - 6 = 1, \Delta(\{u\}) = 3 - 4 = -1,$$

$$\Delta(\{v_3\}) = 3 - 3 = 0, \Delta(S) = 2 - 2 = 0.$$

Т.к.  $\deg_G(u) = 2, N_G(u_1) \setminus \{u, v_3\} \neq \emptyset$ , то

$$z(G_S^1, \emptyset, S) > z(G_S^1, \{u\}, \{v_3\}).$$

Поэтому по лемме [1.2.1](#) имеем  $z(G') > z(G)$ .

Рассмотрим случай (3). Положим

$$G^1 = G, G^2 = G', S = \{u_1, u_2\}, H_i = G^i[\{u, u_1, u_2, v_1, v_2, v_3\}] \setminus \{u_1 u_2\}, i = 1, 2.$$

Графы  $G_S^1$  и  $G_S^2$  изоморфны. Верны соотношения

$$\Delta(\emptyset) = 15 - 14 = 1, \Delta(\{u_1\}) = 10 - 10 = 0,$$

$$\Delta(\{u_2\}) = 10 - 10 = 0, \Delta(S) = 7 - 6 = 1.$$

Т.к.  $N_G(u_1) \setminus \{u, u_2\} \neq \emptyset$ , то  $z(G_S^1, \emptyset, S) \neq 0$ . Отсюда и следствия [1.2.1](#) следует, что  $z(G') > z(G)$ .

Рассмотрим случай (4). Положим

$$G^1 = G, G^2 = G', S = \{u_1, u_2, v_2\},$$

$$H_i = G^i[\{u, u_1, u_2, v_1, v_2, v_3\}] \setminus \{u_1 u_2, u_1 v_2\}, i = 1, 2.$$

Графы  $G_S^1$  и  $G_S^2$  изоморфны. Верны соотношения

$$\Delta(\emptyset) = 15 - 14 = 1, \Delta(\{u_1\}) = 10 - 10 = 0, \Delta(\{u_2\}) = 10 - 10 = 0,$$

$$\Delta(\{v_2\}) = 7 - 7 = 0, \Delta(\{u_1, u_2\}) = 7 - 6 = 1, \Delta(\{u_1, v_2\}) = 5 - 6 = 0,$$

$$\Delta(\{u_2, v_2\}) = 4 - 5 = -1, \Delta(S) = 3 - 3 = 0.$$

Т.к.

$$\deg_G(v_2) = 3, N_G(u_2) = \{u, u'\}, u' \neq v_2, \deg_G(u') \geq 2,$$

то

$$z(G_S^1, \emptyset, S) > z(G_S^1, \{u_2, v_2\}, \{u_1\}).$$

Отсюда и леммы [1.2.1](#) следует, что  $z(G') > z(G)$ . □

Предположим, что граф  $G$  содержит порожденный цикл  $C = (v_1, \dots, v_a)$ , где  $a \geq 5$ , причем  $N_G(v_2) = \{v, v_1, v_3\}$  и никакая вершина  $C$ , кроме  $v_1, v_2, v_3$ , не имеет соседа вне  $C$ . Все четыре случая присутствия в  $G$  ребер  $vv_1$  и  $vv_3$  допускаются. Преобразование 3-8 переводит граф  $G$  в граф  $G'$ , удаляя ребра  $vv_2, v_1 v_a$  и добавляя ребра  $v_1 v_4, v v_a$  (см. рисунок [3.10](#)).

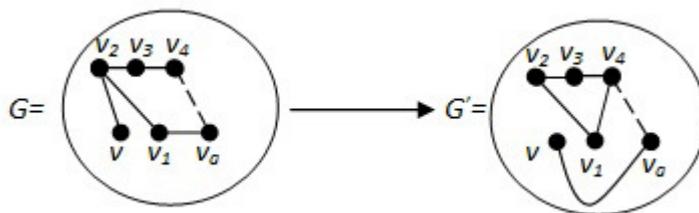


Рис. 3.10: Преобразование 3-8, когда  $vv_1 \notin E(G), vv_3 \notin E(G)$ .

Для формулировки следующей леммы воспользуемся обозначениями следствия [1.2.1](#). Положим

$$G^1 = G, G^2 = G', H_i = G^i[\{v, v_1, \dots, v_a\}] \setminus \{vv_1, vv_3\}, i = 1, 2, S = \{v, v_1, v_3\}.$$

**Лемма 3.5.2.** *Выполнено соотношение*

$$z(G') - z(G) = F_{a-4} \cdot (z(G_S^1, \emptyset, S) - z(G_S^1, \{v\}, S \setminus \{v\}) - z(G_S^1, \{v_1, v_3\}, \{v\})).$$

*Доказательство.* Графы  $G_S^1$  и  $G_S^2$  изоморфны. Очевидно, что для любого  $S' \subseteq S$ , где  $\{v, v_1\} \subseteq S'$  или  $\{v, v_3\} \subseteq S'$ , графы  $H_1 \setminus S'$  и  $H_2 \setminus S'$  изоморфны. Раскладывая индекс Хосойи в  $H_1$  по ребру  $v_1v_2$  и в  $H_2$  по ребру  $v_1v_4$ , имеем

$$\begin{aligned} z(H_2) &= F_{a+2} + 2F_{a-2}, z(H_1) = F_{a+2} + F_{a-1}, \\ z(H_2 \setminus \{v\}) &= F_{a+1} + 2F_{a-3}, z(H_1 \setminus \{v\}) = F_{a+1} + F_{a-1}, \\ z(H_2 \setminus \{v_1, v_3\}) &= F_{a-1}, z(H_1 \setminus \{v_1, v_3\}) = 2F_{a-2}. \end{aligned}$$

Поэтому справедливы следующие равенства

$$\Delta(\emptyset) = F_{a-4}, \Delta(\{v\}) = -F_{a-4}, \Delta(\{v_2, v_3\}) = -F_{a-4}.$$

Поэтому по лемме 1.2.1 имеем

$$\begin{aligned} z(G') - z(G) &= F_{a-4} \cdot (z(G_S^1, \emptyset, S) - z(G_S^1, \{v\}, S \setminus \{v\}) - \\ &\quad - z(G_S^1, \{v_1, v_3\}, \{v\})). \end{aligned}$$

□

Нетрудно видеть, что если  $N_G(v) = \{v_2, v'\}$  и  $\deg_G(v') \geq 2$ , то

$$z(G_S^1, \emptyset, S) > z(G_S^1, \{v\}, S \setminus \{v\}).$$

Ясно также, что  $z(G_S^1, \{v_1, v_3\}, S \setminus \{v_1, v_3\}) = 0$ , если

$$\min(\deg_G(v_1), \deg_G(v_3)) = 2 \vee N_G(v_1) = \{v_2, v_a, u\}, N_G(v_3) = \{v_2, v_4, u\}.$$

Поэтому, если  $N_G(v) = \{v_2, v'\}$ ,  $\deg_G(v') \geq 2$  и

$$\min(\deg_G(v_1), \deg_G(v_3)) = 2 \vee N_G(v_1) = \{v_2, v_a, u\}, N_G(v_3) = \{v_2, v_4, u\},$$

то  $z(G') > z(G)$ .

Предположим, что граф  $G$  содержит порожденный цикл  $C = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ , где

$$N_G(v_1) = \{u, v_2, v_4\}, N_G(v_2) = \{w, v_1, v_3\}, uw \notin E(G)$$

и никакая вершина  $C$ , кроме  $v_1$  и  $v_2$ , не имеет соседа вне  $C$ . Преобразование 3-9 переводит граф  $G$  в граф  $G'$ , удаляя ребро  $v_2w$  и добавляя ребро  $uw$  (см. рисунок 3.11).

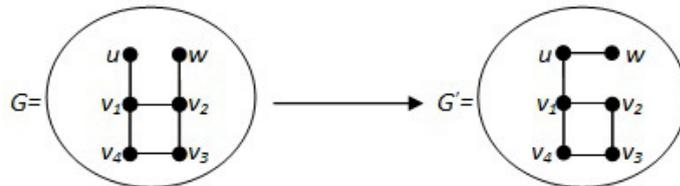


Рис. 3.11: Преобразование 3-9

Для формулировки следующей леммы воспользуемся обозначениями следствия 1.2.1. Положим

$$G^1 = G, G^2 = G', H_i = G^i[\{u, w, v_1, v_2, v_3, v_4\}], i = 1, 2, S = \{u, w\}.$$



$z(G)$ , означая по лемме 3.5.1 что  $G$  не является максимальным  $(n, n+2)$ -графом. Случай  $b = 4, d = 2$  рассматривается аналогично. Если же  $b = 3$ , то по аналогии можно доказать, что при  $a \geq 4$  выполнено  $c = d = 2$ . Таким образом,  $G$  получается подразбиением одного или двух несмежных ребер полного графа с 4 вершинами.

Во втором случае по лемме 3.2.3 имеем, что  $j = i + 1$ . Тогда  $a \geq 4$  и по лемме 3.2.3 выполнено  $c = 2$ . По леммам 3.5.1 и 3.5.2 имеем, что если  $d \neq 4$ , то  $i = 2, a = 4$ . Аналогично, если  $b \neq 4$ , то  $i = 2, a = 4$ . Если  $b = d = 4$ , то либо  $(x_1, \dots, x_i)$ , либо  $(x_{i+1}, \dots, x_a)$  содержит не менее 7 вершин, т.к.  $n \geq 17$ . Этот случай не возможен ввиду леммы 3.5.3 и ввиду максимальной  $G$ . Следовательно,  $G$  получается из двух циклов  $(v_1, \dots, v_d)$  и  $(y_1, \dots, y_b)$  добавлением ребер  $v_1 u_1$  и  $v_d y_b$ .

Предположим, что  $G$  содержит порожденный подграф  $H_{a,b,c}$  и мост, инцидентный вершине  $x_i$ . Тогда  $i = 2$  по лемме 3.3.2. Если  $a \geq 4$ , то  $b = 4, c = 2$  по леммам 3.2.3, 3.4.1, 3.5.1 и 3.5.2. Поэтому,  $a \geq 11$  (т.к.  $n \geq 17$ ), что невозможно по лемме 3.5.3 и ввиду максимальной  $G$ . Следовательно,  $a = 3$ . По лемме 3.2.3 можно считать, что  $c = 2$ .

Из наших рассуждений, лемм 3.2.3, 3.4.1 и 3.5.1 следует, что каждый максимальный  $(n, n+2)$ -граф имеет один из типов  $A-E$  (см. рисунок 3.13), причем подразбиваться могут только отмеченные ребра.

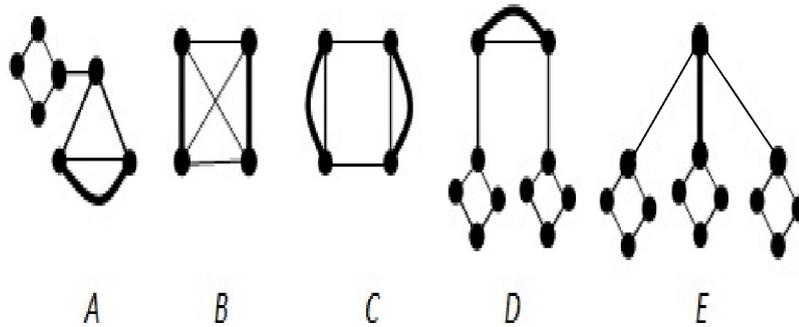


Рис. 3.13: Псевдографы  $A-E$

Обозначим через  $z_n(A) - z_n(E)$  максимальные значения индекса Хосойи в  $n$ -вершинных графах типов  $A-E$ , соответственно. Отметим, что графы типов  $A, D, E$  являются единственными. По лемме 3.5.2 тип  $B$  не дает оптимального решения.

Каждый  $n$ -вершинный граф типа  $C$  получается соединением ребрами двух соседних вершин цикла  $C_a$  с двумя соседними вершинами цикла  $C_b$ , где  $a \geq 3, b \geq 3, a + b = n$ . Разложив индекс Хосойи по одному из данных ребер, мы получим индексы Хосойи  $(n-2)$ -пути и результата соединения ребром вершины из  $C_a$  и вершины из  $C_b$ . Если  $n \geq 8$ , то для максимизации этой суммы необходимо положить  $a = 4, b = n - 4$  (или  $a = n - 4, b = 4$ ) по леммам 3.4.1 и 3.5.1. Тем самым, выполнено

$$\begin{aligned} z_n(B) &= z(P_{n-2}) + z(C_4) \cdot z(C_{n-4}) + z(P_3) \cdot z(P_{n-5}) = \\ &= F_{n-1} + 7(F_{n-3} + F_{n-5}) + 3F_{n-4} = F_{n-1} + 10F_{n-3} + 4F_{n-5}. \end{aligned}$$

Верны равенства

$$\begin{aligned} z_{14}(A) &= 1236, z_{15}(A) = 2000, \\ z_{14}(C) &= 1259, z_{15}(C) = 2037, \\ z_{14}(D) &= 1263, z_{15}(D) = 2039, \\ z_{14}(E) &= 1253, z_{15}(E) = 2037. \end{aligned}$$

По следствию **1.2.2** имеем, что при всех  $k \geq 0$  справедливы тождества

$$z_{14+k+2}(A) = z_{14+k+1}(A) + z_{14+k}(A),$$

$$z_{14+k+2}(C) = z_{14+k+1}(C) + z_{14+k}(C),$$

$$z_{14+k+2}(D) = z_{14+k+1}(D) + z_{14+k}(D),$$

$$z_{14+k+2}(E) = z_{14+k+1}(E) + z_{14+k}(E).$$

Имея в виду данные тождества и неравенства

$$z_{14}(D) > z_{14}(C) > z_{14}(E) > z_{14}(A),$$

$$z_{15}(D) > z_{15}(C) = z_{15}(E) > z_{15}(A),$$

нетрудно с использованием следствия **1.2.2** по индукции доказать неравенство

$$z_n(D) > z_n(C) \geq z_n(E) > z_n(A),$$

верное при любом  $n \geq 14$ . Отсюда следует справедливость утверждения данной теоремы. □

## Глава 4

# Перечисление паросочетаний в полных $q$ -арных деревьях

В четвертой главе данной работы исследуется поведение величин  $z(T_{q,h})$  и  $iz(T_{q,h})$  — количество паросочетаний и порожденных паросочетаний в  $T_{q,h}$  — полном  $q$ -арном дереве высоты  $h$  при  $h \rightarrow \infty$ . В ней доказывается, что для любого  $q \geq 2$  существует такое  $b_q > 1$ , что при  $h \rightarrow \infty$  справедлива асимптотика  $z(T_{q,h}) \sim \left(\frac{1+\sqrt{1+4q}}{2}\right)^{-\frac{1}{q-1}} \cdot (b_q)^{q^h}$ . Показывается также, что для любого  $q \in \{1, 2, 3\}$  существуют числа  $a'_q$  и  $b'_q > 1$  такие, что  $iz(T_{q,h}) \sim a'_q \cdot (b'_q)^{q^h}$  при  $h \rightarrow \infty$ , и что для любого достаточно большого  $q$  существуют числа  $a_q^1 \neq a_q^2$  и  $b'_q > 1$  такие, что при  $k \rightarrow \infty$  справедливы асимптотики

$$iz(T_{q,3k}) \sim a_q^1 \cdot (b'_q)^{q^{3k}}, iz(T_{q,3k+1}) \sim a_q^2 \cdot (b'_q)^{q^{3k+1}}, iz(T_{q,3k+2}) \sim a_q^1 \cdot (b'_q)^{q^{3k+2}}.$$

Этот результат опубликован в работе [4].

### 4.1 Рекуррентные соотношения для количеств паросочетаний и порожденных паросочетаний в $\{T_{q,h}\}$

Обозначим через  $r$  корень дерева  $T_{q,h}$ , а также обозначим через  $e_1, \dots, e_q$  ребра, инцидентные вершине  $r$ . Введем переобозначения  $z(q, h) = z(T_{q,h})$ ,  $z_+(q, h)$  — количество паросочетаний  $T_{q,h}$ , каждое из которых содержит одно из ребер  $e_1, \dots, e_q$ , а  $z_-(q, h)$  — количество паросочетаний  $T_{q,h}$ , каждое из которых не содержит ребер, инцидентных  $r$ . Применительно к порожденным паросочетаниям дерева  $T_{q,h}$  обозначения  $iz(q, h)$ ,  $iz_+(q, h)$  и  $iz_-(q, h)$  имеют такой же смысл, что  $z(q, h)$ ,  $z_+(q, h)$  и  $z_-(q, h)$ , соответственно. Ясно, что

$$z(q, h) = z_+(q, h) + z_-(q, h), iz(q, h) = iz_+(q, h) + iz_-(q, h).$$

При удалении вершины  $r$  из дерева  $T_{q,h}$  образуется коллекция из  $q$  деревьев, изоморфных  $T_{q,h-1}$ . Тем самым, справедливы равенства

$$z_-(q, h) = (z(q, h-1))^q, iz_-(q, h) = (iz(q, h-1))^q.$$

Каждое паросочетание графа, содержащее одно из ребер  $e_1, \dots, e_q$ , содержит ровно одно из них. Удалив концы ребра  $e_i$  вместе с инцидентными им ребрами, мы получим коллекцию, состоящую из  $q-1$  деревьев, изоморфных  $T_{q,h-1}$ , и из  $q$  деревьев, изоморфных  $T_{q,h-2}$ . Удалив концы ребра  $e_i$  и всех их соседей вместе

с инцидентными им ребрами, мы получим коллекцию, состоящую из  $q^2$  деревьев, изоморфных  $T_{q,h-3}$ , и из  $q \cdot (q-1)$  деревьев, изоморфных  $T_{q,h-2}$ . Поэтому и т.к. ребро из множества  $\{e_1, e_2, \dots, e_q\}$  выбирается  $q$  способами, то

$$\begin{aligned} z_+(q, h) &= q \cdot (z(q, h-2))^q \cdot (z(q, h-1))^{q-1}, \\ iz_+(q, h) &= q \cdot (iz(q, h-3))^{q^2} \cdot (iz(q, h-2))^{q \cdot (q-1)}. \end{aligned}$$

Поэтому справедливы следующие равенства:

$$\begin{aligned} z(q, h) &= (z(q, h-1))^q + q \cdot (z(q, h-2))^q \cdot (z(q, h-1))^{q-1}, \\ iz(q, h) &= (iz(q, h-1))^q + q \cdot (iz(q, h-3))^{q^2} \cdot (iz(q, h-2))^{q \cdot (q-1)}, \end{aligned}$$

при начальных условиях

$$z(q, 0) = iz(q, 0) = 1, z(q, 1) = iz(q, 1) = q + 1, iz(q, 2) = (q + 1)^q + q.$$

Выполнив замены  $x(q, h) = \frac{z(q, h)}{(z(q, h-1))^q}$  и  $ix(q, h) = \frac{iz(q, h)}{(iz(q, h-1))^q}$  и проведя несложные преобразования, мы получаем следующие соотношения и начальные условия:

$$\begin{aligned} x(q, h) &= 1 + \frac{q}{x(q, h-1)}, \\ ix(q, h) &= 1 + \frac{q}{(ix(q, h-1))^q \cdot (ix(q, h-2))^q}, \\ x(q, 1) &= ix(q, 1) = q + 1, ix(q, 2) = 1 + \frac{q}{(q+1)^q}. \end{aligned} \tag{4.1}$$

## 4.2 Некоторые вспомогательные результаты из математического анализа

**Лемма 4.2.1.** *Предположим, что последовательность  $\{x_n\}_{n \geq 0}$  состоит из положительных чисел. Если для некоторого  $\nu > 1$  последовательность  $\{\frac{x_n}{x_{n-1}^\nu}\}_{n \geq 1}$  сходится к  $x^* > 0$ , то для некоторых  $a$  и  $b$  справедлива асимптотика  $x_n \sim a \cdot (b)^{\nu^n}$ , причем  $a = (x^*)^{-\frac{1}{\nu-1}}$ .*

*Доказательство.* Пусть  $y_k = \frac{x_k}{x_{k-1}^\nu}$ , тогда  $\ln(x_k) = \ln(y_k) + \nu \cdot \ln(x_{k-1})$ . Следовательно, справедливо равенство

$$\ln(x_n) = \sum_{i=0}^{n-1} \nu^i \cdot \ln(y_{n-i}) + \nu^n \cdot \ln(x_0) = \nu^n \cdot (\ln(x_0) + \sum_{j=1}^n \frac{\ln(y_j)}{\nu^j}).$$

Поскольку  $\{y_n\}$  сходится к положительному числу и  $\nu > 1$ , то последовательность  $\{\ln(x_0) + \sum_{j=1}^n \frac{\ln(y_j)}{\nu^j}\}$  является сходящейся в себе (и, следовательно, сходящейся), предел которой мы обозначим через  $\ln(b)$ . Тем самым,

$$\ln(x_n) = \nu^n \cdot (\ln(b) - \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{\ln(y_j)}{\nu^j}) = \nu^n \cdot \ln(b) - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\ln(y_{j+n})}{\nu^j}.$$

Т.к.  $\{y_n\}$  сходится к положительному числу и  $\nu > 1$ , то  $\{-\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\ln(y_{j+n})}{\nu^j}\}$  сходится к некоторому числу  $\ln(a)$ . Значит,  $\ln(x_n) = \nu^n \cdot \ln(b) + \ln(z_n)$ , где  $z_n \rightarrow a$ . Поэтому  $x_n = z_n \cdot b^{\nu^n}$  и  $x_n \sim a \cdot (b)^{\nu^n}$ . Тем самым, последовательность  $\{y_n\}$  имеет  $x^*$  и  $a^{1-\nu}$  в качестве своих пределов, и поэтому  $a = (x^*)^{-\frac{1}{\nu-1}}$ .  $\square$

**Лемма 4.2.2.** Пусть  $Q \subset \mathbb{R}^n$  — гиперкуб с центром в точке  $x^*$ ,  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  имеет непрерывные первые производные на  $Q$ , причем  $f(x^*, \dots, x^*) = x^*$  и для некоторых неотрицательных чисел  $M$  и  $t$  и любых  $1 \leq i \leq n$  и точки  $\mathbf{x} \in Q$  выполнено неравенство  $-M \leq f'_{t_i}(\mathbf{x}) \leq -t$ . Тогда, если

$$(n-1) \cdot t + M^2 < 1, t = \max(|M^2 - m|, |m^2 - M|),$$

то итерационный процесс  $x_{i+1} = f(x_i, x_{i-1}, \dots, x_{i-n+1})$  сходится к  $x^*$  для любых начальных условий  $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in Q, (x_2, x_3, \dots, x_{n+1}) \in Q$ .

*Доказательство.* Для любого  $k$  введем переобозначение  $\epsilon_k = x_k - x^*$ . Предположим, что  $(x_{k-n+1}, x_{k-n+2}, \dots, x_k) \in Q, (x_{k-n}, x_{k-n+1}, \dots, x_{k-1}) \in Q$ . Тогда при любом  $k \geq n+1$  по формуле Тейлора для некоторой точки  $\mathbf{p}_k \in Q$  имеем

$$\begin{aligned} \epsilon_{k+1} &= x_{k+1} - x^* = f(x_k, x_{k-1}, \dots, x_{k-n+1}) - f(x^*, x^*, \dots, x^*) = \\ &= \sum_{j=1}^n f'_{t_j}(\mathbf{p}_k) \cdot (x_{k+1-j} - x^*) = \sum_{j=1}^n f'_{t_j}(\mathbf{p}_k) \cdot \epsilon_{k+1-j}. \end{aligned}$$

Действительно, мы можем параметризовать отрезок от  $(x_k, x_{k-1}, \dots, x_{k-n+1})$  до  $(x^*, x^*, \dots, x^*)$  и применить теорему Ролля к непрерывно дифференцируемой функции одного переменного. Тогда точка  $\mathbf{p}_k$  должна принадлежать отрезку и, ввиду выпуклости  $Q$ , принадлежать этому множеству  $Q$ .

Следовательно, при любом  $k \geq n+1$  справедливо соотношение

$$\begin{aligned} \epsilon_{k+1} &= f'_{t_1}(\mathbf{p}_k) \cdot \epsilon_k + \sum_{j=2}^n f'_{t_j}(\mathbf{p}_k) \cdot \epsilon_{k+1-j} = f'_{t_1}(\mathbf{p}_k) \cdot \left( \sum_{j=1}^n f'_{t_j}(\mathbf{p}_{k-1}) \cdot \epsilon_{k-j} \right) + \\ &+ \sum_{j=2}^n f'_{t_j}(\mathbf{p}_k) \cdot \epsilon_{k+1-j} = \sum_{j=1}^{n-1} (f'_{t_1}(\mathbf{p}_k) \cdot f'_{t_j}(\mathbf{p}_{k-1}) + f'_{t_{j+1}}(\mathbf{p}_k)) \cdot \epsilon_{k-j} + \\ &+ f'_{t_1}(\mathbf{p}_k) \cdot f'_{t_n}(\mathbf{p}_{k-1}) \cdot \epsilon_{k-n}. \end{aligned}$$

По условиям леммы имеем

$$|f'_{t_1}(\mathbf{p}_k) \cdot f'_{t_n}(\mathbf{p}_{k-1})| \leq M^2, m^2 - M \leq f'_{t_1}(\mathbf{p}_k) \cdot f'_{t_j}(\mathbf{p}_{k-1}) + f'_{t_{j+1}}(\mathbf{p}_k) \leq M^2 - m.$$

Тем самым,

$$\begin{aligned} |\epsilon_{k+1}| &\leq \sum_{j=1}^{n-1} \max(|M^2 - m|, |m^2 - M|) \cdot |\epsilon_{k-j}| + M^2 \cdot |\epsilon_{k-n}| < \\ &< ((n-1) \cdot t + M^2) \max_{1 \leq j \leq n} |\epsilon_{k-j}|. \end{aligned}$$

Напомним, что  $Q$  — гиперкуб с центром в точке  $x^*$  и

$$(x_{k-n+1}, x_{k-n+2}, \dots, x_k) \in Q, (x_{k-n}, x_{k-n+1}, \dots, x_{k-1}) \in Q.$$

Отсюда, ввиду оценки на  $|\epsilon_{k+1}|$  и т.к.  $(n-1) \cdot t + M^2 < 1$ , то  $(x_{k+1}, x_k, \dots, x_{k-n+2}) \in Q$  и для некоторого  $0 < w < 1$  при любом  $k$  имеем, что  $|\epsilon_k| = O(w^k)$ . Значит, итерационный процесс сходится к  $x^*$ .  $\square$

### 4.3 Асимптотика количества паросочетаний в деревьях $\{T_{q,h}\}$

**Лемма 4.3.1.** При любом  $q$  последовательность  $\{x(q, h)\}$  сходится к  $\frac{1+\sqrt{1+4q}}{2}$ .

*Доказательство.* Докажем, что  $\{x(q, h)\}$  сходится при любом  $q$ . Эта последовательность состоит из чисел, больших единицы, причем

$$|x(q, h+1) - x(q, h)| = q \cdot \frac{|x(q, h) - x(q, h-1)|}{x(q, h) \cdot x(q, h-1)}.$$

Вместе с тем, справедливо неравенство

$$x(q, h + 1) \cdot x(q, h) = q + x(q, h) > q + 1,$$

и поэтому

$$|x(q, h + 1) - x(q, h)| < \frac{q}{q+1} \cdot |x(q, h) - x(q, h - 1)|.$$

Значит,  $\{x(q, h)\}$  сходится в себе и поэтому она имеет предел, который мы обозначим через  $L_q^*$ . Поэтому  $L_q^* = 1 + \frac{q}{L_q^*}$ , т.е.  $L_q^* = \frac{1 + \sqrt{1 + 4 \cdot q}}{2}$ .  $\square$

Тем самым, из лемм [4.3.1](#) и [4.2.2](#) и определения величины  $z(q, h)$  перед формулами [\(4.1\)](#) следует, что справедлива следующая

**Теорема 4.3.1.** *При любом  $q \geq 2$  для некоторого  $b_q$  при  $h \rightarrow \infty$  справедлива асимптотика  $z(T_{q,h}) \sim \left(\frac{1 + \sqrt{1 + 4 \cdot q}}{2}\right)^{-\frac{1}{q-1}} \cdot (b_q)^{q^h}$ .*

## 4.4 Асимптотика количества порожденных паросочетаний в деревьях $\{T_{q,h}\}$

Определим функцию  $f(x_1, x_2) = 1 + \frac{q}{x_1^q \cdot x_2^q}$ , в аргументах которой и связанных с ней функций мы не будем явно указывать натуральный аргумент  $q$ . Ее частные производные равны  $f'_{x_1} = -\frac{q^2}{x_1^{q+1} \cdot x_2^q}$  и  $f'_{x_2} = -\frac{q^2}{x_1^q \cdot x_2^{q+1}}$ . Тем самым, в первом квадранте  $f(x_1, x_2)$  убывает.

### 4.4.1 Случай $1 \leq q \leq 3$

Очевидно, что  $f(1, 1) = q + 1 \geq 2$  и  $\lim_{x_1, x_2 \rightarrow \infty} f(x_1, x_2) = 1$ . Следовательно, существует и единственно такое  $\lambda_q^* > 1$ , что  $f(\lambda_q^*, \lambda_q^*) = \lambda_q^*$ . Можно проверить, что

$$\lambda_1^* = 1.4656\dots, \lambda_2^* = 1.45109\dots, \lambda_3^* = 1.39942\dots$$

В обозначениях леммы [4.2.2](#) для  $q \in \{1, 2, 3\}$  можно положить

$$\begin{aligned} Q_1 &= [\lambda_1^* - 0.02, \lambda_1^* + 0.02]^2, M = 0.7, m = 0.6, t = 0.83, \\ Q_2 &= [\lambda_2^* - 0.02, \lambda_2^* + 0.02]^2, M = 0.7, m = 0.55, t = 0.8875, \\ Q_3 &= [\lambda_3^* - 0.005, \lambda_3^* + 0.005]^2, M = 0.88, m = 0.83, t = 0.9655. \end{aligned}$$

Компьютерные вычисления показывают, что

$$\begin{aligned} ix(1, 6) &= 1, 44444\dots, ix(1, 7) = 1.46153\dots, ix(1, 8) = 1.47368\dots, \\ ix(2, 15) &= 1.45322\dots, ix(2, 16) = 1.46707\dots, ix(2, 17) = 1.44000\dots, \\ ix(3, 108) &= 1.39547\dots, ix(3, 109) = 1.39860\dots, ix(3, 110) = 1.40352\dots, \end{aligned}$$

т.е.

$$\begin{aligned} (ix(1, 6), ix(1, 7)) &\in Q_1, (ix(1, 7), ix(1, 8)) \in Q_1, \\ (ix(2, 15), ix(2, 16)) &\in Q_2, (ix(2, 16), ix(2, 17)) \in Q_2, \\ (ix(3, 108), ix(3, 109)) &\in Q_3, (ix(3, 109), ix(3, 110)) \in Q_3. \end{aligned}$$

Поэтому из той же леммы [4.2.2](#) следует справедливость следующего утверждения.

**Лемма 4.4.1.** *Последовательности  $\{ix(1, h)\}$ ,  $\{ix(2, h)\}$  и  $\{ix(3, h)\}$  имеют предел.*

#### 4.4.2 Случай больших $q$ – разрешимость одной системы нелинейных уравнений

В этом подразделе мы рассмотрим следующую систему нелинейных уравнений

$$\begin{cases} y = f(x, x), \\ x = f(x, y) = f(y, x), \end{cases} \quad (4.2)$$

и покажем, что справедлива

**Лемма 4.4.2.** При любом  $q \geq 6$  система (4.2) имеет решение  $(x_q^*, y_q^*)$ , где

$$x_q^* < 1 + \frac{q}{(q+1)^q}, y_q^* > q + 1 - \frac{4}{q^{q-3}}.$$

*Доказательство.* Введем обозначение  $F(t) = t - 1 - \frac{q}{t^q \cdot f^q(t, t)}$ , при этом система (4.2) эквивалентна уравнению  $F(t) = 0$ . Положим  $t_q^* = 1 + \frac{q}{(q+1)^q}$ , тогда

$$\begin{aligned} 1 < (t_q^*)^q < (t_q^*)^{2q} < \left(1 + \frac{1}{q^{q-1}}\right)^{2q} &= 1 + \frac{2}{q^{q-2}} + \sum_{i=2}^{2q} C_{2q}^i \cdot \left(\frac{1}{q^{q-1}}\right)^i < 1 + \frac{2}{q^{q-2}} + \\ &+ \sum_{i=2}^{2q} 2^{2q} \cdot \left(\frac{1}{q^{q-1}}\right)^i < 1 + \frac{2}{q^{q-2}} + \frac{4^q \cdot (2q-1)}{q^{2q-2}} < 1 + \frac{4}{q^{q-2}}, \\ q + 1 > f(t_q^*, t_q^*) > 1 + \frac{q^{q-1}}{4 + q^{q-2}} &> q + 1 - \frac{4}{q^{q-3}}. \end{aligned}$$

Поэтому  $F(t_q^*) > \frac{q}{(q+1)^q} - \frac{q}{(q+1)^q} = 0$ , причем  $F(1) < 0$  при любом  $q$ . Поскольку  $F(t)$  непрерывна на  $[1, t_q^*]$ , то по теореме о промежуточных значениях непрерывной функции имеем, что  $x_q^* < t_q^*$  и  $y_q^* = f(x_q^*, x_q^*) > f(t_q^*, t_q^*)$  (воспользовались убыванием  $f(t_1, t_2)$  в первом октанте) существуют. Следовательно, данное утверждение имеет место.  $\square$

#### 4.4.3 Случай больших $q$ – предельные равенства

**Лемма 4.4.3.** При любом достаточно большом  $q$  справедливы предельные переходы

$$\lim_{k \rightarrow \infty} ix(q, 3k+1) = y_q^*, \lim_{k \rightarrow \infty} ix(q, 3k+2) = \lim_{k \rightarrow \infty} ix(q, 3k+3) = x_q^*.$$

*Доказательство.* Введем обозначения

$$\zeta_{q,k} = ix(q, 3k+1) - y_q^*, \eta_{q,k} = ix(q, 3k+2) - x_q^*, \theta_{q,k} = ix(q, 3k+3) - x_q^*.$$

Из результатов леммы 4.4.2 и соотношений (4.1) при  $q \rightarrow \infty$  имеет место предельный переход  $\max(|\zeta_{q,0}|, |\eta_{q,0}|, |\theta_{q,0}|) \rightarrow 0$ . Поскольку справедливо равенство  $ix(q, n) = f(ix(q, n-1), ix(q, n-2))$ , то из определения  $\zeta_{q,k}, \eta_{q,k}, \theta_{q,k}$  следует справедливость равенств

$$\begin{aligned} \zeta_{q,k+1} + y_q^* &= f(\theta_{q,k} + x_q^*, \eta_{q,k} + x_q^*), \\ \theta_{q,k} + x_q^* &= f(\eta_{q,k} + x_q^*, \zeta_{q,k} + y_q^*), \\ \eta_{q,k} + x_q^* &= f(\zeta_{q,k} + y_q^*, \theta_{q,k-1} + x_q^*). \end{aligned}$$

Из них, равенств системы (4.2) и формулы Тейлора следуют равенства

$$\begin{aligned} \zeta_{q,k+1} &= f'_{t_1}(x_q^*, x_q^*) \cdot \theta_{q,k} + f'_{t_2}(x_q^*, x_q^*) \cdot \eta_{q,k} + O_q(\theta_{q,k}^2 + \eta_{q,k}^2), \\ \theta_{q,k} &= f'_{t_1}(x_q^*, y_q^*) \cdot \eta_{q,k} + f'_{t_2}(x_q^*, y_q^*) \cdot \zeta_{q,k} + O_q(\eta_{q,k}^2 + \zeta_{q,k}^2), \\ \eta_{q,k} &= f'_{t_1}(y_q^*, x_q^*) \cdot \zeta_{q,k} + f'_{t_2}(y_q^*, x_q^*) \cdot \theta_{q,k-1} + O_q(\zeta_{q,k}^2 + \theta_{q,k-1}^2). \end{aligned}$$

Из них следуют равенства

$$\begin{aligned}
\eta_{q,k} &= f'_{t_1}(y_q^*, x_q^*) \cdot \zeta_{q,k} + f'_{t_2}(y_q^*, x_q^*) \cdot \theta_{q,k-1} + O_q(\zeta_{q,k}^2 + \theta_{q,k-1}^2), \\
\theta_{q,k} &= f'_{t_1}(x_q^*, y_q^*) \cdot \eta_{q,k} + f'_{t_2}(x_q^*, y_q^*) \cdot \zeta_{q,k} + O_q(\eta_{q,k}^2 + \zeta_{q,k}^2), \\
\zeta_{q,k+1} &= ((f'_{t_1}(x_q^*, y_q^*))^2 + f'_{t_2}(x_q^*, x_q^*) \cdot \eta_{q,k} + f'_{t_1}(x_q^*, x_q^*) \cdot f'_{t_2}(x_q^*, y_q^*) \cdot \zeta_{q,k} + \\
&\quad + O_q(\eta_{q,k}^2 + \zeta_{q,k}^2)) = [((f'_{t_1}(x_q^*, y_q^*))^2 + f'_{t_2}(x_q^*, x_q^*) \cdot f'_{t_1}(y_q^*, x_q^*) + \\
&\quad + f'_{t_1}(x_q^*, x_q^*) \cdot f'_{t_2}(x_q^*, y_q^*)) \cdot \zeta_{q,k} + ((f'_{t_1}(x_q^*, y_q^*))^2 + f'_{t_2}(x_q^*, x_q^*) \cdot f'_{t_2}(y_q^*, x_q^*) \cdot \theta_{q,k-1} + \\
&\quad + O_q(\zeta_{q,k}^2 + \theta_{q,k-1}^2)].
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Константы, скрытые в символе  $O_q$ , могут быть оценены через максимум модуля вторых производных функции  $f(t_1, t_2)$  на квадрате  $[1, q+1]^2$ , т.е. многочленом третьей степени от  $q$ . Поскольку

$$x_q^* < 1 + \frac{q}{(q+1)^q}, y_q^* > q + 1 - \frac{4}{q^{q-3}},$$

то при  $q \rightarrow \infty$  справедливы асимптотические равенства

$$\begin{aligned}
|f'_{t_1}(x_q^*, x_q^*)| &= |f'_{t_2}(x_q^*, x_q^*)| \sim q^2, |f'_{t_1}(y_q^*, x_q^*)| = |f'_{t_2}(x_q^*, y_q^*)| \sim \frac{q^2}{(q+1)^{q+1}}, \\
|f'_{t_1}(x_q^*, y_q^*)| &\sim \frac{q^2}{(q+1)^q}, |f'_{t_2}(y_q^*, x_q^*)| \sim \frac{q^2}{(q+1)^q}.
\end{aligned}$$

Поэтому коэффициенты перед  $\zeta_{q,k}$ ,  $\theta_{q,k-1}$  и  $\eta_{q,k}$  в формулах (4.3) являются экспоненциально убывающими от  $q$ . Напомним, что

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \max(|\zeta_{q,0}|, |\eta_{q,0}|, |\theta_{q,0}|) = 0.$$

Значит, для любого достаточно большого  $q$  существует такое  $0 < w_q < 1$ , что справедливо  $\max(\eta_{q,k}, \theta_{q,k}, \zeta_{q,k}) = O((w_q)^k)$ . Поэтому

$$\lim_{k \rightarrow \infty} ix(q, 3k+1) = y_q^*, \lim_{k \rightarrow \infty} ix(q, 3k+2) = x_q^*, \lim_{k \rightarrow \infty} ix(q, 3k+3) = x_q^*$$

для любого достаточно большого  $q$ . □

#### 4.4.4 Основной результат этого раздела

Одним из основных результатов работы, который прямо следует из лемм (4.2.2), (4.4.1) и (4.4.3) является следующая

**Теорема 4.4.1.** *Для любого  $q \in \{1, 2, 3\}$  существуют числа  $a'_q$  и  $b'_q > 1$  такие, что  $iz(T_{q,h}) \sim a'_q \cdot (b'_q)^{q^h}$  при  $h \rightarrow \infty$ . Для любого достаточно большого  $q$  существуют числа  $a_q^1 \neq a_q^2$  и  $b'_q > 1$  такие, что при  $k \rightarrow \infty$  справедливы асимптотики*

$$iz(T_{q,3k}) \sim a_q^1 \cdot (b'_q)^{q^{3k}}, iz(T_{q,3k+1}) \sim a_q^2 \cdot (b'_q)^{q^{3k+1}}, iz(T_{q,3k+2}) \sim a_q^1 \cdot (b'_q)^{q^{3k+2}}.$$

Интересен вопрос о том, начиная с какого значения параметра  $q$  теорема (4.4.1) вступает в силу. Для ответа на него был проведен вычислительный эксперимент, показавший, что, по-видимому, соответствующий эффект наблюдается уже при  $q \geq 4$  (см. таблицу 4.1).

q	n					
	100	200	300	400	500	600
4	4.76746...	1.00751...	1.00751...	4.76746...	1.00751...	1.00751...
5	5.9671...	1.00065...	1.00065...	5.9671...	1.00065...	1.00065...
6	6.99631...	1.00005...	1.00005...	6.99631...	1.00005...	1.00005...
7	7.99967...	1.00000...	1.00000...	7.99967...	1.00000...	1.00000...
8	8.99997...	1.00000...	1.00000...	8.99997...	1.00000...	1.00000...
9	9.99999...	1.00000...	1.00000...	9.99999...	1.00000...	1.00000...
10	10.99999...	1.00000...	1.00000...	10.99999...	1.00000...	1.00000...

Таблица 4.1: Значения некоторых членов последовательности  $\{ix(q, h)\}$

## Заключение

В настоящей работе рассматривались и решались несколько ранее открытых задач экстремальной и перечислительной комбинаторики паросочетаний в графах. В ней предложен новый метод поиска графов из заданных классов, имеющих максимальное значение индекса Хосойи (=количества паросочетаний), основанный на специальных локальных преобразованиях графов. С помощью данного метода были выявлены все графы, имеющие максимальный индекс Хосойи среди  $n$ -вершинных деревьев диаметра не более чем 5, деревьев с 5 или с 6 листьями, а также связных  $n$ -вершинных графов с  $n + 2$  ребрами при всех достаточно больших  $n$ . В настоящей работе также получены виды асимптотик количеств паросочетаний и порожденных паросочетаний в полных  $q$ -арных деревьях при стремлении их высоты к бесконечности.

Возможные дальнейшие перспективы развития темы данного исследования состоят в построении новых преобразований графов, увеличивающих индекс Хосойи, а также в их применении при решении открытых задач экстремальной и перечислительной комбинаторики.

# Литература

- [1] Емеличев В.А., Мельников О.И., Сарванов В.И., Тышкевич Р.И. Лекции по теории графов. — М.: Наука, 1990. — 384 С.
- [2] Кузьмин Н.А. О деревьях радиуса 2 с максимальным количеством паросочетаний // Журнал Средневолжского математического общества. — 2020. — Т. 22, № 2. — С. 177–187.
- [3] Кузьмин Н.А., Малышев Д.С. Новое доказательство результата о полном описании  $(n, n + 2)$ -графов с максимальным значением индекса Хосойи // Математические заметки. — 2022. — Т. 111, № 2. — С. 258–276.
- [4] Кузьмин Н.А., Малышев Д.С. Перечисление паросочетаний в полных  $q$ -арных деревьях // Математические заметки. — 2022. — Т. 111, № 3. — С. 393–402.
- [5] Кузьмин Н.А., Малышев Д.С. О деревьях диаметра 5 с максимальным количеством паросочетаний // Математический сборник. — 2023. — Т. 214, № 2. — С. 143–154.
- [6] Кузьмин Н.А., Малышев Д.С. О 5- и 6-листных деревьях, имеющих наибольшее количество паросочетаний // Математические заметки. — 2024. — Т. 115, № 3. — С. 372–385.
- [7] Талецкий Д.С., Малышев Д.С. О количестве максимальных независимых множеств в полных  $q$ -арных деревьях // Дискретная математика. — 2016. — Т. 28, № 4. — С. 139–149.
- [8] Харари Ф. Теория графов. — М.: Мир, 1982. — 301 С.
- [9] Bondy A., Murty U. Graph theory. — Springer-Verlag: Graduate texts in mathematics, V. 244, 2008. — 655 P.
- [10] Chen X., Zhao B., Zhao P. Six-membered ring spiro chains with extremal Merrifield-Simmons index and Hosoya index // MATCH Communications in Mathematical and in Computer Chemistry. — 2009. — Vol. 62. — P. 657–665.
- [11] Cruz R., Martin C.A., Rada J. Computing the Hosoya index of catacondensed hexagonal systems // MATCH Communications in Mathematical and in Computer Chemistry. — 2017. — Vol. 77. — P. 749–764.
- [12] Deng H. The largest Hosoya index of  $(n, n + 1)$ -graphs // Computers and Mathematics with Applications. — 2008. — Vol. 56. — P. 2499–2506.
- [13] Deng H., Chen S. The extremal unicyclic graphs with respect to Hosoya index and Merrifield-Simmons index // MATCH Communications in Mathematical and in Computer Chemistry. — 2008. — Vol. 59, № 1. — P. 171–190.
- [14] Diestel R. Graph theory. — Springer-Verlag: Graduate texts in mathematics, V. 173, 2016. — 447 P.

- [15] Dobrynin A.A., Entringer R., Gutman I. Wiener index for trees: theory and applications // *Acta Applicandae Mathematicae*. — 2001. — Vol. 66, № 3. — P. 211–249.
- [16] Dobrynin A.A., Gutman I., Klavzar S., Zigert P. Wiener index of hexagonal systems // *Acta Applicandae Mathematicae*. — 2002. — Vol. 72, № 3. — P. 247–294.
- [17] Gutman I. Acyclic systems with extremal Hückel  $\pi$ -electron energy // *Theoretical Chemistry Accounts*. — 1977. — Vol. 45. — P. 79–87.
- [18] Gutman I. Graphs with greatest number of matchings Hosoya index // *Publications de l'Institut Mathématique*. — 1980. — Vol. 27. — P. 67–76.
- [19] Gutman I. Correction of the paper “Graphs with greatest number of matchings” // *Publications de l'Institut Mathématique*. — 1982. — Vol. 32. — P. 61–63.
- [20] Gutman I. Extremal hexagonal chains // *Journal of Mathematical Chemistry*. — 1993. — Vol. 12. — P. 197–210.
- [21] Hosoya H. Topological index. A newly proposed quantity characterizing the topological nature of structural isomers of saturated hydrocarbon // *Bulletin of the Chemical Society of Japan*. — 1971. — Vol. 44. — P. 2332–2339.
- [22] Hosoya H. The topological index  $Z$  before and after 1971 // *Internet Electronic Journal of Molecular Design*. — 2002. — Vol. 1. — P. 428–442.
- [23] Hosoya H. Important mathematical structures of the topological index  $Z$  for tree graphs // *Journal of Chemical Information and Modeling*. — 2007. — Vol. 47. — P. 744–750.
- [24] Hosoya H. Mathematical meaning and importance of the topological index  $Z$  // *Croatica Chemica Acta*. — 2007. — Vol. 80. — P. 239–249.
- [25] Hosoya H. The most private features of the topological index // *MATI*. — 2019. — Vol. 1. — P. 25–33.
- [26] Jordan C. Sur les assemblages de lignes // *Journal für die reine und angewandte Mathematik*. — 1869. — Vol. 70. — P. 185–190.
- [27] Kirschenhofer P., Tichy R. Fibonacci numbers of graphs: II // *The Fibonacci Quarterly*. — 1983. — Vol. 21, № 3. — P. 219–229.
- [28] Li X., Zhao H., Gutman I. On the Merrifield-Simmons index of trees // *MATCH Communications in Mathematical and in Computer Chemistry*. — 2005. — Vol. 54. — P. 389–402.
- [29] Lia S., Lib X., Jinga W. On the extremal Merrifield-Simmons index and Hosoya index of quasi-tree graphs // *Discrete Applied Mathematics*. — 2009. — Vol. 157, № 13. — P. 2877–2885.
- [30] Liu Y., Zhuang W., Liang Z. Largest Hosoya index and smallest Merrifield-Simmons index in tricyclic graphs // *MATCH Communications in Mathematical and in Computer Chemistry*. — 2015. — Vol. 73. — P. 195–224.
- [31] Merrifield R.E., Simmons H.E. *Topological methods in chemistry*, Wiley, New York. — 1989.
- [32] Ou J. On acyclic molecular graphs with maximal Hosoya index, energy, and short diameter // *Journal of Mathematical Chemistry*. — 2008. — Vol. 43, № 1. — P. 221–233.

- [33] Ou J. Maximal Hosoya index and extremal acyclic molecular graphs without perfect matching // Applied Mathematics Letters. — 2006. — Vol. 19, № 7. — P. 391–397.
- [34] Oz M.S., Martin C.A., Rada J. Computation method of the Hosoya index of primitive coronoid systems // Mathematical Biosciences and Engineering. — 2017. — Vol. 19, № 10. — P. 9842–9852.
- [35] Ren H., Zhang F. Extremal double hexagonal chains with respect to  $k$ -matchings and  $k$ -independent sets // Discrete Applied Mathematics. — 2007. — Vol. 115, № 17. — P. 2269–2281.
- [36] Ren H., Zhang F. Double hexagonal chains with maximal Hosoya index and minimal Merrifield–Simmons index // Journal of Mathematical Chemistry. — 2007. — Vol. 42. — P. 679–690.
- [37] Şahin B. On Hosoya Index and Merrifield-Simmons Index of trees with given domination number // Numerical Methods for Partial Differential Equations. — 2020. — Vol. 38, № 4. — P. 904–915.
- [38] Shiu W. Extremal Hosoya index and Merrifield–Simmons index of hexagonal spiders // Discrete Applied Mathematics. — 2008. — Vol. 156, № 15. — P. 2978–2985.
- [39] Tian W., Tian S., He X., Wang Y. Extremal problem with respect to Merrifield-Simmons index and Hosoya Index of a class of polygonal chains // Wuhan University Journal of Natural Sciences. — 2014. — Vol. 19, № 4. — P. 295–300.
- [40] Wagner S. Extremal trees with respect to Hosoya index and Merrifield-Simmons index // MATCH Communications in Mathematical and in Computer Chemistry. — 2006. — Vol. 57. — P. 221–233.
- [41] Wiener H. Structural determination of paraffin boiling points // Journal of the American Chemical Society. — 1947. — Vol. 1, № 69. — P. 17–20.
- [42] Xu L. The second largest Hosoya index of unicyclic graphs // MATCH Communications in Mathematical and in Computer Chemistry. — 2007. — Vol. 62. — P. 621–628.
- [43] Xu K. On the Hosoya index and the Merrifield–Simmons index of graphs with a given clique number // Applied Mathematics Letters. — 2010. — Vol. 23, № 4. — P. 395–398.
- [44] Xu K. The Hosoya indices and Merrifield–Simmons indices of graphs with connectivity at most  $k$  // Applied Mathematics Letters. — 2012. — Vol. 25, № 3. — P. 476–480.
- [45] Xu K., Gutman I. The greatest Hosoya index of bicyclic graphs with given maximum degree // MATCH Communications in Mathematical and in Computer Chemistry. — 2011. — Vol. 66. — P. 795–824.
- [46] Xu K., Xu B. Some extremal unicyclic graphs with respect to Hosoya index and Merrifield-Simmons index // MATCH Communications in Mathematical and in Computer Chemistry. — 2009. — Vol. 62. — P. 629–648.
- [47] Yan W., Ye L. On the maximal energy and the Hosoya index of a type of trees with many pendant vertices // MATCH Communications in Mathematical and in Computer Chemistry. — 2005. — Vol. 53, № 2. — P. 449–459.
- [48] Zhang L. The proof of Gutman’s conjectures concerning extremal hexagonal chains // Journal of Systems Science and Mathematical Sciences. — 1998. — Vol. 18, № 4. — P. 460–465.

В Оргкомитет Смотра дипломных работ математиков России  
от Петровой Юлии Эдуардовны

Заявление о новизне

Сообщаю, что новыми в моей представленной на Смотр выпускной квалификационной работе (далее - работа) под названием «Об эндоморфизмах  $n$ -мерного тора с гиперболическими сжимающимися репеллерами коразмерности один» являются следующие результаты: предложена конструкция  $C^\infty$ -гладкого эндоморфизма и исследованы его свойства. В частности, получено, что данный эндоморфизм представляет собой  $k$ -листное накрытие и является локальным диффеоморфизмом, который имеет три гиперболические неподвижные точки: сток и два седла индекса Морса 1. Кроме того, доказано, что глобальное устойчивое многообразие неподвижной точки состоит из счетного числа областей гомеоморфных  $1n$ -мерному диску. Дополнением к этому множеству является гиперболическим множеством  $\Lambda$  размерности  $n - 1$ , которое представляет собой ламинацию без замкнутых слоев.

Также сообщаю, что для проверки новизны мною было проделано следующее:

- Проведена серия консультаций с научным руководителем настоящей работы Починкой Ольгой Витальевной, доктором физико-математических наук, профессором кафедры фундаментальной математики НИУ ВШЭ НН.
- Получена оценка рецензента Митряковой Татьяны Михайловны, кандидата физико-математических наук, доцента кафедры прикладной математики ННГУ им. Н.И.Лобачевского.
- Часть результатов была представлена на школе-конференции «Современные геометрические и топологические методы». Образовательный центр «Сириус», г.Сочи.

Подтверждаю, что являюсь автором предоставляемой на Смотр работы и прошу принять её для участия в Смотре. Принимаю на себя обязательство соблюдать правила Смотра. Также (в соответствии с п. 4 Положения о Смотре) принимаю на себя обязательство оценить 5 работ участников Смотра, выданных мне Оргкомитетом в результате жеребьёвки и сверх того оценить 2-5 работ других участников Смотра на мой выбор. Я понимаю правила оценки работ, приведённые в п. 4.3 Положения о Смотре. Даю согласие на публикацию адреса моей электронной почты.

Защита работы состоялась 10.06.2024. На Смотр представлен окончательный текст работы.

Подпись



ФИО полностью: Петрова Юлия Эдуардовна

Дата 12.06.2024

г.Нижний Новгород, Россия

Federal State Autonomous Educational Institution of Higher Professional Education  
National Research University «Higher School of Economics»  
Nizhny Novgorod

**Faculty of Informatics, Mathematics, and Computer Science**  
**Master's program 01.04.01 «Mathematics»**

**Final Qualifying Work**

**On Endomorphisms of an  $n$ -Dimensional Torus with Hyperbolic Contracting  
Repellers of Codimension One**

Completed by:

2 year student

Petrova Iuliia Eduardovna

Scientific adviser:

Professor, Doctor of Physical and  
Mathematical Sciences

Pochinka Olga Vitalievna

Nizhny Novgorod, 2024.

# Contents

Contents	1
1 Introduction	3
2 Necessary definitions and auxiliary results	4
3 Construction of $C^\infty$ -smooth endomorphism	6
4 Properties of the $DA$ -endomorphism	7
5 Proof of main theorem 1	11
6 Conclusion	15
References	16

## Abstract

The final qualifying work considers continuous maps of an  $n$ -dimensional ( $n \geq 3$ ) torus which induce hyperbolic action in the fundamental group using of an integer hyperbolic matrix, with one eigenvalue modulo more than one and the rest less than one. The paper considers a superposition of an Anosov endomorphism of type  $(1, n - 1)$ , which is a local diffeomorphism and a shift per time unit of auxiliary flow is proposed. It is proved that this superposition is a  $k$ -sheet covering and a local diffeomorphism having a hyperbolic sink and a non-trivial repeller, which is the lamination of codimension 1.

# 1 Introduction

In 1967 S. Smale proposed a method for constructing hyperbolic attractors and repellers of codimension one for diffeomorphisms defined on a torus (see [1]). According to S. Smale, it is possible to introduce and apply a so-called surgical operation to the Anosov diffeomorphism and obtain the so-called DA-diffeomorphism with non-wandering set consisting of one expanding attractor of codimension one and one hyperbolic source fixed point, or one contracting repeller and hyperbolic sink fixed point. A description of the surgery can be found [2, 3].

This surgery is a local perturbation the idea of which is as follows. The fixed point of the Anosov diffeomorphism under the action of a perturbation in some of its neighborhood changes its type from saddle to sink (source), two saddle hyperbolic fixed points appear in its neighborhood and complement of its stable (unstable) manifold is a non-trivial contracting repeller (expanding attractor) of codimension one. Moreover, this set (attractor or repeller) are nowhere dense and has a local structure of direct product of the Cantor set on an interval.

Since Anosov endomorphisms are local diffeomorphisms, generalizing the Smale surgery for Anosov endomorphisms is a natural task. The fundamental difference between Anosov endomorphisms and Anosov diffeomorphisms is the possible dependence of unstable manifolds of points on negative semiorbits. This fact explains the structural instability of an Anosov endomorphisms, which are not diffeomorphisms or expanding maps [4]. In papers [5], Smale surgery was generalized to an Anosov endomorphisms of a two-dimensional torus. In article [6], it was shown that by applying a surgical operation to an  $A$ -endomorphism, it is impossible to obtain a  $DA$ -endomorphism with a non-trivial attractor. In the article [5], it is established that as a result of a surgical operation applied to the algebraic of an Anosov endomorphism of two-dimensional torus, a  $DA$ -endomorphism is obtained, the non-wandering set of which contains a non-trivial one-dimensional repeller which is one-dimensional orientable lamination and nowhere dense set.

This final qualifying work is devoted to the generalization of the results obtained in [5] to the  $n$ -dimensional torus. The main result of this work is the proof of the following theorem:

**Theorem 1.** *In every homotopy class of continuous maps  $\mathbb{T}^n$  containing an Anosov endomorphism of type  $(1, n - 1)$ , there exists a  $C^\infty$ -smooth endomorphism having a hyperbolic fixed point (sink) and a nontrivial repeller  $\Lambda$  such that*

- $\Lambda$  is hyperbolic;
- $\Lambda$  is lamination with no closed leaves;
- the set  $\mathbb{T}^n \setminus \Lambda$  is homeomorphic to the countable union of open  $n$ -dimensional disks.

This final qualifying work has the following structure. In the section 2 provided auxiliary theoretical information. In section 3, the existence of an integer hyperbolic matrix of dimension  $n \times n$  with one eigenvalue modulo greater than one and  $n - 1$  less than one is proved, which induces an Anosov endomorphism of type  $(1, n - 1)$  on the  $n$ -dimensional torus. Also, this section presents a generalized construction of a  $C^\infty$ -smooth endomorphism, defined as a superposition of an Anosov endomorphism of type  $(1, n - 1)$  and some flow. In the section 4, it is investigated the properties of the given endomorphism. In the section 5, it is proved the Theorem 1 .

## 2 Necessary definitions and auxiliary results

To formulate the results, I introduce the necessary theoretical information. Let us consider the  $M^n$  which is  $n$ -dimensional ( $n \geq 1$ ) a smooth closed manifold. A  $C^r$ -endomorphism is a  $C^r$ -smooth surjective map of  $f : M^n \rightarrow M^n$ .

**Definition 2.1.** Let the point  $x_0 \in M^n$ . The set  $\{x_i\}_{i=-\infty}^{\infty} = O(x_0)$  such that  $f(x_i) = x_{i+1}$  for any  $i \in \mathbb{Z}$  is called orbit of  $x_0$ .

The set  $\{x_i\}_{i=0}^{\infty} = O^+(x_0) \subset O(x_0)$  is called positive semi-orbit of the point  $x_0$ .

The set  $\{x_i\}_{i=-\infty}^0 = O^-(x_0)$  is called negative semi-orbit of the orbit  $O(x_0)$ .

Note that a negative semi-orbit, unlike a positive one, can be defined ambiguously. Therefore, orbits passing through a fixed point can have the cardinality which is equal continuum.

Then, I assume that the map  $f$  is  $C^1$ -smooth.

**Definition 2.2.** An orbit  $O(x_0)$  for an endomorphism  $f$  is called hyperbolic if there is a continuous splitting of the tangent subbundle  $T_{O(x_0)}M^n = \bigcup_{i=-\infty}^{\infty} T_{x_i}M^n$  as a direct sum

$$T_{O(x_0)}M^n = \mathbb{E}_{O(x_0)}^s \oplus \mathbb{E}_{O(x_0)}^u = \bigcup_{i=-\infty}^{\infty} \mathbb{E}_{x_i}^s \oplus \mathbb{E}_{x_i}^u,$$

invariant under  $Df$  that is

$$Df(\mathbb{E}_{O(x_0)}^s) = \mathbb{E}_{O(x_0)}^s \quad \text{and} \quad Df(\mathbb{E}_{O(x_0)}^u) = \mathbb{E}_{O(x_0)}^u$$

and such that, with respect to some Riemannian metric on  $TM$

$$0 < \|Df^m(v)\| \leq c\mu^m\|v\| \quad \text{and} \quad \|Df^{-m}(w)\| \leq c\mu^m\|w\|$$

for  $v \in \mathbb{E}_{O(x_0)}^s$ ,  $v \neq 0$ ,  $w \in \mathbb{E}_{O(x_0)}^u$ ,  $w \neq 0$  and for some constants  $c > 0$ ,  $0 < \mu < 1$

**Definition 2.3.** If any orbit of the invariant set  $\Lambda$  is hyperbolic and the constants  $c > 0$ ,  $0 < \mu < 1$  in the estimates do not depend on the choice of orbit, then the set  $\Lambda$  is hyperbolic.

**Definition 2.4.** A set of  $\Lambda$  is called strictly invariant if  $f(\Lambda) = \Lambda = f^{-1}(\Lambda)$ .

Due to the fact that the set  $\Lambda$  is hyperbolic, it cannot contain critical points of the endomorphism  $f$ . A point  $x$  is called critical if the derivative  $Df_x : T_xM \rightarrow T_{f(x)}$  is not a one-to-one linear map.

**Definition 2.5.** An endomorphism  $f : M^n \rightarrow M^n$  is called an Anosov endomorphism if the manifold  $M^n$  is a hyperbolic set.

We say that the Anosov endomorphism has the type  $(m_1, m_2)$ , where  $m_1$  is the dimension of an unstable subbundle,  $m_2$  is the dimension of a stable subbundle of a hyperbolic set.

**Definition 2.6.** Let  $f : M^n \rightarrow M^n$  be an endomorphism of a closed smooth manifold,  $\Lambda$  be an invariant hyperbolic set. Theorem 2.1[2] implies that there is a constant  $\varepsilon > 0$  such that the locally stable and unstable submanifolds of a point  $x \in \Lambda$

$$W_{x,\varepsilon}^s = \{y \in M^n \mid \rho(f^n(y), f^n(x)) < \varepsilon, n \geq 0\},$$

$$W_{x,O(x),\varepsilon}^u = \{y \in M^n \mid \exists O(y) \rho(y_{-n}, x_{-n}) < \varepsilon, n \geq 0\},$$

with  $x_{-n}$  and  $y_{-n}$  chosen in the orbits  $O(x)$  and  $O(y)$ , respectively, are smoothly embedded discs of dimensions  $\dim \mathbb{E}_x^s$  and  $\dim \mathbb{E}_{O(x)}^u$ , tangent to  $\mathbb{E}_x^s$  and  $\mathbb{E}_{O(x)}^u$  respectively.

**Definition 2.7.** Let  $\Lambda$  be an invariant hyperbolic subset for an  $A$ -endomorphism  $f : M^n \rightarrow M^n$  of a closed smooth manifold  $M^n$ . The global stable and unstable submanifolds of a point  $x \in \Lambda$  are defined as:

$$W_x^s = \{y \in M^n \mid \rho(f^n(y), f^n(x)) \rightarrow 0, n \rightarrow +\infty\},$$

$$W_{x,O(x)}^u = \{y \in M^n \mid \exists O(y) \rho(y_{-n}, x_{-n}) \rightarrow 0, n \rightarrow +\infty\},$$

with  $x_{-n}$  and  $y_{-n}$  chosen in the orbits  $O(x)$  and  $O(y)$ , respectively, are smoothly embedded discs of dimensions  $\dim \mathbb{E}_x^s$  and  $\dim \mathbb{E}_{O(x)}^u$ , tangent to  $\mathbb{E}_x^s$  and  $\mathbb{E}_{O(x)}^u$  respectively.

**Definition 2.8.** A set has the structure of a local direct product if there exists such a  $\varepsilon_0 > 0$  that for any  $\varepsilon \in (0; \varepsilon_0]$  there exists  $\delta > 0$  such that for any two points  $x, y$  belonging to this set, such that  $\varrho(x, y) < \delta$  the intersection of  $W_{x,\varepsilon}^s \cap W_{y,O(y),\varepsilon}^u$  consists of exactly one point.

**Proposition 2.1.** The hyperbolic set  $\Lambda$  of an endomorphism has the structure of a local direct product.

**Proposition 2.2.** The global stable manifold of an arbitrary point  $x \in \Lambda$  is defined as:

$$\widetilde{W}^s(x) = \bigcup_{k=0}^{\infty} f^{-k}(W_{f^k(x),\varepsilon}^s)$$

A connected global stable manifold of an arbitrary point  $x \in \Lambda$  is defined as follows:

$$W^s(x) = \overline{\bigcup_{k=0}^{\infty} f^{-k}(W_{f^k(x),\varepsilon}^s)}$$

The global unstable manifold of a point  $x$  corresponding to a fixed orbit  $O(x) \subset \Lambda$  is defined as follows:

$$W^u(x, O(x)) = \bigcup_{k=0}^{\infty} f^k(W_{x_{-k}, O(p), \varepsilon}^u), \quad x_{-k} \in O(x)$$

**Definition 2.9.** Immersion is a smooth map of smooth manifolds whose differential is injective everywhere.

**Definition 2.10.**  $C^{r,l}$ -smooth  $d$ -dimensional lamination on the  $n$ -dimensional manifold  $M^n$  ( $1 \leq d \leq n-1, 0 \leq l \leq r \leq \infty$ ) is a closed set  $\mathcal{L} \subset M^n$ , lamination is a closed set that is a union of  $\cup_{\alpha} L_{\alpha}$  pairwise disjoint images of  $L_{\alpha}$  of some  $d$ -dimensional manifolds with respect to  $C^r$ -smooth injective immersion, and for any point  $x \in \mathcal{L}$  there is a neighborhood  $U(x)$  and  $C^l$  is a diffeomorphism of  $\psi : U(x) \rightarrow \mathbb{R}^n$  such that any component of the intersection connectivity of  $U(x) \cap L_{\alpha}$  is mapped by the diffeomorphism of  $\psi$  onto an open subset of  $d$ -dimensional space  $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_{d+1} = c_{d+1}, \dots, x_n = c_n\}$ , in this case, the restriction of  $\psi$  on any component of the intersection connectivity of  $U(x) \cap L_{\alpha}$  is a  $C^r$ -diffeomorphism on the image.

**Definition 2.11.** The Frobenius companion matrix of the monic polynomial  $p(t) = c_0 + c_1 t + \dots + c_{n-1} t^{n-1} + t^n$  is the square matrix defined as

$$C(p) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -c_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -c_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -c_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -c_{n-1} \end{pmatrix}.$$

### 3 Construction of $C^\infty$ -smooth endomorphism

**Lemma 3.1.** *There is a matrix  $A \in GL_n(\mathbb{Z})$  of dimension  $n \times n$  with the following properties:*

1.  $|\det(A)| = k$ , where  $k \neq 1$ ;
2.  $|\lambda_u| > 1$  and  $|\lambda_{s_1}| < 1, \dots, |\lambda_{s_{n-1}}| < 1$ , where  $\lambda_u, \lambda_{s_i}$  is eigenvalues of this matrix.

**Proof.** Consider the monic polynomial  $p(t) = t^n - s^{n-1}t^{n-1} + k$ , where  $s \in \mathbb{Z}^+$  and introduce the matrix

$$C(p) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -k \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -s^{n-1} \end{pmatrix}.$$

This matrix is companion matrix of characteristic polynomial  $p(t)$  with integer coefficients and  $|\det(C(p))| = k$ ,  $C(p) \in GL_n(\mathbb{Z})$ .

Let us denote the product of  $st$  by the new variable  $m = st$  in the polynomial  $p(t)$ . Then we get a polynomial  $q(m) = bm^n - m^{n-1} + k$ ,  $b = s^{-n}$ . Consider the  $q_b(m) = bm^n - m^{n-1} + k$  which is full one-parameter family of polynomials.  $q_0(m) = -m^{n-1} + k$  (for  $b = 0$ ) has  $n - 1$  different roots on a circle with radius  $\sqrt[n-1]{k}$ . Then there are  $n - 1$  roots  $m_1(b), \dots, m_{n-1}(b)$  of the polynomial  $q_b(m)$  (by the Implicit Function Theorem). Moreover, these roots continuously depend on  $b$  and at  $b \rightarrow 0$  converge to the roots of the polynomial  $q_0(m)$ . Then the polynomial  $q_b(m)$  has  $n - 1$  roots in a annulus with radii  $r = \sqrt[n-1]{k} \pm \rho$  for any  $\rho$  and for all sufficiently small  $b$ .

Let's return to the polynomial  $p(t)$  and the initial variables. Given a polynomial with a sufficiently large value of  $s$  has  $n - 1$  different roots within a ring with radii  $r = \frac{\sqrt[n-1]{k} \pm \rho}{s}$ . We obtain that inside the unit circle, the polynomial  $p(t)$  has  $n - 1$  of different roots for sufficiently large values of  $s$ . Since the product of the roots must be equal to  $\sqrt[n-1]{k}$ , therefore one root lies outside the unit circle.  $\square$

Consider the algebraic endomorphism  $g : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$  induced by the matrix  $A$  satisfying the conditions of the lemma 3.1. This map is an Anosov endomorphism that is a local diffeomorphism and a  $k$ -sheeted covering.

Let us  $|\lambda_u| > 1, |\lambda_{s_1}| < 1, \dots, |\lambda_{s_{n-1}}| < 1$  is eigenvalues for matrix  $A$ . Then,  $\vec{e}_u, \vec{e}_{s_1}, \dots, \vec{e}_{s_{n-1}}$  is the eigenvectors of this matrix. Let's choose a coordinate system such as  $(v_1, v_2, \dots, v_n)$  that the mutually perpendicular vectors  $\vec{e}_u, \vec{e}_{s_1}, \dots, \vec{e}_{s_{n-1}}$  form an orthogonal basis this coordinate system. If necessary, the transition to an orthonormal system is performed by replacing  $\vec{e}_i = \frac{\vec{e}_i}{\|\vec{e}_i\|}$ . These vectors define a stable foliation of dimension  $n - 1$  and an one-dimensional unstable foliation of the endomorphism  $g$ .

The point  $O$  is a hyperbolic fixed point of the saddle type of the endomorphism  $g$ , which represents the image of the origin of coordinates with a natural projection of  $\mathbb{R}^n$  onto  $\mathbb{T}^n$ . The complete preimage of the point  $g^{-1}(O)$  consists of  $k$  points due to the fact that  $|\det(A)| = k$ .

Consider a number  $r_0 > 0$  in which  $\lambda_u r_0$  – the neighborhoods of the points from the complete preimage do not intersect. Let's introduce  $C^\infty$ -function (so-called bump-function)  $\delta : [0, \infty) \rightarrow [0, 1]$  such that  $\delta(r) \equiv 1$  for  $r \in [0; \frac{r_0}{2}]$ ,  $\delta(r) \equiv 0$  at  $r \in [r_0; \infty)$  and  $\delta(r)$  are strictly monotonic on the interval  $[\frac{r_0}{2}, r_0]$ .

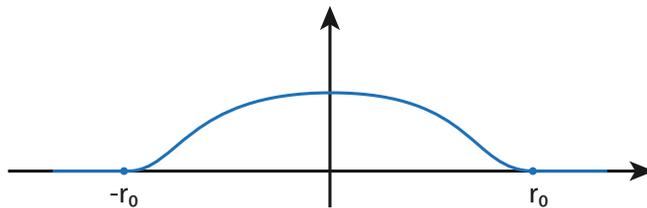


Figure 1: Bump-functiion

Consider the system of differential equations

$$\begin{cases} \dot{v}_1 = -v_1 \cdot \ln(\lambda_u) \cdot \delta(\sqrt{v_1^2 + \dots + v_n^2}), \\ \dot{v}_2 = 0 \\ \dots \\ \dot{v}_n = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Denote the time shift  $t$  along the trajectories of this system by  $\varphi^t$ . Fixing some number

$$t_0 > 1. \quad (2)$$

Let us introduce

$$f = g \circ \varphi^{t_0} \quad (3)$$

In the next section, we will explore the properties of this map.

## 4 Properties of the $DA$ -endomorphism

**Lemma 4.1.** *The endomorphism  $f : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$  is a local diffeomorphism and a  $k$ -sheeted covering homotopic to the endomorphism  $g$ . Moreover, the unstable foliation  $W_g^u$  is invariant under the endomorphism  $f$ :*

$$f(W_g^u(z)) = W_g^u(f(z)), \quad z \in \mathbb{T}^n;$$

and the curve  $W_g^u(O)$  is invariant with respect to  $f$ :  $f(W_g^u(O)) = W_g^u(O)$

**Proof.** The proof of these facts follows directly from the properties of the map  $g$  and the properties of the diffeomorphism  $\varphi^{t_0}$ . Due to the fact that the Anosov endomorphism  $g$  is a local diffeomorphism, and the flow  $\varphi^t$  with fixed time  $t_0$  is a diffeomorphism, then their superposition  $f$  is a local diffeomorphism. Since  $g$  is a  $k$ -sheeted covering, then  $f$  is also a  $k$ -sheeted covering.  $f$  is homotopic to  $g$  since the  $\varphi^{t_0}$  is homotopic to the identity.

To prove the invariance of the unstable curve of the fixed point  $O$  of the endomorphism  $f$ , consider the trajectories of the system 1 and get follows.

The foliation  $W_g^u$  is  $f$ -invariant, since the trajectories of the system (1) are parallel to the  $Ov_1$  axis. The point  $O$  is fixed with respect to the maps  $f$  and  $g$ , so the curve corresponding to the unstable manifold of this point is is invariant with respect to  $f$ .  $\square$

Consider the solution of the system (1) satisfying the initial condition  $(0, (v_1^*, \dots, v_n^*))$ :

$$(v_1(t, (v_1^*, \dots, v_n^*)); \dots; v_n(t, (v_1^*, \dots, v_n^*))).$$

It follows from the equations of the system that the following equalities hold for any  $t$ :  $v_2(t, (v_1^*, \dots, v_n^*)) = v_2^*, \dots, v_n(t, (v_1^*, \dots, v_n^*)) = v_n^*$ . Therefore, the Jacobian of the diffeomorphism

$$\varphi^t : (v_1^*, \dots, v_n^*) \rightarrow (v_1(t, (v_1^*, \dots, v_n^*)); \dots; v_n(t, (v_1^*, \dots, v_n^*)))$$

for the time  $t = t_0$  as:

$$D\varphi^{t_0} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial v_1^*} & \cdots & \frac{\partial v_1}{\partial v_n^*} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Jacobian of the endomorphism  $g$  is equal

$$Dg = \begin{pmatrix} \lambda_u & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_{s_1} & \delta & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{s_2} & \delta & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_{s_n} \end{pmatrix}, \quad \text{где } \delta = \begin{cases} 0, & \lambda_{s_i} \neq \lambda_{s_j} \\ 1, & \lambda_{s_i} = \lambda_{s_j} \end{cases}$$

Since  $f = g \circ \varphi^{t_0}$ , we get that the Jacobian of the endomorphism  $f$  at any point in the neighborhood of  $U(r_0)$  is equal to

$$Df = \begin{pmatrix} \lambda_u & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_{s_1} & \delta & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{s_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_{s_n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial v_1^*} & \frac{\partial v_1}{\partial v_2^*} & \frac{\partial v_1}{\partial v_3^*} & \cdots & \frac{\partial v_1}{\partial v_n^*} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$$Df = \begin{pmatrix} \lambda_u \cdot \frac{\partial v_1}{\partial v_1^*} & \lambda_u \cdot \frac{\partial v_1}{\partial v_2^*} & \lambda_u \cdot \frac{\partial v_1}{\partial v_3^*} & \cdots & \lambda_u \cdot \frac{\partial v_1}{\partial v_n^*} \\ 0 & \lambda_{s_1} & \delta & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{s_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_{s_n} \end{pmatrix}$$

This equality can be considered on the entire torus  $\mathbb{T}^n$ , because outside the  $r_0$ -neighbourhood  $U(r_0)$   $\frac{\partial v_1}{\partial v_1^*} = 1$  and  $\frac{\partial v_1}{\partial v_2^*} = 0, \dots, \frac{\partial v_1}{\partial v_n^*} = 0$ .

**Lemma 4.2.** For a fixed point  $p_0$  of the map  $f$ , the following is performed

1.  $p_0$  is hyperbolic sink
2.  $U(p_0, \frac{r_0}{2}) \subset W^s(p_0)$

**Proof.** In the neighborhood  $U(p_0, \frac{r_0}{2})$  the equations of system (1) are written as follows :

$$v_1 = -v_1 \cdot \ln(\lambda_u), \quad v_2 = 0, \quad \dots, \quad v_n = 0. \quad (5)$$

According to 4 the Jacobian of the map  $\varphi^{t_0}$  in the neighborhood  $U(p_0, \frac{r_0}{2})$  it has the form

$$D\varphi^{t_0} = \begin{pmatrix} \lambda_u^{-t_0} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \vdots & 1 \end{pmatrix}$$

Then the Jacobian of the endomorphism  $f$  in  $r_0/2$ -neighborhood of the point  $p_0$  looks like this

$$Df = \begin{pmatrix} \lambda_u^{-t_0+1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_{s_1} & \delta & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_{s_n} \end{pmatrix}.$$

Based on the condition  $t_0 > 1$ , all eigenvalues of the Jacobian matrix of the endomorphism  $f$  at the point  $p_0$  are modulo less than one. Therefore, the point  $p_0$  is a hyperbolic sink and its neighborhood lies in the region of its attraction.  $\square$

**Lemma 4.3.** *There are only three fixed points  $p_0, p_1, p_2$  of the endomorphism  $f$  located on the leave  $W_g^u(O)$ .  $p_0$  is the hyperbolic sink,  $p_1$  and  $p_2$  are hyperbolic saddles with the Morse index 1, with the sink point located between the saddles.*

**Proof.** Let us denote  $L$   $g$ -invariant leaf of the foliation  $W_g^u$ . Due to the fact that the restriction  $g|_L$  is a linear stretch with a coefficient of  $\lambda_u$  (using an internal metric), the layer  $L$  contains a single fixed point of this restriction. To prove the lemma, firstly, to show that the endomorphism  $f$  has no fixed points outside the neighborhood of  $U(r_0)$ . On the invariant curve  $W_g^u(O)$ , the point  $O$  is the only fixed point of the endomorphism  $g$ . And since outside the neighborhood  $U(r_0)$  the map  $f$  coincides with the endomorphism  $g$ , then the endomorphism  $f$  has no fixed points outside the neighborhood of  $U(r_0)$ .

It follows from the properties of the flow  $\varphi^t$  that the endomorphism  $f$  is, along the coordinates  $v_2, \dots, v_n$ , a linear contraction in the neighborhood of  $U(r_0)$ .

Therefore, any fixed point of  $f$  belonging to the neighborhood of  $U(r_0)$  lies on a straight line, defined by the equations  $v_2 = 0, \dots, v_n = 0$ . The restriction  $f$  to the ray  $v_1 \geq 0, v_2 = 0, \dots, v_n = 0$  coincides with the map  $f_{0,\lambda}$  inside the neighbourhood  $U(r_0)$ . It follows from Lemma 4.2 and flow properties that the map  $f_{0,\lambda}$  on a given ray has exactly two fixed points,  $v = 0, v = u_{0,\lambda}^*$ , being a hyperbolic sink and a hyperbolic source, respectively. Since the system is symmetric with respect to the coordinate axes, we have another fixed point that is a hyperbolic source, hence the lemma is proved.  $\square$

**Lemma 4.4.** *For a fixed point  $p_0$  of endomorphism  $f$ , there is a neighborhood of this point that does not contain other non-wandering points of the endomorphism  $f$ , except  $p_0$  and is homeomorphic to an  $n$ -dimensional disk, such that*

1.  $clf(V_0) \subset V_0, \cap_{n \geq 0} f^n(V_0) = p_0$ ;
2.  $\lambda_u \cdot \frac{\partial v_1}{\partial v_1^*} > 1$  outside  $V_0$

**Proof.** Using the notation of the previous lemma, consider the map  $f_{c,\lambda}$ . According to the definition of this map, it follows that equality  $f(v_1, c_2, \dots, c_n) = (f_{c,\lambda}(v_1), \lambda_{s_1} c_2, \dots, \lambda_{s_n} c_n)$  is true for any point  $(v_1, c_2, \dots, c_n) \in U(r_0)$ . It follows from the properties of the flow  $\varphi_0^t$  that there

is a single fixed point  $u_{c,\lambda}^*$  of the map  $f_{c,\mu}$  in the interval  $I_c$ . Define  $c_i = \frac{1}{\sqrt{n-1}}c$ . Then it follows directly from the properties of the flow that, for  $c \in [0, \tilde{c}]$  the union of points  $(u_{c,\lambda}^*, c_2, \dots, c_n)$  is a graph  $d$  of a monotonously decreasing function.

Next, we consider the union of the graph  $d$  with symmetric coordinates relative to the axes and the origin of coordinates and let's denote it as  $C$ . According to the flow properties, the curve  $C$  intersects the coordinate axes at points  $(0, \pm\tilde{c}_2, \dots, \pm\tilde{c}_n)$ ,  $(\pm u_{c,\lambda}^*, 0, \dots, 0)$  and is a closed curve without self-intersections, bounding an  $n$ -dimensional open disk  $D$  with the origin inside. All points from the region  $D$  except  $p_0$  are wandering and their positive orbits tend to a fixed point  $p_0$ . Due to the fact that the map  $f$  contracts along the  $n - 1$  axes, all points of the curve  $C$ , except for two points  $p_1$  and  $p_2$ , which are the points of intersection with the  $v_1$  axis, are wandering.

Let's prove the second statement of this lemma. Because by virtue of the system (1) outside the neighborhood  $U(r_0)$  the equalities are fulfilled  $\frac{\partial v_1}{v_1^*} = 1$  and  $\frac{\partial v_2}{v_1^*} = 0 \dots \frac{\partial v_n}{v_n^*} = 0$ , то из  $Df$  it follows that it is enough to consider the point  $(v', c_2, \dots, c_n)$  on the ray  $L_c$ , which lies outside  $D$  and inside  $U(r_0)$ . Due to the symmetry of the map  $f$  under the replacements of  $v_1$  by  $-v_1, \dots, v_n$  by  $-v_n$  it is enough to consider one case when a point has non-negative coordinates. Let's consider  $c \in [0; \tilde{c}]$ . Since the point  $(v', c_2, \dots, c_n)$  on the ray  $L_c$  lies outside  $D$ , then  $u_{c,\lambda}^* < v' < \sqrt{r_0^2 - c^2}$ . Then there is  $1 < \mu' < \lambda$  such that  $v' = \mu' \varphi^{t_0 \delta(c)}(v')$ . We get that  $v' = u_{c,\mu'}^*$  that is the point  $v'$  is a fixed point of the display  $f_{c,\mu'}$ .

Let's consider  $c \geq \tilde{c}$ . Since that  $\left. \frac{d\varphi_c^{t_0}}{dv} \right|_{v=0} = \lambda^{-t_0 \delta(c)}$ , then any point  $(v', c_2, \dots, c_n)$  for  $0 < v' < \sqrt{r_0^2 - c^2}$  is a fixed point of the map  $f_{c,\mu'}$ .

It follows from the properties of the auxiliary flow that  $\left. \frac{df_{c,\mu'}}{dv} \right|_{v=u_{c,\mu'}^*} > 1$ . Therefore

$$\lambda \cdot \frac{\partial v_1}{\partial v_{10}} = \frac{d}{dv} f_{c,\lambda} = \frac{\lambda}{\mu'} \frac{d}{dv} f_{c,\mu'} > 1$$

Thus, this inequality holds at all points of the set  $U(r_0) \setminus D$  where the coordinate  $v_1$  is nonzero.

Consider the arc  $d_\varepsilon$ , which if coincides with the arc  $d$  for  $c \geq \varepsilon$ , coincides with the intervals  $\{(u_{c,\lambda}^*, c_2, \dots, c_n) | 0 \leq c \leq \varepsilon\}$ , for  $c \leq \varepsilon$ . The union of the arc  $d_\varepsilon$  with its symmetric relative to the coordinate axes and the origin is denoted by  $C_\varepsilon$ .  $C_\varepsilon$  is a curve without self-intersections intersecting the coordinate axes at points  $(0, \pm\tilde{c}_2, \dots, \pm\tilde{c}_n)$ ,  $(\pm u_{c,\lambda}^*, 0, \dots, 0)$

The area bounded by the curve  $C_\varepsilon$  and containing the point  $p_0$  is denoted by  $V_\varepsilon$ . Since  $f-C^1$  is a smooth map and for sufficiently small  $\varepsilon$  the neighborhood of  $V_\varepsilon$  differs little from  $D$ , then outside  $V_\varepsilon$ , with the exception of points  $(0, \pm\tilde{c}_2, \dots, \pm\tilde{c}_n)$ , the second statement of the lemma is executed. Denote by  $V_0$  the connected component of the set  $f^{-1}(V_\varepsilon)$  containing the point  $p_0$ . We get that  $V_\varepsilon \subset V_0$ , so the inequality  $\lambda_u \cdot \frac{\partial v_1}{\partial v_{10}} > 1$  holds at all points outside  $V_0$ .  $\square$

**Lemma 4.5.** *Set  $\widetilde{W}^s(p_0)$  is homeomorphic to the countable union of open  $n$ -dimensional disks.*

**Proof.** From the definition of the sets  $W^s(p_0)$  and  $\widetilde{W}^s(p_0)$  it follows that the equality holds  $\widetilde{W}^s(p_0) = \bigcup_{k=0}^{\infty} f^{-k}(W^s(p_0))$ .

From the definition of  $W^s(p_0)$  it follows that this set is open and connected. Consider an arbitrary closed loop  $\xi : \mathbb{S}^n \rightarrow W^s(p_0)$ . Since  $\mathbb{S}^n$  is compact and  $\xi$  is continuous, then the set  $\xi(\mathbb{S}^n)$  is a compact subset in  $W^s(p_0)$ .

The union  $\bigcup_{k=0}^{\infty} \overline{f^{-k}(W^s(p_0))}$ , where  $\overline{f^{-k}(W^s(p_0))}$  means a lifting of the disc  $W_{p_0,\varepsilon}^s$  defined by the covering  $f$  and containing the point  $p_0$ , is an open cover of the set  $\xi(\mathbb{S}^n)$ .

Since  $\overline{f^{-k}(W^s(p_0))} \subset \overline{f^{-k-1}(W^s(p_0))}$ ,  $k \in 0 \cup \mathbb{N}$ , then there exists  $K \in \mathbb{N}$ , for which  $\xi(\mathbb{S}^n) \subset \overline{f^{-K}(W^s(p_0))}$ . Since the set  $\overline{f^{-K}(W^s(p_0))}$  is the open  $n$ -dimensional disk (as the lifting of an open disc), hence the loop  $\xi$  is contractible in  $W^s$ . Hence the set  $W^s(p_0)$  is homeomorphic to an open  $n$ -dimensional disk.

Since the map  $f^k$  is a  $2^k$ -sheeted covering for any  $k \in 0 \cup \mathbb{N}$ , then the set  $f^{-k}(W^s(p_0))$  is homeomorphic to the union of  $2^k$  open  $n$ -dimensional disks. Thus, the set  $\overline{W^s(p_0)}$  is homeomorphic to the union of a countable number of  $n$ -dimensional disks. □

## 5 Proof of main theorem 1

**Lemma 5.1.** *The set  $\Lambda$  is hyperbolic.*

Consider an arbitrary orbit  $O(x_0) = \{x_i\}_{-\infty}^{\infty}$ ,  $i \in Z$ , belonging to the set  $\Lambda$ . According to the lemma 4.1 at each point  $x_i$  there is a one-dimensional subbundle  $\mathbb{E}_{x_i}^u$ , which is tangent to the foliation  $W^u(x_j)_g$ . Since the foliation layers  $W^u(x_j)_g$  are given by the equations  $v_j = \text{const}$ ,  $j = \overline{2, n}$ , then in the coordinates  $(v_1, \dots, v_n)$  subbundle  $\mathbb{E}_{x_j}^u$  is generated by the vector  $e_u$ .

Consider the differential  $Df(x_j)$  of the map  $f$ , which, as previously proved, is represented as:

$$Df = \begin{pmatrix} \lambda_u \cdot \frac{\partial v_1}{\partial v_1^*} & \lambda_u \cdot \frac{\partial v_1}{\partial v_2^*} & \lambda_u \cdot \frac{\partial v_1}{\partial v_3^*} & \dots & \lambda_u \cdot \frac{\partial v_1}{\partial v_n^*} \\ 0 & \lambda_{s_1} & \delta & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{s_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_{s_n} \end{pmatrix}$$

For the sake of brevity, let us introduce the notation and write the differential as follows:

$$Df(x_j) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

There is follows the invariance of the family of subbundles  $\mathbb{E}_{x_j}^u$  under  $Df|_{O(x_0)}$ . Due to the compactness of the set  $\Lambda$  and lemma 4.4, the following is true

$$\min a_{11} = m > 1 \tag{6}$$

Therefore,  $\mathbb{E}_{x_j}^u$  is a uniformly expanding subbundle. Moreover, for each point  $q \in \Lambda$ , the unstable manifold  $W_f^u(q)$  does not depend on the negative half-orbit, but depends on the point  $q$  itself. This follows from the fact that on the entire torus  $\mathbb{T}^n$  there is a uniform one-dimensional distribution generated by the vector  $e_u$ , to which the unstable subbundle  $\mathbb{E}^u$  belongs.

In order to prove the existence of a stable subbundle the cones construction method will be used.

Let us denote  $d = \frac{b_{11}^2}{\max((\lambda_{s_1})^2, \dots, (\lambda_{s_{n-1}})^2)}$ .

Then the existence of such a  $\gamma > 0$  follows from the previous equality that the following holds:

$$\max((\lambda_{s_1})^2, \dots, (\lambda_{s_{n-1}})^2) + \gamma^2 \max\left(\frac{b_{12}}{d}, \dots, \frac{b_{1n}}{d}\right) < m^2 \tag{7}$$

Without reducing the generality, let us assume that

$$\max((\lambda_{s_1})^2, \dots, (\lambda_{s_{n-1}})^2) = (\lambda_{s_1})^2 \text{ and } \min((\lambda_{s_1})^2, \dots, (\lambda_{s_{n-1}})^2) = (\lambda_{s_{n-1}})^2.$$

Consider a family of cones in tangent space

$$K(x_i) = \{(v_1, v_2, \dots, v_n) | v_2^2 + \dots + v_n^2 \geq \gamma^2 v_1^2\}$$

Let us define  $Df(x_{j+1})^{-1}$

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & b_{nn} \end{pmatrix},$$

where the coefficients are determined by the following formulas:

$$b_{ij} = \frac{1}{a_{ij}}, \text{ for } i = j;$$

$$b_{ij} = -\frac{1}{a_{jj}} \sum_{k=1}^{j-1} b_{ik} a_{kj}, \text{ for } i < j;$$

$$b_{ij} = 0, \text{ for } i > j.$$

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} = \frac{1}{a_{11} \lambda_{s_1}} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_{s_1} & a_{11} \lambda_{s_1} b_{12} & \dots & a_{11} \lambda_{s_1} b_{1n} \\ 0 & a_{11} & \dots & a_{11} \lambda_{s_1} b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{11} b_{nn} \lambda_{s_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ \vdots \\ v'_n \end{pmatrix}$$

Suppose that

$$v_2^2 + \dots + v_n^2 \geq \gamma^2 v_1^2 \quad (8)$$

Let  $\tilde{b}_{12} = a_{11} \lambda_{s_1} b_{12}, \dots, \tilde{b}_{1n} = a_{11} \lambda_{s_1} b_{1n}$

Then,  $\gamma^2 \cdot (\lambda_{s_1} v_1 + \tilde{b}_{12} v_2 + \dots + \tilde{b}_{1n} v_n)^2 = \gamma^2 \cdot ((\lambda_{s_1})^2 v_1^2 + \dots + \tilde{b}_{1n}^2 v_n^2 + 2\lambda_{s_1} \tilde{b}_{12} + \dots + 2\tilde{b}_{1(n-1)} \tilde{b}_{1n})$

According to the assumption 8,  $v_1$  is replaced in the inequality and follows

$$(v_2^2 + \dots + v_n^2) \cdot \gamma^2 \left( (\lambda_{s_1})^2 + \frac{\tilde{b}_{12}^2 v_2^2 + \dots + \tilde{b}_{1n}^2 v_n^2 + 2\lambda_{s_1} \tilde{b}_{12} + \dots + 2\tilde{b}_{1(n-1)} \tilde{b}_{1n}}{(v_2^2 + \dots + v_n^2)} \right)$$

Using the 7 inequality, let us transform this equation

$$\leq m^2 \cdot (v_2^2 + \dots + v_n^2) \leq a_{11}^2 \cdot (v_2^2 + \dots + v_n^2)$$

Let us show that  $(v'_2)^2 + \dots + (v'_n)^2 \geq a_{11}^2 \cdot (v_2^2 + \dots + v_n^2)$ . Obviously, it is performed for different eigenvalues  $\lambda_{s_i}$ . Let's prove for matching, to do this, consider the difference between its:

$$(a_{11} v_2 + a_{11} \lambda_{s_1} b_{2n} v_n)^2 + \dots + a_{11}^2 b_{nn}^2 (\lambda_{s_1} v_n)^2 - a_{11}^2 \cdot (v_2^2 + \dots + v_n^2) = a_{11}^2 (v_2^2 + \dots + (\lambda_{s_1})^2 b_{2n}^2 v_n^2 + 2v_2 \lambda_{s_1} b_{21} v_3 + \dots + 2\lambda_{s_1} b_{2(n-1)} v_{n-1} \lambda_{s_1} b_{2n} v_n) + \dots + a_{11}^2 (\lambda_{s_1} v_n)^2 b_{nn}^2 - a_{11}^2 \cdot (v_2^2 + \dots + v_n^2) \geq 0$$

Then,

$$a_{11}^2 \cdot (v_2^2 + \dots + v_n^2) \leq a_{11}^2 \cdot ((v'_2)^2 + \dots + (v'_n)^2)$$

The subbundle  $\mathbb{E}^s$ ,  $x \in \Lambda$  is obtained as the intersection of nested cones. Due to the continuity of the  $Df$  and  $Df^{-1}$  maps, it follows that  $Df(\mathbb{E}_x^s) = \mathbb{E}_f^s(x)$ ,  $x \in \Lambda$ .

Consider the vector  $(v_1, v_2, \dots, v_n)^T \in \mathbb{E}^s$

$$Df(v_1, \dots, v_n) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}v_1 + \dots + a_{1n}v_n \\ a_{22}v_2 + \dots + a_{2n}v_n \\ \vdots \\ a_{nn}v_n \end{pmatrix}$$

Let's introduce the following notation  $c_1 = a_{11}v_1 + \dots + a_{1n}v_n, \dots, c_{n-1} = a_{n-1,1}v_{n-1} + \dots + a_{n-1,n}v_n$ .

$$\|Df^k(v_1, \dots, v_n)\|^2 = \|(c_1, c_2, c_3, \dots, a_{nn}^k v_n)^T\|^2 \leq n \cdot \left(1 + \frac{1}{\gamma^2}\right) \cdot a_{nn}^k \cdot (v_2^2 + \dots + v_n^2) \leq$$

$$\leq n \cdot \left(1 + \frac{1}{\gamma^2}\right) \cdot a_{nn}^k \cdot \|(v_1, v_2, \dots, v_n)^T\|^2$$

$$a_{nn}^k = (\lambda_{n-1}^s)^k \ll 1$$

which proves that the subbundle  $\mathbb{E}_x^s, x \in \Lambda$  is uniformly contracting.

**Corollary 5.1.** *Unstable manifold  $W_f^u(q)$  is dense in  $\mathbb{T}^n$  for every point  $q \in \Lambda$ .*

**Proof.** It follows from Lemma 4.2 that  $W_f^u(q) = W_g^u(q)$  for any point  $q \in \Lambda \setminus W_g^u(p_0)$  and  $W_f^u(q) \subset W_g^u(p_0)$  for  $q \in W_g^u(p_0)$ . Since  $W_g^u(q)$  is dense in  $\mathbb{T}^n$ , it suffices to show that  $W_f^u(p_1)$  and  $W_f^u(p_2)$  are dense in  $\mathbb{T}^n$ . According to Lemmas 4.1 and 4.4 follows:

$$W_f^u(p_1) \cup W_f^u(p_2) = W_g^u(p_0) \setminus \{p_0\}.$$

Unstable manifolds of points  $p_1$  and  $p_2$  are dense in  $\mathbb{T}^n$  since each of the semilayers of the set  $W_f^u(p_0) \setminus \{p_0\}$  is dense in  $\mathbb{T}^n$ . □

**Lemma 5.2.** *The stable manifold  $W_f^s(q) \subset \Lambda$  for any point  $q \in \Lambda$ .*

**Proof.** Let  $q \in \Lambda$  but  $W_f^s(q)$  does not belong to  $\Lambda$ . By construction  $\Lambda = \mathbb{T}^n \setminus \widetilde{W}^s(p_0)$ , then  $W_f^s(q) \subset \widetilde{W}^s(p_0)$ . But by definition it turns out that  $q \in \widetilde{W}^s(p_0)$ . It turns out to be a contradiction. Therefore,  $W_f^s(q) \subset \Lambda$ . □

**Lemma 5.3.** *The set  $\Lambda$  is a one-dimensional orientable lamination with no closed leaves.*

**Proof.** Since the set  $\Lambda$  is closed, it is sufficient to show that for any point from this set there exists a homeomorphism defined in some neighborhood of this point, straightening the layers of  $\Lambda$ . Let us to fix some neighborhood  $O(x)$  for any point  $x \in \Lambda$ . For the sake of brevity, we omit the symbol  $O(x)$  when writing a local unstable manifold of the endomorphism  $f$ .

Consider an arbitrary point  $x \in \Lambda$ . Since the set  $\Lambda$  has a local direct product structure, there exists a constant  $\delta$  for which the intersection  $W_{f,y,\varepsilon}^s \cap W_{f,z,\varepsilon}^u$  is nonempty and consists of exactly one point for any  $y, z \in \Lambda$  such that  $\rho(y, z) < \delta$  for some fixed  $\varepsilon$ .

Let  $U$  be a closed neighborhood of a point  $x$  with a diameter less than  $\delta$  such that the component of the linear connectivity of the intersection of  $U$  with the curve  $W_g^u(x)$  containing the point  $x$  is a closed interval  $I$ , and the intersection of  $U$  with a local stable manifold  $W_{f,x,\varepsilon}^s$  is a closed disk  $J$  of dimension  $n - 1$ . Due to the fact that the sets  $I$  and  $\Lambda$  are closed, the intersection of  $\Lambda \cap I$  is a closed subset of  $I$ . Then for any pair of points  $y \in \Lambda \cap I$  and  $z \in J$ , the intersection of  $W_{f,y,\varepsilon}^s \cap W_{f,z,\varepsilon}^u$  is nonempty and consists of a single point.

Let us choose the segment  $I_1$  and the disk  $J_1$ , which have the following properties:

1.  $x \in I_1 \subset I, x \in \text{int}(J_1) \subset J_1 \subset J$ ;
2.  $W_{f,x_i,\varepsilon}^s \cap W_{f,y_j,\varepsilon}^u \in U$  for any  $i, j = 1, 2$ , where  $x_1, x_2$  - the ends of the segment  $I_1, y_1, y_2 \in J_1$ ;
3. the point  $x$  is an interior point of the set  $I_1 \cap \Lambda$  in the induced topology.

The existence of such segments directly follows from the continuous dependence of local stable and unstable manifolds on the point. Let  $D_1$  is  $n - 1$ -disk, such that  $W_{x_1, \varepsilon}^s \cap W_{y_1}^u \cup W_{x_1, \varepsilon}^s \cap W_{y_2}^u \subset D_1$ . Let us consider the closed set  $V = [0; 1] \times D_1$ . Note that  $V \cap \Lambda$  is closed neighborhood of point  $x$ . Moreover, for all  $y \in I_1 \cap \Lambda \subset V \cap \Lambda$ . Indeed, by construction for any point  $z \in \Lambda \cap V$  the set  $W_{z, \varepsilon}^s \cap I_1 = w$ . Then, according to Lemma 5.1,  $w \in W_{z, \varepsilon}^s \subset \Lambda$  and  $z \in W_{w, \varepsilon}^s \subset \cup_{y \in I_1 \cap \Lambda} W_{y, \varepsilon}^s$ .

In order to define a homeomorphism that straightens the layers of  $\Lambda$ , we conduct a pair of transversal layers on  $V$ , one of which is  $V \cap \cup_{y \in J_1} W_{y, \varepsilon}^u$ . This foliation coincides with  $W_g^u|_V$ . To set the second foliation, we add the set  $V \cap \cup_{x \in I_1 \cap \Lambda} W_{x, \varepsilon}^s$  to the foliation. To do this, consider local coordinates in the vicinity of  $V$  such that unstable curves lie on straight lines  $y = \text{const}$ .

The complement of  $I_1 \setminus \Lambda$  consists of no more than a countable number of open intervals due to the fact that  $I_1 \cap \Lambda$  is closed. Let  $x', x''$  are the boundaries of such an interval. Let's define the equations  $C^\infty$ -smooth functions  $\xi_1(y_1, \dots, y_{n-1})$  and  $\xi_2(y_1, \dots, y_{n-1})$  whose graphs are sets  $W_{x'}^s, W_{x''}^s$ . Consider the map  $F_t : \xi_1 \rightarrow \xi_2$  such that  $(1 - t)\xi_1 + t\xi_2$ .

Consider the maps  $h : I_1 \rightarrow [0; 1]$  and  $h_{J_1} : J_1 \rightarrow V$ . Let  $z \in \lambda$ ,  $L_z$  be the resulting foliation,  $l_z$  be the leaf of this foliation, then the map  $\psi : L_z \rightarrow I^n$ , transform each leaf of this foliation into coordinate lines of an  $n$ -dimensional cube.

$$\psi(l_z) = (h_{J_1} \circ F_t^{-1}(z), h(z))$$

□

## 6 Conclusion

This final qualifying work presents a construction of a  $C^\infty$ -smooth endomorphism on an  $n$ -dimensional torus, represented as a superposition of an Anosov endomorphism of type  $(1, n-1)$  and some flow  $\varphi^{t_0}$ . To prove the existence of such an endomorphism, it is shown that there exists an integer hyperbolic matrix having one eigenvalue greater than one and  $n-1$  less than one, the determinant of which is different from one. The necessary properties of this superposition were proved. In particular, it is proved that this superposition is a  $k$ -sheeted covering and a local diffeomorphism having three hyperbolic fixed points: a sink and two saddle of the Morse index 1. In addition, it is proved that the global stable manifold of a sink fixed point is homeomorphic to a countable number of  $n$ -dimensional disks, and the complement to this set  $\Lambda = \mathbb{T}^n \setminus W^s(p_0)$  is a hyperbolic set of dimension  $n-1$ . It is also provided that the set  $\Lambda$  is a lamination without closed leaves.

## References

- [1] S. Smale. "Differentiable Dynamical Systems". 1967. Bull. Amer. Math. Soc. 73:6, 747–817.
- [2] A. Katok, B. Hasselblatt, «Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems», Факториал, М., 1999.
- [3] C. Robinson, Dynamical systems. Stability, symbolic dynamics, and chaos, 2nd corr. ed., Stud. Adv. Math., CRC Press, Boca Raton, FL, 1999.
- [4] F. Przytycki, «Anosov Endomorphisms», Studia Math., 1976.
- [5] V. Z. Grines, E. V. Zhuzhoma, E. D. Kurenkov, «On DA-endomorphisms of the Ttwo-dimensional Torus».
- [6] V. Z. Grines, E. V. Zhuzhoma, E. D. Kurenkov, "Surgical operation for the endomorphism of an Anosov two-dimensional torus does not give an expanding attractor", Dynamical systems, 8(36):3 (2018), 235-244.
- [7] Patrick D. Mcswiggen, «Diffeomorphisms of the k-torus with Wandering Domains». Ergod. Th. & Dynam. Sys., 1995.
- [8] Guines, V.Z., Medvedev T.V., Pochinka, O.V. « Dynamical System on 2- and 3-manifolds».2016. Switzerland: Springer.
- [9] N.Aoki, K. Hiraide. «Topological Theory of Dynamical Systems». 1994.

В Оргкомитет Смотра дипломных работ математиков России  
от Шубина Данилы Денисовича

Заявление о новизне

Сообщаю, что новыми в моей представленной на Смотр выпускной квалификационной работе (далее - работа) под названием Number of the Equivalence Classes of Nonsingular Morse-Smale Flows with a Unique Twisted Saddle Orbit on Orientable 3-Manifolds являются: классификация неособых потоков Морса-Смейла с единственной скрученной седловой периодической орбитой на ориентируемых многообразиях (класс  $G$ ), классификация многообразий, которые являются несущими для потоков класса  $G$  (допустимых многообразий), подсчёт числа классов топологической эквивалентности на каждом допустимом многообразии.

Также сообщаю, что для проверки новизны мною было проделано следующее: *выступления на научных конференциях, участие в семинаре лаборатории ДСП*

Подтверждаю, что являюсь автором предоставляемой на Смотр работы и прошу принять её для участия в Смотре. Принимаю на себя обязательство соблюдать правила Смотра. Также (в соответствии с п. 4 Положения о Смотре) принимаю на себя обязательство оценить 5 работ участников Смотра, выданных мне Оргкомитетом в результате жеребьёвки и сверх того оценить 2-5 работ других участников Смотра на мой выбор. Я понимаю правила оценки работ, приведённые в п. 4.3 Положения о Смотре. Даю согласие на публикацию адреса моей электронной почты.

Защита работы состоится/состоялась 14 июня. На Смотр представлен проект текста/окончательный текст работы.



Шубин Данила Денисович

25.05.2024

Нижний Новгород, Россия

Government of the Russian Federation  
Federal State Autonomous Educational Institution of Higher Professional Education  
National Research University Higher School of Economics  
Nizhny Novgorod Branch

**Faculty of Computer Science, Mathematics and Computer Science  
Master's program 01.04.01 «Mathematics»**

**Final Qualifying Work**

**Number of the Equivalence Classes of Nonsingular Morse-Smale Flows with a  
Unique Twisted Saddle Orbit on Orientable 3-Manifolds**

Completed by:  
2 year student  
Shubin Danila Denisovich  
Scientific adviser:  
Professor, Doctor of Physical and  
Mathematical Sciences  
Pochinka Olga Vitalievna

Nizhny Novgorod, 2024.

# Contents

<b>Contents</b>	<b>1</b>
<b>1 Introduction and formulation of results</b>	<b>2</b>
<b>2 Topology of 3-manifolds</b>	<b>7</b>
2.1 Lens spaces . . . . .	7
2.2 Dehn surgery along the knots and links . . . . .	7
2.3 Seifert fiber spaces . . . . .	8
<b>3 Dynamics of flows of class <math>G_1^-(M^3)</math></b>	<b>9</b>
3.1 Canonical neighborhoods of periodic orbits . . . . .	10
3.2 Trajectory mappings . . . . .	12
<b>4 Topological classification of flows <math>f^t \in G_1^-(M^3)</math></b>	<b>13</b>
<b>5 Realization of flows <math>f^t \in G_1^-(M^3)</math></b>	<b>17</b>
<b>6 Topology of ambient manifolds of flows <math>f^t \in G_1^-(M^3)</math></b>	<b>18</b>
<b>7 Counting the number of topological equivalence classes</b>	<b>20</b>
<b>References</b>	<b>22</b>

# Abstract

In this paper we consider non-singular Morse-Smale flows on closed orientable 3-manifolds, under the assumption that among the periodic orbits of the flow there is only one saddle orbit and it is twisted. It is found that any manifold admitting such flows is either a lens space, or a connected sum of a lens space with a projective space, or Seifert manifolds with base sphere and three special layers. A complete topological classification of the described flows is obtained and the number of their equivalence classes on each admissible manifold is calculated.

## 1 Introduction and formulation of results

In this paper we consider, *NMS-flows*  $f^t$ , i.e., *not-singular* (without fixed points) Morse-Smale flows defined on closed connected orientable 3-manifolds  $M^3$ . The non-wandering set of such a flow consists of a finite number of periodic hyperbolic orbits. In the neighborhood of a hyperbolic periodic orbit  $\mathcal{O}$ , the flow admits a simple description (up to topological equivalence), namely, there exists its tubular neighborhood  $V_{\mathcal{O}}$  homeomorphic to the solid torus  $\mathbb{V} = \mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1$ , in which the flow is topologically equivalent to the suspension over some linear diffeomorphism of the plane given by a matrix with positive determinant and real eigenvalues modulo different from unity (see e.g. [6]). If both eigenvalues are modulo greater than (less than) one, then the corresponding periodic orbit is *repelling* (*attracting*), otherwise it is *saddle*. A saddle orbit is called *twisted* if both eigenvalues are negative and *is non-twisted* otherwise.

The dynamics of NMS-flows has been studied in a number of papers: M. Wada [16] showed that the link consisting of periodic orbits of the NMS-flow on the sphere is obtained from the Hopf link by applying a finite number of certain operations (Wada operations); J. Franks [2] described the flows on the three-dimensional sphere using the Lyapunov graph; It is known from the work of Azimov [1] that the ambient manifold in this case is a union of circular handles. However, in the case of a small number of periodic orbits, the topology of the manifold can be substantially refined. For example, NMS-flows with exactly two periodic orbits, attracting and repelling (such a pair of periodic orbits must be contained by any NMS-flow), admit only lens spaces. Moreover, in [9] it is proved that every lens space admits exactly two equivalence classes of such flows, except for the 3-sphere  $\mathbb{S}^3$  and the projective space  $\mathbb{R}P^3$ , on which the equivalence class is one. In the case of a larger number of orbits, the topology of the ambient manifold is considerably richer: in the paper [13] we construct NMS-flows with three periodic orbits on small Seifert manifolds. The topology of compact orientable 3-manifolds admitting NMS-flows was studied in more detail by Morgan in [8].

In the present paper we obtain an exhaustive classification for the set  $G_1^-(M^3)$  of NMS flows  $f^t: M^3 \rightarrow M^3$  with a single saddle orbit, under the assumption that it is twisted. Note that such information cannot be obtained from the general classification of Morse-Smale flows on 3-manifolds obtained in the works of Umansky [15] and Prishlyak [10].

Since the ambient manifold of the flow  $f^t \in G_1^-(M^3)$  is the union of stable (unstable) manifolds of all its periodic orbits [14], the flow must have at least one attracting and at least one repelling orbit. In the present paper the following fact is established.

**Lemma 1.1.** *The non-wandering set of any flow  $f^t \in G_1^-(M^3)$  consists of exactly three periodic orbits  $S, A, R$ , saddle, attracting and repelling, respectively.*

Due to the equivalence of the flow  $f^t$  in the neighborhood of a periodic orbit to a suspension over a linear diffeomorphism, the unstable and stable manifolds of these orbits have the following topology:

- $W_S^u \cong W_S^s \cong \mathbb{R} \tilde{\times} \mathbb{S}^1$  (open Mobius band);

- $W_A^s \cong W_R^u \cong \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$ ;
- $W_A^u \cong W_R^s \cong \mathbb{S}^1$ .

A consequence of the topology of invariant manifolds of periodic orbits and the Lemma 1.1 is the following representation of the  $M^3$  ambient manifold.

**Lemma 1.2.** *The ambient manifold  $M^3$  of any flow  $f^t \in G_1^-(M^3)$  is represented as a union of three solid tori*

$$M^3 = V_A \cup V_S \cup V_R$$

*with non-intersecting interior, which are tubular neighborhoods of the orbits  $A, S, R$ , respectively, with the following properties:*

- *torus  $T_S = \partial V_S$  is the union of compact tubular neighborhoods  $K_A, K_R$  of nodes  $\gamma_A = W_S^u \cap T_S, \gamma_R = W_S^s \cap T_S$ , respectively, such that  $K_A \cap K_R = \partial K_A \cap \partial K_R$  (see Fig. 1);*
- *torus  $T_A = \partial V_A$  is the union of the annulus  $K_A$  and the compact surface  $K = T_A \setminus \text{int } K_A$ ,*
- *torus  $T_R = \partial V_R$  is the union of the annulus  $K_R$  and the compact surface  $K = T_R \setminus \text{int } K_R$ .*

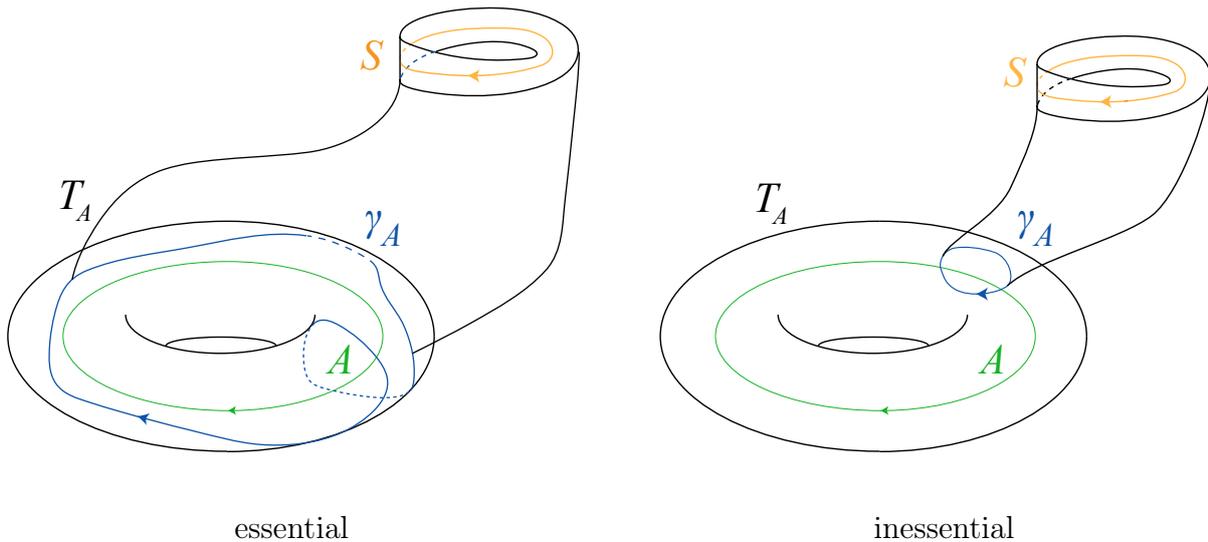


Figure 1: Knot  $\gamma_A$

For  $\mathcal{O} \in \{A, S, R\}$  we choose *parallel*  $L_{\mathcal{O}}$  on the torus  $T_{\mathcal{O}}$  (a curve homologous in  $V_{\mathcal{O}}$  to the orbit of  $\mathcal{O}$ ) and *meridian*  $M_{\mathcal{O}}$  (a curve, homotopic to zero on  $V_{\mathcal{O}}$  and essential on  $T_{\mathcal{O}}$ ) such that the ordered pair of curves  $L_{\mathcal{O}}, M_{\mathcal{O}}$  defines the outer side of the solid torus  $V_{\mathcal{O}}$ .

Let  $\gamma_S$  be the connected component of the set  $\partial K$  oriented coherently with the saddle orbit  $S$ . By virtue of the equivalence of the flow  $f^t|_{V_S}$  to the suspension, the meridian  $M_S$  can be chosen such that  $\gamma_S$  intersects the meridian  $M_S$  at exactly two points. Then the generators  $L_S, M_S$  can be chosen so that with respect to them the node  $\gamma_S$  has homotopy type

$$\langle \gamma_S \rangle = \langle l_S, m_S \rangle = \langle 2, 1 \rangle.$$

We orient the nodes  $\gamma_R, \gamma_A$  consistent with the node  $\gamma_S$ . Let us write down the homotopy type of the node  $\gamma_R$  with respect to the  $L_R, M_R$

$$\langle \gamma_R \rangle = \langle l_R, m_R \rangle$$

and the homotopy type of the node  $\gamma_A$  with respect to the  $L_A, M_A$

$$\langle \gamma_A \rangle = \langle l_A, m_A \rangle.$$

Since  $T_R \setminus \gamma_R = T_A \setminus \gamma_A$ , then

$$(l_R, m_R) = (0, 0) \iff (l_A, m_A) = (0, 0).$$

If  $(l_R, m_R) = (0, 0)$ , then let us write the homotopy type of the meridian  $M_R \subset K$  with respect to the formers  $L_A, M_A$

$$\langle M_R \rangle = \langle p_A, q_A \rangle.$$

If  $(l_R, m_R) \neq (0, 0)$ , then choose a node  $\sigma_S \subset T_S$  such that

$$\langle \sigma_S \rangle = \langle 1, 1 \rangle$$

. and  $\sigma_S$  intersects with each component of the  $\partial K$  connectivity at exactly one point (this can be done since the intersection index of the nodes  $\gamma_S$  and  $\sigma_S$  is 1).

Let us choose nodes  $\sigma_R \subset T_R, \sigma_A \subset T_A$  coinciding with each other on the ring  $K$  and such that  $\sigma_S = (\sigma_R \cup \sigma_A) \cap T_S$ . Let us write their homotopy types with respect to generators

$$\langle \sigma_R \rangle = \langle b_R, c_R \rangle, \langle \sigma_A \rangle = \langle b_A, c_A \rangle.$$

**Definition 1.1.** By the flow  $f^t \in G_1^-(M^3)$ , we define set

$$C_{f^t} = (l_1, b_1, l_2, b_2)$$

as follows:

- $(l_1, b_1, l_2, b_2) = (l_R, b_R, l_A, b_A)$  if  $(l_R, m_R) \neq (0, 0)$ ;
- $(l_1, l_2, b_1, b_2) = (0, 2, p_A, q_A)$  if  $(l_R, m_R) = (0, 0)$  and the 2-disk bounded by knot  $\gamma_R$  remains on the left when moving along the knot;
- $(l_1, b_1, l_2, b_2) = (0, -2, -p_A, -q_A)$  if  $(l_R, m_R) = (0, 0)$  and the 2-disk bounded by the knot  $\gamma_R$  remains on the right when moving along the knot.

Note that the set  $C_{f^t}$  of the flow  $f^t \in G_1^-(M^3)$  is admissible in the sense of the following definition.

**Definition 1.2.** The set of integers  $C = (l_1, b_1, l_2, b_2)$  is called admissible if

- $(l_1, b_1) = (0, \pm 2)$  or  $\gcd(l_1, b_1) = 1$ ;
- $\gcd(l_2, b_2) = 1$ .

**Definition 1.3.** We call the admissible sets  $C = (l_1, b_1, l_2, b_2), C' = (l'_1, b'_1, l'_2, b'_2)$  consistent ( $C \sim C'$ ) if:

- $l_i = l'_i, i = 1, 2,$

and exists  $\delta \in \{-1, 1\}$  such that

- $b_i \equiv \delta b'_i \pmod{l_i}$ ;
- $l_1 l_2 (2l_2(b_1 - \delta b'_1) + 2l_1(b_2 - \delta b'_2) + l_1 l_2 (1 - \delta)) = 0$ .

In the present work, the following classification result is established.

**Theorem 1.1.** *The flows  $f^t, f^t \in G_3^-(M^3)$  are topologically equivalent if and only if  $C_{f^t} \sim C_{f^t}$ . Moreover, for any admissible set  $C$  there exists a flow  $f^t \in G_3^-(M^3)$  such that  $C \sim C_{f^t}$ .*

We also managed to construct a correspondence between invariants and ambient manifolds of flows of the considered class.

**Theorem 1.2.** *Flows of class  $G_1^-(M^3)$  admit all lens spaces  $L_{p,q}$ , all connected sums of the form  $L_{p,q} \# \mathbb{R}P^3$  and all Seifert manifolds of the form  $M(\mathbb{S}^2, (\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2), (2, 1))$ . More precisely, let the flow  $f^t \in G_1^-(M^3)$  have the invariant  $C_{f^t} = (l_1, b_1, l_2, b_2)$ . Then*

1) *If  $(|l_1| - 1)(|l_2| - 1) = 0$ , then  $M^3 \cong L_{p,q}$ , thus:*

i) *if  $l_1 l_2 = 0$ , then*  
 $M^3 \cong \mathbb{R}P^3$ ;

ii) *if  $C_{f^t} = (\pm 1, b_1, l_2, b_2)$ ,  $l_2 \neq 0$ , then*  
 $M^3 \cong L_{l_2 - 2b_2, b_2}$ ;

iii) *if  $C_{f^t} = (l_1, b_1, \pm 1, b_2)$ ,  $l_1 \neq 0$ , then*  
 $M^3 \cong L_{l_1 - 2b_1, b_1}$ ;

2) *If  $l_1 l_2 = 0$  and  $(|l_1| - 1)(|l_2| - 1) \neq 0$ , then  $M^3 \cong L_{p,q} \# \mathbb{R}P^3$ , thus:*

i) *if  $C_{f^t} = (0, b_1, l_2, b_2)$ , then*  
 $M^3 \cong L_{l_2, b_2} \# \mathbb{R}P^3$ ;

ii) *if  $C_{f^t} = (l_1, b_1, 0, \pm 1)$ ,  $l_1 \neq 0$ , then  $M^3 \cong L_{l_1, b_1} \# \mathbb{R}P^3$ .*

3) *If  $C_{f^t} = (l_1, b_1, l_2, b_2)$ ,  $|l_1| > 1$ ,  $|l_2| > 1$ , then  $M^3 \cong M(\mathbb{S}^2, (l_1, b_1), (l_2, b_2), (2, 1))$ .*

Due to the fact that the topological equivalence class and the topology of a manifold are defined using the same invariant, it becomes possible to compute the number of topological equivalence classes on each admissible manifold. For this purpose, for any pair  $p, q$  of coprime integers, let  $\bar{p} = |p|$  and denote by  $\bar{q}$  – the smallest non-negative of the numbers  $q'$  satisfying the condition  $q \equiv \pm q' \pmod{p}$ , and by  $\tilde{q}$  – the smallest non-negative of the numbers  $q'$  satisfying the condition  $qq' \equiv \pm 1 \pmod{p}$ .

**Theorem 1.3.** *The set  $G_1^-(L_{p,q})$ ,  $|p| \neq 2$  decomposes into a countable number of equivalence classes, whereas the sets  $G_1^-(\mathbb{R}P^3)$ ,  $G_1^-(L_{p,q} \# \mathbb{R}P^3)$ ,  $G_1^-(M(\mathbb{S}^2, (\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2), (2, 1)))$  consist of a finite number of classes. Namely,*

1) *equivalence classes of the set  $G_1^-(L_{p,q})$  depending on  $p, q$  are represented by flows with the following invariants:*

a)  $|p| > 2$ ,  $q^2 \not\equiv \pm 1 \pmod{p}$ ,  $n, k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} & (\pm 1, n, \bar{p} + 2(\bar{q} + k\bar{p}), \bar{q} + k\bar{p}), (\pm 1, n, -\bar{p} + 2(\bar{q} + k\bar{p}), \bar{q} + k\bar{p}), \\ & (\pm 1, n, \bar{p} + 2(-\bar{q} + k\bar{p}), -\bar{q} + k\bar{p}), (\pm 1, n, -\bar{p} + 2(-\bar{q} + k\bar{p}), -\bar{q} + k\bar{p}), \\ & (\pm 1, n, \bar{p} + 2(\tilde{q} + k\bar{p}), \tilde{q} + k\bar{p}), (\pm 1, n, -\bar{p} + 2(\tilde{q} + k\bar{p}), \tilde{q} + k\bar{p}), \\ & (\pm 1, n, \bar{p} + 2(-\tilde{q} + k\bar{p}), -\tilde{q} + k\bar{p}), (\pm 1, n, -\bar{p} + 2(-\tilde{q} + k\bar{p}), -\tilde{q} + k\bar{p}), \\ & (\bar{p} + 2(\bar{q} + k\bar{p}), \bar{q} + k\bar{p}, \pm 1, n), (-\bar{p} + 2(\bar{q} + k\bar{p}), \bar{q} + k\bar{p}, \pm 1, n), \\ & (\bar{p} + 2(-\bar{q} + k\bar{p}), -\bar{q} + k\bar{p}, \pm 1, n), (-\bar{p} + 2(-\bar{q} + k\bar{p}), -\bar{q} + k\bar{p}, \pm 1, n), \\ & (\bar{p} + 2(\tilde{q} + k\bar{p}), \tilde{q} + k\bar{p}, \pm 1, n), (-\bar{p} + 2(\tilde{q} + k\bar{p}), \tilde{q} + k\bar{p}, \pm 1, n), \\ & (\bar{p} + 2(-\tilde{q} + k\bar{p}), -\tilde{q} + k\bar{p}, \pm 1, n), (-\bar{p} + 2(-\tilde{q} + k\bar{p}), -\tilde{q} + k\bar{p}, \pm 1, n); \end{aligned}$$

b)  $|p| > 2, q^2 \equiv \pm 1 \pmod{p}, n, k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} & (\pm 1, n, \bar{p} + 2(\bar{q} + k\bar{p}), \bar{q} + k\bar{p}), (\pm 1, n, -\bar{p} + 2(\bar{q} + k\bar{p}), \bar{q} + k\bar{p}), \\ & (\pm 1, n, \bar{p} + 2(-\bar{q} + k\bar{p}), -\bar{q} + k\bar{p}), (\pm 1, n, -\bar{p} + 2(-\bar{q} + k\bar{p}), -\bar{q} + k\bar{p}), \\ & (\bar{p} + 2(\bar{q} + k\bar{p}), \bar{q} + k\bar{p}, \pm 1, n), (-\bar{p} + 2(\bar{q} + k\bar{p}), \bar{q} + k\bar{p}, \pm 1, n), \\ & (\bar{p} + 2(-\bar{q} + k\bar{p}), -\bar{q} + k\bar{p}, \pm 1, n), (-\bar{p} + 2(-\bar{q} + k\bar{p}), -\bar{q} + k\bar{p}, \pm 1, n); \end{aligned}$$

c)  $p = 0, n \in \mathbb{Z}$

$$(\pm 1, n, 2, 1), (\pm 1, n, -2, -1), (2, 1, \pm 1, n), (-2, -1, \pm 1, n);$$

d)  $|p| = 1, n, k \in \mathbb{Z}$

$$(\pm 1, n, 1 + 2k, k), (1 + 2k, k, \pm 1, n);$$

e)  $|p| = 2$

$$(\pm 1, 0, 0, 1), (0, 1, \pm 1, 0), (0, 2, \pm 1, 0);$$

2) equivalence classes of the set  $G_1^-(L_{p,q} \# \mathbb{R}P^3)$  depending on  $p, q$  are represented by flows with the following invariants:

a)  $|p| > 2, q^2 \not\equiv \pm 1 \pmod{p}$

$$\begin{aligned} & (0, 2, \bar{p}, \pm \bar{q}), (0, -2, \bar{p}, \pm \bar{q}), (0, -2, \bar{p}, \pm \bar{q}), (0, -2, -\bar{p}, \pm \bar{q}), \\ & (0, 2, \bar{p}, \pm \bar{q}), (0, 2, -\bar{p}, \pm \bar{q}), (0, -2, \bar{p}, \pm \bar{q}), (0, -2, -\bar{p}, \pm \bar{q}), \\ & (0, 1, \bar{p}, \pm \bar{q}), (0, 1, -\bar{p}, \pm \bar{q}), (0, -1, \bar{p}, \pm \bar{q}), (0, -1, -\bar{p}, \pm \bar{q}), \\ & (0, 1, \bar{p}, \pm \bar{q}), (0, 1, -\bar{p}, \pm \bar{q}), (0, -1, \bar{p}, \pm \bar{q}), (0, -1, -\bar{p}, \pm \bar{q}), \\ & (\bar{p}, \pm \bar{q}, 0, 1), (-\bar{p}, \pm \bar{q}, 0, 1), (\bar{p}, \pm \bar{q}, 0, -1), (-\bar{p}, \pm \bar{q}, 0, -1), \\ & (\bar{p}, \pm \bar{q}, 0, 1), (-\bar{p}, \pm \bar{q}, 0, 1), (\bar{p}, \pm \bar{q}, 0, -1), (-\bar{p}, \pm \bar{q}, 0, -1); \end{aligned}$$

b)  $|p| > 2, q^2 \equiv \pm 1 \pmod{p}$

$$\begin{aligned} & (0, 2, \bar{p}, \pm \bar{q}), (0, 2, -\bar{p}, \pm \bar{q}), (0, -2, \bar{p}, \pm \bar{q}), (0, -2, -\bar{p}, \pm \bar{q}), \\ & (0, 1, \bar{p}, \pm \bar{q}), (0, 1, -\bar{p}, \pm \bar{q}), (0, -1, \bar{p}, \pm \bar{q}), (0, -1, -\bar{p}, \pm \bar{q}), \\ & (\bar{p}, \pm \bar{q}, 0, 1), (-\bar{p}, \pm \bar{q}, 0, 1), (\bar{p}, \pm \bar{q}, 0, -1), (-\bar{p}, \pm \bar{q}, 0, -1); \end{aligned}$$

c)  $p = 0$

$$(0, 2, 0, \pm 1), (0, 1, 0, \pm 1);$$

d)  $|p| = 2$

$$\begin{aligned} & (0, 2, 2, \pm 1), (0, 2, -2, \pm 1), (0, 1, 2, \pm 1), (0, 1, -2, \pm 1), \\ & (2, \pm 1, 0, 1), (-2, \pm 1, 0, 1); \end{aligned}$$

3) equivalence classes of the set  $G_1^-(M(\mathbb{S}^2, (\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2), (2, 1)))$  depending on  $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$  are represented by flows with the following invariants:

a)  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha, \beta_1 = \beta_2 = \beta$

$$(\alpha, \beta, \alpha, \beta).$$

$$b) |\alpha_1 - \alpha_2| + |\beta_1 - \beta_2| > 0$$

$$(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2), (\alpha_2, \beta_2, \alpha_1, \beta_1).$$

Note that on the three-dimensional sphere  $\mathbb{S}^3$ , the list of flows representing equivalence classes of the set  $G_1^-(\mathbb{S}^3)$  listed in Theorem 1.3 is exactly the same as that obtained in Bin Yu's paper (see Proposition 7.4 in [17]).

*Acknowledgements.* The work was carried out within the framework of the fundamental research program of the National Research University Higher School of Economics.

## 2 Topology of 3-manifolds

### 2.1 Lens spaces

Further, we will assume that the constituents of the homotopy types of knots on the boundary  $\partial\mathbb{V}$  of the standard fullness  $\mathbb{V} = \mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1$  are the meridian  $\mathbb{M} = (\partial\mathbb{D}^2) \times \mathbb{S}^1$  with homotopy type  $\langle 0, 1 \rangle$  and the parallel  $\mathbb{L} = \{x\} \times \mathbb{S}^1$ ,  $x \in \partial\mathbb{D}^2$  with homotopy type  $\langle 1, 0 \rangle$ .

A three-dimensional manifold  $L_{p,q} = V_1 \cup_j V_2$  resulting from gluing two copies of a solid torus  $V_1 = \mathbb{V}$  is called a *lens space*,  $V_2 = \mathbb{V}$  by some homeomorphism  $j: \partial V_1 \rightarrow \partial V_2$  such that  $j_*(\langle 0, 1 \rangle) = \langle p, q \rangle$ .

**Proposition 2.1** ([5]). *Two lens spaces  $L_{p,q}$ ,  $L_{p',q'}$  are homeomorphic if and only if  $|p| = |p'|$ ,  $q \equiv \pm q' \pmod{p}$  or  $qq' \equiv \pm 1 \pmod{p}$ . In this case,*

$$L_{0,1} \cong \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1, L_{1,0} \cong \mathbb{S}^3, L_{2,1} \cong \mathbb{R}P^3.$$

### 2.2 Dehn surgery along the knots and links

Let

- (a) a closed 3-manifold  $M$ ;
- (b) knot  $\gamma \subset M$ ;
- (c) tubular neighborhood  $U_\gamma$  of node  $\gamma$ , which is a solid torus with standard generators on  $\partial U_\gamma$  – meridian  $M_\gamma$  and parallel  $L_\gamma$ ;
- (d) homeomorphism  $h: \partial\mathbb{V} \rightarrow \partial U_\gamma$ , which induces an isomorphism in the given generators such that  $h_*(\langle 0, 1 \rangle) = \langle \beta, \alpha \rangle$ .

Manifold

$$M_\gamma = (M \setminus \text{int } U_\gamma) \cup_h \mathbb{V}$$

is called the *manifold obtained from the manifold  $M$  by Dehn surgery along the knot  $\gamma$  with equipment  $\beta, \alpha$* .

Let us denote by  $p_\gamma: (M \setminus \text{int } U_\gamma) \sqcup \mathbb{V} \rightarrow M_\gamma$  the natural projection. Let us put  $\tilde{\gamma} = p_\gamma(\{0\} \times \mathbb{S}^1)$ ,  $U_{\tilde{\gamma}} = p_\gamma(\mathbb{V})$ ,  $\tilde{h} = p_\gamma h^{-1}: \partial U_\gamma \rightarrow \partial U_{\tilde{\gamma}}$ . Then the manifold  $M$  is recovered from  $M_\gamma$  by the following inverse surgery.

**Proposition 2.2** ([11]). *Let  $\gamma \subset M$  be a node with  $\beta, \alpha$  and  $\tilde{\gamma}$  be a node with  $-\beta, \xi$ , where  $\alpha\xi \equiv 1 \pmod{\beta}$ . Then*

$$M \cong (M_\gamma)_{\tilde{\gamma}}.$$

The Dehn surgery naturally generalizes to the case when  $\gamma = \gamma_1 \sqcup \dots \sqcup \gamma_r \subset M$  — disjoint union (link) of equipped knots. The resulting manifold  $M_\gamma$  in this case is called *the manifold obtained from the manifold  $M^3$  by Dehn surgery along the equipped link  $\gamma$* . A link  $\gamma = \gamma_1 \sqcup \dots \sqcup \gamma_r \subset M$  is called *is trivial* if the knots  $\gamma_1, \dots, \gamma_r$  bound the pairwise non-overlapping 2-discs  $d_1, \dots, d_r \subset M$ .

**Proposition 2.3** ([11]). . . *Let  $\gamma = \gamma_1 \sqcup \dots \sqcup \gamma_r \subset M$  be a trivial link with equipment  $\beta_1, \alpha_1; \dots; \beta_r, \alpha_r$ . Then*

$$M_\gamma \cong M \# L_{\alpha_1, \beta_1} \# \dots \# L_{\alpha_r, \beta_r}.$$

## 2.3 Seifert fiber spaces

A solid torus  $\mathbb{V}$  partitioned into fibers of the form  $\{x\} \times \mathbb{S}^1$  is called a *trivially fibered solid torus*. Consider the solid torus  $\mathbb{V} = \mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1$  as a solid cylinder  $\mathbb{D}^2 \times [0, 1]$  with bases glued together by virtue of rotation by an angle  $2\pi\nu/\alpha$  for coprime integers  $\alpha, \nu$ ,  $\alpha > 1$ . The partitioning of a solid cylinder into segments of the form  $\{x\} \times [0, 1]$  determines the partitioning of this solid cylinder into circles called *fibers*. The segment  $\{0\} \times [0, 1]$  generates a fiber called *special*, all other are (*non-special*) fibers of the solid torus are wrapped  $\alpha$  times around the special layer and  $\nu$  times around the meridian of the solid torus. The number  $\alpha$  is called the *multiplicity* of the singular fiber. A solid torus with such a partition into fibers is called a *nontrivially fibered solid torus with orbital invariants  $(\alpha, \nu)$* .

An *Seifert fiber space* — is a compact, orientable 3-manifold  $M$ , partitioned into non-intersecting simple closed curves (fibers) such that each fiber has an tubular neighborhood entirely composed of fibers, layer-by-layer homeomorphic to the fibered solid torus. Such a partitioning is called *Seifert fibration*. Fibers that under some such homeomorphism pass to the center of a nontrivially fibered solid torus are called *special*.

The *Base* of a Seifert fiber space  $M$  is a compact surface  $\Sigma = M/\sim$ , where  $\sim$  is an equivalence relation such that  $x \sim y$  if and only if  $x$  and  $y$  belong to the same layer.

The base of any Seifert fiber space is a compact surface which is closed if and only if the manifold  $M$  is closed; in particular, the base of any fibered solid torus is a disk (see, e.g., [7]). Thus, any Seifert fibration  $M$  with a given base  $\Sigma$  and orbital invariants  $(\alpha_1, \nu_1), \dots, (\alpha_r, \nu_r)$ ,  $r \in \mathbb{N}$ . is obtained from the manifold  $\Sigma \times \mathbb{S}^1$  by Dehn surgery along the link  $\gamma = \bigsqcup_{i=1}^r \gamma_i$ , where  $\gamma_i = \{s_i\} \times \mathbb{S}^1$ ,  $s_i \in \Sigma$  — a knot with equipment  $\beta_i, \alpha_i$ ,  $\nu_i \beta_i \equiv 1 \pmod{\alpha_i}$ . Therefore, the generally accepted notation of such a Seifert fibration is as follows

$$M(\Sigma, (\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_r, \beta_r)).$$

Thus, *the orientation on the fibers* of the Seifert fibration is uniquely determined by the orientation of the circle  $\mathbb{S}^1$  in the manifold  $\Sigma \times \mathbb{S}^1$ .

Two Seifert fibrations  $M, M'$  are called *isomorphic* if there exists a homeomorphism  $h: M \rightarrow M'$  which maps the fibers of one fibration into the fibers of the other with preserving the orientation of the fibers. The homeomorphism  $h$  in this case is called *isomorphism of Seifert fibrations*. It is not difficult to see that the fibrations on solid tori with orbital invariants  $(\alpha, \nu)$  and  $(\alpha', \nu')$  are isomorphic if and only if, when  $\alpha = \alpha'$  and  $\nu \equiv \delta\nu' \pmod{\alpha}$  ( $\delta = \pm 1$ ), and if  $\delta = +1$ , then the isomorphism preserves the orientation of the solid torus, otherwise it changes.

The following statement, which gives a criterion for isomorphism of two Seifert stratifications by their invariants, was proposed by Herbert Seifert in [12]. An exposition of this statement, in notations closer to those given in this section, but only for orientation-preserving isomorphisms, can be found in the notes by Allen Hatcher [5] and the textbook by Sergey Matveev and Anatoly Fomenko [7].

**Proposition 2.4.** *The Seifert fibration  $M(\Sigma, (\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_r, \beta_r))$  and  $M'(\Sigma', (\alpha'_1, \beta'_1), \dots, (\alpha'_{r'}, \beta'_{r'}))$  are isomorphic if and only if  $r = r'$  and the following conditions are satisfied for  $\delta = \pm 1$  and the permutation  $\sigma: \{1, 2, \dots, r\} \rightarrow \{1, 2, \dots, r\}$ :*

- $\Sigma$  is homeomorphic to  $\Sigma'$ ;
- $\alpha_i = \alpha'_{\sigma(i)}$ ;  $\beta_i \equiv \delta \beta'_{\sigma(i)} \pmod{\alpha_i}$  for  $i \in \{1, \dots, r\}$ ;
- if the surface of  $\Sigma$  is closed, then  $\sum_{i=1}^r \frac{\beta_i}{\alpha_i} = \delta \sum_{i=1}^r \frac{\beta'_i}{\alpha'_i}$ .

Thus, if  $\delta = +1$ , the isomorphism is orientation-preserving, and if  $\delta = -1$ , the isomorphism is orientation-reversing.

Note that some manifolds admit non-isomorphic Seifert fibrations. All such manifolds are well known (see, for example [5]) and, as can be seen from the following statement, such manifolds include, for example, lens spaces.

**Proposition 2.5** ([3]). *3-manifolds admits a Seifert fibrations with a base homeomorphic to sphere and at most two special fibers if and only if it is homeomorphic to a lens space. Thus, the list of all Seifert fibrations on lens spaces is as follows:*

- only the manifold  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$  admits fibrations without special fibers;
- $M(\mathbb{S}^2, (\alpha, \beta)) \cong L_{\beta, \alpha}$ ;
- $M(\mathbb{S}^2, (\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2)) \cong L_{p, q}$ , where  $p = \beta_1 \alpha_2 + \alpha_1 \beta_2$ ,  $q = \beta_1 \nu_2 + \alpha_1 \xi_2$  and  $\alpha_2 \xi_2 - \nu_2 \beta_2 = 1$ .

The following statement, on the contrary, allows us to infer the non-homeomorphism of ambient manifolds from the non-isomorphism of Seifert stratifications.

**Proposition 2.6** ([5], Theorem 2.3). *If two Seifert fibrations with three special fibers and a base sphere are not isomorphic, then the manifolds on which they are defined are not homeomorphic.*

### 3 Dynamics of flows of class $G_1^-(M^3)$

In this section we prove the lemmas given in the introduction.

Let us start with the lemma 1.1: the non-wandering set of any flow  $f^t \in G_1^-(M^3)$  consists of exactly three periodic orbits  $S, A, R$ , saddle, attracting and repelling, respectively.

*Proof.* The basis of the proof is the following representation of the ambient manifold  $M^3$  of the NMS-flow  $f^t$  with a set of periodic orbits  $Per_{f^t}$  (see, e.g., [14])

$$M^3 = \bigcup_{\mathcal{O} \in Per_{f^t}} W_{\mathcal{O}}^u = \bigcup_{\mathcal{O} \in Per_{f^t}} W_{\mathcal{O}}^s, \tag{1}$$

as well as the asymptotic behavior of invariant manifolds

$$cl(W_{\mathcal{O}}^u) \setminus W_{\mathcal{O}}^u = \bigcup_{\tilde{\mathcal{O}} \in Per_{f^t}: W_{\tilde{\mathcal{O}}}^u \cap W_{\mathcal{O}}^s \neq \emptyset} W_{\tilde{\mathcal{O}}}^u,$$

$$cl(W_{\mathcal{O}}^s) \setminus W_{\mathcal{O}}^s = \bigcup_{\tilde{\mathcal{O}} \in Per_{f^t}: W_{\tilde{\mathcal{O}}}^s \cap W_{\mathcal{O}}^u \neq \emptyset} W_{\tilde{\mathcal{O}}}^s.$$

In particular, it follows from the above relations that any NMS-flow has at least one attracting orbit and at least one repelling orbit. Moreover, if the NMS-flow has a saddle periodic orbit, then the basin of any attracting orbit has a non-empty intersection with the unstable manifold of at least one saddle orbit (see Proposition 2.1.3 [4]) and the same situation with the basin of the repelling orbit.

Let now  $f^t \in G_1^-(M^3)$  and  $S$  be its only saddle orbit. It follows from the relation (1) that  $W_S^u \setminus S$  intersects only with basins of attracting orbits. Since the set  $W_S^u \setminus S$  is connected and the basins of attracting orbits are open,  $W_S^u$  intersects exactly one such basin. Let us denote by  $A$  the corresponding attracting orbit. Since the saddle orbit is unique, the attracting orbit is unique. Similar reasoning for  $W_S^s$  leads to the existence of a single repelling orbit  $R$ .  $\square$

### 3.1 Canonical neighborhoods of periodic orbits

The flows admit a simple description (up to topological equivalence) in the neighborhood of a hyperbolic periodic orbit, namely, they are suspensions over linear diffeomorphisms of the plane.

Let us recall the definition of suspension. Let  $\phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  be a diffeomorphism. Let us define the diffeomorphism  $\Phi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  by the formula

$$\Phi(x_1, x_2, x_3) = (\phi(x_1, x_2), x_3 - 1).$$

Then the group  $\{\Phi^n\} \cong \mathbb{Z}$  acts freely and discontinuously on  $\mathbb{R}^3$ , by virtue of which the orbit space  $\Pi_\phi = \mathbb{R}^3/\Phi$  is a smooth 3-manifold, and the natural projection  $v_\phi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \Pi_\phi$  is a covering. In this case, the flow  $\xi^t: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  given by the formula

$$\xi^t(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3 + t),$$

induces a flow  $[\phi]^t = v_\phi \xi^t v_\phi^{-1}: \Pi_\phi \rightarrow \Pi_\phi$ , called *suspension*.

We define the diffeomorphisms  $a_{\pm 1}, a_2, a_0: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  by the formulas

$$a_{\pm 1}(x_1, x_2) = (\pm 2x_1, \pm x_2/2), \quad a_2(x_1, x_2) = (2x_1, 2x_2), \quad a_0 = a_2^{-1}.$$

Suppose

$$\begin{aligned} V_0 &= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 4^{x_3} x_1^2 + 4^{x_3} x_2^2 \leq 1\}, \\ V_{\pm 1} &= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 4^{-x_3} x_1^2 + 4^{x_3} x_2^2 \leq 1\}, \\ V_2 &= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 4^{-x_3} x_1^2 + 4^{-x_3} x_2^2 \leq 1\}, \end{aligned}$$

For  $i \in \{0, -1, +1, 2\}$ , let

$$T_i = \partial V_i, \quad \mathbb{V}_i = v_{a_i}(V_i), \quad \mathbb{T}_i = \partial \mathbb{V}_i, \quad \mathbb{O}_i = v_{a_i}(Ox_3).$$

The following fact asserts canonical neighborhoods at hyperbolic periodic orbits.

**Proposition 3.1** ([6]). *For any hyperbolic periodic orbit  $\mathcal{O}$  of a flow  $f^t: M^3 \rightarrow M^3$  defined on a closed orientable manifold  $M^3$ , there exists a tubular neighborhood  $V_{\mathcal{O}}$  of the orbit  $\mathcal{O}$  and a number  $i_{\mathcal{O}} \in \{0, -1, +1, 2\}$  such that the flow  $f^t|_{V_{\mathcal{O}}}$  is topologically equivalent, via some homeomorphism  $H_{\mathcal{O}}$ , to the flow  $[a_{i_{\mathcal{O}}}]^t|_{\mathbb{V}_{i_{\mathcal{O}}}}$ .*

Let us call the neighborhood  $V_{\mathcal{O}} = H_{\mathcal{O}}(\mathbb{V}_{i_{\mathcal{O}}})$  *canonical neighborhood* of the periodic orbit of  $\mathcal{O}$ .

On the torus  $\mathbb{T}_i$  we choose *longitude*  $\mathbb{L}_i$  (a curve homologous in  $\mathbb{V}_i$  to the orbit of  $\mathbb{O}_i$ ) and *meridian*  $\mathbb{M}_i$  (a curve, homotopic to zero on  $\mathbb{V}_i$  and essential on  $\mathbb{T}_i$ ) such that the ordered pair of curves  $\mathbb{L}_i, \mathbb{M}_i$  defines the outer side of the solid torus  $\mathbb{V}_i$ .

In the proof of topological equivalence we will use the following fact, which follows from the proof of Theorem 4 and Lemma 4 in [9], and can also be found in [15] (Theorem 1.1).

**Proposition 3.2.** *The homeomorphism  $h: \mathbb{T}_i \rightarrow \mathbb{T}_i$  for  $i \in \{0, 2\}$  continues up to the homeomorphism  $H: \mathbb{V}_i \rightarrow \mathbb{V}_i$ , realizing the equivalence of the flow  $[a_i]^t$  with itself, if and only if the induced isomorphism is of the form <sup>1</sup>  $h_* = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & \delta \end{pmatrix}$ , where  $\delta \in \{-1, 1\}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .*

The boundary of the canonical neighborhood of a saddle orbit, in contrast to an attracting or repulsing orbit, contains curves tangent to the suspension trajectories. Precisely, we denote by  $\mathcal{O}_{x_1, x_2}$  the flow trajectory  $\xi^t$  intersecting the plane  $Ox_1x_2$  at a point with coordinates  $(x_1, x_2, 0)$ . It is directly verified that the trajectory  $\mathcal{O}_{x_1, x_2}$  intersects the surface  $T_{\pm 1}$  if and only if  $|x_1x_2| \leq \frac{1}{2}$  and  $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$ . The trajectories touch the surface at one point if  $|x_1x_2| = \frac{1}{2}$ , transversally intersect the surface at one point if  $x_1x_2 = 0$ , and otherwise transversally intersect the surface at two points

$$\mathcal{O}_{x_1, x_2} \cap T_{\pm 1} = \{(x_1, x_2, x_3^s), (x_1, x_2, x_3^u)\}, \quad x_3^s < x_3^u.$$

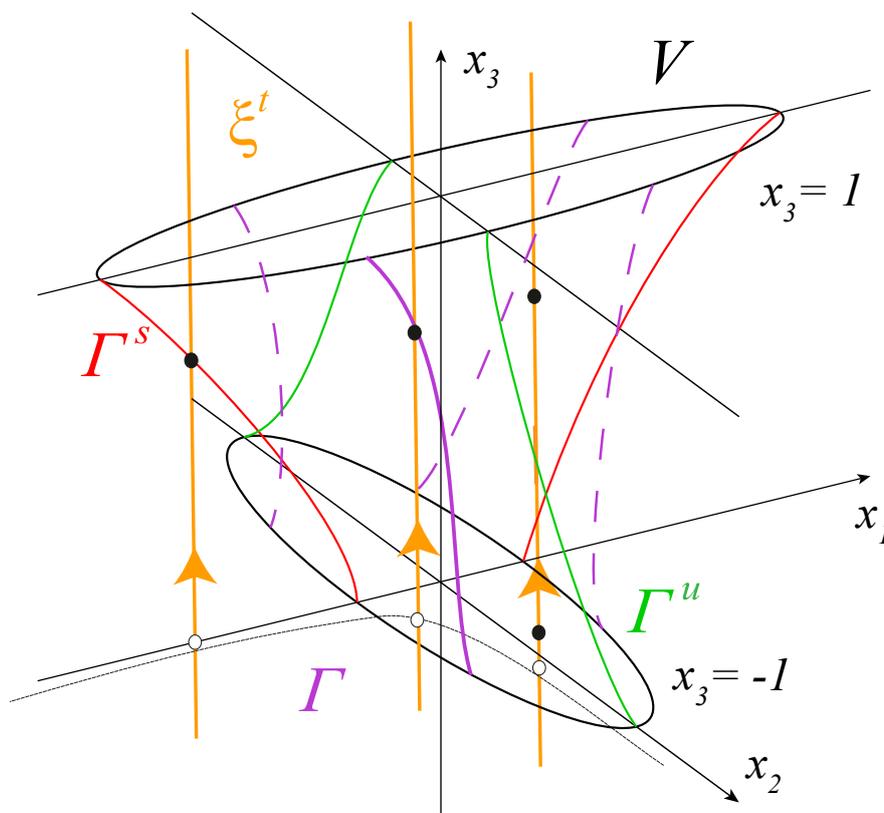


Figure 2: Cylinder  $T_{\pm 1}$

Let  $\Gamma = \{(x_1, x_2, x_3) \in T_{\pm 1} : |x_1x_2| = \frac{1}{2}\}$ ,  $\Gamma^u = Ox_1x_3 \cap T_{\pm 1}$  and  $\Gamma^s = Ox_2x_3 \cap T_{\pm 1}$ . The sets  $\Gamma^u$ ,  $\Gamma^s$  consist of two curves by construction, the set  $\Gamma$  consist of four curves deviding  $T_{\pm 1}$  into four connected components. The closure  $T^u$  of two of these components contains  $\Gamma^u$ , the closure  $T^s$  of two other contains  $\Gamma^s$  (see. Pic. 2). We assume that  $\Gamma^u$  and  $\Gamma^s$  are oriented in ascending order of coordinate  $x_3$ . For  $i \in \{-1, 1\}$ , let us put

$$\mathbb{T}_i^s = v_{a_i}(T^s), \quad \mathbb{T}_i^u = v_{a_i}(T^u), \quad \Gamma_i = v_{a_i}(\Gamma), \quad \Gamma_i^s = v_{a_i}(\Gamma^s), \quad \Gamma_i^u = v_{a_i}(\Gamma^u).$$

<sup>1</sup>Throughout the paper, we assume that the string  $(l, m)$  is multiplied by the matrix on the left and the first element of the basis is the parallel of the torus.

### 3.2 Trajectory mappings

In this section we prove the lemma 1.2: the ambient manifold  $M^3$  of any flow  $f^t \in G_1^-(M^3)$  is represented as the union of three solid tori

$$M^3 = V_A \cup V_S \cup V_R$$

with non-intersecting interior, which are tubular neighborhoods of the orbits  $A, S, R$ , respectively, with the following properties:

- the torus  $T_S = \partial V_S$  is the union of closed tubular neighborhoods  $K_A, K_R$  of knots  $\gamma_A = W_S^u \cap T_S$ ,  $\gamma_R = W_S^s \cap T_S$ , respectively, such that  $K_A \cap K_R = \partial K_A \cap \partial K_R$ ;
- the torus  $T_A = \partial V_A$  is the union of the annulus  $K_A$  and the compact surface  $K = T_A \setminus \text{int } K_A$ ,
- the torus  $T_R = \partial V_R$  is the union of the ring  $K_R$  and the surface  $K = T_R \setminus \text{int } K_R$ .

*Proof.* Without reducing generality we will assume that the neighborhoods  $\mathcal{V}_A = H_A(\mathbb{V}_0)$ ,  $V_S = H_S(\mathbb{V}_{-1})$ ,  $\mathcal{V}_R = H_A(\mathbb{V}_2)$  of orbits  $A, S, R$  pairwise disjoint.

Note, that knots

$$\gamma_A = W_S^u \cap T_S = H_S(\Gamma_{-1}^u), \quad \gamma_R = W_S^s \cap T_S = H_S(\Gamma_{-1}^s)$$

have tubular neighbourhoods

$$K_A = H_S(\mathbb{T}_{-1}^u), \quad K_R = H_S(\mathbb{T}_{-1}^s)$$

respectively, which are homeomorphic to annuli with a common boundary

$$\Gamma_S = H_S(\Gamma_{-1}).$$

Next, we “blow up” the solid tori  $\mathcal{V}_A$  and  $\mathcal{V}_R$  along the trajectories so that they become “adjacent” to each other and to  $\mathcal{V}_S$ . For this purpose we introduce the following notations:

- let  $\mathcal{T}_A = \partial \mathcal{V}_A$ ,  $\mathcal{T}_R = \partial \mathcal{V}_R$ ,

$$K_R^s = \left( \bigcup_{t>0, w \in \text{cl}(K_R)} f^{-t}(w) \right) \cap \mathcal{T}_R, \quad K_R^u = \mathcal{T}_R \setminus K_R^s,$$

$$K_A^u = \left( \bigcup_{t>0, w \in \text{cl}(K_A)} f^t(w) \right) \cap \mathcal{T}_A, \quad K_A^s = \mathcal{T}_A \setminus K_A^u;$$

- define continuous function  $\tau_R: \mathcal{T}_R \rightarrow \mathbb{R}^+$  such that  $f^{\tau_R(r)}(r) \in K_R$  for  $r \in K_R$  and the set  $K = \bigcup_{r \in \text{cl}(K_R^u)} f^{\tau_R(r)}(r)$  disjoint with torus  $\mathcal{T}_A$ , let  $T_R = K \cup K_R$  and define homeomorphism  $\psi_R: \mathcal{T}_R \rightarrow T_R$  by the formula  $\psi_R(r) = f^{\tau_R(r)}(r)$ . Also, let  $V_R$  denote the connected component of  $M^3 \setminus T_R$  which contains  $R$ ;
- define continuous function  $\tau_A: \mathcal{T}_A \rightarrow \mathbb{R}^+$  such that  $f^{-\tau_A(a)}(a) \in K_A$  for  $a \in K_A^u$  and  $f^{-\tau_A(a)}(a) \in K$  for  $a \in K_A^s$ , let  $T_A = K \cup K_A$   $\psi_A: \mathcal{T}_A \rightarrow T_A$  and define homeomorphism  $\psi_A(a) = f^{-\tau_A(a)}(a)$ . Also, let  $V_A$  denote the connected component of  $M^3 \setminus T_A$  which contains  $A$ ;

- define continuous function  $\tau_{RA}: K_R \setminus \gamma_R \rightarrow \mathbb{R}^+$  such that  $f^{\tau_{RA}(w)}(w) \in K_A \setminus \gamma_A$ , define homeomorphism  $\psi: T_R \setminus \gamma_R \rightarrow T_A \setminus \gamma_A$  by the formula

$$\psi(w) = \begin{cases} f^{\tau_{RA}(w)}(w), & w \in (K_R \setminus \gamma_R) \\ w, & w \in (T_R \setminus K_R). \end{cases}$$

Thus, the constructed solid tori  $V_A, V_S, V_R$  satisfy the conditions of the lemma.  $\square$

## 4 Topological classification of flows $f^t \in G_1^-(M^3)$

Let us prove the first statement of Theorem 1.1: flows  $f^t, f^{t'} \in G_1^-(M^3)$  are topologically equivalent if and only if their sets  $C_{f^t} = (l_1, b_1, l_2, b_2), C_{f^{t'}} = (l'_1, b'_1, l'_2, b'_2)$  are consistent, that is:

- $l_i = l'_i, i = 1, 2,$

and exists  $\delta \in \{-1, 1\}$  such that

- $b_i \equiv \delta b'_i \pmod{l_i};$
- $l_1 l_2 (2l_2(b_1 - \delta b'_1) + 2l_1(b_2 - \delta b'_2) + l_1 l_2 (1 - \delta)) = 0.$

*Proof.* Recall that for a periodic orbit  $\mathcal{O} \in \{A, S, R\}$  of the flow  $f^t \in G_1^-(M^3)$  we denote by  $V_{\mathcal{O}}$  its canonical neighborhood with boundary  $T_{\mathcal{O}}$ . In this case, the ambient manifold  $M^3$  of the flow  $f^t$  is represented as a union of three solid tori  $M^3 = V_A \cup V_S \cup V_R$  with non-intersecting interior, torus  $T_S$  is the union of compact tubular neighborhoods of  $K_A, K_R$  knots  $\gamma_A = W_S^u \cap T_S, \gamma_R = W_S^s \cap T_S, K = T_R \setminus \text{int } K_A = T_A \setminus \text{int } K_A$  and the knot  $\gamma_S$  is the connected component of the boundary of the ring  $K$ .

On the torus  $T_{\{\mathcal{O}\}}, \mathcal{O} \in \{S, R, A\}$  we have chosen the longitude  $L_{\mathcal{O}}$  (a curve homologous in  $V_{\mathcal{O}}$  to the orbit of  $\mathcal{O}$ ) and the meridian  $M_{\mathcal{O}}$  (a curve, homotopic to zero on  $V_{\mathcal{O}}$  and essential on  $T_{\mathcal{O}}$ ) such that the ordered pair of curves  $L_{\mathcal{O}}, M_{\mathcal{O}}$  defines the outer side of the solid torus of  $V_{\mathcal{O}}$ . The node  $\gamma_{\mathcal{O}}$  is oriented coherently with the saddle orbit  $S$  and has homotopy type  $\langle \gamma_{\mathcal{O}} \rangle = \langle l_{\mathcal{O}}, m_{\mathcal{O}} \rangle$  with respect to the generators  $L_{\mathcal{O}}, M_{\mathcal{O}}$ .

If  $(l_R, m_R) = (0, 0)$ , then we have written the homotopy type of the meridian  $M_R \subset K$  with respect to the generators  $L_A, M_A$

$$\langle M_R \rangle = \langle p_A, q_A \rangle.$$

If  $(l_R, m_R) \neq (0, 0)$ , then any knot  $\sigma_{\mathcal{O}} \subset T_{\mathcal{O}}$  having homotopy type  $\langle \sigma_{\mathcal{O}} \rangle = \langle b_{\mathcal{O}}, c_{\mathcal{O}} \rangle$  and the intersection index 1 with knot  $\gamma_{\mathcal{O}}$  has the following property

$$l_{\mathcal{O}} c_{\mathcal{O}} - m_{\mathcal{O}} b_{\mathcal{O}} = 1. \tag{2}$$

Let  $\Sigma_{\mathcal{O}}^{\pm 1} (\Sigma_{\mathcal{O}}^{-1})$  denote set of all knots on  $T_{\mathcal{O}}$ , having intersection index  $+1$  ( $-1$ ) with the knot  $\gamma_{\mathcal{O}}$ . Then

$$\tilde{\sigma}_{\mathcal{O}} \in \Sigma_{\mathcal{O}}^{\pm 1} \iff \langle \tilde{\sigma}_{\mathcal{O}} \rangle = \langle \pm b_{\mathcal{O}} + n_{\mathcal{O}} l_{\mathcal{O}}, \pm c_{\mathcal{O}} + n_{\mathcal{O}} m_{\mathcal{O}} \rangle, n_{\mathcal{O}} \in \mathbb{Z}. \tag{3}$$

It is easily verified that the intersection index of nodes  $\sigma_{\mathcal{O}}, \tilde{\sigma}_{\mathcal{O}}$  is  $-n_{\mathcal{O}}$ . Then, if  $\tilde{\sigma}_S = (\tilde{\sigma}_R \cup \tilde{\sigma}_A) \cap T_S$ , then

$$n_A + n_R + n_S = 0. \tag{4}$$

Also recall that the generators  $L_S, M_S$  are chosen such that with respect to them the knot  $\gamma_S$  has homotopy type

$$\langle \gamma_S \rangle = \langle l_S, m_S \rangle = \langle 2, 1 \rangle. \tag{5}$$

If  $(l_R, m_R) \neq (0, 0)$  let the knot  $\sigma_S \subset T_S$  be chosen such that

$$\langle \sigma_S \rangle = \langle b_S, c_S \rangle = \langle 1, 1 \rangle \quad (6)$$

and  $\sigma_S$  intersects with each connected component of the  $\partial K$  at exactly one point (this can be done since the intersection index of the nodes  $\gamma_S$  and  $\sigma_S$  is 1). Let the knots  $\sigma_R \subset T_R$ ,  $\sigma_A \subset T_A$  be chosen such that

$$\sigma_S = (\sigma_R \cup \sigma_A) \cap T_S. \quad (7)$$

By definition  $C_{ft} = (l_1, b_1, l_2, b_2)$ , where

- $(l_1, b_1, l_2, b_2) = (l_R, b_R, l_A, b_A)$ , if  $(l_R, m_R) \neq (0, 0)$ ;
- $(l_1, b_1, l_2, b_2) = (0, 2, p_A, q_A)$ , if  $(l_R, m_R) = (0, 0)$  and 2-ball, bounded by the knot  $\gamma_R$  remains to the left when traveling along the knot;
- $(l_1, b_1, l_2, b_2) = (0, -2, -p_A, -q_A)$ , if  $(l_R, m_R) = (0, 0)$  and 2-ball, bounded by the knot  $\gamma_R$  remains to the right when traveling along the knot.

Similar equalities with primes hold for the flow  $f^{tt}$ .

Let us prove separately the necessity and sufficiency of the conditions of the theorem 1.1.

*Necessity.* Let the flows  $f^t$  and  $f^{tt}$  with periodic orbits  $A, R, S$  and  $A', R', S'$  be topologically equivalent via the homeomorphism  $h: M^3 \rightarrow M^3$ . For  $\mathcal{O} \in \{A, S, R\}$ , without reducing generality, let  $V_{\mathcal{O}'} = h(V_{\mathcal{O}})$ . Let  $h_{\mathcal{O}} = h|_{T_{\mathcal{O}}}: T_{\mathcal{O}} \rightarrow T_{\mathcal{O}'}$ .

Since  $h_{\mathcal{O}}$  is a restriction of a homeomorphism of a solid torus, the action of the homeomorphism  $h_{\mathcal{O}}$  in the fundamental group  $\pi_1(T_{\mathcal{O}})$  in the generators  $L_{\mathcal{O}}, M_{\mathcal{O}}$  is given by a matrix:

$$h_{\mathcal{O}*} = \begin{pmatrix} 1 & k_{\mathcal{O}} \\ 0 & \delta_{\mathcal{O}} \end{pmatrix}, \quad k_{\mathcal{O}} \in \mathbb{Z}, \quad \delta_{\mathcal{O}} \in \{-1, +1\}. \quad (8)$$

Thus, since the tori  $T_A, T_S, T_R$  are pairwise intersecting two-dimensional manifolds, all numbers  $\delta_A, \delta_S, \delta_R$  have the same sign, let

$$\delta_A = \delta_S = \delta_R = \delta_R = \delta.$$

From the properties of the conjugating homeomorphism it follows that  $h_{\mathcal{O}}(\gamma_{\mathcal{O}}) = \gamma_{\mathcal{O}'}$ ,  $\mathcal{O} \in \{S, A, R\}$ , whence we obtain that

$$l_{\mathcal{O}} = l_{\mathcal{O}'} \quad (9)$$

and

$$(l_R, m_R) = (0, 0) \iff (l_{R'}, m_{R'}) = (0, 0). \quad (10)$$

Let us prove that the consistency conditions of the sets  $C_{ft}, C_{f^{tt}}$  holds separately for two cases: I)  $(l_R, m_R) = (0, 0)$ , II)  $(l_R, m_R) \neq (0, 0)$ .

In case I), it follows from the definition of the sets  $C_{ft}, C_{f^{tt}}$  that  $l_1 = l_2 = 0$ ,  $|b_2| = |b'_2| = 2$ . Since the homeomorphism  $h_R$  maps the 2-disc bounded by the node  $\gamma_R$  into the 2-disc bounded by the knot  $\gamma_{R'}$  with direction of knots preserved, then  $b_2 = \delta b'_2$ .

It follows from the equations (8) that  $h_{R*}(\langle 0, 1 \rangle) = \langle 0, \delta \rangle$ . Thus,  $h_{A*}(\langle p_A, q_A \rangle) = \langle \delta p_{A'}, \delta q_{A'} \rangle$ . Since  $(l_2, b_2) = (\pm p_A, \pm q_A)$ , we have  $(l'_2, b'_2) = (\delta(\pm p_{A'}), \delta(\pm q_{A'}))$  which implies  $h_{A*}(\langle l_2, b_2 \rangle) = \langle l'_2, b'_2 \rangle$ . Also, it follows from the equations (8) that  $h_{A*}(\langle l_2, b_2 \rangle) = \langle l_2, \delta b_2 + k_{Al_2} \rangle$ , whence  $l_2 = l'_2$  and  $b_2 \equiv \delta b'_2 \pmod{l_2}$ .

In case II), the equality (9) is equivalent to the equality  $l_i = l'_i$ ,  $i = 1, 2$ . Let  $\tilde{\sigma}_{\mathcal{O}'} = h_{\mathcal{O}}(\sigma_{\mathcal{O}})$  and denote by

$$\langle \tilde{\sigma}_{\mathcal{O}'} \rangle = \langle \tilde{b}_{\mathcal{O}'}, \tilde{c}_{\mathcal{O}'} \rangle$$

. the homotopy type of the knot  $\tilde{\sigma}_{\mathcal{O}'}$  with respect to the generators  $L_{\mathcal{O}'}, M_{\mathcal{O}'}$ . Then it follows from the formula (8) that

$$\tilde{b}_{\mathcal{O}'} = b_{\mathcal{O}} \quad (11)$$

Since the determinant of the matrix  $h_{\mathcal{O}^*}$  equals  $\delta$  and  $h_{\mathcal{O}}(\gamma_{\mathcal{O}}) = \gamma_{\mathcal{O}'}$ , then  $\tilde{\sigma}_{\mathcal{O}'} \in \Sigma_{\mathcal{O}'}^{\delta}$ . Then from the formula (3) we obtain that

$$\tilde{b}_{\mathcal{O}'} = \delta b_{\mathcal{O}'} + n_{\mathcal{O}'} l_{\mathcal{O}'}, \tilde{c}_{\mathcal{O}} = \delta c_{\mathcal{O}} + n_{\mathcal{O}'} m_{\mathcal{O}'}. \quad (12)$$

Whence, taking into account the equalities (9) and (11), we obtain that

$$b_{\mathcal{O}} = \delta b_{\mathcal{O}'} + n_{\mathcal{O}'} l_{\mathcal{O}}, \quad (13)$$

so

$$b_{\mathcal{O}} \equiv \delta b_{\mathcal{O}'} \pmod{l_{\mathcal{O}}}. \quad (14)$$

By construction  $\tilde{\sigma}_S = (\tilde{\sigma}_R \cup \tilde{\sigma}_A) \cap T_S$ , which, given the equality (4), entails equality

$$n_{A'} + n_{R'} + n_{S'} = 0. \quad (15)$$

If  $l_A l_R \neq 0$ , then by expressing  $n_{\mathcal{O}'}$  from the equality (13) and substituting into the equality (15), given that  $l_S = 2$ ,  $b_S = b_{S'} = 1$ , we arrive at

$$2l_R(b_A - \delta b_{A'}) + 2l_A(b_R - \delta b_{R'}) + l_A l_R(1 - \delta) = 0,$$

which is equivalent to

$$l_A l_R(2l_R(b_A - \delta b_{A'}) + 2l_A(b_R - \delta b_{R'}) + l_A l_R(1 - \delta)) = 0,$$

which holds when  $l_A l_R = 0$ .

*Sufficiency.* Let the sets  $C_{f^t} = (l_1, b_1, l_2, b_2)$ ,  $C_{f^{t'}} = (l'_1, b'_1, l'_2, b'_2)$  of flows  $f^t, f^{t'}$  are consistent via the parameter  $\delta \in \{-1, 1\}$ . We define the homeomorphism  $Q_{\delta}: \mathbb{V}_{-1} \rightarrow \mathbb{V}_{-1}$  by the formula

$$Q_{\delta} = v_{a_{-1}} \bar{Q}_{\delta} v_{a_{-1}}^{-1}, \text{ where } \bar{Q}_{\delta}(x_1, x_2, x_3) = (\delta x_1, x_2, x_3): V_{-1} \rightarrow V_{-1}.$$

We check directly that the constructed homeomorphism  $Q_{\delta}$  realizes the equivalence of the flow  $[a_{-1}]^t$  with itself. Let

$$h_S = H_{S'} Q_{\delta} H_S^{-1}: V_S \rightarrow V_{S'}.$$

We show that the homeomorphism  $h_S|_{K_A}$  can be extended to a homeomorphism  $h_A: T_A \rightarrow T_{A'}$  inducing an isomorphism  $h_{A^*} = \begin{pmatrix} 1 & k_A \\ 0 & \delta \end{pmatrix}$  for some  $k_A \in \mathbb{Z}$  and the homeomorphism  $h_S|_{K_R}$  can be extended to the homeomorphism  $h_R: T_R \rightarrow T_{R'}$  inducing isomorphism  $h_{R^*} = \begin{pmatrix} 1 & k_R \\ 0 & \delta \end{pmatrix}$  for some  $k_R \in \mathbb{Z}$  such that  $h_A|_K = h_R|_K$ . Then, by virtue of Proposition 3.2, the homeomorphisms  $h_A, h_R$  can be extended to homeomorphisms  $h_A: V_A \rightarrow V_{A'}$ ,  $h_R: V_R \rightarrow V_{R'}$  realizing the equivalence of the flows  $f^t|_{V_A} \circ f^{t'}|_{V_{A'}}$  and  $f^t|_{V_R}$  with  $f^{t'}|_{V_{R'}}$ , respectively, and the desired homeomorphism  $h: M^3 \rightarrow M^3$  realizing the equivalence of  $f^t, f^{t'}$  flows coincides with  $h_{\mathcal{O}}$  on  $V_{\mathcal{O}}$  for  $\mathcal{O} \in \{S, A, R\}$ .

Let's consider the cases separately: I)  $(l_1, b_1) = (0, \pm 2)$ , II)  $(l_1, b_1) \neq (0, \pm 2)$ .

In case I), it follows from the consistency condition of the sets  $C_{f^t}, C_{f^{t'}}$  that  $b_1 = \delta b'_1$ ,  $l_2 = l'_2$  and  $b'_2 = \delta b_2 + k_A l_2$  for some  $k_A \in \mathbb{Z}$ . Since the annuli  $K_A, K_{A'}$  are contractible on tori  $T_A, T_{A'}$ , the homeomorphism  $h_S|_{K_A}$  can be extended to the homeomorphism  $h_A: T_A \rightarrow T_{A'}$  inducing an isomorphism

$$h_{A^*} = \begin{pmatrix} 1 & k_A \\ 0 & \delta \end{pmatrix}.$$

Let us define the homeomorphism  $h_R: T_R \rightarrow T_{R'}$  by the formula

$$h_R(x) = \begin{cases} h_S(x), & x \in K_R \\ h_A(x), & x \in K \end{cases}.$$

Since  $h_{A*}(\langle l_2, b_2 \rangle) = \langle l'_2, b'_2 \rangle$ , then  $h_{R*}(\langle 0, 1 \rangle) = \langle 0, \delta \rangle$  so

$$h_{R*} = \begin{pmatrix} 1 & k_R \\ 0 & \delta \end{pmatrix}$$

for some  $k_R \in \mathbb{Z}$ .

In case II), it follows from the consistency condition of the sets  $C_{ft}, C_{f't}$  that  $l'_i = l_i, b'_i \equiv \delta b_i \pmod{l_i}, i = 1, 2$ . So,

$$l_{R'} = l_R, b'_{R'} \equiv \delta b_R \pmod{l_R}; l_{A'} = l_A, b'_{A'} \equiv \delta b_A \pmod{l_A}. \quad (16)$$

Next, we consider separately cases IIa)  $l_A l_R = 0$ , IIb)  $l_A l_R \neq 0$ .

In case IIa) we assume without loss of generality that  $l_R = 0$  (in case  $l_A = 0$  the reasoning is similar). It follows from (16) and (2) that  $m_{A'} = \delta m_A + k_A l_A$  for some  $k_A \in \mathbb{Z}$ . Then the homeomorphism  $h_S|_{K_A}$  continues to a homeomorphism  $h_A: T_A \rightarrow T_{A'}$  inducing an isomorphism

$$h_{A*} = \begin{pmatrix} 1 & k_A \\ 0 & \delta \end{pmatrix}.$$

Let us define the homeomorphism  $h_R: T_R \rightarrow T_{R'}$  by the formula

$$h_R(x) = \begin{cases} h_S(x), & x \in K_R \\ h_A(x), & x \in K \end{cases}.$$

Since  $l_R = 0$ , then  $m_R = \pm 1, m_{R'} = \pm \delta$  and hence  $h_{R*}(\langle 0, \pm 1 \rangle) = \langle 0, \pm \delta \rangle$ . Then

$$h_{R*} = \begin{pmatrix} 1 & k_R \\ 0 & \delta \end{pmatrix}$$

for some  $k_R \in \mathbb{Z}$ .

In case IIb), the homeomorphisms  $h_A: T_A \rightarrow T_{A'}$  and  $h_R: T_R \rightarrow T_{R'}$  are constructed as in case IIa). Let us show that  $h_{R*} = \begin{pmatrix} 1 & k_R \\ 0 & \delta \end{pmatrix}$ , where  $m_{R'} = \delta m_R + k_R l_R$ .

From the equality (12) we obtain that the knot  $h_S(\sigma_S)$  has the intersection index

$$n_{S'} = \frac{1 - \delta}{2}$$

with the knot  $\sigma_{S'}$ , and the knot  $h_A(\sigma_A)$  has the intersection index

$$n_{A'} = \frac{b_A - \delta b_{A'}}{l_A}$$

with knot  $\sigma_{A'}$ . According to the equality (15), knot  $h_R(\sigma_R)$  has intersection index  $n_{R'} = -(n_{S'} + n_{A'})$ . Then from the consistency condition of the sets, we obtain that

$$n_{R'} = \frac{b_R - \delta b_{R'}}{l_R}.$$

Whence  $h_{R*}(\langle b_R, c_R \rangle) = \langle b_R, \tilde{c}_R \rangle$ . Since  $h_{R*}(\langle l_R, m_R \rangle) = \langle l_R, m_{R'} \rangle$ , then

$$h_{R*} = \begin{pmatrix} 1 & k_R \\ 0 & \delta \end{pmatrix}.$$

□

## 5 Realization of flows $f^t \in G_1^-(M^3)$

In this section we prove the second part of Theorem 1.1: for any admissible invariant  $C$  there exists a flow  $f^t \in G_1^-(M^3)$ . Recall that an invariant  $C$  is called admissible if:

- $(l_1, b_1) = (0, \pm 2)$  or  $\gcd(l_1, b_1) = 1$ ;
- $\gcd(l_2, b_2) = 1$ .

*Proof.* Let  $C = (l_1, b_1, l_1, l_1, b_1)$ . We construct the three-dimensional manifold  $M^3$  and the flow  $f^t \in G_1^-(M^3)$  such that  $C_{f^t} = C$  separately for the cases: I)  $(l_1, b_1) = (0, \pm 2)$ , II)  $(l_1, b_1) \neq (0, \pm 2)$ .

In case I), for  $(l_1, b_1) = (0, \pm 2)$ , let  $(p, q) = (\pm l_2, \pm b_2)$ . Let us define a homeomorphism  $\psi: \mathbb{T}_2 \rightarrow \mathbb{T}_0$  inducing an isomorphism defined by the integer matrix  $h_* = \begin{pmatrix} r & s \\ p & q \end{pmatrix}$  with determinant equals to -1. On the torus  $\mathbb{T}_2$ , we choose a  $\gamma_R$  essential knot with a tubular neighborhood  $K_R \subset (\mathbb{T}_2 \setminus \mathbb{M}_2)$  and orient it so that the 2-disk bounded by it remains on the left in the case  $b_1 = +2$  and - on the right in the case  $b_1 = -2$ . Let  $\gamma_A = \psi(\gamma_R)$  and  $K_A = \psi(K_R)$ .

Let  $\psi_R: K_R \rightarrow \mathbb{T}_{-1}^s$ ,  $\psi_A: K_A \rightarrow \mathbb{T}_{-1}^u$  be such homeomorphisms, that  $\psi_A^{-1}\psi_R|_{\partial K_R} = \psi|_{\partial K_R}$ ,  $\psi_R(\gamma_R) = \Gamma^s$ ,  $\psi_A(\gamma_A) = \Gamma^u$ . Let  $\sim$  be the minimal equivalence relation on  $\mathbb{V}_0 \sqcup \mathbb{V}_{-1} \sqcup \mathbb{V}_2$  for which  $x \sim \psi(x), x \in (\mathbb{T}_2 \setminus \text{int } K_A)$ ,  $x \sim \psi_A(x), x \in K_A$ ,  $x \sim \psi_R(x), x \in K_R$ . Then

$$M^3 = (\mathbb{V}_0 \sqcup \mathbb{V}_{-1} \sqcup \mathbb{V}_2) / \sim.$$

We denote by  $\pi: \mathbb{V}_0 \sqcup \mathbb{V}_{-1} \sqcup \mathbb{V}_2 \rightarrow M^3$  the natural projection. Let the flow  $f^t: M^3 \rightarrow M^3$  be given by the formula

$$f^t(x) = \begin{cases} \pi([a_0]^t(\pi^{-1}(x))), & x \in \pi(\mathbb{V}_0) \\ \pi([a_{-1}]^t(\pi^{-1}(x))), & x \in \pi(\mathbb{V}_{-1}) \\ \pi([a_2]^t(\pi^{-1}(x))), & x \in \pi(\mathbb{V}_2) \end{cases}$$

By construction,  $C_{f^t} = C$ .

In case II), we represent the sphere  $\mathbb{S}^2$  as a union of three two-dimensional disks  $D_A, D_S, D_R$  with centers  $O_A, O_S, O_R$ , glued along the boundary as depicted in Picture 3 (glued segments are marked with the same color). Then the manifold  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$  is represented as a union of three solid tori  $V_A = D_A \times \mathbb{S}^1, V_S = D_S \times \mathbb{S}^1, V_R = D_R \times \mathbb{S}^1$ , which are tubular neighborhoods of the knots  $\ell_A = O_A \times \mathbb{S}^1, \ell_S = O_S \times \mathbb{S}^1, \ell_R = O_R \times \mathbb{S}^1$ , glued along the boundaries  $T_A = \partial V_A, T_S = \partial V_S, T_R = \partial V_R$ , along the annuli  $K_A = T_A \cap T_S, K_R = T_R \cap T_S, K = T_A \cap T_R, K = T_A \cap T_R$ , respectively.

Let  $C = (l_1, b_1, l_2, b_2)$ . Then the sought manifold  $M^3$  is obtained by the Dehn surgery along the link  $\ell_A \sqcup \ell_S \sqcup \ell_R$  with equipment  $(-b_2, l_2), (-1, 2), (-b_1, l_1)$ . Moreover, the homeomorphisms of surgery  $h_A: \mathbb{V}_0 \rightarrow V_A, h_S: \mathbb{V}_{-1} \rightarrow V_S, h_R: \mathbb{V}_{-1} \rightarrow V_S, h_R: \mathbb{V}_2 \rightarrow V_R$  are chosen such that  $h_S(\mathbb{T}_{-1}^u) = K_A, h_S(\mathbb{T}_{-1}^s) = K_R$ . Denote by  $\pi: \mathbb{V}_0 \sqcup \mathbb{V}_{-1} \sqcup \mathbb{V}_2 \rightarrow M^3$  the natural projection. Let  $f^t: M^3 \rightarrow M^3$  be defined by the formula

$$f^t(x) = \begin{cases} \pi([a_0]^t(\pi^{-1}(x))), & x \in \pi(\mathbb{V}_0) \\ \pi([a_{-1}]^t(\pi^{-1}(x))), & x \in \pi(\mathbb{V}_{-1}) \\ \pi([a_2]^t(\pi^{-1}(x))), & x \in \pi(\mathbb{V}_2) \end{cases}$$

By construction  $C_{f^t} = C$ . □

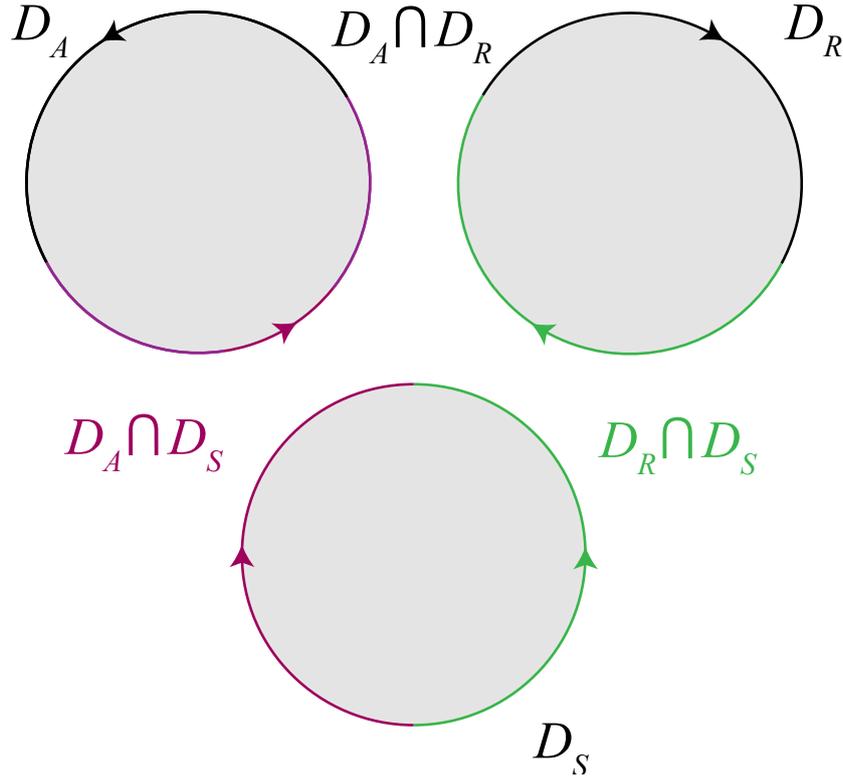


Figure 3: Disks  $D_A$ ,  $D_S$ ,  $D_R$

## 6 Topology of ambient manifolds of flows $f^t \in G_1^-(M^3)$

In this section we prove the theorem 1.2: flows of class  $G_1^-(M^3)$  admit all lens spaces  $L_{p,q}$ , all connected sums of the form  $L_{p,q} \# \mathbb{R}P^3$ , and all Seifert fiber spaces of the form  $M(\mathbb{S}^2, (\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2), (2, 1))$ . Exactly, let the flow  $f^t \in G_1^-(M^3)$  have the invariant  $C_{f^t} = (l_1, b_1, l_2, b_2)$ . Then

- 1) If  $(|l_1| - 1)(|l_2| - 1) = 0$ , then  $M^3 \cong L_{p,q}$ , herewith:
  - i) if  $l_1 l_2 = 0$ , then  $M^3 \cong \mathbb{R}P^3$ ;
  - ii) if  $C_{f^t} = (\pm 1, b_1, l_2, b_2)$ ,  $l_2 \neq 0$ , then  $M^3 \cong L_{l_2 - 2b_2, b_2}$ ;
  - iii) if  $C_{f^t} = (l_1, b_1, \pm 1, b_2)$ ,  $l_1 \neq 0$ , then  $M^3 \cong L_{l_1 - 2b_1, b_1}$ ;
- 2) If  $l_1 l_2 = 0$  and  $(|l_1| - 1)(|l_2| - 1) \neq 0$ , then  $M^3 \cong L_{p,q} \# \mathbb{R}P^3$ , herewith:
  - i) if  $C_{f^t} = (0, b_1, l_2, b_2)$ , then  $M^3 \cong L_{l_2, b_2} \# \mathbb{R}P^3$ ;
  - ii) if  $C_{f^t} = (l_1, b_1, 0, \pm 1)$ ,  $l_1 \neq 0$ , then  $M^3 \cong L_{l_1, b_1} \# \mathbb{R}P^3$ .
- 3) If  $C_{f^t} = (l_1, b_1, l_2, b_2)$ ,  $|l_1| > 1$ ,  $|l_2| > 1$ , then  $M^3 \cong M(\mathbb{S}^2, (l_1, b_1), (l_2, b_2), (2, 1))$ .

*Proof.* Let us prove the theorem separately for the cases: I)  $l_1 l_2 = 0$ , II)  $l_1 l_2 \neq 0$ .

In case I), we denote by  $M_S^3$  the manifold obtained by Dehn surgery along knot  $S$  with equipment  $(1, 1)$  in the generators  $L_S, M_S$ . Let  $v_S: (M^3 \setminus \text{int } V_S) \sqcup \mathbb{V} \rightarrow M_S^3$  — the natural

projection. For simplicity, we keep the labels of all objects on  $v_S(M^3 \setminus \text{int } V_S)$  the same as they were on  $M^3 \setminus \text{int } V_S$  and put  $\tilde{S} = v_S(\{0\} \times \mathbb{S}^1)$ ,  $V_{\tilde{S}} = v_S(\mathbb{V})$ . Then  $\tilde{V}_R = V_R \cup V_{\tilde{S}}$  is a solid torus with boundary  $\tilde{T}_R$  and there exists an isotopy  $\zeta_t: V_R \rightarrow \tilde{V}_R$ ,  $t \in [0, 1]$  such that  $\zeta_0 = \text{id}|_{V_A}$ ,  $\zeta_t|_K = \text{id}|_K$ ,  $t \in [0, 1]$ ,  $\zeta_1(V_R) = \tilde{V}_R$ ,  $\zeta_1(\sigma_S \cap K_R) = \sigma_S \cap K_A$ . For any curve  $c \subset T_R$ , let us put  $\tilde{c} = \zeta_1(c) \subset \tilde{T}_R$ . Then the isomorphism  $\zeta_{1*}$  is identical in the generators  $L_R, M_R; \tilde{L}_R, \tilde{M}_R$  and

$$M_S^3 = \tilde{V}_R \cup_{\psi} V_A, \quad (17)$$

where  $\psi: \partial\tilde{V}_R \rightarrow \partial V_A$  is homeomorphism inducing isomorphism in generators  $\tilde{L}_R, \tilde{M}_R; L_A, M_A$  and  $\psi_* = \begin{pmatrix} r & s \\ p & q \end{pmatrix}$ . Hence,  $M_S^3 \cong L_{p,q}$ . From the Statement 2.2, we obtain that  $M^3 \cong (L_{p,q})_{\tilde{S}}$ , where  $\tilde{S}$  is a knot with equipment  $(-1, 2)$ . Since the knot  $\tilde{S}$  bounds a 2-ball on at least one of the tori  $\tilde{V}_A, V_R$ , then, by virtue of the Statement 2.3  $(L_{p,q})_{\tilde{S}} \cong L_{p,q} \# L_{2,-1}$ . Whence, by virtue of the Statement 2.1,

$$M^3 \cong L_{p,q} \# \mathbb{R}P^3. \quad (18)$$

Let us show how the proof of 2) and 1i) follows from the deductions made.

1i)+2i)  $(l_1, b_1) = (0, \pm 2)$ . It follows from the definition of the set  $C_{ft}$  that  $\psi_*(\langle 0, 1 \rangle) = \langle \pm l_2, \pm b_2 \rangle$ . By virtue of Statement 2.3,

$$2i) M^3 \cong L_{l_2, b_2} \# \mathbb{R}P^3, |l_2| \neq 1;$$

$$1i) M^3 \cong \mathbb{R}P^3, |l_2| = 1.$$

1i)+2i)  $(l_1, b_1) \neq (0, \pm 2)$ . It follows from the definition of the set  $C_{ft}$  that  $\psi_*(\langle 0, 1 \rangle) = \langle \pm l_2, \pm m_A \rangle$ ,  $\psi_*(\langle 1, \pm c_R \rangle) = \langle \pm b_2, \pm c_A \rangle$ . By direct calculation we obtain that  $\psi_*^{-1}(\langle 0, 1 \rangle) = \langle \pm l, b \rangle$ , where  $|l| = |l_2|$ ,  $|b| \equiv |b_2| \pmod{l_2}$ . By virtue of Statement 2.3,

$$2i) M^3 \cong L_{l_2, b_2} \# \mathbb{R}P^3, |l_2| \neq 1;$$

$$1i) M^3 \cong \mathbb{R}P^3, |l_2| = 1.$$

1i)+2ii). By reasoning analogous to the above, we obtain that

$$2ii) M^3 \cong L_{l_1, b_1} \# \mathbb{R}P^3, |l_1| \neq 1;$$

$$1i) M^3 \cong \mathbb{R}P^3, |l_1| = 1.$$

In case II), consider first the subcase  $|l_1| = 1$ . Then  $\tilde{V}_S = V_S \cup V_R$  is a filled torus with boundary  $\tilde{T}_S$  and there exists an isotopy  $\zeta_t: V_S \rightarrow \tilde{V}_S$ ,  $t \in [0, 1]$  such that  $\zeta_0 = \text{id}|_{V_S}$ ,  $\zeta_t|_{K_A} = \text{id}|_{K_A}$ ,  $t \in [0, 1]$ ,  $\zeta_1(V_S) = \tilde{V}_S$ ,  $\zeta_1(\sigma_S \cap K_R) = \sigma_R \cap K$ . For any curve  $c \subset T_S$ , let  $\tilde{c} = \zeta_1(c) \subset \tilde{T}_S$ . Then the isomorphism  $\zeta_{1*}$  is identical in the generators  $L_S, M_S; \tilde{L}_S, \tilde{M}_S$  and

$$M_S^3 = \tilde{V}_S \cup_{\psi} V_A, \quad (19)$$

where  $\psi: \partial\tilde{V}_S \rightarrow \partial V_A$  is a homeomorphism, inducing in the generators  $\tilde{L}_S, \tilde{M}_S; L_A, M_A$  isomorphism  $\psi_* = \begin{pmatrix} r & s \\ p & q \end{pmatrix}$ . Hence,  $M_S^3 \cong L_{p,q}$ . From the definition of the set  $C_{ft}$ , it follows that  $\psi_*(\langle 2, 1 \rangle) = \langle \pm l_2, m_A \rangle$ ,  $\psi_*(\langle 1, 1 \rangle) = \langle \pm b_2, \pm c_A \rangle$ . By direct calculation, we obtain that  $\psi_*^{-1}(\langle 0, 1 \rangle) = \langle \pm l, b \rangle$ , where  $|l| = ||l_2 - 2b_2|$ ,  $|b| \equiv |b_2| \pmod{l_2}$ . By virtue of the Statement 2.3,

$$1ii) M^3 \cong L_{l_2 - 2b_2, b_2}.$$

In the case  $|l_2| = 1$  by similar reasoning, we obtain that

$$1iii) M^3 \cong L_{l_1 - 2b_1, b_1}.$$

In the case  $|l_1| > 1$ ,  $|l_2| > 1$ , it follows from the procedure for realizing a flow over an admissible set (see the proof of the second part of Theorem 1.1 in Case II)) that  $M^3$  is a Seifert fiber space with base sphere with three special fibers

$$M^3 \cong M(\mathbb{S}^2, (l_1, b_1), (l_2, b_2), (2, 1)).$$

□

## 7 Counting the number of topological equivalence classes

In this section we give a proof of Theorem 1.3. To do this, recall that for any pair  $p, q$  of integer prime numbers, we put  $\bar{p} = |p|$  and denote by  $\bar{q}$  the smallest non-negative of the numbers  $q'$  satisfying the condition  $q \equiv \pm q' \pmod{p}$ , and by  $\tilde{q}$  the smallest non-negative of the numbers  $q'$  satisfying the condition  $qq' \equiv \pm 1 \pmod{p}$ .

**Theorem 1.3.** *The set  $G_1^-(L_{p,q})$ ,  $|p| \neq 2$  decomposes into a countable number of equivalence classes, whereas the sets  $G_1^-(\mathbb{R}P^3)$ ,  $G_1^-(L_{p,q} \# \mathbb{R}P^3)$ ,  $G_1^-(M(\mathbb{S}^2, (\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2), (2, 1)))$  consist of a finite number of classes.*

*Proof.* By virtue of Theorem 1.2, flows of class  $G_1^-(M^3)$  admit three types of manifolds 1)  $L_{p,q}$ ; 2)  $L_{p,q} \# \mathbb{R}P^3$ ; 3)  $M(\mathbb{S}^2, (l_1, b_1), (l_2, b_2), (2, 1))$ . Let us prove the proof separately for each of these cases.

1) According to Statement 2.1, two lens spaces  $L_{p,q}$ ,  $L_{p',q'}$  are homeomorphic if and only if  $\bar{p} = \bar{p}'$  and either  $\bar{q} = \bar{q}'$  or  $\bar{q} = \tilde{q}'$ . Whence it follows that  $L_{p,q} \cong L_{\bar{p},\bar{q}}$  and,  $L_{p',q'} \cong L_{\bar{p}',\tilde{q}'}$  if and only if at least one of the following conditions for  $k \in \mathbb{Z}$  is satisfied:

$$p' = \bar{p}, q' = \bar{q} + k\bar{p}; \tag{20}$$

$$p' = -\bar{p}, q' = \bar{q} + k\bar{p}; \tag{21}$$

$$p' = \bar{p}, q' = -\bar{q} + k\bar{p}; \tag{22}$$

$$p' = -\bar{p}, q' = -\bar{q} + k\bar{p}; \tag{23}$$

$$p' = \bar{p}, q' = \tilde{q} + k\bar{p}; \tag{24}$$

$$p' = -\bar{p}, q' = \tilde{q} + k\bar{p}; \tag{25}$$

$$p' = \bar{p}, q' = -\tilde{q} + k\bar{p}; \tag{26}$$

$$p' = -\bar{p}, q' = -\tilde{q} + k\bar{p}; \tag{27}$$

By virtue of the 1.2 theorem, the lens  $L_{\bar{p},\bar{q}}$ ,  $\bar{p} \neq 2$  is a ambient manifold for flows with invariants

$$(\pm 1, n, p' + 2q', q'); \tag{28}$$

$$(p' + 2q', q', \pm 1, n), \tag{29}$$

where  $n \in \mathbb{Z}$ . Substituting the condition (20) into (28), we obtain sets of the form

$$(\pm 1, b_1, \bar{p} + 2(\bar{q} + k\bar{p}), \bar{q} + k\bar{p}).$$

From the definition of consistency, it follows that two sets of

$$(\pm 1, n_1, \bar{p} + 2(\bar{q} + k_1\bar{p}), \bar{q} + k_1\bar{p}), (\pm 1, n_2, \bar{p} + 2(\bar{q} + k_2\bar{p}), \bar{q} + k_2\bar{p}), \bar{q} + k_2\bar{p})$$

are consistent if and only if  $k_1 = k_2$ ,  $n_1 = n_2$ . Thus, each representation of the lens  $L_{p,q}$  in the form (20) gives rise to the family  $(\pm 1, n, \bar{p} + 2(\bar{q} + k + k\bar{p}), \bar{q} + k\bar{p})$ ,  $n, k \in \mathbb{Z}$  of pairwise

non-consistent sets corresponding, by virtue of Theorem 1.2, to pairwise non-equivalent flows. If  $|p| > 2$ , then similar families are obtained from each of the representations (21), (22), (23), (23). It is directly verified that the sets of all four families are not pairwise equivalent. Finally, if  $\bar{q} \neq \tilde{q}$  (equivalent to  $q^2 \not\equiv \pm 1 \pmod{p}$ ), we obtain four more families of pairwise non-equivalent sets corresponding to the representations (24), (25), (??), (26), (26), (??). Adding to the list of sets, sets of type (29), we obtain a list of eight more pairwise non-equivalent sets, directly from which follows the result of the theorem in cases 1a), 1b).

In cases 1c); 1d), by directly substituting the pairs  $\bar{p} = 0, \bar{q} = 1$ ;  $\bar{p} = 1, \bar{q} = 0$  into the sets 1b), respectively, we obtain the announced lists of pairwise non-equivalent pairs.

In the case  $|p| = 2$ , the lens  $L_{p,q}$  is a ambient manifold for the flows with invariants

$$(0, c, \pm 1, n); \tag{30}$$

$$(\pm 1, n, 0, d), \tag{31}$$

where  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $c \in \{-2, -1, 1, 2\}$ ,  $d \in \{-1, 1\}$ . From the definition of consistency, it follows that the two sets

$$(0, c_1, \pm 1, n_1), (0, c_2, \pm 1, n_2)$$

are consistent if and only if  $c_1 = \pm c_2$ ,  $n_1 \equiv \pm n_2 \pmod{1}$ . A similar statement is true for sets of the form (31), resulting in the announced list 1e).

2) By virtue of Theorem 1.2 the manifold  $L_{p,q} \# \mathbb{R}P^3$ ,  $|p| \neq 1$  is an ambient manifold for flows with invariants

$$(0, c, p', q'); \tag{32}$$

$$(p', q', 0, d), \tag{33}$$

where  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $c \in \{-2, -1, 1, 2\}$ ,  $d \in \{-1, 1\}$ . It follows from the definition of consistency that for  $|p| > 2$  the two sets of

$$(0, c_1, \bar{p}, \bar{q} + k_1\bar{p}), (0, c_2, \bar{p}, \bar{q} + k_2\bar{p})$$

are consistent if and only if  $c_1 = c_2$ ,  $k_1 \equiv k_2 \pmod{1}$ . Thus, each representation of the lens  $L_{p,q}$  in the form (20) gives rise to a family  $(0, c, \bar{p}, \bar{q})$  of pairwise non-consistent sets corresponding, by virtue of Theorem 1.2, to pairwise non-equivalent flows. Similar families are obtained from each of the representations (21), (22), (22), (23), (24), (??), (26), (27), (27) if  $\bar{q} \neq \tilde{q}$ . Adding to the list of sets, the sets of type (33), we obtain the list of sets announced in (2a), 2b) of this theorem.

In cases 2c); 2d), by directly substituting into sets 2b) the pairs  $\bar{p} = 0, \bar{q} = 1$ ;  $\bar{p} = 2, \bar{q} = 1$ , respectively, we obtain the announced lists of pairwise non-equivalent pairs.

3) By virtue of the 1.2 theorem, the manifold  $M(\mathbb{S}^2, (\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2), (2, 1))$  is an ambient manifold for flows with invariants

$$(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2). \tag{34}$$

By virtue of Statement 2.4  $M(\mathbb{S}^2, (\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2), (2, 1)) \cong M(\mathbb{S}^2, (\alpha'_1, \beta'_1), (\alpha'_2, \beta'_2), (2, 1))$  if and only if at least one of the following conditions is met:

$$\alpha'_1 = \alpha_1, \beta'_1 = \beta_1 + k_1\alpha_1, \alpha'_2 = \alpha_2, \beta'_2 = \beta_2 + k_2\alpha_2; \tag{35}$$

$$\alpha'_1 = \alpha_2, \beta'_1 = \beta_2 + k_1\alpha_2, \alpha'_2 = \alpha_1, \beta'_2 = \beta_1 + k_2\alpha_1, \tag{36}$$

where  $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ . By virtue of Theorem reft:h:top.  $M(\mathbb{S}^2, (\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2), (2, 1))$  is an ambient manifold for flows with invariants

$$(\alpha'_1, \beta'_1, \alpha'_2, \beta'_2). \tag{37}$$

Substituting (35) into (37), we obtain sets of the form

$$(\alpha_1, \beta_1 + k_1\alpha_1, \alpha_2, \beta_2 + k_2\alpha_2).$$

It follows from the definition of consistency that all such sets are equivalent to the set  $(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2)$ . A similar situation is obtained with the relation (36). From where we obtain the sets announced in 3a), 3b).  $\square$

## References

- [1] Daniel Asimov. Round handles and non-singular morse-smale flows. *Annals of Mathematics*, 102(1):41–54, 1975.
- [2] John Franks. Nonsingular smale flows on  $s^3$ . *Topology*, 24(3):265–282, 1985.
- [3] Hansjörg Geiges and Christian Lange. Seifert fibrations of lens spaces. In *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg*, volume 88, pages 1–22. Springer, 2018.
- [4] Viacheslav Z Grines, Timur V Medvedev, and Olga V Pochinka. *Dynamical systems on 2-and 3-manifolds*, volume 46. Springer, 2016.
- [5] Allen Hatcher. Notes on basic 3-manifold topology, 2007.
- [6] M.C. Irwin. A classification of elementary cycles. *Topology*, 9(1):35–47, 1970.
- [7] Sergey Vladimirovich Matveev and Anatoly Timofeevich Fomenko. *Algorithmic and computer methods in three-dimensional topology*. Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education "Lomonosov Moscow State University" Publishing House (Printing House), 1991.
- [8] John W Morgan. Non-singular morse-smale flows on 3-dimensional manifolds. *Topology*, 18(1):41–53, 1979.
- [9] O.V. Pochinka and D.D. Shubin. Non-singular morse-smale flows on n-manifolds with attractor-repeller dynamics. *Nonlinearity*, 35(3):1485, 2022.
- [10] Alexander Olegovich Prishlyak. Complete topological invariant of morse-smale flows and handle decompositions of three-dimensional manifolds (in russian). *Fundamental and applied mathematics*, 11(4):185–196, 2005.
- [11] Dale Rolfsen. *Knots and links*, volume 346. American Mathematical Soc., 2003.
- [12] Herbert Seifert. Topologie dreidimensionaler gefaserner räume. 1933.
- [13] Danila Denisovich Shubin. Topology of ambient manifolds of nonsingular flows with three nontwisted orbits. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, 29(6):863–868, 2021.
- [14] Stephen Smale. Differentiable dynamical systems. *Bulletin of the American mathematical Society*, 73(6):747–817, 1967.
- [15] Ya. L. Umanskii. Necessary and sufficient conditions for topological equivalence of three-dimensional morse-smale dynamical systems with a finite number of singular trajectories. *Matematicheskii Sbornik*, 181(2):212–239, 1990.

- [16] Masaaki Wada. Closed orbits of non-singular morse-smale flows on  $S^3$ . *Journal of the Mathematical Society of Japan*, 41(3):405–413, 1989.
- [17] Bin Yu. Behavior of nonsingular morse-smale flows on  $S^3$ . *Discrete & Continuous Dynamical Systems*, 36(1):509, 2016.

Приложение  
В Оргкомитет Смотра дипломных работ математиков России  
от Дегтяревой Софьи Денисовны

Заявление о новизне

Сообщаю, что новыми в моей представленной на Смотр выпускной квалификационной работе под названием «Классификация и особенности линейных операторов Нийенхейса с функционально независимыми инвариантами» являются: Лемма 1, Теорема 3, Следствие 3, Замечание 2, а также исследования и методы, представленные в пунктах 4, 5.

Также сообщаю, что для проверки новизны было проделано следующее:

- В поисковых системах Яндекс, Google, arxiv.org мною был произведён поиск статей по похожей тематике по следующим ключевым словам (на русском и английском языках): классификация левосимметрических алгебр, левосимметрические алгебры размерности три, классификация линейных операторов Нийенхейса. Так как тематика новая и развивающаяся, найденных статей оказалось немного, в частности [3], [4], а также несколько статей Chengming Bai (“Left-symmetric Algebras From Linear Functions”, “Bijective 1-cocycles and classification of 3-dimensional Left-symmetric Algebras”). В статье [4] представлены лишь некоторые примеры левосимметрических алгебр без полной классификации, а в работе [3] решена задача классификации в двумерном случае, причем методы доказательства отличны от тех, которые были разработаны в настоящей дипломной работе. Примечательно, что в статьях Chengming Bai задача классификации была полностью решена, однако методы доказательства и даже сам ответ сформулированы в совершенно других терминах.

- Проведена серия консультаций со специалистами по геометрии Нийенхейса, в частности с доцентом кафедры дифференциальной геометрии и приложений МГУ А.Ю.Коняевым и профессором кафедры дифференциальной геометрии и приложений МГУ и Loughborough University А.В.Болсиновым.

- Работа несколько раз представлялась на российских и международных конференциях и семинарах (конференции “Динамические системы классической и небесной механики”, “Регулярная и хаотическая динамика”, семинары “Алгебра и геометрия интегрируемых систем”, “Современные геометрические методы”). Результаты публиковались в сборниках тезисов, а также мною подготовлена статья, принятая в печать в журнале “Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика”.

Таким образом, по результатам поиска в сети Интернет и тематических научных базах, а также обсуждений с указанными выше специалистами следует, что, по-видимому, представленный в моей выпускной квалификационной работе указанный выше математический материал действительно является новым.

Подтверждаю, что являюсь автором предоставляемой на Смотр работы и прошу принять её для участия в Смотре. Принимаю на себя обязательство соблюдать правила Смотра. Также (в соответствии с п. 4 Положения о Смотре) принимаю на себя обязательство оценить 5 работ участников Смотра, выданных мне Оргкомитетом в результате жеребьёвки и, сверх того, оценить 2-5 работ других участников Смотра на мой выбор. Я понимаю правила оценки работ, приведённые в п. 4.3 Положения о Смотре. Даю согласие на публикацию адреса моей электронной почты.

Защита работы состоялась 04.06.2024. На Смотр представлен окончательный текст работы.



Дегтярева Софья Денисовна  
16 июня 2024 г. Москва, Россия

/Дегтярева С.Д.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
имени М. В. ЛОМОНОСОВА»

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ И ПРИЛОЖЕНИЙ

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА  
(ДИПЛОМНАЯ РАБОТА)  
специалиста

**Классификация и особенности линейных операторов  
Нийенхейса с функционально независимыми  
инвариантами**

Выполнила студентка  
607 группы  
Дегтярева Софья Денисовна

---

Подпись студента

Научный руководитель  
д.ф.-м.н. Ошемков Андрей Александрович

---

Подпись научного руководителя

Москва  
2024

## Содержание

1	Введение . . . . .	2
2	Основные понятия . . . . .	2
2.1	Определение и особенности операторов Нийенхейса . . . . .	2
2.2	Левосимметрические алгебры и операторы Нийенхейса . . . . .	3
3	Классификация линейных операторов Нийенхейса в малых размерностях . . . . .	4
3.1	Двумерный случай . . . . .	4
3.2	Трёхмерный случай . . . . .	4
3.3	Теорема классификации . . . . .	7
3.4	О связи с двумерными левосимметрическими алгебрами . . . . .	13
4	Особенности . . . . .	16
5	Ранг матрицы Якоби инвариантов равен 1 . . . . .	23
6	Заключение . . . . .	34
	Список литературы . . . . .	35

## 1 Введение

Настоящая работа посвящена исследованию операторов Нийенхейса, основных объектов нийенхейсовой геометрии. Несмотря на то, что тензор Нийенхейса был введен еще в 1951 году Альбертом Нийенхейсом, развитие эта область получила совсем недавно в серии работ А.В. Болсинова, А.Ю. Коняева и В.С. Матвеева. В одной из первых статей по теме [1] приведен общий обзор этой теории, введены основные понятия и доказаны важные фундаментальные теоремы.

Интерес к геометрии Нийенхейса обусловлен тем, что существуют известные геометрии, основными объектами которых являются тензоры типа  $(2,0)$  и  $(0,2)$ : риманова геометрия, симплектическая геометрия, пуассонова геометрия, субриманова геометрия. Здесь же образующей структурой является тензор  $(1,1)$  на многообразиях, называемый оператором Нийенхейса, который определяется нетривиальным образом через равенство нулю соответствующего тензора Нийенхейса. Как оказалось, эта теория находит применение в очень многих областях математики и физики, обзор которых также представлен в статье [1].

Целью настоящего исследования является классификация и изучение особенностей линейных операторов Нийенхейса в размерности три, то есть операторов Нийенхейса, заданных на линейном пространстве, у которых компоненты линейно зависят от координат. Известно, что имеется естественное взаимно однозначное соответствие между такими операторами и левосимметрическими алгебрами, впервые доказанное в работе [2], поэтому вопросы о классификации этих объектов эквивалентны. Такая задача даже для малых размерностей является сложной и решенной лишь в некоторых частных случаях. В статье А.Ю. Коняева [3] получена классификация произвольных левосимметрических алгебр размерности два. Имеются также результаты о классификации левосимметрических алгебр, удовлетворяющих некоторым дополнительным условиям. Например, в статье [4] представлена классификация алгебр Новикова, которые являются левосимметрическими алгебрами с некоторыми специальными свойствами.

В работе рассматриваются линейные операторы Нийенхейса в размерности три (или, что то же самое, трехмерные левосимметрические алгебры), удовлетворяющие условию функциональной независимости коэффициентов характеристического многочлена. В разделе 5 это ограничение ослабляется и изучаются операторы, ранг матрицы Якоби инвариантов которых равен 1. В общем виде вопрос о классификации левосимметрических алгебр был поставлен в [5] в связи с изучением особых точек операторов Нийенхейса.

## 2 Основные понятия

### 2.1 Определение и особенности операторов Нийенхейса

**Определение 1.** Пусть  $P$  — операторное поле на гладком многообразии  $M^n$ . Тензор Нийенхейса  $N_P$  определяется на паре векторных полей  $v, w$  следующим образом:

$$N_P(v, w) = P[Pv, w] + P[v, Pw] - P^2[v, w] - [Pv, Pw],$$

где  $[, ]$  обозначает стандартный коммутатор векторных полей.

В локальных координатах  $x^1, \dots, x^n$  компоненты  $(N_P)_{jk}^i$  тензора Нийенхейса  $N_P$  выражаются следующим образом:

$$(N_P)_{jk}^i = \frac{\partial P_k^\alpha}{\partial x^j} P_\alpha^i - \frac{\partial P_j^\alpha}{\partial x^k} P_\alpha^i - \frac{\partial P_k^i}{\partial x^\alpha} P_j^\alpha + \frac{\partial P_j^i}{\partial x^\alpha} P_k^\alpha.$$

**Определение 2.** *Операторное поле  $P$  на гладком многообразии  $M^n$  называется оператором Нийенхейса, если тензор Нийенхейса  $N_P$  тождественно равен нулю, т.е.  $N_P \equiv 0$ .*

Наша цель состоит в том, чтобы классифицировать операторы Нийенхейса определенного вида, а также изучить, как устроены их особенности. Для этого обозначим, что мы будем подразумевать под особенностями операторов Нийенхейса. Пусть  $P$  оператор Нийенхейса на  $M$ . Для  $\forall a \in M$  определим алгебраический тип  $P(a) : T_a M \rightarrow T_a M$  как структуру жордановой нормальной формы этого оператора, то есть количество и размеры жордановых блоков, соответствующих каждому собственному значению  $\lambda_i$  оператора  $P$ .

**Определение 3.** *Точка  $a \in M$  называется точкой общего положения, если алгебраический тип оператора  $P$  не меняется в некоторой окрестности  $U(a)$  точки  $a$ . Точка  $a \in M$  называется особой, если она не является точкой общего положения.*

## 2.2 Левосимметрические алгебры и операторы Нийенхейса

Мы будем рассматривать линейные операторы Нийенхейса на вещественных аффинных пространствах, то есть такие операторные поля  $P$ , для которых  $N_P \equiv 0$  и которые линейно зависят от координат  $x^1, \dots, x^n$ :  $P_i^k = a_{ij}^k x^j$ , где  $a_{ij}^k \in \mathbb{R}$ . Оказывается, существует связь между такими операторами и левосимметрическими алгебрами.

**Определение 4.** *Пусть  $\mathfrak{a}$  — алгебра размерности  $n$  над  $\mathbb{R}$  с умножением  $*$ . Ассоциатор  $A$  — это трilinearная операция на  $\mathfrak{a}$ , определенная на произвольной тройке  $\xi, \eta, \zeta \in \mathfrak{a}$  следующим образом:*

$$A(\xi, \eta, \zeta) = (\xi * \eta) * \zeta - \xi * (\eta * \zeta).$$

Если ассоциатор  $A \equiv 0$ , то алгебра является ассоциативной.

**Определение 5.** *Алгебра  $\mathfrak{a}$  называется левосимметрической, если  $\forall \xi, \eta, \zeta \in \mathfrak{a}$  справедливо соотношение:*

$$A(\xi, \eta, \zeta) = A(\eta, \xi, \zeta).$$

Заметим, что коммутатор  $[\xi, \eta] = \xi * \eta - \eta * \xi$  задает структуру алгебры Ли на левосимметрической алгебре  $\mathfrak{a}$ . Эта алгебра Ли называется ассоциированной алгеброй Ли.

Пусть  $\mathfrak{a}$  — алгебра размерности  $n$  над  $\mathbb{R}$  с умножением  $*$ . Определим правое действие на  $\mathfrak{a}$  по формуле  $R_\eta \xi = \xi * \eta$ . Произвольная конечномерная алгебра над  $\mathbb{R}$  имеет естественную структуру  $n$ -мерного аффинного многообразия. Рассмотрим точку  $\eta$  на этом многообразии. Касательное пространство в точке  $\eta$  естественным образом отождествляется с  $\mathfrak{a}$ . Тогда определим тензорное поле  $P$  типа (1,1) следующим образом:  $P$  действует на элемент  $\xi \in T_\eta \mathfrak{a}$  правым действием, то есть

$$P\xi := R_\eta \xi = \xi * \eta. \quad (1)$$

Зафиксируем базис  $e_i$  в  $\mathfrak{a}$  и обозначим через  $a_{ij}^k$  структурные константы  $\mathfrak{a}$ . Координаты  $\eta$  в этом базисе обозначим через  $\eta^i$ :  $\eta = \eta^i e_i$ . Компоненты  $R_\eta$  запишутся как  $(R_\eta)_i^k = a_{ij}^k \eta^j$ , и, в частности, они являются линейными функциями от  $\eta^j$ . Таким образом, правое действие на  $\mathfrak{a}$  порождает операторное поле, линейно зависящее от координат.

Теперь предположим, что мы имеем операторное поле  $R_\eta$  на вещественном аффинном пространстве  $\mathfrak{a}$  с координатами  $\eta^j$ , линейно зависящее от них:  $(R_\eta)_i^k = a_{ij}^k \eta^j$ . Тогда  $\mathfrak{a}$  имеет естественную структуру алгебры над  $\mathbb{R}$  со структурными константами  $a_{ij}^k = \frac{\partial R_i^k}{\partial \eta^j}$ . В итоге получаем биекцию между алгебрами и линейными операторными полями на действительных аффинных пространствах.

Сформулируем важную теорему, которая устанавливает связь между операторами Нийенхейса на вещественном аффинном пространстве и левосимметрическими алгебрами.

**Теорема 1.** Пусть  $\mathfrak{a}$  — алгебра размерности  $n$  над  $\mathbb{R}$ . Следующие условия эквивалентны:

1.  $\mathfrak{a}$  — левосимметрическая алгебра.
2. Операторное поле, заданное на  $\mathfrak{a}$  формулой (1), является оператором Нийенхейса.

### 3 Классификация линейных операторов Нийенхейса в малых размерностях

В настоящей работе решалась задача классификации трехмерных линейных операторов Нийенхейса с некоторым дополнительным условием. Перед тем, как перейти к результатам, сформулируем теорему из статьи А. Ю. Коняева [3], которая дает полную классификацию операторов в размерности два.

#### 3.1 Двумерный случай

**Теорема 2.** С точностью до изоморфизма существует два непрерывных семейства и десять явных левосимметрических алгебр в размерности два. Все они представлены в таблице 1. Оператор  $R$  в правом столбце — это оператор правого действия (согласно предыдущей теореме он же задает линейный оператор Нийенхейса), записанный в координатах  $x, y$  базиса  $e_1, e_2$ .

Заметим, что в размерности два с точностью до изоморфизма существует только две алгебры Ли. Буква  $\mathfrak{b}$  будет соответствовать неабелевой ассоциированной алгебре Ли,  $\mathfrak{c}$  — абелевой ассоциированной алгебре Ли.

#### 3.2 Трехмерный случай

**Важная формула** Алгоритм классификации трехмерных линейных операторов Нийенхейса будет опираться на следующее утверждение ([1], Corollary 2.1).

**Следствие 1.** Пусть  $\sigma_1, \dots, \sigma_n$  — коэффициенты характеристического многочлена

$$\chi(t) = \det(t \cdot Id - P) = t^n + \sigma_1 t^{n-1} + \sigma_2 t^{n-2} + \dots + \sigma_{n-1} t + \sigma_n$$

оператора Нийенхейса  $P$ . Тогда в любой локальной системе координат  $x_1, \dots, x_n$  выполняется следующее соотношение:

$$J(x)P(x) = S_\chi(x)J(x), \text{ где } S_\chi(x) = \begin{pmatrix} -\sigma_1(x) & 1 & & & \\ -\sigma_2(x) & 0 & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ -\sigma_{n-1}(x) & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -\sigma_n(x) & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

и  $J(x)$  — матрица Якоби функций  $\sigma_1, \dots, \sigma_n$  по переменным  $x_1, \dots, x_n$ .

Для удобства перепишем его для трехмерного случая и введем обозначения, которые будут использоваться в дальнейшем.

Tab. 1: Двумерные левосимметрические алгебры

Название	Структурные соотношения	$R$
$\mathfrak{b}_{1,\alpha}$	$e_2 * e_1 = e_1,$ $e_2 * e_2 = \alpha e_2$	$\begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & \alpha y \end{pmatrix}$
$\mathfrak{b}_{2,\beta}$ $\beta \neq 0$	$e_1 * e_2 = e_1,$ $e_2 * e_1 = (1 - \frac{1}{\beta})e_1,$ $e_2 * e_2 = e_2$	$\begin{pmatrix} y & (1 - \frac{1}{\beta})x \\ 0 & y \end{pmatrix}$
$\mathfrak{b}_3$	$e_2 * e_1 = e_1,$ $e_2 * e_2 = e_1 + e_2$	$\begin{pmatrix} 0 & x + y \\ 0 & y \end{pmatrix}$
$\mathfrak{b}_4^+$	$e_1 * e_1 = e_2,$ $e_2 * e_1 = -e_1,$ $e_2 * e_2 = -2e_2$	$\begin{pmatrix} 0 & -x \\ x & -2y \end{pmatrix}$
$\mathfrak{b}_4^-$	$e_1 * e_1 = -e_2,$ $e_2 * e_1 = -e_1,$ $e_2 * e_2 = -2e_2$	$\begin{pmatrix} 0 & -x \\ -x & -2y \end{pmatrix}$
$\mathfrak{b}_5$	$e_1 * e_2 = e_1,$ $e_2 * e_2 = e_1 + e_2$	$\begin{pmatrix} y & y \\ 0 & y \end{pmatrix}$
$\mathfrak{c}_1$		$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
$\mathfrak{c}_2$	$e_2 * e_2 = e_2$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}$
$\mathfrak{c}_3$	$e_2 * e_2 = e_1$	$\begin{pmatrix} 0 & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
$\mathfrak{c}_4$	$e_2 * e_2 = e_2,$ $e_2 * e_1 = e_1,$ $e_1 * e_2 = e_1$	$\begin{pmatrix} y & x \\ 0 & y \end{pmatrix}$
$\mathfrak{c}_5^+$	$e_2 * e_2 = e_2,$ $e_2 * e_1 = e_1,$ $e_1 * e_2 = e_1,$ $e_1 * e_1 = e_2$	$\begin{pmatrix} y & x \\ x & y \end{pmatrix}$
$\mathfrak{c}_5^-$	$e_2 * e_2 = e_2,$ $e_2 * e_1 = e_1,$ $e_1 * e_2 = e_1,$ $e_1 * e_1 = -e_2$	$\begin{pmatrix} y & x \\ -x & y \end{pmatrix}$

**Следствие 2.** Пусть  $P$  – оператор Нийенхейса, а  $f_1, f_2, f_3$  – коэффициенты характеристического многочлена  $\chi(t) = \det(t \cdot Id - P) = t^3 - f_1 t^2 + f_2 t - f_3$ . Тогда в любой локальной системе координат  $x, y, z$  справедливо равенство

$$AP = MA, \quad \text{где} \quad A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial z} \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} f_1 & -1 & 0 \\ f_2 & 0 & -1 \\ f_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Если матрица Якоби невырождена, то есть  $\det A \neq 0$ , то соотношение из следствия 2 можно переписать в виде

$$P = A^{-1}MA.$$

Таким образом мы можем восстанавливать операторы Нийенхейса по их инвариантам, то есть функциям  $f_1, f_2, f_3$ . Также мы определились с ограничением, которое будем требовать от операторов Нийенхейса: матрица Якоби невырождена, то есть инварианты  $f_1, f_2, f_3$  – функционально независимые функции.

**Замечание 1.** Заметим, что для линейных операторов Нийенхейса  $f_1$  – линейная функция,  $f_2$  – однородный квадратичный многочлен, а  $f_3$  – однородный кубический многочлен от координат  $x, y, z$ .

**Упрощенный вид инвариантов** Наш следующий шаг заключается в том, чтобы записать функции  $f_1, f_2, f_3$  в произвольном виде (согласно замечанию 1) и построить линейные операторы Нийенхейса по формуле из предыдущего шага. Чтобы немного упростить задачу, сформулируем и докажем следующую лемму.

**Лемма 1.** Пусть даны линейная функция  $f_1(x, y, z)$  и однородная квадратичная функция  $f_2(x, y, z)$ , которые функционально независимы. Линейной заменой координат  $x, y, z \rightarrow x', y', z'$  функции  $f_1$  и  $f_2$  можно привести к одному из следующих видов, где  $c \in \mathbb{R}$ :

$$f_1 = x', \quad f_2 = \begin{cases} \pm y'^2 \pm z'^2 + cx'^2 \\ \pm y'^2 + x'z' \\ \pm y'^2 + cx'^2 \\ x'y' + cx'^2 \end{cases}.$$

**Доказательство.** Положим  $f_1(x, y, z) = ax + by + cz = x'$ , тогда  $f_2(x', y, z) = a_1x'^2 + a_2y^2 + a_3z^2 + a_4x'y + a_5x'z + a_6yz$  и в дальнейших преобразованиях трогать  $x'$  уже нельзя.

$$1) a_2 \neq 0 \Rightarrow f_2 = a_1x'^2 + a_2 \left( y^2 + \frac{a_4x' + a_6z}{a_2}y + \left( \frac{a_4x' + a_6z}{2a_2} \right)^2 \right) - \frac{a_2(a_4x' + a_6z)^2}{4a_2^2} + a_3z^2 + a_5x'z = a_2 \left( y + \frac{a_4x' + a_6z}{2a_2} \right)^2 + \underbrace{\left( a_1 - \frac{a_4^2}{4a_2} \right)}_c x'^2 + \underbrace{\left( a_3 - \frac{a_6^2}{4a_2} \right)}_{b_1} z^2 + \underbrace{\left( a_5 - \frac{a_4a_6}{2a_2} \right)}_{b_2} x'z$$

а)  $b_1 = 0; b_2 \neq 0$

$f_2$  приводится к виду  $\pm y'^2 + x'z'$  заменой

$$y' = \sqrt{|a_2|} \left( y + \frac{a_4x' + a_6z}{2a_2} \right) \\ z' = \left( a_1 - \frac{a_4^2}{4a_2} \right) x' + \left( a_5 - \frac{a_4a_6}{2a_2} \right) z$$

б)  $b_1 = 0; b_2 = 0$

$f_2$  приводится к виду  $\pm y'^2 + cx'^2$ ,  $c \in \mathbb{R}$  заменой

$$y' = \sqrt{|a_2|} \left( y + \frac{a_4x' + a_6z}{2a_2} \right) \\ z' = z$$

в)  $b_1 \neq 0$

$f_2$  приводится к виду  $\pm y'^2 \pm z'^2 + cx'^2$ ,  $c \in \mathbb{R}$  заменой

$$y' = \sqrt{|a_2|} \left( y + \frac{a_4 x' + a_6 z}{2a_2} \right)$$

$$z' = \sqrt{\left| a_3 - \frac{a_6^2}{4a_2} \right|} \left( z + \frac{a_5 - \frac{a_4 a_6}{2a_2}}{2 \left( a_3 - \frac{a_6^2}{4a_2} \right)} x' \right)$$

2)  $a_2 = 0$ ;  $a_3 \neq 0$ . Проводим тот же алгоритм, что и в пункте 1). Мы приведем форму к одному из видов выше.

3)  $a_2 = 0$ ;  $a_3 = 0$ ;  $a_6 \neq 0$ . Сделаем замену

$$y = z' + y'$$

$$z = z' - y'$$

$$f_2 = a_1 x'^2 + a_4 x'(z' + y') + a_5 x'(z' - y') + a_6 (z'^2 - y'^2) = a_1 x'^2 + a_6 z'^2 - a_6 y'^2 + (a_4 + a_5)x'z' +$$

$$+ (a_4 - a_5)x'y' = a_1 x'^2 + a_6 z'^2 - a_6 \left( y'^2 - \frac{a_4 - a_5}{a_6} x'y' + \left( \frac{a_4 - a_5}{2a_6} \right)^2 x'^2 \right) + a_6 \left( \frac{a_4 - a_5}{2a_6} \right)^2 x'^2 +$$

$$+ (a_4 + a_5)x'z' = \left( a_1 + a_6 \left( \frac{a_4 - a_5}{2a_6} \right)^2 \right) x'^2 - a_6 \left( y' - \frac{a_4 - a_5}{2a_6} x' \right)^2 + a_6 z'^2 + (a_4 + a_5)x'z'$$

Имеем случай, аналогичный 1в).

4)  $a_2 = 0$ ;  $a_3 = 0$ ;  $a_6 = 0 \Rightarrow f_2(x', y, z) = a_1 x'^2 + a_4 x'y + a_5 x'z$

а)  $a_4 \neq 0$  или  $a_5 \neq 0$

$f_2$  приводится к виду  $x'y' + cx'^2$

б)  $a_4 = a_5 = 0$

$f_2(x', y, z) = cx'^2$  – функционально зависимый с  $f_1$ .

Лемма доказана.

### 3.3 Теорема классификации

Сформулируем и докажем основной результат.

**Теорема 3.** *Любой трехмерный линейный оператор Нийенхейса  $P$  с почти всюду функционально независимыми инвариантами в некотором базисе имеет один из видов, представленных в таблице 2, причем эти восемь операторов не могут быть сведены один к другому линейными заменами координат.*

Комментарий к таблице 2. В четвертом столбце указана алгебра Ли, ассоциированная с левосимметрической алгеброй, соответствующей данному оператору Нийенхейса. Обозначения для алгебр Ли взяты из статьи [6].

**Доказательство.** Рассмотрим матрицы  $A$  и  $M$  из следствия 2 для  $f_1, f_2, f_3$ , где  $f_1 = x$ ,  $f_2$  имеет вид из леммы, а  $f_3$  произвольный кубический однородный многочлен:  $f_3 = r_1 x^3 + r_2 y^3 + r_3 z^3 + r_4 x^2 y + r_5 x^2 z + r_6 y^2 x + r_7 y^2 z + r_8 z^2 x + r_9 z^2 y + r_{10} x y z$ .

1) Пусть  $f_2(x, y, z) = \pm y^2 \pm z^2 + cx^2$ . Имеем

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2cx & \pm 2y & \pm 2z \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} x & -1 & 0 \\ \pm y^2 \pm z^2 + cx^2 & 0 & -1 \\ f_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}, MA = \begin{pmatrix} x - 2cx & \mp 2y & \mp 2z \\ \pm y^2 \pm z^2 + cx^2 - \alpha & -\beta & -\gamma \\ f_3 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Tab. 2: Список трехмерных линейных операторов Нийенхейса

	Инварианты	$P$	Алгебра Ли
<b>I</b>	$f_1 = x$ $f_2 = -y^2 - z^2 + \frac{1}{4}x^2$ $f_3 = -\frac{1}{2}xz^2 - yz^2$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}x & 2y & 2z \\ \frac{1}{2}y & \frac{1}{2}x & -z \\ \frac{1}{4}z & -\frac{1}{2}z & 0 \end{pmatrix}$	$A_{3,11}$
<b>II</b>	$f_1 = x$ $f_2 = -y^2 - z^2 + \frac{1}{3}x^2$ $f_3 = \frac{1}{27}x^3 + \frac{2}{3\sqrt{3}}z^3 - \frac{2\sqrt{3}}{3}y^2z - \frac{1}{3}xy^2 - \frac{1}{3}xz^2$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{3}x & 2y & 2z \\ \frac{1}{3}y & \frac{1}{3}x - \frac{1}{\sqrt{3}}z & -\frac{1}{\sqrt{3}}y \\ \frac{1}{3}z & -\frac{1}{\sqrt{3}}y & \frac{1}{3}x + \frac{1}{\sqrt{3}}z \end{pmatrix}$	$A_{3,10}$
<b>III</b>	$f_1 = x$ $f_2 = -y^2 - z^2 + \frac{1}{3}x^2$ $f_3 = \frac{1}{27}x^3 + \frac{2}{3\sqrt{3}}z^3 + \frac{\sqrt{3}}{3}y^2z - \frac{1}{3}xy^2 - \frac{1}{3}xz^2$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{3}x & 2y & 2z \\ \frac{1}{3}y & \frac{1}{3}x - \frac{1}{\sqrt{3}}z & \frac{1}{2\sqrt{3}}y \\ \frac{1}{3}z & \frac{2}{\sqrt{3}}y & \frac{1}{3}x + \frac{1}{\sqrt{3}}z \end{pmatrix}$	$A_{3,11}$
<b>IV</b>	$f_1 = x$ $f_2 = y^2 - z^2$ $f_3 = (y - z)^2(2y - x)$	$\begin{pmatrix} x & -2y & 2z \\ y & x - 3y & -x + 2y + z \\ y & x - 4y + z & -x + 3y \end{pmatrix}$	$A_{3,11}$
<b>V</b>	$f_1 = x$ $f_2 = y^2 - z^2$ $f_3 = (y + z)^3$	$\begin{pmatrix} x & -2y & 2z \\ \frac{1}{2}y - \frac{1}{6}z & -\frac{3}{2}(y + z) & -\frac{3}{2}(y + z) \\ -\frac{1}{6}y + \frac{1}{2}z & \frac{3}{2}(y + z) & \frac{3}{2}(y + z) \end{pmatrix}$	$A_{3,5}$
<b>VI</b>	$f_1 = x$ $f_2 = y^2 - z^2 + \frac{1}{4}x^2$ $f_3 = \frac{1}{2}xy^2 + y^2z$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}x & -2y & 2z \\ \frac{1}{4}y & 0 & -\frac{1}{2}y \\ \frac{1}{2}z & y & \frac{1}{2}x \end{pmatrix}$	$A_{3,11}$
<b>VII</b>	$f_1 = x$ $f_2 = y^2 - z^2 + \frac{1}{3}x^2$ $f_3 = \frac{1}{27}x^3 - \frac{2}{3\sqrt{3}}z^3 - \frac{2\sqrt{3}}{3}y^2z + \frac{1}{3}xy^2 - \frac{1}{3}xz^2$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{3}x & -2y & 2z \\ \frac{1}{3}y & \frac{1}{3}x + \frac{1}{\sqrt{3}}z & \frac{1}{\sqrt{3}}y \\ \frac{1}{3}z & -\frac{1}{\sqrt{3}}y & \frac{1}{3}x - \frac{1}{\sqrt{3}}z \end{pmatrix}$	$A_{3,10}$
<b>VIII</b>	$f_1 = x$ $f_2 = y^2 - z^2 + \frac{1}{3}x^2$ $f_3 = \frac{1}{27}x^3 - \frac{2}{3\sqrt{3}}z^3 + \frac{\sqrt{3}}{3}y^2z + \frac{1}{3}xy^2 - \frac{1}{3}xz^2$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{3}x & -2y & 2z \\ \frac{1}{3}y & \frac{1}{3}x + \frac{1}{\sqrt{3}}z & -\frac{1}{2\sqrt{3}}y \\ \frac{1}{3}z & \frac{2}{\sqrt{3}}y & \frac{1}{3}x - \frac{1}{\sqrt{3}}z \end{pmatrix}$	$A_{3,11}$

$$P = \begin{pmatrix} x - 2cx & \mp 2y & \mp 2z \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{pmatrix}, \text{ где } D_{ij} = a_{ij}x + b_{ij}y + c_{ij}z, \alpha = \frac{\partial f_3}{\partial x}, \beta = \frac{\partial f_3}{\partial y}, \gamma = \frac{\partial f_3}{\partial z}. \text{ По}$$

следствию должно быть выполнено равенство  $MA = AP$ . Заметим, что сразу однозначно определяются  $r_1$  и  $c$ : если приравнять коэффициенты при  $x^2$  в (2,1) элементе и при  $x^3$  в (3,1) элементе матриц  $MA$  и  $AP$ , то

$$\begin{cases} c - 3r_1 = 2c(1 - 2c) \\ r_1 = 3r_1(1 - 2c) \end{cases}$$

Отсюда  $r_1 = 0, c = 0$  или  $r_1 = 0, c = \frac{1}{4}$ , или  $r_1 = \frac{1}{27}, c = \frac{1}{3}$ . Дальнейшие вычисления проводились с использованием программы Wolfram Mathematica. Будем писать ++, +-, --, в зависимости от того, какие знаки в  $f_2$ .

1. ++

- а)  $r_1 = 0; c = 0$  действительных решений нет.
- б)  $r_1 = 0; c = \frac{1}{4}$  действительных решений нет.
- в)  $r_1 = \frac{1}{27}; c = \frac{1}{3}$  действительных решений нет.

2. --

- а)  $r_1 = 0; c = 0$  действительных решений нет.

$$\text{б) } r_1 = 0; c = \frac{1}{4}$$

$$f_3 = -\frac{1}{2}xy^2 \pm y^2z$$

$$f_3 = -\frac{1}{2}xz^2 \pm z^2y$$

Все эти случаи могут быть сведены к одному, если поменять знак у переменной и/или заменить  $y$  на  $z$ . Обозначим его **I**.

$$\text{в) } r_1 = \frac{1}{27}; c = \frac{1}{3}$$

$$f_3 = \frac{1}{27}x^3 + \frac{2}{3\sqrt{3}}z^3 - \frac{2\sqrt{3}}{3}y^2z - \frac{1}{3}y^2x - \frac{1}{3}z^2x$$

$$f_3 = \frac{1}{27}x^3 + \frac{2}{3\sqrt{3}}z^3 + \frac{\sqrt{3}}{3}y^2z - \frac{1}{3}y^2x - \frac{1}{3}z^2x$$

Эти случаи разные (докажем позднее). Обозначим их **II**, **III**.

3. +-

$$\text{а) } r_1 = 0; c = 0$$

$$f_3 = \alpha(y-z)^2((\alpha^2+1)y - (\alpha^2-1)z - \alpha x)$$

$$f_3 = \alpha(y+z)^3$$

Здесь возникают два новых случая **IV**, **V**.

Покажем, что в обоих случаях без ограничения общности можно положить  $\alpha = 1$ . Действительно, сделаем замену:

$$x' = x \quad \begin{pmatrix} y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{ch } a & \text{sh } a \\ \text{sh } a & \text{ch } a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}.$$

Тогда  $y^2 - z^2 = (y')^2 - (z')^2$ ,  $\alpha(y+z)^3 = \alpha \cdot e^{-3a} \cdot (y' + z')^3$ ,  $\alpha(y-z)^2((\alpha^2+1)y - (\alpha^2-1)z - \alpha x) = \alpha \cdot e^a \cdot (y' - z')^2(((\alpha \cdot e^a)^2 + 1)y' - ((\alpha \cdot e^a)^2 - 1)z' - \alpha \cdot e^a \cdot x)$ . При помощи такой линейной замены, меняя  $a$ , можно получить любой параметр, имеющий тот же знак, что и  $\alpha$ . Аналогично, при замене

$$x' = x \quad \begin{pmatrix} y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\text{ch } a & -\text{sh } a \\ -\text{sh } a & -\text{ch } a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$$

$y^2 - z^2 = (y')^2 - (z')^2$ ,  $\alpha(y+z)^3 = -\alpha \cdot e^{-3a} \cdot (y' + z')^3$ ,  $\alpha(y-z)^2((\alpha^2+1)y - (\alpha^2-1)z - \alpha x) = -\alpha \cdot e^a \cdot (y' - z')^2(((\alpha \cdot e^a)^2 + 1)y' - ((\alpha \cdot e^a)^2 - 1)z' - (\alpha \cdot e^a) \cdot x)$ , значит получим любой параметр знака, противоположного с  $\alpha$ . Полагаем  $\alpha = 1$ .

$$\text{б) } r_1 = 0; c = \frac{1}{4}$$

$$f_3 = \frac{1}{2}xy^2 + y^2z$$

Это случай **VI**.

$$\text{в) } r_1 = \frac{1}{27}; c = \frac{1}{3}$$

$$f_3 = \frac{\alpha}{3}(y-z)^3 + \frac{1}{27}x^3 + \frac{1}{3}x(z^2 - y^2) + \frac{1}{9\alpha}(y+z)^3$$

$$f_3 = \frac{x^3}{27} + \frac{1}{3}(xy^2 - xz^2) + \frac{1}{\sqrt{3}}y^2z - \frac{2}{3\sqrt{3}}z^3$$

$$f_3 = \frac{x^3}{27} + \frac{1}{3}(xy^2 - xz^2) + 3y^2z + 2\sqrt{\frac{2}{3}}yz^2 + \frac{5}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}y^3$$

Второй и третий случай эквивалентны и сводятся друг к другу заменой:

$$\begin{aligned}y' &= \sqrt{3}y + \sqrt{2}z \\z' &= \sqrt{2}y + \sqrt{3}z\end{aligned}$$

Поэтому получаем два новых случая **VII**, **VIII**. Здесь также можно считать параметр  $\alpha$ , равным любому числу. Положим  $\alpha = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ , тогда  $f_3 = \frac{x^3}{27} + \frac{1}{3}(xy^2 - xz^2) - \frac{2}{\sqrt{3}}y^2z - \frac{2}{3\sqrt{3}}z^3$ .

2) При рассмотрении оставшихся случаев для  $f_2$  из леммы система уравнений на компоненты матрицы и коэффициенты  $f_3$  оказывается несовместной или же имеет решение с функционально зависимыми  $f_1, f_2, f_3$ . Например, для  $f_2(x, y, z) = xy + cx^2$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ y + 2cx & x & 0 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} x & -1 & 0 \\ xy + cx^2 & 0 & -1 \\ f_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}, MA = \begin{pmatrix} x - 2cx - y & -x & 0 \\ xy + cx^2 - \alpha & -\beta & -\gamma \\ f_3 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$P = \begin{pmatrix} x - 2cx - y & -x & 0 \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{pmatrix}, \text{ где } D_{ij} = a_{ij}x + b_{ij}y + c_{ij}z, \alpha = \frac{\partial f_3}{\partial x}, \beta = \frac{\partial f_3}{\partial y}, \gamma = \frac{\partial f_3}{\partial z}.$$

Если приравнять соответствующие элементы матриц  $MA$  и  $AP$ , то окажется, что система имеет решение только при  $f_3 = 0$ .

Докажем, что случаи из таблицы 2 не сводятся друг к другу линейными заменами координат. Инварианты выражаются через собственные значения  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  оператора  $P$  следующим образом:  $f_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, f_2 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_3, f_3 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$ . Положим  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$ . Тогда  $f_1 = 3\lambda, f_2 = 3\lambda^2, f_3 = \lambda^3$ , и инварианты связаны соотношениями  $f_1^3 = 27f_3, f_1^2 = 3f_2$ . Для каждого случая решим эту систему, то есть определим множество точек, где собственные значения соответствующего оператора одинаковы. Если эти множества разные для случаев из таблицы 2, то все доказано, иначе изучим жорданову нормальную форму  $J$  оператора  $P$  для точек этих множеств и посмотрим на инварианты при  $f_1 = 0$ . Результаты представлены в таблице 3.

Из вида  $f_2$  следует, что случаи **II**, **III** линейными заменами координат не могут быть приведены к случаям **VII**, **VIII**; из вида  $f_3$  следует, что **II** и **III**, а также **VII** и **VIII** различны между собой. Для остальных случаев это видно из ЖНФ и геометрической структуры решений.

Осталось доказать, что ассоциированные алгебры Ли в действительности имеют такой вид, как указано в четвертом столбце таблицы 2.

Напомним, что  $[\xi, \eta] = \xi * \eta - \eta * \xi$ , где  $\xi = \xi^i e_i, \eta = \eta^j e_j \Rightarrow [\xi, \eta] = \xi^i \eta^j [e_i, e_j] = \xi^i \eta^j (a_{ij}^k e_k - a_{ji}^k e_k)$ , где  $a_{ij}^k$  – структурные константы алгебры. Из рассуждения в пункте 2.2 видно, что  $a_{ij}^k$  – это в точности коэффициент при  $j$ -ой координате  $(k, i)$ -го элемента матрицы оператора Нийенхейса. Для случая **I**:

$$[\xi, \eta] = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\eta^1 & 2\eta^2 & 2\eta^3 \\ \frac{1}{2}\eta^2 & \frac{1}{2}\eta^1 & -\eta^3 \\ \frac{1}{4}\eta^3 & -\frac{1}{2}\eta^3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi^3 \end{pmatrix} - (\xi \leftrightarrow \eta) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{4}(\eta^3 \xi^1 - \eta^1 \xi^3) - \frac{1}{2}(\eta^3 \xi^2 - \eta^2 \xi^3) \end{pmatrix}.$$

В этой алгебре Ли возникают следующие соотношения:

$$\begin{aligned}[e_1, e_3] &= \frac{1}{4}e_3 \\ [e_2, e_3] &= -\frac{1}{2}e_3\end{aligned}$$

После замены  $e'_1 = 4e_1 + 2e_2, e'_2 = e_3, e'_3 = 4e_1 - 2e_2$

$$[e'_2, e'_3] = -2e'_2 \Rightarrow \text{алгебра разрешимая и разложимая, } A_{3,11}.$$

Таб. 3: Решения и ЖНФ

	Решения	$J$	Инварианты при $f_1 = 0$
<b>I</b>	$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$f_1 = 0$ $f_2 = -y^2 - z^2$ $f_3 = -yz^2$
<b>II</b>	$\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$	$\begin{pmatrix} \frac{x}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{x}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{x}{3} \end{pmatrix}$	$f_1 = 0$ $f_2 = -y^2 - z^2$ $f_3 = \frac{2}{3\sqrt{3}}z^3 - \frac{2\sqrt{3}}{3}y^2z$
<b>III</b>	$\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$	$\begin{pmatrix} \frac{x}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{x}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{x}{3} \end{pmatrix}$	$f_1 = 0$ $f_2 = -y^2 - z^2$ $f_3 = \frac{2}{3\sqrt{3}}z^3 + \frac{\sqrt{3}}{3}y^2z$
<b>IV</b>	1. $\begin{cases} x = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} y = \frac{2x}{3} \\ z = \frac{x}{3} \end{cases}$	1. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 2. $\begin{pmatrix} \frac{x}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{x}{3} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{x}{3} \end{pmatrix}$	$f_1 = 0$ $f_2 = y^2 - z^2$ $f_3 = 2y(y - z)^2$
<b>V</b>	1. $\begin{cases} x = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} y = \frac{2x}{3} \\ z = -\frac{x}{3} \end{cases}$	1. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 2. $\begin{pmatrix} \frac{x}{3} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{x}{3} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{x}{3} \end{pmatrix}$	$f_1 = 0$ $f_2 = y^2 - z^2$ $f_3 = (y + z)^3$
<b>VI</b>	1. $\begin{cases} y = -\frac{x}{3} \\ z = -\frac{x}{6} \end{cases}$ 2. $\begin{cases} y = \frac{x}{3} \\ z = -\frac{x}{6} \end{cases}$	1. $\begin{pmatrix} \frac{x}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{x}{3} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{x}{3} \end{pmatrix}$ 2. $\begin{pmatrix} \frac{x}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{x}{3} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{x}{3} \end{pmatrix}$	$f_1 = 0$ $f_2 = y^2 - z^2$ $f_3 = y^2z$
<b>VII</b>	$\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$	$\begin{pmatrix} \frac{x}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{x}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{x}{3} \end{pmatrix}$	$f_1 = 0$ $f_2 = y^2 - z^2$ $f_3 = -\frac{2}{3\sqrt{3}}z^3 - \frac{2\sqrt{3}}{3}y^2z$
<b>VIII</b>	$\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$	$\begin{pmatrix} \frac{x}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{x}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{x}{3} \end{pmatrix}$	$f_1 = 0$ $f_2 = y^2 - z^2$ $f_3 = -\frac{2}{3\sqrt{3}}z^3 + \frac{\sqrt{3}}{3}y^2z$

Для случая **II**:

$$[\xi, \eta] = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}\eta^1 & 2\eta^2 & 2\eta^3 \\ \frac{1}{3}\eta^2 & \frac{1}{3}\eta^1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\eta^3 & -\frac{1}{\sqrt{3}}\eta^2 \\ \frac{1}{3}\eta^3 & -\frac{1}{\sqrt{3}}\eta^2 & \frac{1}{3}\eta^1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\eta^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi^3 \end{pmatrix} - (\xi \leftrightarrow \eta) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{алгебра абелева, } A_{3,10}.$$

Для случая **III**:

$$[\xi, \eta] = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}\eta^1 & 2\eta^2 & 2\eta^3 \\ \frac{1}{3}\eta^2 & \frac{1}{3}\eta^1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\eta^3 & \frac{1}{2\sqrt{3}}\eta^2 \\ \frac{1}{3}\eta^3 & \frac{2}{\sqrt{3}}\eta^2 & \frac{1}{3}\eta^1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\eta^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi^3 \end{pmatrix} - (\xi \leftrightarrow \eta) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}(\eta^2\xi^3 - \eta^3\xi^2) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

В этой алгебре Ли возникает следующее соотношение:

$$[e_2, e_3] = -\frac{\sqrt{3}}{2}e_2 \Rightarrow \text{алгебра разрешимая и разложимая, } A_{3,11}.$$

Для случая **IV**:

$$[\xi, \eta] = \begin{pmatrix} \eta^1 & -2\eta^2 & 2\eta^3 \\ \eta^2 & \eta^1 - 3\eta^2 & -\eta^1 + 2\eta^2 + \eta^3 \\ \eta^2 & \eta^1 - 4\eta^2 + \eta^3 & -\eta^1 + 3\eta^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi^3 \end{pmatrix} - (\xi \leftrightarrow \eta) = \begin{pmatrix} 0 \\ \eta^3 \xi^1 - \eta^1 \xi^3 + 2(\eta^2 \xi^3 - \eta^3 \xi^2) \\ \eta^3 \xi^1 - \eta^1 \xi^3 + 2(\eta^2 \xi^3 - \eta^3 \xi^2) \end{pmatrix}.$$

$$[e_1, e_3] = e_2 + e_3$$

$$[e_2, e_3] = -2e_2 - 2e_3$$

После замены:  $e'_1 = 2e_1 + e_2$ ,  $e'_2 = e_2$ ,  $e'_3 = e_2 + e_3$

$$[e'_2, e'_3] = -2e'_3 \Rightarrow \text{алгебра разрешимая и разложимая, } A_{3,11}.$$

Для случая **V**:

$$[\xi, \eta] = \begin{pmatrix} \eta^1 & -2\eta^2 & 2\eta^3 \\ \frac{1}{2}\eta^2 - \frac{1}{6}\eta^3 & -\frac{3}{2}(\eta^2 + \eta^3) & -\frac{3}{2}(\eta^2 + \eta^3) \\ -\frac{1}{6}\eta^2 + \frac{1}{2}\eta^3 & \frac{3}{2}(\eta^2 + \eta^3) & \frac{3}{2}(\eta^2 + \eta^3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi^3 \end{pmatrix} - (\xi \leftrightarrow \eta) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}(\eta^2 \xi^1 - \eta^1 \xi^2) - \frac{1}{6}(\eta^3 \xi^1 - \eta^1 \xi^3) \\ \frac{1}{2}(\eta^3 \xi^1 - \eta^1 \xi^3) - \frac{1}{6}(\eta^2 \xi^1 - \eta^1 \xi^2) \end{pmatrix}.$$

$$[e_1, e_2] = \frac{1}{2}e_2 - \frac{1}{6}e_3$$

$$[e_1, e_3] = -\frac{1}{6}e_2 + \frac{1}{2}e_3$$

После замены  $e'_1 = e_2 + e_3$ ,  $e'_2 = e_2 - e_3$ ,  $e'_3 = -3e_1$

$$[e'_1, e'_3] = e'_1, [e'_2, e'_3] = 2e'_2 \Rightarrow A_{3,5}.$$

Для случая **VI**:

$$[\xi, \eta] = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\eta^1 & -2\eta^2 & 2\eta^3 \\ \frac{1}{4}\eta^2 & 0 & -\frac{1}{2}\eta^2 \\ \frac{1}{2}\eta^3 & \eta^2 & \frac{1}{2}\eta^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi^3 \end{pmatrix} - (\xi \leftrightarrow \eta) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{4}(\eta^2 \xi^1 - \eta^1 \xi^2) - \frac{1}{2}(\eta^2 \xi^3 - \eta^3 \xi^2) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$[e_1, e_2] = \frac{1}{4}e_2$$

$$[e_2, e_3] = \frac{1}{2}e_2$$

После замены  $e'_1 = 4e_1 + 2e_3$ ,  $e'_2 = e_2$ ,  $e'_3 = 4e_1 - 2e_3$

$$[e'_2, e'_3] = -2e'_2 \Rightarrow \text{алгебра разрешимая и разложимая, } A_{3,11}.$$

Для случая **VII**:

$$[\xi, \eta] = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}\eta^1 & -2\eta^2 & 2\eta^3 \\ \frac{1}{3}\eta^2 & \frac{1}{3}\eta^1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\eta^3 & \frac{1}{\sqrt{3}}\eta^2 \\ \frac{1}{3}\eta^3 & -\frac{1}{\sqrt{3}}\eta^2 & \frac{1}{3}\eta^1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\eta^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi^3 \end{pmatrix} - (\xi \leftrightarrow \eta) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{алгебра абелева, } A_{3,10}.$$

Для случая **VIII**:

$$[\xi, \eta] = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}\eta^1 & -2\eta^2 & 2\eta^3 \\ \frac{1}{3}\eta^2 & \frac{1}{3}\eta^1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\eta^3 & -\frac{1}{2\sqrt{3}}\eta^2 \\ \frac{1}{3}\eta^3 & \frac{2}{\sqrt{3}}\eta^2 & \frac{1}{3}\eta^1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\eta^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi^3 \end{pmatrix} - (\xi \leftrightarrow \eta) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}(\eta^3 \xi^2 - \eta^2 \xi^3) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$[e_2, e_3] = \frac{\sqrt{3}}{2}e_2 \Rightarrow \text{алгебра разрешимая и разложимая, } A_{3,11}.$$

Теорема доказана.

### 3.4 О связи с двумерными левосимметрическими алгебрами

Сформулируем следствие из теоремы 3 о связи найденных трехмерных и двумерных левосимметрических алгебр.

**Следствие 3.** *Случаи I, II, VI, VII из таблицы 2 соответствуют прямым суммам двумерных левосимметрических алгебр из таблицы 1 с одномерными алгебрами: I соответствует  $\mathfrak{b}_4^-$ , II —  $\mathfrak{c}_5^+$ , VI —  $\mathfrak{b}_4^+$ , VII —  $\mathfrak{c}_5^-$ .*

**Доказательство.** Чтобы доказать это утверждение, в каждой из алгебр I, II, VI, VII предъявим такой элемент  $e \neq 0$ :  $e * e_i = \nu_i e$  и  $e_i * e = \mu_i e$  для некоторых  $\nu_i, \mu_i, i = 1, 2, 3 \Rightarrow e * e = \lambda e$ . Этот элемент будет образовывать одномерную подалгебру. Далее найдем базис  $f_1, f_2$  в дополняющей ее двумерной подалгебре, используя соотношения:  $e * f_i = f_i * e = 0$ .

Пусть  $e = ae_1 + be_2 + ce_3$ . Для каждого из случаев выпишем структурные соотношения в левосимметрической алгебре. На пересечении  $i$ -ой строки и  $j$ -го столбца стоит  $e_i * e_j$ .

I

	$e_1$	$e_2$	$e_3$
$e_1$	$\frac{1}{2}e_1$	$\frac{1}{2}e_2$	$\frac{1}{4}e_3$
$e_2$	$\frac{1}{2}e_2$	$2e_1$	$-\frac{1}{2}e_3$
$e_3$	0	0	$2e_1 - e_2$

$$e * e_1 = (ae_1 + be_2 + ce_3) * e_1 = \frac{1}{2}ae_1 + \frac{1}{2}be_2$$

$$e * e_2 = (ae_1 + be_2 + ce_3) * e_2 = 2be_1 + \frac{1}{2}ae_2$$

$$e * e_3 = (ae_1 + be_2 + ce_3) * e_3 = 2ce_1 - ce_2 + \left(\frac{1}{4}a - \frac{1}{2}b\right)e_3$$

$$e_1 * e = e_1 * (ae_1 + be_2 + ce_3) = \frac{1}{2}ae_1 + \frac{1}{2}be_2 + \frac{1}{4}ce_3$$

$$e_2 * e = e_2 * (ae_1 + be_2 + ce_3) = 2be_1 + \frac{1}{2}ae_2 - \frac{1}{2}ce_3$$

$$e_3 * e = e_3 * (ae_1 + be_2 + ce_3) = 2ce_1 - ce_2$$

Если положить  $c = 0, a = 2b$ , то  $e = 2be_1 + be_2$ , и требуемые соотношения выполнены, в частности  $e * e = \lambda e$ . Теперь перейдем к поиску  $f_1, f_2$ : пусть  $f_i = p_i e_1 + q_i e_2 + r_i e_3, i = 1, 2$ .  $e * f_i = (2be_1 + be_2) * (p_i e_1 + q_i e_2 + r_i e_3) = (bp_i + 2bq_i)e_1 + (bq_i + \frac{1}{2}bp_i)e_2 = 0 \Rightarrow p_i = -2q_i$ . Аналогично,

$$f_i * e = (p_i e_1 + q_i e_2 + r_i e_3) * (2be_1 + be_2) = (bp_i + 2bq_i)e_1 + (bq_i + \frac{1}{2}bp_i)e_2 = 0 \Rightarrow p_i = -2q_i.$$

Если положить  $f_1 = e_3, f_2 = -2e_1 + e_2$ , то получаем те же структурные соотношения в двумерной подалгебре, что и в  $\mathfrak{b}_4^-$ :

$$f_1 * f_1 = e_3 * e_3 = -f_2$$

$$f_2 * f_1 = (-2e_1 + e_2) * e_3 = -f_1$$

$$f_2 * f_2 = (-2e_1 + e_2) * (-2e_1 + e_2) = -2f_2$$

II

	$e_1$	$e_2$	$e_3$
$e_1$	$\frac{1}{3}e_1$	$\frac{1}{3}e_2$	$\frac{1}{3}e_3$
$e_2$	$\frac{1}{3}e_2$	$2e_1 - \frac{1}{\sqrt{3}}e_3$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}e_2$
$e_3$	$\frac{1}{3}e_3$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}e_2$	$2e_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}e_3$

$$e * e_1 = (ae_1 + be_2 + ce_3) * e_1 = \frac{1}{3}ae_1 + \frac{1}{3}be_2 + \frac{1}{3}ce_3$$

$$e * e_2 = (ae_1 + be_2 + ce_3) * e_2 = 2be_1 + \left(\frac{1}{3}a - \frac{1}{\sqrt{3}}c\right)e_2 - \frac{1}{\sqrt{3}}be_3$$

$$e * e_3 = (ae_1 + be_2 + ce_3) * e_3 = 2ce_1 - \frac{1}{\sqrt{3}}be_2 + \left(\frac{1}{3}a + \frac{1}{\sqrt{3}}c\right)e_3$$

$$e_1 * e = e_1 * (ae_1 + be_2 + ce_3) = \frac{1}{3}ae_1 + \frac{1}{3}be_2 + \frac{1}{3}ce_3$$

$$e_2 * e = e_2 * (ae_1 + be_2 + ce_3) = 2be_1 + \left(\frac{1}{3}a - \frac{1}{\sqrt{3}}c\right)e_2 - \frac{1}{\sqrt{3}}be_3$$

$$e_3 * e = e_3 * (ae_1 + be_2 + ce_3) = 2ce_1 - \frac{1}{\sqrt{3}}be_2 + \left(\frac{1}{3}a + \frac{1}{\sqrt{3}}c\right)e_3$$

Если положить  $a = 1$ ,  $b = 0$ ,  $c = \frac{1}{\sqrt{3}}$ , то  $e = e_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}e_3$ , и требуемые соотношения выполнены, в частности  $e * e = \lambda e$ . Теперь перейдем к поиску  $f_1$ ,  $f_2$ . Прделав аналогичные преобразования, найдем, что  $f_1 = e_2$ ,  $f_2 = 2e_1 - \frac{1}{\sqrt{3}}e_3$ .

Структурные соотношения имеют следующий вид (соответствует двумерной алгебре  $\mathfrak{c}_5^+$ ):

$$f_2 * f_2 = \left(2e_1 - \frac{1}{\sqrt{3}}e_3\right) * \left(2e_1 - \frac{1}{\sqrt{3}}e_3\right) = f_2$$

$$f_2 * f_1 = \left(2e_1 - \frac{1}{\sqrt{3}}e_3\right) * e_2 = f_1$$

$$f_1 * f_2 = e_2 * \left(2e_1 - \frac{1}{\sqrt{3}}e_3\right) = f_1$$

$$f_1 * f_1 = e_2 * e_2 = f_2$$

## VI

	$e_1$	$e_2$	$e_3$
$e_1$	$\frac{1}{2}e_1$	$\frac{1}{4}e_2$	$\frac{1}{2}e_3$
$e_2$	0	$-2e_1 + e_3$	0
$e_3$	$\frac{1}{2}e_3$	$-\frac{1}{2}e_2$	$2e_1$

$$\begin{aligned}
e * e_1 &= (ae_1 + be_2 + ce_3) * e_1 = \frac{1}{2}ae_1 + \frac{1}{2}ce_3 \\
e * e_2 &= (ae_1 + be_2 + ce_3) * e_2 = -2be_1 + \left(\frac{1}{4}a - \frac{1}{2}c\right)e_2 + be_3 \\
e * e_3 &= (ae_1 + be_2 + ce_3) * e_3 = 2ce_1 + \frac{1}{2}ae_3 \\
e_1 * e &= e_1 * (ae_1 + be_2 + ce_3) = \frac{1}{2}ae_1 + \frac{1}{4}be_2 + \frac{1}{2}ce_3 \\
e_2 * e &= e_2 * (ae_1 + be_2 + ce_3) = -2be_1 + be_3 \\
e_3 * e &= e_3 * (ae_1 + be_2 + ce_3) = 2ce_1 - \frac{1}{2}be_2 + \frac{1}{2}ae_3
\end{aligned}$$

Если положить  $a = 2c$ ,  $b = 0$ , то  $e = 2ce_1 + ce_3$ , и требуемые соотношения выполнены, в частности  $e * e = \lambda e$ . Теперь перейдем к поиску  $f_1, f_2$ . Прделав аналогичные преобразования, найдем, что  $f_1 = e_2, f_2 = -2e_1 + e_3$ .

Структурные соотношения имеют следующий вид (соответствует двумерной алгебре  $\mathfrak{b}_4^+$ ):

$$\begin{aligned}
f_1 * f_1 &= e_2 * e_2 = f_2 \\
f_2 * f_1 &= (-2e_1 + e_3) * e_2 = -f_1 \\
f_2 * f_2 &= (-2e_1 + e_3) * (-2e_1 + e_3) = -2f_2
\end{aligned}$$

## VII

	$e_1$	$e_2$	$e_3$
$e_1$	$\frac{1}{3}e_1$	$\frac{1}{3}e_2$	$\frac{1}{3}e_3$
$e_2$	$\frac{1}{3}e_2$	$-2e_1 - \frac{1}{\sqrt{3}}e_3$	$\frac{1}{\sqrt{3}}e_2$
$e_3$	$\frac{1}{3}e_3$	$\frac{1}{\sqrt{3}}e_2$	$2e_1 - \frac{1}{\sqrt{3}}e_3$

$$\begin{aligned}
e * e_1 &= (ae_1 + be_2 + ce_3) * e_1 = \frac{1}{3}ae_1 + \frac{1}{3}be_2 + \frac{1}{3}ce_3 \\
e * e_2 &= (ae_1 + be_2 + ce_3) * e_2 = -2be_1 + \left(\frac{1}{3}a + \frac{1}{\sqrt{3}}c\right)e_2 - \frac{1}{\sqrt{3}}be_3 \\
e * e_3 &= (ae_1 + be_2 + ce_3) * e_3 = 2ce_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}be_2 + \left(\frac{1}{3}a - \frac{1}{\sqrt{3}}c\right)e_3 \\
e_1 * e &= e_1 * (ae_1 + be_2 + ce_3) = \frac{1}{3}ae_1 + \frac{1}{3}be_2 + \frac{1}{3}ce_3 \\
e_2 * e &= e_2 * (ae_1 + be_2 + ce_3) = -2be_1 + \left(\frac{1}{3}a + \frac{1}{\sqrt{3}}c\right)e_2 - \frac{1}{\sqrt{3}}be_3 \\
e_3 * e &= e_3 * (ae_1 + be_2 + ce_3) = 2ce_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}be_2 + \left(\frac{1}{3}a - \frac{1}{\sqrt{3}}c\right)e_3
\end{aligned}$$

Если положить  $a = 1, b = 0, c = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ , то  $e = e_1 - \frac{1}{\sqrt{3}}e_3$  и требуемые соотношения выполнены, в частности  $e * e = \lambda e$ . Теперь перейдем к поиску  $f_1, f_2$ . Прделав аналогичные преобразования, найдем, что  $f_1 = e_2, f_2 = 2e_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}e_3$ .

Структурные соотношения имеют следующий вид (соответствует двумерной алгебре  $\mathfrak{c}_5^-$ ):

$$f_2 * f_2 = (2e_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}e_3) * (2e_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}e_3) = f_2$$

$$f_2 * f_1 = (2e_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}e_3) * e_2 = f_1$$

$$f_1 * f_2 = e_2 * (2e_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}e_3) = f_1$$

$$f_1 * f_1 = e_2 * e_2 = -f_2$$

Следствие доказано.

**Замечание 2.** В списке всех двумерных левосимметрических алгебр только  $\mathfrak{b}_4^+$ ,  $\mathfrak{b}_4^-$ ,  $\mathfrak{c}_5^+$ ,  $\mathfrak{c}_5^-$  являются алгебрами, где у соответствующего оператора Нийенхейса след и определитель функционально независимы. Значит, мы полностью описали соответствие между найденными трехмерными и двумерными левосимметрическими алгебрами.

#### 4 Особенности

Теперь для каждого из найденных в теореме 3 операторов Нийенхейса изучим, как устроены особенности. Напомним, что точка  $a \in \mathbb{R}^3$  называется особой, если в любой окрестности  $U(a)$  жорданова нормальная форма оператора меняет свою структуру.

Рассмотрим характеристический многочлен оператора Нийенхейса  $P: \chi(t) = \det(t \cdot Id - P) = t^3 - f_1 t^2 + f_2 t - f_3$ . Дискриминант этого кубического уравнения выражается через коэффициенты следующим образом:  $D = f_1^2 f_2^2 + 18 f_1 f_2 f_3 - 27 f_3^2 - 4 f_2^3 - 4 f_1^3 f_3$ . По свойствам дискриминанта:

- При  $D > 0$  кубический многочлен имеет три различных вещественных корня.
- При  $D = 0$  он имеет кратный корень (либо один корень кратности 2 и один корень кратности 1, и тот, и другой вещественные; либо один-единственный вещественный корень кратности 3).
- При  $D < 0$  кубический многочлен имеет один вещественный корень и два комплексных корня (являющихся комплексно-сопряжёнными).

Значит, множество  $D = 0$  в  $\mathbb{R}^3$  будет состоять в точности из особых точек. Найдем его для каждого из операторов и графически изобразим в пространстве.

I

$$D = \frac{1}{4}(-y(x+2y) + z^2)^2((x-2y)^2 + 16z^2) \geq 0$$

$$\frac{1}{4}(-y(x+2y) + z^2)^2((x-2y)^2 + 16z^2) = 0$$

$$\left[ \begin{array}{l} z^2 = y(x+2y) \\ \left\{ \begin{array}{l} x - 2y = 0 \\ z = 0 \end{array} \right. \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{— конус} \\ \text{— прямая} \end{array}$$

Жорданова нормальная форма  $\tilde{P} = \begin{pmatrix} -2y & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(x+2y) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(x+2y) \end{pmatrix}$  (на конусе),  $\tilde{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2y \end{pmatrix}$   
 (на прямой),  $\tilde{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(x+2y) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}(x-2y - \sqrt{(x-2y)^2 + 16z^2}) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4}(x-2y + \sqrt{(x-2y)^2 + 16z^2}) \end{pmatrix}$   
 (в области  $D > 0$ ).

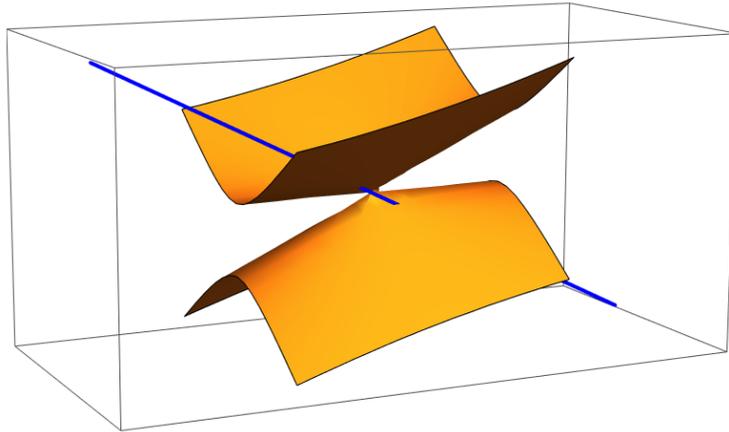


Fig. 1: случай I

II

$$D = 4y^2(y^2 - 3z^2)^2 \geq 0$$

$$4y^2(y^2 - 3z^2)^2 = 0$$

$$\begin{cases} y = 0 - \text{плоскость} \\ y - \sqrt{3}z = 0 - \text{плоскость} \\ y + \sqrt{3}z = 0 - \text{плоскость} \end{cases}$$

Жорданова нормальная форма  $\tilde{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(x - \sqrt{3}z) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}(x - \sqrt{3}z) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}(x + 2\sqrt{3}z) \end{pmatrix}$  (на плоско-

сти  $y = 0$ ),  $\tilde{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(x - 4\sqrt{3}z) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}(x + 2\sqrt{3}z) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}(x + 2\sqrt{3}z) \end{pmatrix}$  (на паре плоскостей),  $\tilde{P} =$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(x - 3y - \sqrt{3}z) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}(x + 3y - \sqrt{3}z) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}(x + 2\sqrt{3}z) \end{pmatrix} \text{ (в области } D > 0 \text{)}.$$

III

$$D = y^4(4y^2 + 3z^2) \geq 0$$

$$4y^4(4y^2 + 3z^2) = 0$$

$$\begin{cases} y = 0 - \text{плоскость} \\ \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases} - \text{прямая} \end{cases}$$

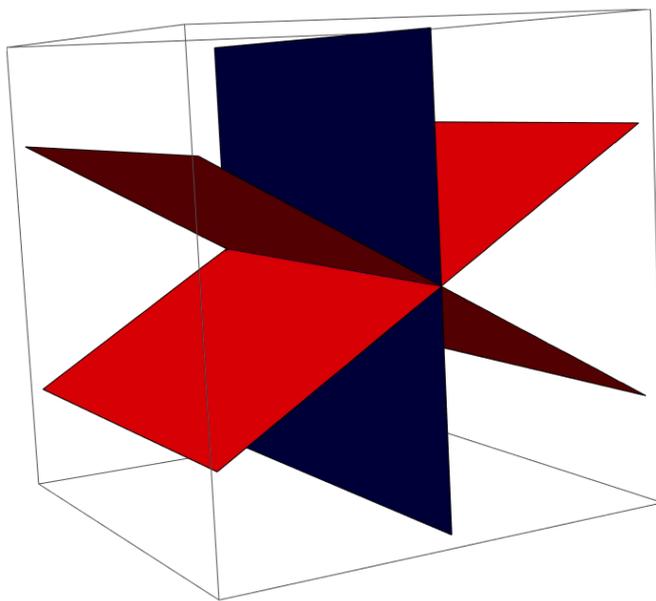


Fig. 2: случай II

Жорданова нормальная форма  $\tilde{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(x - \sqrt{3}z) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}(x - \sqrt{3}z) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}(x + 2\sqrt{3}z) \end{pmatrix}$  (на плоско-

сти),  $\tilde{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}x & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}x & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}x \end{pmatrix}$  (на прямой),

$\tilde{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(x - \sqrt{3}z) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6}(2x + \sqrt{3}z - 3\sqrt{4y^2 + 3z^2}) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6}(2x + \sqrt{3}z + 3\sqrt{4y^2 + 3z^2}) \end{pmatrix}$  (в области  $D > 0$ ).

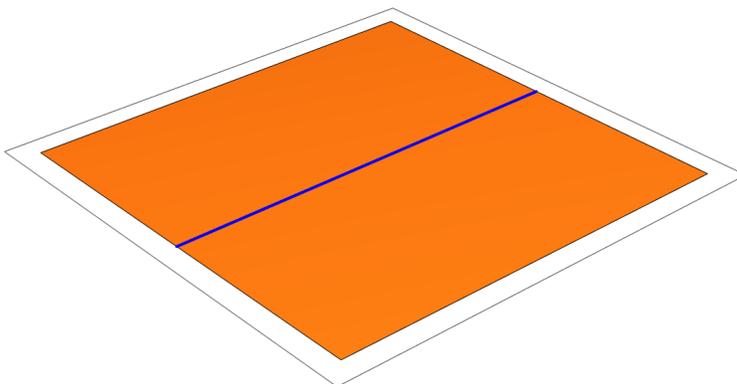


Fig. 3: случай III

IV

$$D = 4(y - z)^2(x - 2y + z)^2(x^2 + 2xy - 7y^2 - 2xz + 6yz + z^2)$$

$$4(y-z)^2(x-2y+z)^2(x^2+2xy-7y^2-2xz+6yz+z^2)=0$$

$$\begin{cases} y-z=0 & \text{— плоскость} \\ x-2y+z=0 & \text{— плоскость} \\ x^2+2xy-7y^2-2xz+6yz+z^2=0 & \text{— конус} \end{cases}$$

Заметим, что конус касается плоскости  $y-z=0$  по прямой  $x=0, y-z=0$ ; конус касается плоскости  $x-2y+z=0$  по прямой  $x-2y+z=0, y-2z=0$ .

Жорданова нормальная форма  $\tilde{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}$  (на плоскости  $y-z=0$ ),  $\tilde{P} = \begin{pmatrix} x-y & 0 & 0 \\ 0 & x-y & 0 \\ 0 & 0 & -x+2y \end{pmatrix}$

(на плоскости  $x-2y+z=0$ ),  $\begin{pmatrix} y-z & 0 & 0 \\ 0 & -y+\sqrt{2}\sqrt{y(y-z)}+z & 1 \\ 0 & 0 & -y+\sqrt{2}\sqrt{y(y-z)}+z \end{pmatrix}$  (на

конусе,  $x+y-z \geq 0$ ),  $\tilde{P} = \begin{pmatrix} y-z & 0 & 0 \\ 0 & -y-\sqrt{2}\sqrt{y(y-z)}+z & 1 \\ 0 & 0 & -y-\sqrt{2}\sqrt{y(y-z)}+z \end{pmatrix}$  (на

конусе,  $x+y-z < 0$ ),  $\tilde{P} =$

$$\begin{pmatrix} y-z & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(x-y+z-\sqrt{x^2+2xy-7y^2-2xz+6yz+z^2}) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(x-y+z+\sqrt{x^2+2xy-7y^2-2xz+6yz+z^2}) \end{pmatrix}$$

(в области  $D > 0$ , выделена желтым).

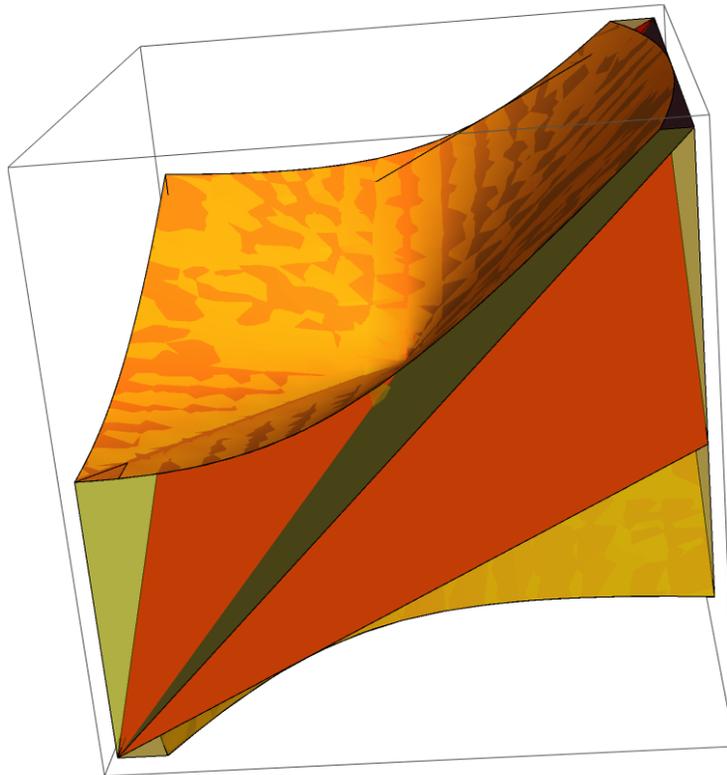


Fig. 4: случай IV

V

$$D = -(y+z)^2(4x^3y - x^2y^2 - 18xy^3 + 31y^4 + 4x^3z + 2x^2yz - 18xy^2z + 100y^3z - x^2z^2 + \\ + 18xyz^2 + 162y^2z^2 + 18xz^3 + 116yz^3 + 23z^4)$$

$$-(y+z)^2(4x^3y - x^2y^2 - 18xy^3 + 31y^4 + 4x^3z + 2x^2yz - 18xy^2z + 100y^3z - x^2z^2 + \\ + 18xyz^2 + 162y^2z^2 + 18xz^3 + 116yz^3 + 23z^4) = 0$$

$$\left[ \begin{array}{l} y+z=0 \text{ — плоскость} \\ 4x^3y - x^2y^2 - 18xy^3 + 31y^4 + 4x^3z + 2x^2yz - 18xy^2z + 100y^3z - x^2z^2 + \\ + 18xyz^2 + 162y^2z^2 + 18xz^3 + 116yz^3 + 23z^4 = 0 \end{array} \right.$$

Плоскость касается поверхности по прямым  $x=0$ ,  $y+z=0$  и  $y=0$ ,  $z=0$ .

Жорданова нормальная форма  $\tilde{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}$  (на плоскости  $y+z=0$ ). На рисунке желтым выделена область, где  $D \geq 0$ .

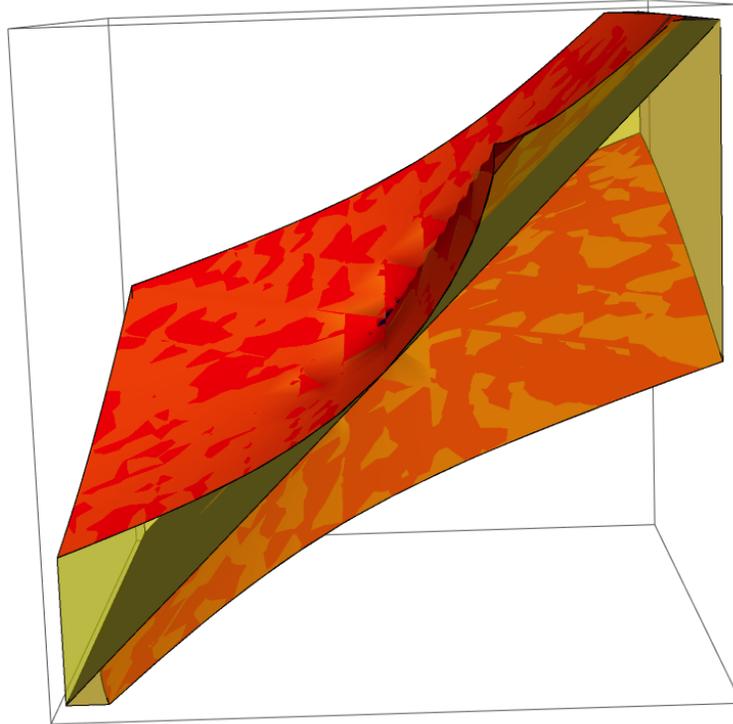


Fig. 5: случай V

VI

$$D = \frac{1}{4}(x+4y-2z)(x-4y-2z)(y^2+z(x+2z))^2$$

$$\frac{1}{4}(x + 4y - 2z)(x - 4y - 2z)(y^2 + z(x + 2z))^2 = 0$$

$$\begin{cases} x + 4y - 2z = 0 - \text{плоскость} \\ x - 4y - 2z = 0 - \text{плоскость} \\ y^2 + z(x + 2z) = 0 - \text{конус} \end{cases}$$

Плоскости касаются конуса по прямым  $x + 4y - 2z = 0$ ,  $y - 2z = 0$  и  $x - 4y - 2z = 0$ ,  $y + 2z = 0$ .

Жорданова нормальная форма  $\tilde{P} = \begin{pmatrix} -y & 1 & 0 \\ 0 & -y & 0 \\ 0 & 0 & -2(y - z) \end{pmatrix}$  (на плоскости  $x + 4y - 2z = 0$ ),

$$\tilde{P} = \begin{pmatrix} y & 1 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & 2(y + z) \end{pmatrix} \text{ (на плоскости } x - 4y - 2z = 0), \tilde{P} = \begin{pmatrix} -2z & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(x + 2z) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(x + 2z) \end{pmatrix}$$

$$\text{(на конусе), } \tilde{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x + z & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}(x - 2z - \sqrt{(x - 2z)^2 - 16y^2}) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4}(x - 2z + \sqrt{(x - 2z)^2 - 16y^2}) \end{pmatrix}$$

(в области  $D > 0$ , выделена желтым).

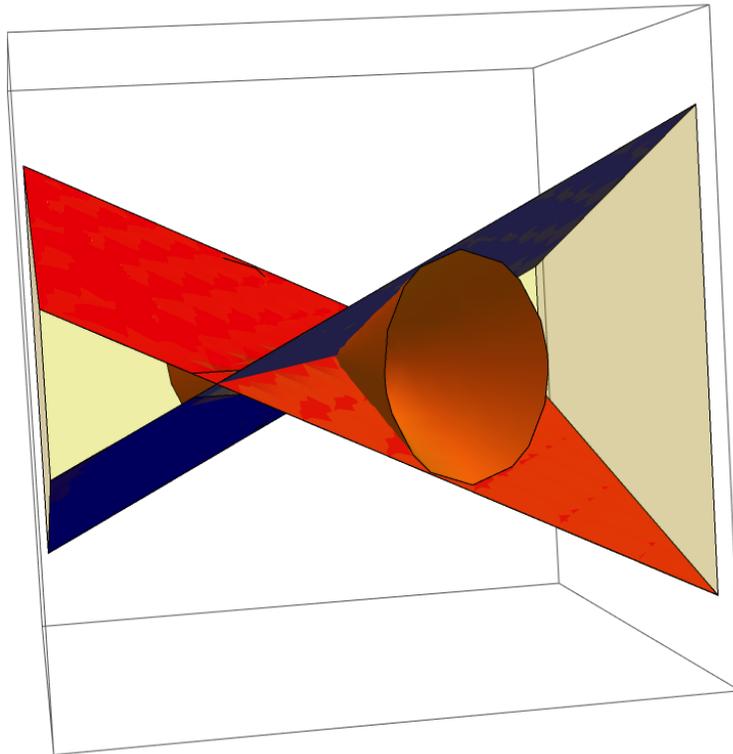


Fig. 6: случай VI

VII

$$D = -4(y^3 + 3yz^2)^2 \leq 0$$

$$-4(y^3 + 3yz^2)^2 = 0$$

$$\begin{cases} y = 0 - \text{плоскость} \\ \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases} - \text{прямая} \end{cases}$$

Жорданова нормальная форма  $\tilde{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(x - 2\sqrt{3}z) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}(x + \sqrt{3}z) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}(x + \sqrt{3}z) \end{pmatrix}$  (на плоско-

сти),  $\tilde{P} = \begin{pmatrix} \frac{x}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{x}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{x}{3} \end{pmatrix}$  (на прямой).

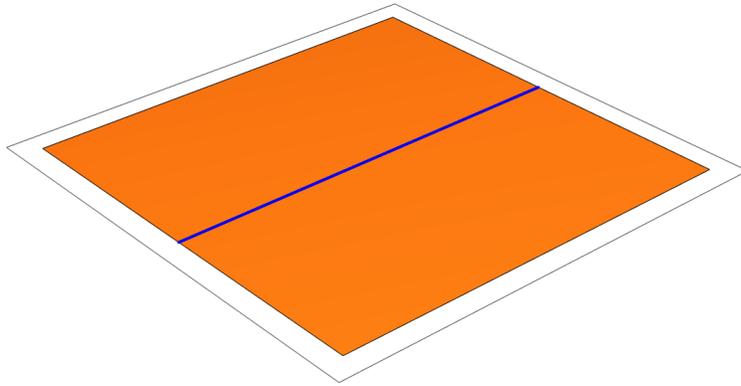


Fig. 7: случай VII

### VIII

$$D = y^4(3z^2 - 4y^2)$$

$$y^4(3z^2 - 4y^2) = 0$$

$$\begin{cases} y = 0 - \text{плоскость} \\ \sqrt{3}z - 2y = 0 - \text{плоскость} \\ \sqrt{3}z + 2y = 0 - \text{плоскость} \end{cases}$$

Жорданова нормальная форма  $\tilde{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(x - 2\sqrt{3}z) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}(x + \sqrt{3}z) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}(x + \sqrt{3}z) \end{pmatrix}$  (на плоско-

сти  $y = 0$ ),  $\tilde{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6}(2x - \sqrt{3}z) & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6}(2x - \sqrt{3}z) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}(x + \sqrt{3}z) \end{pmatrix}$  (на паре плоскостей),

$\tilde{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(x + \sqrt{3}z) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6}(2x - \sqrt{3}z - 3\sqrt{-4y^2 + 3z^2}) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6}(2x - \sqrt{3}z + 3\sqrt{-4y^2 + 3z^2}) \end{pmatrix}$  (в области  $D > 0$ , выделена желтым).

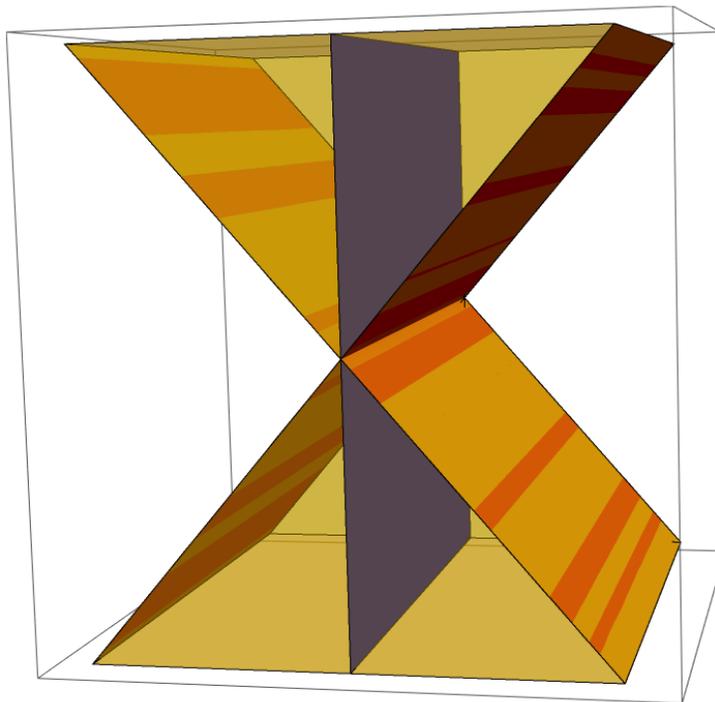


Fig. 8: случай VIII

## 5 Ранг матрицы Якоби инвариантов равен 1

В пункте 3.3 мы получили классификацию трехмерных линейных операторов Нийенхейса с условием, что инварианты функционально независимы, то есть ранг матрицы Якоби равен 3. Теперь наложим другое ограничение и посмотрим, что получается для случая, когда ранг

матрицы Якоби инвариантов равен 1. Заметим, что если  $rk \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial z} \end{pmatrix} = 1$ , то

· при  $f_1 = 0$  рассмотрим базис, где  $f_2 = ax^2 + by^2 + cz^2 \Rightarrow rk \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2ax & 2by & 2cz \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial z} \end{pmatrix} = 1$ .

Тогда, если  $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$ ,  $\frac{\partial f_3}{\partial x} = k \cdot 2ax$ ;  $\frac{\partial f_3}{\partial y} = k \cdot 2by$ ;  $\frac{\partial f_3}{\partial z} = k \cdot 2cz$  и возможны несколько вариантов

- $k = 0 \Rightarrow f_3 = 0$ .
- $k \neq 0, a \neq 0 \Rightarrow f_3 = x^2(\dots) \Rightarrow b = c = 0$ .
- $k \neq 0, b \neq 0 \Rightarrow f_3 = y^2(\dots) \Rightarrow a = c = 0$ .
- $k \neq 0, c \neq 0 \Rightarrow f_3 = z^2(\dots) \Rightarrow a = b = 0$ .

Матрица Якоби  $A$  будет иметь один из следующих видов:  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2ax & 2by & 2cz \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2ax & 0 & 0 \\ 3\alpha x^2 & 0 & 0 \end{pmatrix},$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2by & 0 \\ 0 & 3\beta y^2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2cz \\ 0 & 0 & 3\gamma z^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial z} \end{pmatrix}.$$

• при  $f_1 \neq 0$  рассмотрим базис, где  $f_1 = x \Rightarrow rk \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial z} \end{pmatrix} = 1$  и  $f_2 = ax^2$ ,

$$f_3 = bx^3 \Rightarrow \text{матрица Якоби } A \text{ имеет следующий вид: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2ax & 0 & 0 \\ 3bx^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Каждый случай разберем в отдельности и посмотрим, какие ограничения возникают на коэффициенты. Для поиска соответствующего оператора Нийенхейса  $P$  мы воспользуемся,

как и раньше, соотношением  $AP = MA$ , где  $M = \begin{pmatrix} f_1 & -1 & 0 \\ f_2 & 0 & -1 \\ f_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

$$1) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2ax & 2by & 2cz \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 & -1 & 0 \\ f_2 & 0 & -1 \\ f_3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2ax & 2by & 2cz \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Если сравнить}$$

первые строки матриц, то  $a = b = c = 0$ . Нам этот случай не подходит ( $rk = 1$ ).

$$2) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2ax & 0 & 0 \\ 3\alpha x^2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 & -1 & 0 \\ f_2 & 0 & -1 \\ f_3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2ax & 0 & 0 \\ 3\alpha x^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Если сравнить первые}$$

и вторые строки матриц, то  $a = \alpha = 0$ . Нам этот случай не подходит ( $rk = 1$ ).

$$3) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2by & 0 \\ 0 & 3\beta y^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 & -1 & 0 \\ f_2 & 0 & -1 \\ f_3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2by & 0 \\ 0 & 3\beta y^2 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Если сравнить первые}$$

и вторые строки матриц, то  $b = \beta = 0$ . Нам этот случай не подходит ( $rk = 1$ ).

$$4) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2cz \\ 0 & 0 & 3\gamma z^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 & -1 & 0 \\ f_2 & 0 & -1 \\ f_3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2cz \\ 0 & 0 & 3\gamma z^2 \end{pmatrix}. \text{ Если сравнить первые}$$

и вторые строки матриц, то  $c = \gamma = 0$ . Нам этот случай не подходит ( $rk = 1$ ).

$$5) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 & -1 & 0 \\ f_2 & 0 & -1 \\ f_3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial z} \end{pmatrix}. \text{ Если сравнить}$$

вторые строки матриц, то  $f_3 = 0$ . Нам этот случай не подходит ( $rk = 1$ ).

$$6) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2ax & 0 & 0 \\ 3bx^2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & -1 & 0 \\ ax^2 & 0 & -1 \\ bx^3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2ax & 0 & 0 \\ 3bx^2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ 2axp_{11} & 2axp_{12} & 2axp_{13} \\ 3bx^2p_{11} & 3bx^2p_{12} & 3bx^2p_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-2a)x & 0 & 0 \\ (a-3b)x^2 & 0 & 0 \\ bx^3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases} p_{11} = (1-2a)x \\ 2ap_{11} = (a-3b)x \\ 3bp_{11} = bx \\ p_{12} = p_{13} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a(1-2a) = a-3b \\ 3b(1-2a) = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0, b = 0 \\ a = \frac{1}{4}, b = 0 \\ a = \frac{1}{3}, b = \frac{1}{27} \end{cases}$$

Разберем каждый из трех случаев в совокупности. Заметим, что равенство  $AP = MA$  уже

не гарантирует нам, что оператор  $P$  будет оператором Нийенхейса (матрица  $A$  не обратима), поэтому равенство нулю тензора Нийенхейса нужно будет требовать дополнительно. Для вычисления тензора Нийенхейса будем использовать программу Wolfram Mathematica.

1.  $a = 0, b = 0$

$$P = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix}, \text{ причём } \begin{cases} f_1 = x \\ f_2 = 0 \\ f_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_{22} + p_{33} = 0 \\ p_{22}x + p_{33}x + p_{22}p_{33} - p_{23}p_{32} = 0 \\ p_{22}p_{33} - p_{23}p_{32} = 0 \end{cases}$$

$$P = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ p_{21} & Ax + By + Cz & k(Ax + By + Cz) \\ p_{31} & -\frac{1}{k}(Ax + By + Cz) & -(Ax + By + Cz) \end{pmatrix}, k \neq 0$$

$$P = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ p_{21} & 0 & 0 \\ p_{31} & Ax + By + Cz & 0 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ p_{21} & 0 & Ax + By + Cz \\ p_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix}, A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$$

Поставим на операторы условие равенства нулю компонентов тензора Нийенхейса:

(1.1)

$$P = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ px + qy + rz & 0 & 0 \\ p'x + q'y + r'z & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(1.2)

$$P = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ px & (-Bp - Cp')x + By + Cz & k((-Bp - Cp')x + By + Cz) \\ p'x & -\frac{1}{k}((-Bp - Cp')x + By + Cz) & -((-Bp - Cp')x + By + Cz) \end{pmatrix}, k \neq 0$$

Заменами координат  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{k} \end{pmatrix}$  ( $C \neq 0$ );  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{k} & -\frac{1}{k} \end{pmatrix}$  ( $C = 0$ ) сводятся к (1.5).

(1.3)

$$P = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ px + qy & 0 & 0 \\ p'x + q'y + (q+1)z & Ax & 0 \end{pmatrix}$$

(1.4)

$$P = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ \frac{A(q-1)}{B}x + qy & 0 & 0 \\ p'x + q'y + 2qz & Ax + By & 0 \end{pmatrix}, B \neq 0$$

(1.5)

$$P = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ px & 0 & 0 \\ -\frac{A-Bp+Ar'}{C}x + \frac{Br'}{C}y + r'z & Ax + By + Cz & 0 \end{pmatrix}, C \neq 0$$

(1.6)

$$P = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ px + (1+r')y + rz & 0 & Ax \\ p'x + r'z & 0 & 0 \end{pmatrix}, A \neq 0$$

Заменой координат  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  сводится к (1.3).

(1.7)

$$P = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ px + 2r'y + rz & 0 & Ax + Cz \\ \frac{A(r'-1)}{C}x + r'z & 0 & 0 \end{pmatrix}, C \neq 0$$

Заменой координат  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  сводится к (1.4).

(1.8)

$$P = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ px + qy + \frac{Cq}{B}z & 0 & Ax + By + Cz \\ \frac{-A-Bp+q}{C}x & 0 & 0 \end{pmatrix}, B, C \neq 0$$

Заменой координат  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  сводится к (1.5).

(1.9)

$$P = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ \frac{A(q-1)}{B}x + qy & 0 & Ax + By \\ p'x & 0 & 0 \end{pmatrix}, B \neq 0$$

Заменой координат  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  сводится к (1.5).

2.  $a = \frac{1}{4}$ ,  $b = 0$ 

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x & 0 & 0 \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix}, \text{ причём } \begin{cases} f_1 = x \\ f_2 = \frac{1}{4}x^2 \\ f_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_{22} + p_{33} = \frac{1}{2}x \\ p_{22}\frac{x}{2} + p_{33}\frac{x}{2} + p_{22}p_{33} - p_{23}p_{32} = \frac{1}{4}x^2 \\ p_{22}p_{33} - p_{23}p_{32} = 0 \end{cases}$$

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x & 0 & 0 \\ p_{21} & Ax + By + Cz & k((\frac{1}{2} - A)x - By - Cz) \\ p_{31} & \frac{1}{k}(Ax + By + Cz) & (\frac{1}{2} - A)x - By - Cz \end{pmatrix}, k \neq 0$$

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x & 0 & 0 \\ p_{21} & 0 & Ax + By + Cz \\ p_{31} & 0 & \frac{1}{2}x \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x & 0 & 0 \\ p_{21} & 0 & 0 \\ p_{31} & Ax + By + Cz & \frac{1}{2}x \end{pmatrix}, A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$$

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x & 0 & 0 \\ p_{21} & \frac{1}{2}x & Ax + By + Cz \\ p_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x & 0 & 0 \\ p_{21} & \frac{1}{2}x & 0 \\ p_{31} & Ax + By + Cz & 0 \end{pmatrix}, A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$$

Аналогичным образом накладываем условие равенства нулю компонентом тензора Нийен-хейса:

(2.1)

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x & 0 & 0 \\ px + qy & Ax & k(\frac{1}{2} - A)x \\ p'x + qz & \frac{1}{k}Ax & (\frac{1}{2} - A)x \end{pmatrix}, k \neq 0$$

Заменой координат  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  сводится к (2.8).

(2.2)

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x & 0 & 0 \\ px & Ax + By + Cz & k((\frac{1}{2} - A)x - By - Cz) \\ -\frac{Bp}{C}x & \frac{1}{k}(Ax + By + Cz) & (\frac{1}{2} - A)x - By - C \end{pmatrix}, k \neq 0, C \neq 0$$

Заменой координат  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  сводится к (2.10).

(2.3)

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x & 0 & 0 \\ 0 & Ax + By & k((\frac{1}{2} - A)x - By) \\ p'x & \frac{1}{k}(Ax + By) & (\frac{1}{2} - A)x - By \end{pmatrix}, k \neq 0, B \neq 0$$

Заменой координат  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  сводится к (2.10).

(2.4)

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x & 0 & 0 \\ px + \frac{1}{2}(4r' - 1)y + rz & 0 & Ax + Cz \\ \frac{-A+r+2Ar'}{2C}x + r'z & 0 & \frac{1}{2}x \end{pmatrix}, C \neq 0$$

(2.5)

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x & 0 & 0 \\ px + qy - 2A(q - r')z & 0 & Ax \\ p'x + r'z & 0 & \frac{1}{2}x \end{pmatrix}$$

Заменой координат  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2A \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  сводится к (2.8) (при  $A = 0$  уже имеет вид (2.8)).

(2.6)

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x & 0 & 0 \\ px + qy + \frac{C(2q-1)}{2B}z & 0 & Ax + By + Cz \\ \frac{-2AB-C-4B^2p+4ABq+2Cq}{4BC}x + \frac{1}{2}z & 0 & \frac{1}{2}x \end{pmatrix}, B, C \neq 0$$

(2.7)

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x & 0 & 0 \\ \frac{A(2q-1)}{2B}x + qy & 0 & Ax + By \\ p'x + \frac{1}{2}z & 0 & \frac{1}{2}x \end{pmatrix}, B \neq 0$$

Заменой координат  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  сводится к (2.6).

(2.8)

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x & 0 & 0 \\ px + qy & 0 & 0 \\ p'x - 2A(q - r')y + r'z & Ax & \frac{1}{2}x \end{pmatrix}$$

(2.9)

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x & 0 & 0 \\ \frac{2Aq - q'}{2B}x + qy & 0 & 0 \\ p'x + q'y + 2qz & Ax + By & \frac{1}{2}x \end{pmatrix}, B \neq 0$$

(2.10)

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x & 0 & 0 \\ px & 0 & 0 \\ \frac{-2BCp - Br' + 2ACr'}{2C^2}x + \frac{Br'}{C}y + r'z & Ax + By + Cz & \frac{1}{2}x \end{pmatrix}, C \neq 0$$

(2.11)

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x & 0 & 0 \\ px + 2r'y + rz & \frac{1}{2}x & Ax + Cz \\ \frac{2Ar' - r}{2C}x + r'z & 0 & 0 \end{pmatrix}, C \neq 0$$

Заменой координат  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  сводится к (2.9).

(2.12)

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x & 0 & 0 \\ px + qy + 2A(q - r')z & \frac{1}{2}x & Ax \\ p'x + r'z & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Заменой координат  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  сводится к (2.8).

(2.13)

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x & 0 & 0 \\ px + qy + \frac{Cq}{B}z & \frac{1}{2}x & Ax + By + Cz \\ \frac{-2B^2p + 2ABq - Cq}{2BC}x & 0 & 0 \end{pmatrix}, B, C \neq 0$$

Заменой координат  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  сводится к (2.10).

(2.14)

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x & 0 & 0 \\ \frac{Aq}{B}x + qy & \frac{1}{2}x & Ax + By \\ p'x & 0 & 0 \end{pmatrix}, B \neq 0$$

Заменой координат  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  сводится к (2.10).

(2.15)

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x & 0 & 0 \\ px + qy & \frac{1}{2}x & 0 \\ p'x + 2A(q - r')y + r'z & Ax & 0 \end{pmatrix}$$

Заменой координат  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  сводится к (2.5).

(2.16)

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x & 0 & 0 \\ \frac{-A+2Aq+q'}{2B}x + qy & \frac{1}{2}x & 0 \\ p'x + q'y + \frac{1}{2}(4q-1)z & Ax + By & 0 \end{pmatrix}, B \neq 0$$

Заменой координат  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  сводится к (2.4).

(2.17)

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x & 0 & 0 \\ px + \frac{1}{2}y & \frac{1}{2}x & 0 \\ \frac{-B-2AC-4BCp+2Br'+4ACr'}{4C^2}x + \frac{B(2r'-1)}{2C}y + r'z & Ax + By + Cz & 0 \end{pmatrix}, C \neq 0$$

Заменой координат  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  сводится к (2.6).

3.  $a = \frac{1}{3}$ ,  $b = \frac{1}{27}$ 

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}x & 0 & 0 \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix}, \text{ причём } \begin{cases} f_1 = x \\ f_2 = \frac{1}{3}x^2 \\ f_3 = \frac{1}{27}x^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_{22} + p_{33} = \frac{2}{3}x \\ p_{22}\frac{x}{3} + p_{33}\frac{x}{3} + p_{22}p_{33} - p_{23}p_{32} = \frac{1}{3}x^2 \\ p_{22}p_{33} - p_{23}p_{32} = \frac{1}{9}x^2 \end{cases}$$

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}x & 0 & 0 \\ p_{21} & Ax + By + Cz & k((\frac{1}{3} - A)x - By - Cz) \\ p_{31} & \frac{1}{k}((A - \frac{1}{3})x + By + Cz) & (\frac{2}{3} - A)x - By - Cz \end{pmatrix}$$

(3.1)

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}x & 0 & 0 \\ px + qy + rz & \frac{1}{3}x & 0 \\ p'x + q'y + r'z & 0 & \frac{1}{3}x \end{pmatrix}$$

(3.2)

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}x & 0 & 0 \\ px + \frac{1}{3}y & (\frac{1}{3} + 3Bp + 3Cp')x + By + Cz & k((-3Bp - 3Cp')x - By - Cz) \\ p'x + \frac{1}{3}z & \frac{1}{k}((3Bp + 3Cp')x + By + Cz) & (\frac{1}{3} - 3Bp - 3Cp')x - By - Cz \end{pmatrix}, k \neq 0, B^2 + C^2 \neq 0$$

Как можно увидеть, возникает очень много параметров. От большинства из них можно избавиться прямыми заменами. Приведем итоговый список (таблицы 4, 5, 6).

Комментарий к таблицам 4, 5, 6: все константы в компонентах матриц пробегают вещественную числовую ось.

Далее сформулируем и докажем предложение.

**Предложение 1.** Пусть дана матрица  $T$  вида  $\begin{pmatrix} t_{11}^1x + t_{11}^2y + t_{11}^3z & 0 & 0 \\ t_{21}^1x + t_{21}^2y + t_{21}^3z & 0 & 0 \\ t_{31}^1x + t_{31}^2y + t_{31}^3z & 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Тогда после

замены координат  $(x, y, z) \rightarrow (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$  с матрицей перехода  $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$

$$T \rightarrow \tilde{T} = C^{-1}TC = \begin{pmatrix} \tilde{t}_{11}^1 \tilde{x} + \tilde{t}_{11}^2 \tilde{y} + \tilde{t}_{11}^3 \tilde{z} & 0 & 0 \\ \tilde{t}_{21}^1 \tilde{x} + \tilde{t}_{21}^2 \tilde{y} + \tilde{t}_{21}^3 \tilde{z} & 0 & 0 \\ \tilde{t}_{31}^1 \tilde{x} + \tilde{t}_{31}^2 \tilde{y} + \tilde{t}_{31}^3 \tilde{z} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ где}$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{t}_{11}^1 & \tilde{t}_{11}^2 & \tilde{t}_{11}^3 \\ \tilde{t}_{21}^1 & \tilde{t}_{21}^2 & \tilde{t}_{21}^3 \\ \tilde{t}_{31}^1 & \tilde{t}_{31}^2 & \tilde{t}_{31}^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} t_{11}^1 & t_{11}^2 & t_{11}^3 \\ t_{21}^1 & t_{21}^2 & t_{21}^3 \\ t_{31}^1 & t_{31}^2 & t_{31}^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}.$$

**Доказательство.**

$$\begin{aligned} \tilde{T} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} t_{11}^1 x + t_{11}^2 y + t_{11}^3 z & 0 & 0 \\ t_{21}^1 x + t_{21}^2 y + t_{21}^3 z & 0 & 0 \\ t_{31}^1 x + t_{31}^2 y + t_{31}^3 z & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} t_{11}^1 & t_{11}^2 & t_{11}^3 \\ t_{21}^1 & t_{21}^2 & t_{21}^3 \\ t_{31}^1 & t_{31}^2 & t_{31}^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} (1 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} t_{11}^1 & t_{11}^2 & t_{11}^3 \\ t_{21}^1 & t_{21}^2 & t_{21}^3 \\ t_{31}^1 & t_{31}^2 & t_{31}^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix} (1 \ 0 \ 0). \end{aligned}$$

Предложение доказано.

Из доказанного предложения следует, что для операторов определенного вида замены координат, сохраняющие  $x$ , преобразуют матрицу коэффициентов по операторному закону с той же матрицей перехода  $C$ . В частности, посмотрим, как это работает, на примере (1.1):

$$P = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ px + qy + rz & 0 & 0 \\ p'x + q'y + r'z & 0 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Пусть } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\tilde{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ px + qy + rz & 0 & 0 \\ p'x + q'y + r'z & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{x} & 0 & 0 \\ \tilde{p}\tilde{x} + \tilde{q}\tilde{y} + \tilde{r}\tilde{z} & 0 & 0 \\ \tilde{p}'\tilde{x} + \tilde{q}'\tilde{y} + \tilde{r}'\tilde{z} & 0 & 0 \end{pmatrix}. \text{ По}$$

$$\text{предложению } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \tilde{p} & \tilde{q} & \tilde{r} \\ \tilde{p}' & \tilde{q}' & \tilde{r}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ p & q & r \\ p' & q' & r' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \tilde{q} & \tilde{r} \\ \tilde{q}' & \tilde{r}' \end{pmatrix} =$$

$= \begin{pmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} q & r \\ q' & r' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{pmatrix}$ . Отсюда, в частности, будет следовать, что случаи **I**, **II**, **III**, **IV** различны между собой, а также при разных значениях параметров задают разные операторы.

Аналогичное рассуждение работает и для (3.1), так как матрицу этого оператора можно представить в виде:  $P = P_1 + P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ px + qy + rz & 0 & 0 \\ p'x + q'y + r'z & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{3}x & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}x & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}x \end{pmatrix}$ . Значит,

**XXVIII**, **XXIX**, **XXX**, **XXXI** различны между собой, а также при разных значениях параметров задают разные операторы. Для остальных операторов проверка осуществлялась прямыми вычислениями.

Tab. 4: Ранг матрицы Якоби = 1

	Инварианты	$P$
<b>I</b>	$f_1 = x$ $f_2 = 0$ $f_3 = 0$	$\begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ qy & 0 & 0 \\ r'z & 0 & 0 \end{pmatrix}$
<b>II</b>	$f_1 = x$ $f_2 = 0$ $f_3 = 0$	$\begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ x + y & 0 & 0 \\ r'z & 0 & 0 \end{pmatrix}$
<b>III</b>	$f_1 = x$ $f_2 = 0$ $f_3 = 0$	$\begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ y + z & 0 & 0 \\ x + z & 0 & 0 \end{pmatrix}$
<b>IV</b>	$f_1 = x$ $f_2 = 0$ $f_3 = 0$	$\begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ qy + z & 0 & 0 \\ qz & 0 & 0 \end{pmatrix}$
<b>V</b>	$f_1 = x$ $f_2 = 0$ $f_3 = 0$	$\begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ qy & 0 & 0 \\ (q + 1)z & x & 0 \end{pmatrix}$
<b>VI</b>	$f_1 = x$ $f_2 = 0$ $f_3 = 0$	$\begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ x + z & x & 0 \end{pmatrix}$
<b>VII</b>	$f_1 = x$ $f_2 = 0$ $f_3 = 0$	$\begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ x + y & 0 & 0 \\ 2z & x & 0 \end{pmatrix}$
<b>VIII</b>	$f_1 = x$ $f_2 = 0$ $f_3 = 0$	$\begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ qy & 0 & 0 \\ 2qz & y & 0 \end{pmatrix}$
<b>IX</b>	$f_1 = x$ $f_2 = 0$ $f_3 = 0$	$\begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ y & y & 0 \end{pmatrix}$
<b>X</b>	$f_1 = x$ $f_2 = 0$ $f_3 = 0$	$\begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}y & 0 & 0 \\ -y + z & y & 0 \end{pmatrix}$
<b>XI</b>	$f_1 = x$ $f_2 = 0$ $f_3 = 0$	$\begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}y & 0 & 0 \\ y + z & y & 0 \end{pmatrix}$
<b>XII</b>	$f_1 = x$ $f_2 = 0$ $f_3 = 0$	$\begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ z & z & 0 \end{pmatrix}$
<b>XIII</b>	$f_1 = x$ $f_2 = 0$ $f_3 = 0$	$\begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & z & 0 \end{pmatrix}$

Tab. 5: Ранг матрицы Якоби = 1

	Инварианты	$P$
XIV	$f_1 = x$ $f_2 = \frac{1}{4}x^2$ $f_3 = 0$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}x & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}(4r' - 1)y & 0 & z \\ r'z & 0 & \frac{1}{2}x \end{pmatrix}$
XV	$f_1 = x$ $f_2 = \frac{1}{4}x^2$ $f_3 = 0$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}x & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2}y + 2z & 0 & z \\ x & 0 & \frac{1}{2}x \end{pmatrix}$
XVI	$f_1 = x$ $f_2 = \frac{1}{4}x^2$ $f_3 = 0$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}x & 0 & 0 \\ x + \frac{1}{2}y & 0 & z \\ \frac{1}{2}z & 0 & \frac{1}{2}x \end{pmatrix}$
XVII	$f_1 = x$ $f_2 = \frac{1}{4}x^2$ $f_3 = 0$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}x & 0 & 0 \\ -x + \frac{1}{2}y & 0 & z \\ \frac{1}{2}z & 0 & \frac{1}{2}x \end{pmatrix}$
XVIII	$f_1 = x$ $f_2 = \frac{1}{4}x^2$ $f_3 = 0$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y \\ px + \frac{1}{2}z & 0 & \frac{1}{2}x \end{pmatrix}$
XIX	$f_1 = x$ $f_2 = \frac{1}{4}x^2$ $f_3 = 0$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}x & 0 & 0 \\ qy & 0 & 0 \\ r'z & 0 & \frac{1}{2}x \end{pmatrix}$
XX	$f_1 = x$ $f_2 = \frac{1}{4}x^2$ $f_3 = 0$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}x & 0 & 0 \\ qy & 0 & 0 \\ x & 0 & \frac{1}{2}x \end{pmatrix}$
XXI	$f_1 = x$ $f_2 = \frac{1}{4}x^2$ $f_3 = 0$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}x & 0 & 0 \\ x + \frac{1}{2}y & 0 & 0 \\ r'z & 0 & \frac{1}{2}x \end{pmatrix}$
XXII	$f_1 = x$ $f_2 = \frac{1}{4}x^2$ $f_3 = 0$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}x & 0 & 0 \\ x + \frac{1}{2}y & 0 & 0 \\ x & 0 & \frac{1}{2}x \end{pmatrix}$
XXIII	$f_1 = x$ $f_2 = \frac{1}{4}x^2$ $f_3 = 0$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}x & 0 & 0 \\ qy & 0 & 0 \\ 2qz & y & \frac{1}{2}x \end{pmatrix}$
XXIV	$f_1 = x$ $f_2 = \frac{1}{4}x^2$ $f_3 = 0$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}x & 0 & 0 \\ x + \frac{1}{2}y & 0 & 0 \\ -2y + z & y & \frac{1}{2}x \end{pmatrix}$
XXV	$f_1 = x$ $f_2 = \frac{1}{4}x^2$ $f_3 = 0$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ x & y & \frac{1}{2}x \end{pmatrix}$
XXVI	$f_1 = x$ $f_2 = \frac{1}{4}x^2$ $f_3 = 0$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -x & y & \frac{1}{2}x \end{pmatrix}$
XXVII	$f_1 = x$ $f_2 = \frac{1}{4}x^2$ $f_3 = 0$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ r'z & z & \frac{1}{2}x \end{pmatrix}$

Tab. 6: Ранг матрицы Якоби = 1

	Инварианты	$P$
<b>XXVIII</b>	$f_1 = x$ $f_2 = \frac{1}{3}x^2$ $f_3 = \frac{1}{27}x^3$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{3}x & 0 & 0 \\ qy & \frac{1}{3}x & 0 \\ r'z & 0 & \frac{1}{3}x \end{pmatrix}$
<b>XXIX</b>	$f_1 = x$ $f_2 = \frac{1}{3}x^2$ $f_3 = \frac{1}{27}x^3$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{3}x & 0 & 0 \\ x & \frac{1}{3}x & 0 \\ r'z & 0 & \frac{1}{3}x \end{pmatrix}$
<b>XXX</b>	$f_1 = x$ $f_2 = \frac{1}{3}x^2$ $f_3 = \frac{1}{27}x^3$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{3}x & 0 & 0 \\ z & \frac{1}{3}x & 0 \\ x & 0 & \frac{1}{3}x \end{pmatrix}$
<b>XXXI</b>	$f_1 = x$ $f_2 = \frac{1}{3}x^2$ $f_3 = \frac{1}{27}x^3$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{3}x & 0 & 0 \\ qy + z & \frac{1}{3}x & 0 \\ qz & 0 & \frac{1}{3}x \end{pmatrix}$
<b>XXXII</b>	$f_1 = x$ $f_2 = \frac{1}{3}x^2$ $f_3 = \frac{1}{27}x^3$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{3}x & 0 & 0 \\ qy & \frac{1}{3}x & y \\ \frac{1}{3}z & 0 & \frac{1}{3}x \end{pmatrix}$
<b>XXXIII</b>	$f_1 = x$ $f_2 = \frac{1}{3}x^2$ $f_3 = \frac{1}{27}x^3$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{3}x & 0 & 0 \\ \frac{1}{3}y + z & \frac{1}{3}x & z \\ \frac{1}{3}z & 0 & \frac{1}{3}x \end{pmatrix}$

## 6 Заключение

Задача поиска линейных операторов Нийенхейса оказалась достаточно сложной, в первую очередь вычислительно, так как на компоненты матриц операторов и коэффициенты инвариантов возникла нелинейная система уравнений, поэтому для решения привлекались компьютерные вычисления с использованием программы Wolfram Mathematica. В процессе работы возникали некоторые закономерности и замечания, которые во многом упрощали вычисления и позволили прийти к итоговому ответу.

При исследовании особенностей найденных операторов интерес вызывает случай **V**, который отличается от остальных тем, что множество особых точек представляет собой объединение плоскости и поверхности 4-го порядка, не являющейся объединением поверхностей меньшего порядка. Дальнейшие свойства этого оператора еще подлежат изучению.

Ослабление требования функциональной независимости привело к более длинному списку операторов и возникновению непрерывных семейств. В будущем планируется рассмотреть, что будет, когда ранг матрицы Якоби инвариантов равен 2. Такая задача кажется еще более сложной, однако ее решение позволит получить полную классификацию левосимметрических алгебр в размерности три.

## Список литературы

- [1] A.V.Bolsinov, A.Yu.Konyaev, V.S.Matveev, “Nijenhuis Geometry”, *Adv. Math.*, **394** (2021), 52 pp.
- [2] A.Winterhalder, “Linear Nijenhuis-Tensors and the Construction of Integrable Systems”, *arXiv.org:9709008*, 1997, 8 pp.
- [3] A.Yu.Konyaev, “Nijenhuis geometry II: Left-symmetric algebras and linearization problem for Nijenhuis operators”, *Diff. Geom. App.*, **74** (2021), 32 pp.
- [4] D.Burde, W. de Graaf, “Classification of Novikov algebras”, *Applicable Algebra in Engineering, Communication and Computing*, **24** (2013), 1-15.
- [5] A.V.Bolsinov, V.S.Matveev, E.Miranda, S.Tabachnikov, “Open problems, questions and challenges in finitedimensional integrable systems”, *Phil. Trans. R. Soc. A.*, **376** (2018), 40 pp.
- [6] А. А. Короткевич, “Интегрируемые гамильтоновы системы на алгебрах Ли малой размерности”, *Матем. сб.*, **200**:12 (2009), 3–40.

Приложение  
к приказу НИУ ВШЭ – Нижний  
Новгород  
от 30.04.2021 №8.1.6.3-14/300421-1

УТВЕРЖДЕНО  
ученым советом НИУ ВШЭ – Нижний  
Новгород  
(протокол от 22.04.2021 № 4)

Положение о конкурсе  
«Смотр дипломных работ математиков России»

**1. Общие положения**

1.1. Настоящее Положение определяет порядок организации и проведения конкурса «Смотр дипломных работ математиков России» (далее – Смотр), организуемого и проводимого НИУ ВШЭ – Нижний Новгород.

1.2. Организатором Смотра является НИУ ВШЭ – Нижний Новгород (далее – Организатор). Проведение Смотра от имени НИУ ВШЭ – Нижний Новгород обеспечивает кафедра фундаментальной математики. Контактным лицом Организатора является Ремизов Иван Дмитриевич, iremizov@hse.ru.

1.3. Предметом Смотра является выпускная квалификационная работа (далее – конкурсная работа). Кандидатские, докторские, PhD диссертации и приравненные к ним работы не допускаются до участия в Смотре.

1.4. Смотр является открытым и проводится среди студентов, а также выпускников образовательных организаций Российской Федерации, освоивших основные профессиональные образовательные программы высшего образования - программы бакалавриата, программы специалитета, программы магистратуры математических или связанных с математикой специальностей и направлений подготовки в год проведения конкурса, а также за один, два или три года до даты проведения Смотра (далее – Участники, Авторы конкурсной работы). Срок проведения Смотра с 1 мая до 1 июля (информация о конкурсе публикуется на корпоративном сайте (портале) НИУ ВШЭ – Нижний Новгород: <https://nnov.hse.ru/bipm/fm/smotr>).

1.5. Сроки проведения отдельных этапов конкурса могут быть скорректированы и опубликованы на странице Смотра на корпоративном сайте (портале) НИУ ВШЭ – Нижний Новгород: <https://nnov.hse.ru/bipm/fm/smotr>.

1.6. Смотр проводится по следующим номинациям:

1.6.1. Лучшие работы по мнению участников Смотра (далее – Номинация 1, называемая также «выбор авторов работ»);

1.6.2. Лучшие работы по мнению представителей научно-исследовательских организаций и организаций высшего образования (далее – Номинация 2, называемая также «выбор учёных и преподавателей»);

1.6.3. Лучшие работы по мнению представителей других организаций, деятельность которых тесно связана с математикой (далее – Номинация 3, называемая также «выбор работодателей»).

1.7. Кафедра фундаментальной математики не менее чем за три рабочих дня до даты начала приема конкурсных работ публикует на корпоративном сайте (портале) НИУ ВШЭ – Нижний Новгород информацию об условиях Смотра, критерии и порядок оценок конкурсных работ, место, срок и порядок представления конкурсных работ, размер и форму награды, порядок и сроки объявления результатов Смотра.

1.8. Положение и изменения к нему утверждаются ученым советом НИУ ВШЭ – Нижний Новгород и вводится в действие приказом директора НИУ ВШЭ – Нижний Новгород

1.9. Положение действует на период проведения Смотра.

## **2. Условия Конкурса**

2.1. Смотр проходит в два этапа:

2.1.1. первый этап Смотра проводится с 1 мая по 10 июня включительно и состоит из следующих мероприятий:

– с 1 мая по 31 мая включительно осуществляется сбор конкурсных работ.

Конкурсные работы, поступившие после окончания срока приема конкурсных работ, к Смотру не допускаются.

– с 1 июня по 10 июня включительно осуществляется отбор конкурсных работ на соответствие правилам оформления конкурсных работ.

Список Участников по итогам первого отборочного этапа конкурсных работ будет опубликован на странице Смотра на корпоративном сайте (портале) НИУ ВШЭ – Нижний Новгород не позднее 10 июня.

2.1.2. второй этап Смотра проводится с 11 июня до 1 июля и состоит из следующих мероприятий:

- присвоение конкурсным работам порядковых номеров и их публикация в сборнике;

- оценка конкурсных работ членами Жюри для выявления Победителей в Номинациях 1-3.

Решение жюри Смотра по второму этапу Смотра должно быть принято не позднее 1 июля.

2.2. Информация о Победителях Смотра по каждой номинации по итогам второго этапа Смотра будет опубликована не позднее 9 июля на странице Смотра на корпоративном сайте (портале) НИУ ВШЭ – Нижний Новгород: <https://nnov.hse.ru/bipm/fm/smotr>.

2.3. Награждение Победителей Смотра по каждой номинации осуществляется не позднее 15 июля.

## **3. Участники Смотра**

3.1. Участниками Смотра являются студенты, а также выпускники образовательных организаций Российской Федерации, освоившие основные профессиональные образовательные программы высшего образования - программы бакалавриата, программы специалитета, программы магистратуры математических или связанных с математикой специальностей и направлений подготовки в год проведения конкурса, а также за один, два или три года до даты проведения Смотра.

3.2. Участники, принимая участие в Смотре, соглашаются с правилами проведения Смотра, изложенными в настоящем Положении.

3.3. Участник может обращаться за консультациями, разъяснениями и технической поддержкой по вопросам, связанным с участием в Смотре, к Организатору.

3.4. В случае нарушения Участником настоящего Положения, а равно установления факта недобросовестного поведения в рамках Смотра, Организатор вправе не допустить такого Участника к участию в Смотре и отстранить на любом этапе от дальнейшего участия в Смотре и лишить призового места.

#### 4. Жюри Смотра

4.1. Рассмотрение конкурсных работ Участников и определение Победителя Смотра по каждой номинации осуществляет жюри Смотра, состав которого формируется Оргкомитетом Смотра и публикуется на странице Смотра на корпоративном сайте (портале) НИУ ВШЭ – Нижний Новгород.

4.2. Для выявления Победителей в каждой номинации формируется три группы Жюри, состоящие из:

4.2.1 всех Участников Смотра для выявления Победителя в Номинации 1 (далее – группа Жюри 1);

4.2.2 представителей научно-исследовательских организаций и организаций высшего образования для выявления Победителя в Номинации 2 (далее – группа Жюри 2);

4.2.3 представителей других организацией, деятельность которых тесно связана с математикой, для выявления Победителя в Номинации 3 (далее – группа Жюри 3).

4.3. При оценке работ Участников член жюри Смотра по каждой номинации руководствуется следующими критериями:

4.3.1. Понятность постановки задачи. После прочтения работы должно быть ясно, какая задача решалась автором;

4.3.2. Доступность введения для неспециалистов. Базовые термины и факты исследуемой области должны быть изложены в форме, доступной для понимания широкой математической аудиторией;

4.3.3. Качество изложения основного научного результата, полученного автором;

4.3.4. Качество обоснования основного научного результата, полученного автором;

4.3.5. Качество оформления работы - стилистическое единство, качество вёрстки текста, наличие необходимых частей в работе;

4.3.6. Наличие и уровень публикаций автора по теме работы.

4.4. Каждый член жюри Смотра проводит оценку работ Участников по критериям, указанным в п. 4.3. настоящего Положения, по бинарной шкале (0 или 1 балл), где «0» – «конкурсная работа имеет существенные недостатки и в представленном на Смотр виде не может считаться достойным образцом качественно выполненной выпускной квалификационной работы бакалавра/специалиста/магистра соответственно», а «1» – «конкурсная работа является достойным образцом качественно выполненной выпускной квалификационной работы бакалавра/специалиста/магистра соответственно».

4.5. Каждый член группы Жюри обязан оценить 5 работ, направленных ему Оргкомитетом случайным образом, а также выбрать для оценки по своему усмотрению любые другие от 2 до 5 работ из опубликованных в сборнике конкурсных работ.

4.6. Набранные баллы от каждой группы Жюри суммируются отдельно. Авторы работ, набравшие наибольшее количество баллов от одной группы Жюри, признаются Победителями в соответствующей Номинации.

4.7. При определении итоговых оценок работ учитываются оценки, присланные членами каждой из трёх групп Жюри до даты окончания приёма оценок от Жюри.

## **5. Правила оформления конкурсных работ и порядок их представления**

5.1. Конкурсная работа должна быть выполнена в формате PDF и содержать:

5.1.1. Полный текст выпускной квалификационной работы со всеми пригодными для изображения в статическом виде приложениями;

5.1.2. Отзыв научного руководителя о работе (необязательно). Направляя отзыв, Участник подтверждает согласие научного руководителя на публикацию отзыва в сети Интернет;

5.1.3. Скан/фото заполненного и подписанного Заявления о новизне согласно Приложению.

5.2. К конкурсной работе должно прилагаться письмо с информацией об Участнике. Информация об Участнике должна содержать следующие данные:

5.2.1. фамилия, имя, отчество;

5.2.2. контактный номер телефона;

5.2.3. страна и город проживания;

5.2.4. информация о (планируемой) дате защиты представленной на Смотр выпускной квалификационной работы.

5.3. Конкурсная работа направляется Организатору в электронном виде. Конкурсные работы в электронном виде направляются Организатору на корпоративную электронную почту, указанную на корпоративном сайте (портале) НИУ ВШЭ – Нижний Новгород: <https://nnov.hse.ru/bipm/fm/smotr>.

5.4. Конкурсные работы должны быть направлены Организатору в срок, указанный на корпоративном сайте (портале) НИУ ВШЭ – Нижний Новгород: <https://nnov.hse.ru/bipm/fm/smotr>.

## **6. Подведение итогов Смотра**

6.1. Решение жюри Смотра должно быть принято не позднее 10 июня (I этап) и 01 июля (II этап).

6.2. Оргкомитет осуществляет сбор и обработку оценок, выставленных членами жюри Смотра, в электронном виде заочно. Очных заседаний членов Жюри не предусмотрено.

6.3. Решение жюри Смотра оформляется протоколами заседания Оргкомитета, которые подлежат опубликованию на корпоративном сайте (портале) НИУ ВШЭ – Нижний Новгород не позднее 9 июля.

6.4. Победителями Смотра по каждой номинации являются Участники, набравшие высший балл по результатам заочного голосования жюри Смотра.

6.5. Решение жюри Смотра является окончательным и обязательным для Участников.

6.6. Подлинники протоколов заседаний Оргкомитета и прилагаемые к ним материалы хранятся в структурном подразделении НИУ ВШЭ – Нижний Новгород,

обеспечивающем проведение Смотра, в течение пятилетнего срока оперативного хранения.

6.7. Протоколы заседаний Оргкомитета и прилагаемые к ним материалы являются документами постоянного срока хранения. По истечении пятилетнего срока оперативного хранения протоколы и прилагаемые к ним материалы передаются по описи на архивное хранение в Общий отдел НИУ ВШЭ – Нижний Новгород в установленном в НИУ ВШЭ – Нижний Новгород порядке.

## **7. Финансирование Смотра**

7.1. Призовой фонд Смотра отсутствует, денежное вознаграждение Победителей Смотра по каждой номинации не предусмотрено.

7.2. По результатам подведения итогов Смотра Победитель Смотра из каждой номинации награждается нематериальным вознаграждением в виде диплома I или II степени Победителя Смотра в соответствующей номинации.

## **8. Авторские права**

8.1. Конкурсная работа является результатом творческой деятельности соответствующего Автора конкурсной работы.

8.2. Автор конкурсной работы гарантирует Организатору Смотра, что:

8.2.1. на момент направления (передачи) конкурсной работы он является единственным ее правообладателем, обладает всеми необходимыми правами для принятия всех условий проведения Смотра, предусмотренных настоящим Положением. В случае если Авторами конкурсной работы являются несколько лиц, Автор, направляющий конкурсную работу Организатору, обязуется заблаговременно получить согласие остальных лиц на направление работы Организатору и обеспечить достижение соглашения с остальными лицами в отношении распоряжения исключительным правом на конкурсную работу в соответствии с условиями, предусмотренными настоящим Положением;

8.2.2. использование конкурсной работы Организатором Смотра в соответствии с условиями настоящего Положения не приведет к нарушению прав и законных интересов третьих лиц;

8.2.3. им за свой счет будут предприняты все необходимые действия, исключающие возникновение (или обеспечивающие возмещение уже понесенных) расходов Организатора Смотра, связанных с требованиями и претензиями третьих лиц в отношении использования конкурсной работы. До полного выяснения обстоятельств использования и удовлетворения соответствующих требований и претензий конкурсная работа, послужившая их основанием, исключается из Смотра.

8.3. Автор конкурсной работы предоставляет Организатору Смотра право использования конкурсной работы на условиях простой (неисключительной) лицензии путем:

8.3.1. воспроизведения в любой форме, без ограничения количества экземпляров;

8.3.2. распространения, включая воспроизведенные экземпляры, путем продажи или иного отчуждения;

8.3.3. доведение до всеобщего сведения;

8.3.4. включения в составные и иные произведения;

8.3.5. перевода или другой переработки с возможностью последующего использования любыми способами такого перевода или иным образом переработанного произведения (производного произведения) и распоряжения исключительным правом на производное произведение.

Использование конкурсной работы Организатором Смотра допускается на территории любого государства (на территории всего мира) в течение всего срока действия исключительного права на конкурсную работу с момента предоставления права использования, без выплаты вознаграждения за использование конкурсной работы и без представления отчетов. Право использования конкурсной работы считается предоставленным в момент получения Организатором Смотра конкурсной работы в порядке, указанном в настоящем Положении, безотносительно результатов оценки работ Участников Смотра.

8.4. Автор конкурсной работы дают свое согласие на:

8.4.1. использование конкурсной работы Организатором Смотра с указанием имени Автора при каждом таком использовании;

8.4.2. использование созданной им конкурсной работы в составе сборника работ.

8.5. Принимая участие в Смотре, Автор конкурсной работы выражает свое согласие на:

8.5.1. сбор, запись, систематизацию, хранение, уточнение, извлечение, использование, удаление и уничтожение Организатором следующих своих персональных данных, предоставленных и предоставляемых Организатору, в частности: фамилии, имени, отчества; даты, года, места рождения; образования, квалификации и их уровня; профессии (специальности); места и адреса работы, должности; места регистрации и проживания; номера телефонов (мобильный, домашний, рабочий); адреса электронной почты; адресов страниц Автора в социальных сетях и прочих Интернет-сайтах; иных данных, предоставляемых Организатору, а также обусловленных участием Автора в Смотре;

8.5.2. передачу третьим лицам (распространение, в том числе посредством корпоративного сайта (портала) НИУ ВШЭ – Нижний Новгород, предоставление, доступ) Организатором следующих своих персональных данных, предоставленных и предоставляемых Организатору, в частности: фамилии, имени, отчества; даты, года, места рождения; образования, квалификации и их уровня; профессии (специальности); места и адреса работы, должности; города регистрации и проживания; адреса электронной почты; адресов страниц Автора в социальных сетях и прочих Интернет-сайтах.

8.6. Принимая участие в Смотре, Автор конкурсной работы выражает свое согласие, что обработка персональных данных Автора может осуществляться как с помощью средств вычислительной техники (автоматизированная обработка), так и без их применения.

8.7. Целями предоставления согласия Автора на обработку его персональных данных является обеспечение соблюдения Организатором прав Автора на имя, обеспечения равных условий для всех Участников и гласности проведения Смотра, распространения его результатов. Срок, в течение которого действует согласие Автора, равен сроку действия исключительного права на конкурсную работу. Отзыв согласия Автора на обработку его персональных данных осуществляется в порядке, предусмотренном Федеральным законом от 27.07.2006 № 152-ФЗ «О персональных данных».

8.8. Представленные на Смотр работы проверяются Оргкомитетом на соответствие формальным требованиям настоящего Положения. При этом рецензирования работ не происходит, члены жюри представляют лишь оценки, но не рецензии. В Сборнике работ указывается дата его публикации. В силу этого:

8.8.1. Сборник не может считаться рецензируемым научным изданием;

8.8.2. Публикация научных результатов в составе выпускной квалификационной работы в Сборнике не является препятствием для публикации их в составе статьи в рецензируемых научных изданиях;

8.8.3. Публикация работы в Сборнике может быть использована для установления научного приоритета;

8.8.4. Опубликованная в Сборнике работа не может быть полностью бесследно отозвана после публикации Сборника.

Приложение  
(пример заполнения см. ниже)

В Оргкомитет Смотра выпускных квалификационных работ студентов и выпускников  
математических или связанных с математикой специальностей и направлений  
подготовки

от \_\_\_\_\_

Заявление о новизне

Сообщаю, что новыми в моей представленной на Смотр выпускной квалификационной  
работе (далее - работа) под названием \_\_\_\_\_ являются:

Также сообщаю, что для проверки новизны мною было проделано следующее:  
*перечислить сделанное (поиск в Интернете, выступления на семинарах, консультации  
с коллегами и т.п.)*

Подтверждаю, что являюсь автором предоставляемой на Смотр работы и прошу  
принять её для участия в Смотре. Принимаю на себя обязательство соблюдать правила  
Смотра. Также (в соответствии с п. 4 Положения о Смотре) принимаю на себя  
обязательство оценить 5 работ участников Смотра, выданных мне Оргкомитетом в  
результате жеребьёвки и сверх того оценить 2-5 работ других участников Смотра на  
мой выбор. Я понимаю правила оценки работ, приведённые в п. 4.3 Положения о  
Смотре.

Защита работы состоится/состоялась \_\_\_\_\_. На Смотр представлен  
проект текста/окончательный текст работы.

Подпись

ФИО полностью

Дата  
город, страна

## Пример заполнения Приложения

В Оргкомитет Смотра выпускных квалификационных работ студентов и выпускников математических или связанных с математикой специальностей и направлений подготовки

от Иванова Ивана Ивановича

## Заявление о новизне

Сообщаю, что новыми в моей представленной на Смотр выпускной квалификационной работе под названием «Конструкции, связанные с продолжением интеграла Петтиса» являются: Определение 2.3, Лемма 3.1, доказательство Теоремы 3.4, Замечания 1.2, 1.3, 1.7.

Также сообщаю, что для проверки новизны было проделано следующее:

- В период с 01 января по 15 февраля 2021 г. мною был произведён поиск в следующих поисковых системах: Яндекс, Google, Google Scholar, Web of Science, arxiv.org по следующим ключевым словам: продолжение интеграла Петтиса, Pettis integral continuation, в выдаче поисковиков было исследовано 23 статьи, 5 тезисов докладов, 6 монографий, 25 препринтов, 4 диссертации (список см. в Приложении 1 к выпускной квалификационной работе) и все они не содержали материала, заявляемого автором выпускной квалификационной работы в качестве нового. При поиске не было встречено работ или упоминаний работ, позволяющих усомниться в новизне материала. При этом в работах [1-4], [5], [7] были найдены конструкции, похожие на излагаемые в настоящей выпускной квалификационной работе, однако отличие их ясно видно и наличие таких работ лишь подтверждает актуальность тематики исследования.

- Проведена серия консультаций с моим научным руководителем Иваном Петровичем Сидоровым, доцентом кафедры математики факультета естественных наук Пензенского государственного университета.

- Проведена переписка с профессором кафедры дифференциальных уравнений факультета математики Казанского государственного университета Сидором Петровичем Ивановым.

- Проведено выступление на научном семинаре отдела математики и информатики Самарского государственного педагогического университета (руководитель семинара член-корреспондент РАН Петр Иванович Сидоров).

Таким образом, по результатам поиска в сети Интернет и тематических научных базах, а также обсуждений с указанными выше специалистами следует, что, по-видимому, представленный в моей выпускной квалификационной работе указанный выше математический материал действительно является новым.

Подтверждаю, что являюсь автором предоставляемой на Смотр работы и прошу принять её для участия в Смотре. Принимаю на себя обязательство соблюдать правила Смотра. Также (в соответствии с Положением о Смотре) принимаю на себя обязательство оценить 5 работ участников Смотра, выданных мне Оргкомитетом в результате жеребьёвки и сверх того оценить 2-5 работ других участников Смотра на мой выбор. Я понимаю правила оценки работ, приведённые в Положении о Смотре.

Защита работы состоится 30.05.2021. На Смотр представлен проект текста работы.

*Подпись*

Иванов Иван Иванович  
15 мая 2021 г. Пермь, Россия



**СМОТР ДИПЛОМНЫХ  
РАБОТ МАТЕМАТИКОВ  
РОССИИ 2024**



**ГЛАВНОЕ ТРЕБОВАНИЕ  
РАБОТА ДОЛЖНА СОДЕРЖАТЬ  
НОВЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ  
И ОБСНОВАНИЕ ЕГО НОВИЗНЫ**

**СБОР ЗАЯВОК  
ДО 10 ИЮНЯ**