Энергетическая функция для диффеоморфизмов с растягивающимися аттракторами и сжимающимися репеллерами

Кольчурина Ольга Александровна (НИУ ВШЭ Нижний Новгород)

"Фундаментальная теорема динамических систем" Ч. Конли гласит, что глобальная функция Ляпунова существует для любой динамической системы, заданной на компактном многообразии. Несмотря на строгое убывание функции Ляпунова ее критические точки могут находится не только в цепно рекуррентном множестве. Поэтому рассматриваются *энергетические функции* — функции Ляпунова, у которых множество критических точек совпадает с цепно рекуррентным множеством.

Одним из первых вопросом существования энергетических функций занялся С. Смейл. Он доказал существование энергетической функции Морса у градиентно-подобных потоков. Позже его результаты были расширины другими учеными.

В отличие от потоков, каскады не всегда обладают энергетическими функциями даже в топологическом смысле. Контрпримеры были найдены как среди регулярных диффеоморфизмов, так и среди диффеоморфизмов с хаотической динамикой. Энергетические функции для каскадов с регулярной динамикой изучали В. З. Гринес, Ф. Лауденбах, О. В. Починка, Т. М. Митрякова, А. Е. Шишенкова и другие. Изучаются энергетические функции и для каскадов с хаотической динамикой. В работе [1] было доказано существование энергетической функции для Ω-устойчивых диффеоморфизмов, заданных на замкнутых ориентируемых 3-многообразиях, с растягивающимся аттрактором и сжимающимся репеллером размерности 1.

Обозначим через G_Ω класс Ω-устойчивых диффеоморфизмов, заданных на гладких замкнутых ориентируемых многообразиях размерности $n \geq 3$, все нетривиальные базисные множества которых являются либо растягивающимися аттракторами, либо сжимающимися репеллерами коразмерности 1.

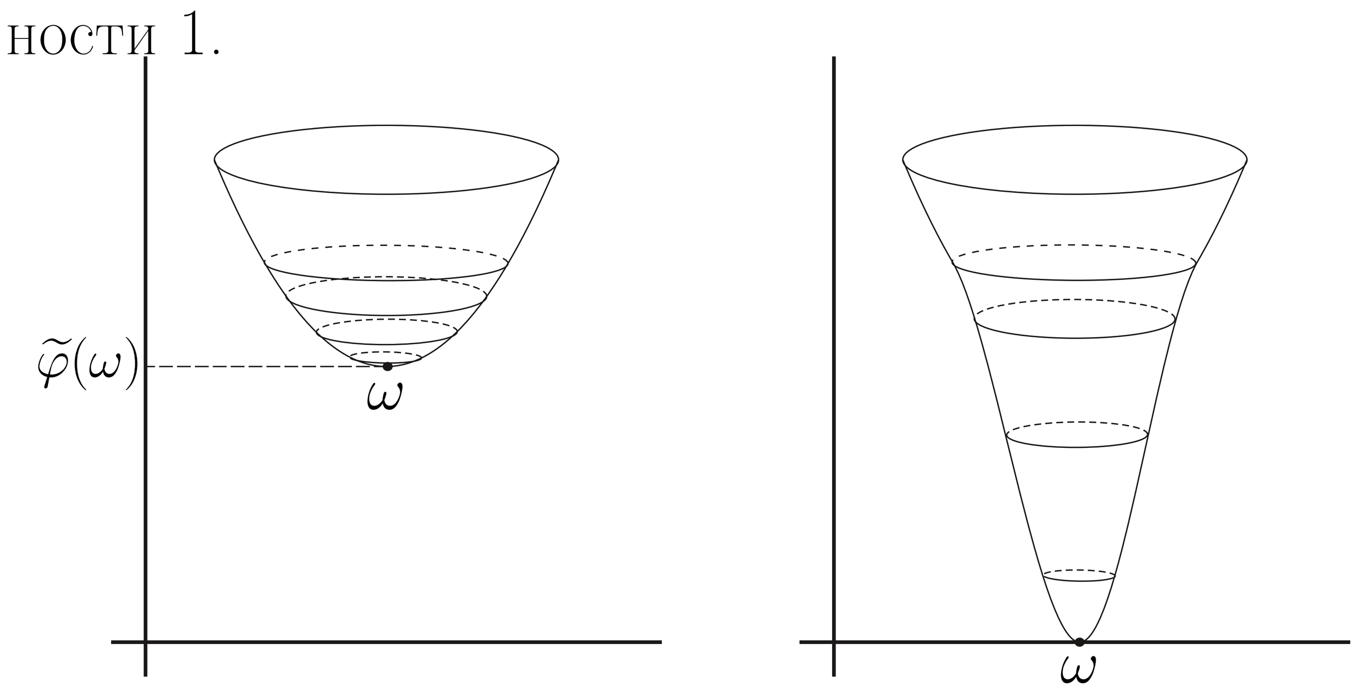

Рис. 1 Пример изменения линий уровня функции $\widetilde{\varphi}$ под действием δ_{A_i}

Теорема 1. *Для диффеоморфизма f из класса G_Ω существует гомеоморфизм $\widetilde{f} : \widetilde{M}^n \to \widetilde{M}^n$ такой, что $f\mid_{M^n \setminus (\mathcal{A} \cup \mathcal{R})}$ топологически сопряжен с $\widetilde{f}|_{\widetilde{M}^n \setminus (\widetilde{\mathcal{A}} \cup \widetilde{\mathcal{R}})}$, где $\widetilde{\mathcal{A}}$ и $\widetilde{\mathcal{R}}$ являются подмножествами множеств всех стоков и источников $\widetilde{f}$ соответственно. Гомеоморфизм $\widetilde{f}$ назовем "регулярным спутником".*

Гладкий аналог этой теоремы доказан в статье [2] в случае, когда $n = 3$ и все нетривиальные базисные множества являются аттракторами.

Лемма 1. *Если для регулярной системы $\widetilde{f} : \widetilde{M}^n \to \widetilde{M}^n$ существует энергетическая функция $\widetilde{\varphi} : \widetilde{M}^n \to \mathbb{R}$, то существует и такая энергетическая функция $\widetilde{\varphi}_* : \widetilde{M}^n \to [0,1]$:*

$$\widetilde{\varphi}_*(x) = \begin{cases} 1, & x \in \widetilde{\mathcal{R}}, \\ 0, & x \in \widetilde{\mathcal{A}}. \end{cases}$$

Функцию $\widetilde{\varphi}_*(x)$ определим с помощью функции линейных функций δ_{A_i} и δ_{R_i}. Действие $\widetilde{\varphi}_*$ изображено на Рис. 2.

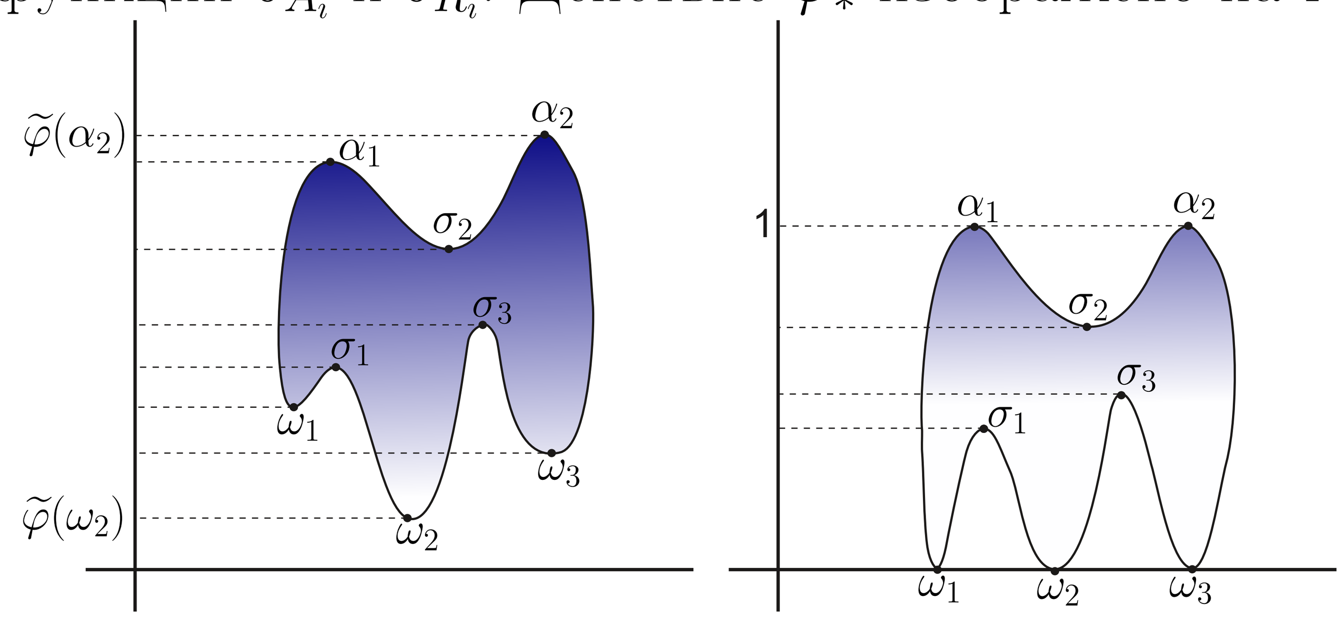

Рис. 2 Пример изменения энергетической функции $\widetilde{\varphi}$.

Теорема 2. *Диффеоморфизм f из класса G_Ω обладает энергетической функцией тогда и только тогда, когда его "регулярный спутник" обладает энергетической функцией.*

Для начала докажем достаточность. Из теоремы 1 следует, что существует естественная проекция q сопрягающая $f\mid_{M^n \setminus (\mathcal{A} \cup \mathcal{R})}$ с $\widetilde{f}\mid_{\widetilde{M}^n \setminus (\widetilde{\mathcal{A}} \cup \widetilde{\mathcal{R}})}$. Определим искомую энергетическую функцию $\varphi : M^n \to \mathbb{R}$ следующим образом:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & x \in \mathcal{A} \\ 1 & x \in \mathcal{R} \\ \widetilde{\varphi}_* \circ q & x \in M^n \setminus (\mathcal{A} \cup \mathcal{R}) \end{cases}$$

Теперь докажем необходимость.

Пусть $\varphi : M^n \to \mathbb{R}$ — энергетическая функция для f. Пусть функция $\widetilde{\varphi}(x) = \varphi \circ q^{-1}(x)$, где $x \in \widetilde{M}^n \setminus (\widetilde{\mathcal{A}} \cup \widetilde{\mathcal{R}})$. Таким образом функция $\widetilde{\varphi}$ не определена на только множестве $\widetilde{\mathcal{A}} \cup \widetilde{\mathcal{R}}$, состоящим из конечного числа точек. Продолжим по непрерывности функцию $\widetilde{\varphi}(x)$. Аналогично прошлому случаю $\widetilde{\varphi}$ является энергетической.

Список литературы

[1] Barinova M., Grines V., Pochinka O., Yu B. Existence of an energy function for three-dimensional chaotic "sink-source" cascades // Chaos. 2021. Vol. 31. No. 6. Article 063112.

[2] Barinova M. On isolated periodic points of diffeomorphisms with expanding attractors of codimension 1 / Cornell University. Series math "arxiv.org". 2024.