



НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ



IX осенняя олимпиада

начальных классов по математике

20 октября 2024 года.

Внимательно прочитайте условия задач.

Решать задачи можно в любом порядке.

Ответы нужно записать на отдельном бланке.

4

1. В коробочке лежат различные кости домино, всего 6 штук. Как они расположены? Кость домино состоит из двух квадратиков, на каждом из которых написаны числа от 0 до 6.

Решение.

Начнём с правого нижнего угла. Возможные варианты доминошек: 2-2 и 2-0. Но, в первом случае мы не сможем разделить так, чтобы все доминошки были разные. Второй вариант подходит.

0	4	0	0
1	1	0	0
2	3	2	2

Ответ:

2. На кружок по математике ходят десять школьников, мальчики и девочки. В кабинете, где они занимаются, стоит пять двухместных парт. Ровно половина мальчиков сидит за одной партой с девочками. Сколько мальчиков ходит на кружок?

Решение.

Так как школьников всего 10 и мест за партами тоже $2 \cdot 5 = 10$, то ни один человек не может сидеть один за целой партой. Тогда, если ровно половина мальчиков сидят за одной партой с девочками, то вторая половина мальчиков сидят друг с другом, т.е., образуют пары. Значит, общее количество мальчиков – чётное число (делится пополам без остатка), и половина мальчиков – тоже чётное число.

0 мальчиков не может быть, так как, по условию, есть и мальчики, и девочки.

10 мальчиков не может быть, так как тогда не будет девочек.

6 мальчиков и 2 мальчика не подходит, так как половина от этих чисел (3 и 1) – нечётные числа.

8 мальчиков не подходит, так как тогда 4 мальчика сидят с 4-мя девочками и ещё 4 мальчика сидят друг с другом. Это уже 12 человек, а по условию, их 10.

Остаётся вариант 4 мальчика, и он подходит: 2 мальчика сидят с 2-мя девочками (две парты), ещё 2 мальчика сидят друг с другом (одна парта), и оставшиеся 4 девочки сидят друг с другом (две парты).

Ответ: 4 мальчика.

3. В соревнованиях по бегу участвовали команда из трёх белочек и команда из двух зайчиков. Места в личном первенстве с 1 по 5 распределились так, что в одной команде оказалось больше произведение мест, а в другой – сумма. Какие места были у зайчиков?

Решение.

Ни у одной команды не могут быть вместе 5 и 4 места, и 5 и 3 места. Так как в этом случае и сумма, и произведение будут больше:

$$5 + 4 > 1 + 2 + 3, \quad 5 * 4 > 1 * 2 * 3;$$

$$5 + 3 > 1 + 2 + 4, \quad 5 * 3 > 1 * 2 * 4.$$

А если добавить ещё одно место, то тем более сумма и произведение будут больше. Значит, 5 и 4 места принадлежат разным командам, и 5 и 3 – тоже разным. То есть, 5 место – в одной команде, а 3 и 4 – в другой.

Если 3 и 4 места принадлежат команде зайцев, то у белок – 1, 2 и 5.

$$3 + 4 < 1 + 2 + 5, \quad 3 * 4 > 1 * 2 * 5. \text{ Такой вариант подходит.}$$

Если 3 и 4 места принадлежат команде белок, то, если даже мы добавим наименьшее (по номиналу) 1 место, получим, что и сумма, и произведение окажутся больше:

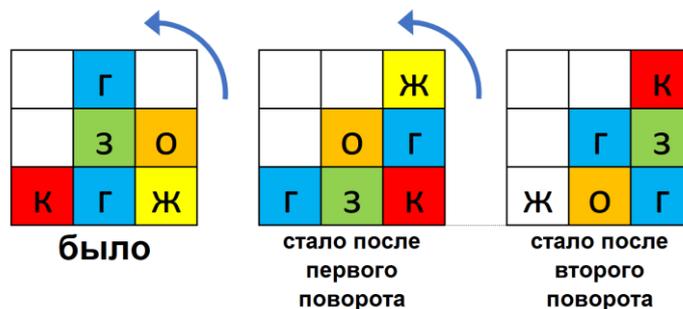
$$3 + 4 + 1 > 2 + 5, \quad 3 * 4 * 1 > 2 * 5.$$

Тем более они окажутся больше, если добавить 2 или 5 место. Значит, 3 и 4 места не могут принадлежать команде белок.

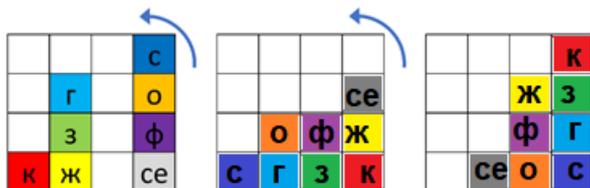
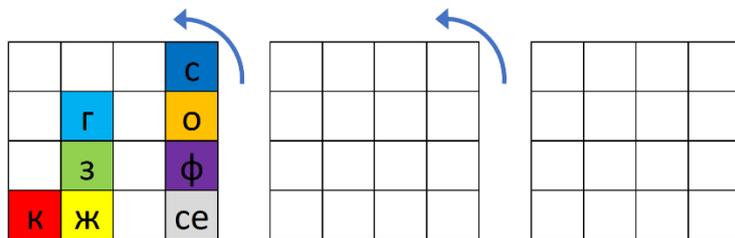
Получили единственный подходящий вариант, в котором у зайцев 3 и 4 места.

Ответ: 3 и 4 места.

4. У Енота-строителя была маленькая прозрачная коробочка с кубиками. Он поставил ее вертикально и играл с ней, поворачивая её, чтобы кубики внутри пересыпались. Вот, что получалось (Енот повернул коробку налево, потом еще раз налево):



Как будут расположены кубики, если Енот возьмет большую прозрачную коробку с кубиками и повернет ее так, как показано на рисунке (сначала налево, потом еще раз налево)?



Ответ:

5. В волшебном лесу живут только ежи и белки. Все звери в этом лесу делятся на рыцарей, которые говорят только правду, и лжецов, которые всегда лгут. Пятеро зверей из этого леса пошли за грибами. Когда они вернулись, оказалось, что каждая белка собрала по 3 белых гриба, а каждый еж по 4. Но зато каждая белка собрала по 7 подберезовиков, а каждый еж по 5.

Один из зверей сказал: «В сумме у нас 18 белых грибов».

Второй ответил: «А вот подберезовиков у нас в сумме 31».

Третий заявил: «Вы оба лжецы. Вообще-то подберезовиков у нас 32. А белых точно меньше 18».

Сколько ежей и сколько белок было среди этих пятерых зверей?

Решение.

1 способ.

Третий точно лжец, так как не может быть чётного количества подберёзовиков. Действительно, если зверей всего 5, и каждая белка собрала по 7 подберёзовиков, а каждый ёж – по 5, то общее количество собранных подберёзовиков – это сумма пяти нечётных чисел (7 или 5). Так как нечётных чисел нечётное количество, то сумма будет нечётной.

Тогда все высказывания третьего – ложь. Значит, первый и второй – не оба лжецы, подберёзовиков не 32, и белых грибов не меньше 18.

Предположим, что второй рыцарь. Тогда звери собрали 31 подберёзовик. Если бы все пятеро были ежами, то они собрали бы $5 \cdot 5 = 25$ подберёзовиков. А у нас 31. Не хватает $31 - 25 = 6$ подберёзовиков. Если заменить одного ежа на белку, добавится $7 - 5 = 2$ подберёзовика. Чтобы добавилось 6 подберёзовиков, надо сделать $6 : 2 = 3$ такие замены. Получим 3 белки и 2 ежа. Но белых грибов они соберут $3 \cdot 3 + 4 \cdot 2 = 17$. А мы выяснили, что белых грибов должно быть не меньше 18. Получили противоречие. Значит, наше предположение не верно, и второй – не рыцарь, а лжец. Так как первый и второй не могут быть оба лжецами, то первый – точно рыцарь, и белых грибов – 18 штук.

Если бы все пятеро были белками, то они собрали бы $3 \cdot 5 = 15$ белых грибов. А у нас 18. Не хватает $18 - 15 = 3$ -ёх белых грибов. Если заменить одну белку на ежа, добавится $4 - 3 = 1$ белый гриб. Чтобы добавилось 3 белых гриба, надо сделать $3 : 1 = 3$ такие замены. Получим 3 ежа и 2 белки.

Проверяем: 3 ежа и 2 белки соберут $4 \cdot 3 + 3 \cdot 2 = 18$ белых грибов и $5 \cdot 3 + 7 \cdot 2 = 29$ подберёзовиков. Это вариант соответствует условиям задачи.

2 способ.

Сделаем полный перебор возможных вариантов.

1) Предположим, что было 5 белок и 0 ежей. Тогда они собрали $3 \cdot 5 + 4 \cdot 0 = 15$ белых грибов и $7 \cdot 5 + 5 \cdot 0 = 35$ подберёзовиков. Видим, что первый и второй – лжецы. Третий должен быть рыцарем, так как фраза «Вы оба лжецы» - это правда. И все остальные высказывания рыцаря должны быть правдой. Но он солгал про подберёзовики. Получили противоречие.

2) Предположим, что было 4 белки и 1 ёж. Тогда они собрали $3 \cdot 4 + 4 \cdot 1 = 16$ белых грибов и $7 \cdot 4 + 5 \cdot 1 = 33$ подберёзовика. Аналогично 1 варианту получим противоречие.

3) Предположим, что было 3 белки и 2 ежа. Тогда они собрали $3*3 + 4*2 = 17$ белых грибов и $7*3 + 5*2 = 31$ подберёзовик. Тогда первый – лжец, второй рыцарь. Третий должен быть лжецом, так как фраза «Вы оба лжецы» - это ложь. И все остальные высказывания лжеца должны быть ложью. Но он сказал правду про белые грибы. Получили противоречие.

4) Предположим, что было 2 белки и 3 ежа. Тогда они собрали $3*2 + 4*3 = 18$ белых грибов и $7*2 + 5*3 = 29$ подберёзовиков. В этом случае первый – рыцарь, второй – лжец, третий – лжец (все три его высказывания – ложь: первый и второй не оба лжецы, подберёзовиков не 32, белых не меньше 18). Этот вариант подходит. Но нужно проверить оставшиеся варианты.

5) Предположим, что была 1 белка и 4 ежа. Тогда они собрали $3*1 + 4*4 = 19$ белых грибов и $7*1 + 5*4 = 27$ подберёзовиков. Видим, что первый и второй – лжецы. Третий должен быть рыцарем, так как фраза «Вы оба лжецы» - это правда. И все остальные высказывания рыцаря должны быть правдой. Но он солгал и про подберёзовики, и про белые грибы. Получили противоречие.

6) Предположим, что было 0 белок и 5 ежей. Тогда они собрали $3*0 + 4*5 = 20$ белых грибов и $7*0 + 5*5 = 25$ подберёзовиков. Аналогично 5 варианту получим противоречие.

Таким образом, единственный подходящий вариант – номер 4.

Ответ: 3 ежа и 2 белки.

6. От Енота до Зайца 9 километров по прямой дороге. Енот сел на велосипед и поехал к Зайцу. Однако по дороге он сначала вспомнил, что забыл дома очки, и вернулся за ними, потом вспомнил, что забыл дома телефон, и вернулся за ним, потом ещё раз пришлось возвращаться за подарком. В результате Енот к тому моменту, как добрался до Зайца, провёл на велосипеде 57 минут. Все эти 57 минут и в одном направлении, и в другом Енот ехал со скоростью 20 км/ч. Сколько километров в общей сложности проехал Енот по направлению к Зайцу?

Решение.

Так как Енот ехал на велосипеде 57 минут со скоростью 20 км/ч, то всего за это время он проехал $20 \text{ км/ч} * 57 \text{ мин} = 20000 \text{ м/ч} * 57 \text{ мин} = 20000/60 \text{ м/мин} * 57 \text{ мин} = 1000/3 * 57 \text{ м} = 19000 \text{ м} = 19 \text{ км}$.

От Енота до Зайца всего 9 км. Значит, Енот проехал $19-9=10$ «лишних» км.

Каждый раз, когда Енот что-то забывал, он сначала проезжал какое-то расстояние по направлению к Зайцу, а потом возвращался домой, проезжая такое же расстояние. То есть, из 10 км половину (5 км) Енот проехал по направлению к Зайцу и половину – по направлению к дому. И в самом конце Енот проехал все 9 км от своего дома до Зайца.

Таким образом, в общей сложности Енот проехал $5+9=14$ км по направлению к Зайцу.

Ответ: 14 км.

7. Енот расставлял в шкафу свои любимые книги. На самую верхнюю полку он поставил одну книгу, на вторую сверху – две, на следующую – три и так далее (на каждую следующую полку он ставил на 1 книгу больше), пока не заполнил все полки. Наблюдательный Медвежонок заметил, что Енот мог бы расставлять книги по 6 на каждую полку, и все полки были бы заполнены. Сколько всего полок в шкафу у Енота?

Решение.

1 способ.

Если считать сумму всех книг так, как их ставил Енот, то будет $1+2+3+4+\dots$

А если считать, как предложил Енот, то будет $6+6+6+\dots$

Будем сравнивать сумму Енота и сумму Медвежонка на каждом шаге (после добавления очередной полки) до тех пор, пока эти суммы не совпадут. Это произойдёт после добавления 11-ой полки: $6 \cdot 11 = 66$, $1+2+\dots+11 = 66$. Больше совпадений не будет, т.к. сумма у Енота будет увеличиваться быстрее, чем у Медвежонка, ведь Медвежонок каждый раз прибавляет только по 6, а Енот увеличивает количество на каждом шаге. Например, на 12-ти полках у Медвежонка будет $66+6=72$ книги, а у Енота уже $66+12 = 78$ книг.

Таким образом, у Енота в шкафу 11 полок.

2 способ.

Если у Енота было N полок, то по подсчётам Медвежонка было $6 \cdot N$ книг, а по подсчётам Енота – $1+2+3+\dots+(N-1)+N$ книг. По методу Гаусса сумма Енота равна $(1+N) \cdot N/2$.

Так как эти суммы равны, то $6 \cdot N = (1+N) \cdot N/2$. Откуда $1+N = 12$, и $N = 11$.

Ответ: 11 полок.

8. Запасливый Енот закатал банки с вареньем и подписал на них массы – 1, 2, 3, 4, 5 и 6 кг. Затем он испугался, что перепутал надписи на каких-то двух банках. У Енота есть чашечные весы без гирь, на которых он может взвешивать банки. Помогите ему за два взвешивания определить, ошибся ли он в надписях или нет. Находить неправильно подписанные банки (если они есть) не нужно.

Решение.

Для 1 взвешивания надо взять такие пары банок, чтобы сумма весов на левой чаше была равна сумме весов на правой чаше.

Например, 1 взвешивание: на одну чашу весов ставим банки с надписями 2 и 3, а на другую чашу – с надписями 1 и 4.

Возможны такие результаты этого взвешивания:

1) Весы не находятся в равновесии, т.е., 5 не равно 5. Значит, точно есть перепутанные надписи.

2) Весы находятся в равновесии. Тогда, если есть перепутанные надписи, то где-то в имеющихся парах: 2 с 3 либо 1 с 4, либо 5 с 6.

Для второго взвешивания возьмём банки из разных пар, но, чтобы опять сумма весов на левой чаше была равна сумме весов на правой чаше.

Например, 2 взвешивание: на одну чашу весов ставим банки с надписями 2 и 4, а на другую чашу – с надписями 1 и 5. И уже точно знаем, что в этих парах надписи не могут быть перепутаны, как и в оставшейся паре 3 с 6, так как тогда бы не было равенства в первом взвешивании.

Возможны такие результаты этого взвешивания:

1) Весы не находятся в равновесии, т.е., б не равно б. Значит, точно есть перепутанные надписи.

2) Весы находятся в равновесии. Тогда нет перепутанных надписей.

Таким образом, за 2 взвешивания Енот сможет определить, ошибся он в надписях или нет.

Ответ: см. решение.