VII Нижегородская открытая ОСЕННЯЯ олимпиада
по математике для 5-7-х классов

Комментарий: *Обращаем внимание участников олимпиады, что большинство по-настоящему олимпиадных задач имеют достаточно короткие и красивые решения, опирающиеся на концепцию Олимпиадной Математики – ключевую идею решения всех задач «В любом процессе ищи соответствующий инвариант!». Инвариант – неизменное, постоянное свойство. Советуем проанализировать решение каждой задачи с точки зрения опоры на инварианты соответствующего процесса. И надеемся, что на будущих своих олимпиадах вы будете опираться на данную концепцию, получая короткие и красивые решения.*

7 класс

1. В левой части записи *ОСЕНЬ*=2024 поставьте один или два знака умножения, а вместо разных букв – разные цифры, чтобы получилось верное равенство.

Решение: Например, $1\cdot 8\cdot 253=2024$ и $1\cdot 4\cdot 506=2024$.

Комментарий: *Задача №1 и оказалась связана с цифрой 1:☺.*

2. Можно ли квадрат разрезать на 49 прямоугольников 12 прямыми, из которых 6 параллельны одной стороне квадрата, а 6 – другой, так, чтобы среди этих частей оказалось ровно 6 квадратов, причём все различного размера?

Ответ: нет. ***Решение:*** Среди этих шести квадратов нет двух квадратов одинакового размера, значит, они все лежат в разных столбцах и в разных строках полученного разрезания, на которые разбили прямыми исходный квадрат. Но тогда прямоугольник, лежащий на пересечении седьмой строки и седьмого столбца (не содержащих эти шесть квадратов) – тоже квадрат, длина стороны которого равна длине исходного квадрата за вычетом суммы длин шести получившихся квадратов. Получаем противоречие, значит, не могло получиться ровно 6 различных квадратов.

3. Набор последовательных натуральных чисел (не менее двух чисел) назовём *классным*, если сумма чисел набора делится на наибольшее из чисел набора. Незнайка утверждает, что существует бесконечно много классных наборов. Прав ли он?

Ответ: да, Незнайка прав. ***Решение:*** Пусть это $2n+1$ первых натуральных чисел (n – любое натуральное число), тогда их сумма равна $(2n+2)\cdot(2n+1)/2=(n+1)(2n+1)$ и делится на $2n+1$ – наибольшее число набора. Значит, для любого нечётного k набор из первых k натуральных чисел делится на наибольшее число (k), а таких наборов бесконечно много.

4. Про действительные числа a и b известно, что $[a]=20$, $[b]=24$. Какое наибольшее значение может принимать $[ab]$? ($[x]$ – целая часть x, т.е. наибольшее целое число, не превосходящее x)

Ответ: 524. ***Решение:*** $[a]=20 \Leftrightarrow 20\le a<21$, $[b]=24 \Leftrightarrow 24\le b<25$. Тогда $20\cdot 24\le a\cdot b<21\cdot 25=525$, значит, самое большое целое значение у произведения ab могло равняться 524, например, когда $a=20{,}99$, $b=524:20{,}99$, что лежит в пределах от 24 до 25.

5. В 7-м классе учатся 15 мальчиков и 14 девочек. Однажды они решили сыграть в следующую игру. По кругу стоят 29 стульев, мальчики и девочки садятся на стулья по очереди (начинают мальчики), выбирая себе некоторое свободное место. Девочки выиграют, если по окончании рассадки всех детей найдутся хотя бы 3 подряд сидящих мальчика, иначе девочки проигрывают. Могут ли девочки договориться между собой, чтобы выиграть?

Ответ: да. ***Решение:*** Стул первого севшего мальчика девочки пронумеруют числом 3, далее по часовой стрелке пронумеруют стулья последовательно 4, 5, 6, …, 29, 1, 2. После этого девочка сядет на стул номер 1, а стулья под номерами 2, 4, 5 девочки трогать не будут до тех пор, пока на одно из этих мест не сядет мальчик. Это произойдёт, т.к. у мальчиков ходов на 1 больше и даже если будут заняты все остальные стулья, то для стульев 2, 4, 5 останутся ходы «мальчик-девочка-мальчик». Если мальчик сядет на стул 2, то девочки тут же займут стул 5 и оставят стул для 4 для мальчика, который он займёт либо раньше, либо последним ходом, который остаётся за мальчиками. Аналогично при посадке мальчика на стул 4, девочка сядет на стул 5 и они оставят неприкасаемым для себя стул 2, а при посадке мальчика на стул 5, девочка сядет на стул 2 и они оставят неприкасаемым для себя стул 4. Таким образом, девочки добьются того, что мальчики займут либо стулья 2, 3 и 4, либо стулья 3, 4 и 5, т.е. девочки выиграют.

6 класс

1. Найдите наименьшее шестизначное число из различных цифр, делящееся на 6.

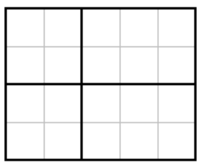
Ответ: $102348=6\cdot 17058$. ***Решение:*** Наименьшее число требуемого вида 102345 – нечётное, делящееся на 3, а следующее по величине кратное 3 число (102348) уже нам подходит.

2. Какую несократимую дробь надо прибавить к сумме 9 дробей $\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{1024}$, чтобы получить 1?

Ответ: $\frac{513}{1024}$. ***Решение:*** Если к этой сумме добавить $\frac{1}{1024}$, то в сумме с последней дробью получим $\frac{1}{512}$, что в сумме с предыдущей дробью даст $\frac{1}{256}$ и т.д., что в конце даст сумму $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$. Значит, нужная несократимая дробь равна $\frac{1}{2}+\frac{1}{1024}=\frac{512}{1024}+\frac{1}{1024}=\frac{513}{1024}$.

Комментарий: *Приведённое решение является классической идеей работы со степенями двойки, но, конечно же, все решившие задачу школьники приводили к общему знаменателю сумму данных 9 дробей. А если бы дали, например, 100 степеней двойки? Также оказалось, что у многих участников олимпиады проблемы со счётом.*

3. Клетчатый прямоугольник двумя отрезками, параллельными сторонам, режут на 4 клетчатых прямоугольника, при этом по линиям сетки можно выделить ровно 9 прямоугольников (см. пример разрезания на рис.). Докажите, что разрезание всегда можно провести так, чтобы ровно 4 из 9 прямоугольников имели нечётную площадь.



Решение: Если сторона чётна ($2n$), то разделим её на две нечётных (например, 1 и $2n-1$), если же сторона нечётна ($2k+1$), то разделим её на нечётную (1) и чётную ($2k$). Значит, с каждой стороны мы будем иметь по 2 нечётных отрезка, которые в произведениях друг с другом будут давать 4 прямоугольника нечётной площади, что и требовалось доказать.

Комментарий 1: *Обращаем внимание решивших задачу школьников, которые массово разбирали три случая возможных по чётности сторон прямоугольников и тративших много времени на это. Настоящая олимпиадная задача решается коротко и красиво! В данной задаче важно было только наличие с каждой стороны ровно по 2 нечётных отрезка. Инвариант процесса!*

Комментарий 2: *К сожалению, многие школьники по неопытности не разобрались с условием задачи и резали приведённый в качестве примера прямоугольник 4×5.*

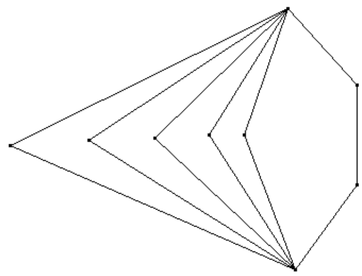
4. Саша в каждую клетку шахматной доски 8×8 поставил красную, чёрную или белую шашку. В каждой строчке красных шашек не меньше, чем чёрных, и не меньше, чем белых, а в каждом столбце чёрных шашек не меньше, чем красных, и не меньше, чем белых. Какое наибольшее количество белых шашек мог разместить на доске Саша?

Ответ: 8, см. пример на рисунке. ***Решение:*** Если посчитать количества шашек по строкам, то красных шашек должно быть не меньше, чем чёрных, а если посчитать по столбцам, то чёрных шашек будет не меньше, чем красных, значит, чёрных и красных шашек будет поровну и в сумме, и в каждой строке, и в каждом столбце. Значит, из 8 шашек каждого столбца чётное количество шашек будут чёрными и красными (их поровну), значит, белых в каждом столбце будет также чётное количество, но не большее 2, иначе, если белых шашек будет хотя бы 4, то чёрных шашек будет не больше (8–4)/2=2, – противоречие с условием приоритета чёрных. Значит, в каждом из 8 столбцов не более 2 белых шашек, а всего белых шашек будет не более 2·8=16. Пример на 16 белых шашек см. на рис.

к	к	к	ч	ч	ч	б	б
б	к	к	к	ч	ч	ч	б
б	б	к	к	к	ч	ч	ч
ч	б	б	к	к	к	ч	ч
ч	ч	б	б	к	к	к	ч
ч	ч	ч	б	б	к	к	к
к	ч	ч	ч	б	б	к	к
к	к	ч	ч	ч	б	б	к

Комментарий: *Практически все понявшие правильный ответ школьники, за исключением пары человек, тратили много времени на построение примера, который был хаотичным и, как следствие, у некоторых участников олимпиады оказался неверным. Искренне жаль, что даже школьникам, пытающимся учиться в различных коммерческих структурах, якобы готовящих к олимпиадам, до сих пор не объяснили об инвариантном отношении к процессам, а построение примера – это процесс. В нашей задаче всего-то и требовалось привести банальную диагональную раскраску. Кроме того, только несколько участников олимпиады (меньше 10) понимали, что в этой задаче надо ещё доказать оценку.*

5. Город Островной располагается на 9 островах, между некоторыми из которых есть мосты, при этом никакой остров не соединен мостами со всеми другими островами. С любого острова на любой другой остров можно пройти, заходя по мостам не более чем ещё на один остров. Могло ли в этом городе быть ровно 13 мостов?



Ответ: да, может, см. пример, где вершины графа – острова, рёбра – мосты.

5 класс

1. Найдите наименьшее пятизначное число из различных цифр, делящееся на 5.

Ответ: 10235=5·2047. ***Решение:*** Наименьшее число требуемого вида 10234 не делится на 5, а следующее по величине 10235 уже нам подходит.

2. Карлсон пришёл в гости к Малышу и они съёли все имеющиеся у Малыша ватрушки, поделив их поровну. Потом Карлсон присоединился к фрекен Бок, поделив с ней также все её ватрушки поровну. В итоге оказалось, что Карлсон съел ватрушек в пять раз больше, чем Малыш. Во сколько раз изначально у фрекен Бок ватрушек было больше, чем у Малыша?

Ответ: в 4 раза. ***Решение 1***: Карлсон съел в 5 раз больше Малыша, разделив его ватрушки поровну, значит, у фрекен Бок Карлсон взял в 4 раза больше того, что он съел у Малыша, т.е. половина ватрушек фрекен Бок в 4 раза больше половины ватрушек Малыша. Значит, количество ватрушек у фрекен Бок было в 4 раза больше количества ватрушек у Малыша.

***<u>Решение 2</u>*:** Пусть в Малыша было $2m$ ватрушек, а у фрекен Бок – $2b$, тогда Карлсон съел $m+b=5m$, откуда $b=4m \Leftrightarrow 2b=8m=4\cdot 2m$, т.е. у фрекен Бок ватрушек в 4 раза больше, чем у Малыша.

<u>Комментарий</u>: *Типичной ошибкой школьников было рассуждение с конкретным количеством ватрушек вместо рассуждения в общем виде или с условной «единицей» количества ватрушек, которая и заменяет нам неизвестное их число.*

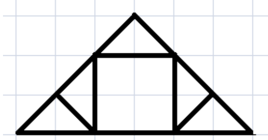
3. В клетках таблицы 3×3 расставлены натуральные числа, необязательно разные. Оказалось, что все шесть сумм чисел в строках и столбцах этой таблицы различны. Каково наименьшее возможное значение суммы чисел во всей таблице?

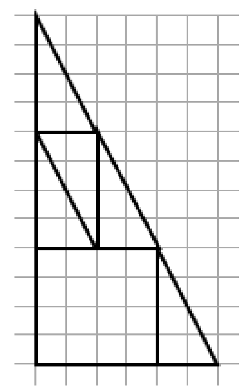
<u>Ответ</u>: 17, см. пример таблицы справа. ***<u>Доказательство оценки</u>:*** Минимальное значение суммы трёх натуральных чисел в одном ряду равно 3=1+1+1, значит, минимальная сумма 6 различных сумм равна 3+4+5+6+7+8=33, но она должна быть чётной, т.к. состоит из двух сумм всех чисел таблицы, т.е. является удвоенным натуральным числом. Тогда сумма 6 сумм будет не меньше 34, а сумма всех чисел таблицы будет не меньше 34:2=17.

1	1	2	4
1	2	3	6
1	2	4	7
3	5	9	

4. Разрежьте какой-нибудь треугольник на 5 одинаковых треугольников и 1 квадрат.

<u>Комментарий</u>: *«Разрежьте» – значит, полностью, без остатков. Не путайте с «Вырежьте»!*





<u>Решение</u>: см. рисунки справа, где алгоритм разрезания проходит для прямоугольных треугольников с отношением катетов 1:1 и 2:1.

5. Толя решил развлечься и начал перекрашивать клетки шахматной доски 8×8 по следующему правилу: берёт любой прямоугольник 1×2 и закрашивает его клетки в один цвет (чёрный или белый), если они были разноцветные, или раскрашивает их в разные цвета, если они были одноцветными. За какое наименьшее количество таких операций Толя сможет получить новую шахматную доску, но уже с «противоположной» чёрно-белой раскраской?

<u>Ответ</u>: 64. ***<u>Решение</u>:*** Данная операция на самом деле является операцией перекраски ровно одной клетки, значит, надо не менее 64 операций, что и можно сделать, перекрашивая каждый раз одну новую клетку, беря её в пару вместе с какой-то соседней клеткой.

<u>Комментарий</u>: *Массовой ошибкой было только приведение примера без доказательства оценки. При этом мы видим, что у задачи решение в одну строчку, в которой и доказана оценка, и одновременно приведён пример. Процессы – инварианты!*