Нижегородская (XXI Открытая) городская математическая олимпиада школьников
НИУ ВШЭ – Нижний Новгород, 16 ноября 2024 года

7 класс

1. Ваня родился 16 ноября 2024 года и, когда вырос, придумал записать дату своего рождения восьмизначным числом 20241116 – номера года (4 цифры), месяца и дня (по 2 цифры, как двузначные коды, возможно начинающиеся с 0). Каким восьмизначным числом тогда он запишет дату рождения его брата Саши, который младше Вани ровно на 2 года, 2 месяца и 2 дня?
2. Маша написала ряд букв с неравенством «НИЖНИЙ < НОВГОРОД» и предложила Коле добавить несколько знаков «<» между буквами, заменив одинаковые буквы одинаковыми цифрами, а разные буквы – разными цифрами, чтобы получилась возрастающая последовательность натуральных чисел. Какое наибольшее количество чисел может получить Коля? Приведите ответ и пример (без обоснования оценки количества чисел).
3. Варя на день рождения младшего брата Васи испекла пиццу, а только что проснувшийся второклассник Вася, посмотрев на пиццу, сказал, что может её двумя прямолинейными разрезами поделить на 5 частей. Мог ли Вася быть прав?
4. На хоккейном матче между ХК "Ледяные короли" и ХК "Витязь" юный шахматист Вова задумался: "А можно ли на шахматную доску 8×8 поставить команду из 6 королей, команду из 6 витязей (офицеров-слонов) и шайбу (бить не умеет) так, чтобы ни одна фигура не била никакую другую фигуру?" Помогите Вове ответить на его вопрос.
5. c – наибольшее из положительных чисел a, b и c. Докажите, что $a(c-b) + b(c-a) \le c^2$.
6. Выпуклый равносторонний n-угольник назовём *двузначным*, если его углы принимают только 2 значения, отличающиеся в 2 раза (α и 2α), и причём этих углов равное количество. При каком наибольшем n существует *двузначный* n-угольник?

Нижегородская (XXI Открытая) городская математическая олимпиада школьников
НИУ ВШЭ – Нижний Новгород, 16 ноября 2024 года

7 класс

1. Ваня родился 16 ноября 2024 года и, когда вырос, придумал записать дату своего рождения восьмизначным числом 20241116 – номера года (4 цифры), месяца и дня (по 2 цифры, как двузначные коды, возможно начинающиеся с 0). Каким восьмизначным числом тогда он запишет дату рождения его брата Саши, который младше Вани ровно на 2 года, 2 месяца и 2 дня?
2. Маша написала ряд букв с неравенством «НИЖНИЙ < НОВГОРОД» и предложила Коле добавить несколько знаков «<» между буквами, заменив одинаковые буквы одинаковыми цифрами, а разные буквы – разными цифрами, чтобы получилась возрастающая последовательность натуральных чисел. Какое наибольшее количество чисел может получить Коля? Приведите ответ и пример (без обоснования оценки количества чисел).
3. Варя на день рождения младшего брата Васи испекла пиццу, а только что проснувшийся второклассник Вася, посмотрев на пиццу, сказал, что может её двумя прямолинейными разрезами поделить на 5 частей. Мог ли Вася быть прав?
4. На хоккейном матче между ХК "Ледяные короли" и ХК "Витязь" юный шахматист Вова задумался: "А можно ли на шахматную доску 8×8 поставить команду из 6 королей, команду из 6 витязей (офицеров-слонов) и шайбу (бить не умеет) так, чтобы ни одна фигура не била никакую другую фигуру?" Помогите Вове ответить на его вопрос.
5. c – наибольшее из положительных чисел a, b и c. Докажите, что $a(c-b) + b(c-a) \le c^2$.
6. Выпуклый равносторонний n-угольник назовём *двузначным*, если его углы принимают только 2 значения, отличающиеся в 2 раза (α и 2α), и причём этих углов равное количество. При каком наибольшем n существует *двузначный* n-угольник?

Нижегородская (XXI Открытая) городская математическая олимпиада школьников
НИУ ВШЭ – Нижний Новгород, 16 ноября 2024 года

8 класс

1. Ребусы «*О·Д·И·Н*=1», «*Д·В·А*=2» (одинаковые буквы – одинаковые цифры, разные буквы – разные цифры) не имеют решений. А существует ли аналогичный ребус для какой-то цифры, имеющий решение?

2. O – центр квадрата $ABCD$. Верно ли, что для любой точки P внутри отрезка AO существует такая точка T, лежащая на стороне BC, что треугольник DPT будет прямоугольным равнобедренным?

3. c – наибольшее из положительных чисел a, b и c. Докажите, что

$$a(c-b)+b(c-a)\le c^2.$$

4. Вася закрашивает по одной в некотором порядке клетки изначально белого квадрата 8×8, вписывая в каждую новую закрашенную клетку число ранее закрашенных её соседних (по стороне) клеток. Какое наибольшее количество клеток с числом 4 могло у него оказаться по окончании закрашивания?

5. Коля написал N различных попарно взаимно простых натуральных чисел, не превосходящих 2025. При каком наименьшем N среди Колиных чисел гарантированно есть простое число?

6. На клетчатой бумаге со стороной клетки 1 построена окружность радиуса 2 с центром O в узле решётки. Проведите линейкой три отрезка AB, BC и CA так, чтобы получился описанный около этой окружности треугольник ABC.

Нижегородская (XXI Открытая) городская математическая олимпиада школьников
НИУ ВШЭ – Нижний Новгород, 16 ноября 2024 года

8 класс

1. Ребусы «*О·Д·И·Н*=1», «*Д·В·А*=2» (одинаковые буквы – одинаковые цифры, разные буквы – разные цифры) не имеют решений. А существует ли аналогичный ребус для какой-то цифры, имеющий решение?

2. O – центр квадрата $ABCD$. Верно ли, что для любой точки P внутри отрезка AO существует такая точка T, лежащая на стороне BC, что треугольник DPT будет прямоугольным равнобедренным?

3. c – наибольшее из положительных чисел a, b и c. Докажите, что

$$a(c-b)+b(c-a)\le c^2.$$

4. Вася закрашивает по одной в некотором порядке клетки изначально белого квадрата 8×8, вписывая в каждую новую закрашенную клетку число ранее закрашенных её соседних (по стороне) клеток. Какое наибольшее количество клеток с числом 4 могло у него оказаться по окончании закрашивания?

5. Коля написал N различных попарно взаимно простых натуральных чисел, не превосходящих 2025. При каком наименьшем N среди Колиных чисел гарантированно есть простое число?

6. На клетчатой бумаге со стороной клетки 1 построена окружность радиуса 2 с центром O в узле решётки. Проведите линейкой три отрезка AB, BC и CA так, чтобы получился описанный около этой окружности треугольник ABC.

Нижегородская (XXI Открытая) городская математическая олимпиада школьников
НИУ ВШЭ – Нижний Новгород, 16 ноября 2024 года

9 класс

1. Назовём число *нереальным*, если оно равно сумме $k\geq 2$ точных кубов, где k – сумма цифр числа. Например, 2025 – *нереальное* число, т.к. $2025=1^3+2^3+3^3+\ldots+9^3$ и сумма цифр числа 2025 равна 9, при этом $k=9$. Существует ли ещё хотя бы одно *нереальное* число?

2. Решите уравнение $|x+y| + |y+z| + |z+x| = |x+y+z|$.

3. Внутри правильного шестиугольника $ABCDEF$ взяты точки G и H так, что $ABGH$ – квадрат. Проходит ли прямая FH через середину стороны CD шестиугольника?

4. Какое наименьшее количество ладей можно поставить на шахматную доску 8×8 так, чтобы каждая ладья била ровно две ладьи, при этом новых ладей с таким свойством добавить нельзя?

5. На полуокружности с центром O и диаметром AD отмечены точки B и C так, что B лежит на дуге AC. Точки K, M, N – середины хорд AB, BC и CD соответственно. Докажите, что $OKMN$ – параллелограмм.

6. Для положительных чисел x, y, z и w докажите неравенство

$$\sqrt{\frac{x}{y+z+w}}+\sqrt{\frac{y}{x+z+w}}+\sqrt{\frac{z}{x+y+w}}+\sqrt{\frac{w}{x+y+z}}\geq 2.$$

Нижегородская (XXI Открытая) городская математическая олимпиада школьников
НИУ ВШЭ – Нижний Новгород, 16 ноября 2024 года

9 класс

1. Назовём число *нереальным*, если оно равно сумме $k\geq 2$ точных кубов, где k – сумма цифр числа. Например, 2025 – *нереальное* число, т.к. $2025=1^3+2^3+3^3+\ldots+9^3$ и сумма цифр числа 2025 равна 9, при этом $k=9$. Существует ли ещё хотя бы одно *нереальное* число?

2. Решите уравнение $|x+y| + |y+z| + |z+x| = |x+y+z|$.

3. Внутри правильного шестиугольника $ABCDEF$ взяты точки G и H так, что $ABGH$ – квадрат. Проходит ли прямая FH через середину стороны CD шестиугольника?

4. Какое наименьшее количество ладей можно поставить на шахматную доску 8×8 так, чтобы каждая ладья била ровно две ладьи, при этом новых ладей с таким свойством добавить нельзя?

5. На полуокружности с центром O и диаметром AD отмечены точки B и C так, что B лежит на дуге AC. Точки K, M, N – середины хорд AB, BC и CD соответственно. Докажите, что $OKMN$ – параллелограмм.

6. Для положительных чисел x, y, z и w докажите неравенство

$$\sqrt{\frac{x}{y+z+w}}+\sqrt{\frac{y}{x+z+w}}+\sqrt{\frac{z}{x+y+w}}+\sqrt{\frac{w}{x+y+z}}\geq 2.$$

Нижегородская (XXI Открытая) городская математическая олимпиада школьников
НИУ ВШЭ – Нижний Новгород, 16 ноября 2024 года

10 класс

1. Незнайка утверждает, что может вместо параметров a и b в уравнение $ax^2+bx+c=0$ подставить такие числа, что при любом значении параметра c уравнение будет иметь единственное решение. Прав ли Незнайка?

2. Выпуклый равносторонний n-угольник назовём *двузначным*, если его углы принимают только 2 значения, отличающиеся в 2 раза (α и 2α), и причём этих углов равное количество. При каком наибольшем n существует *двузначный* n-угольник?

3. c – наибольшее из положительных чисел a, b и c. Докажите, что

$$a(c-b) + b(c-a) \leq c^2.$$

4. Решите уравнение $\sin x + \cos x = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$.

5. Назовём натуральное число *глобальным*, если оно является записью подряд слева направо первых N натуральных чисел и делится на N, причём N не является степенью десятки, например, глобальными являются числа 123456 и 123456789101112131415, т.к. делятся соответственно на 6 и 15. Докажите, что *глобальных* чисел бесконечно много.

6. H – ортоцентр (точка пересечения высот) остроугольного треугольника ABC, A_1 и B_1 – середины сторон BC и CA соответственно. Точки A_2 и B_2 – точки пересечения лучей A_1H и B_1H с описанной окружностью треугольника ABC. Докажите, что $A_1B_1A_2B_2$ – вписанный четырёхугольник.

Нижегородская (XXI Открытая) городская математическая олимпиада школьников
НИУ ВШЭ – Нижний Новгород, 16 ноября 2024 года

10 класс

1. Незнайка утверждает, что может вместо параметров a и b в уравнение $ax^2+bx+c=0$ подставить такие числа, что при любом значении параметра c уравнение будет иметь единственное решение. Прав ли Незнайка?

2. Выпуклый равносторонний n-угольник назовём *двузначным*, если его углы принимают только 2 значения, отличающихся в 2 раза (α и 2α), и причём этих углов равное количество. При каком наибольшем n существует *двузначный* n-угольник?

3. c – наибольшее из положительных чисел a, b и c. Докажите, что

$$a(c-b) + b(c-a) \leq c^2.$$

4. Решите уравнение $\sin x + \cos x = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$.

5. Назовём натуральное число *глобальным*, если оно является записью подряд слева направо первых N натуральных чисел и делится на N, причём N не является степенью десятки, например, глобальными являются числа 123456 и 123456789101112131415, т.к. делятся соответственно на 6 и 15. Докажите, что *глобальных* чисел бесконечно много.

6. H – ортоцентр (точка пересечения высот) остроугольного треугольника ABC, A_1 и B_1 – середины сторон BC и CA соответственно. Точки A_2 и B_2 – точки пересечения лучей A_1H и B_1H с описанной окружностью треугольника ABC. Докажите, что $A_1B_1A_2B_2$ – вписанный четырёхугольник.

Нижегородская (XXI Открытая) городская математическая олимпиада школьников
НИУ ВШЭ – Нижний Новгород, 16 ноября 2024 года

11 класс

1. Незнайка утверждает, что может вместо параметров a и b в уравнение $ax^2+bx+c=0$ подставить такие числа, что при любом значении параметра c уравнение будет иметь единственное решение. Прав ли Незнайка?

2. Углы α и β треугольника удовлетворяют равенству $\cos\alpha+\cos\beta=\sin\alpha+\sin\beta$. Верно ли, что треугольник – прямоугольный?

3. У прямоугольного параллелепипеда все стороны имеют целую длину. Каждое ребро увеличили на целое число n, при этом площадь всей поверхности параллелепипеда увеличилась на 2024. При каких n такое могло произойти?

4. Докажите, что длина гипотенузы вписанного в параболу $y=x^2$ прямоугольного треугольника будет не меньше 2.

5. Для положительных чисел x, y, z и w докажите неравенство

$$\sqrt{\frac{x}{y+z+w}}+\sqrt{\frac{y}{x+z+w}}+\sqrt{\frac{z}{x+y+w}}+\sqrt{\frac{w}{x+y+z}}\geq 2.$$

6. Дана равнобочная трапеция с основаниями AD и BC и точками E и F внутри. Оказалось, что описанные окружности треугольников ADE и BCF не пересекаются между собой и касаются прямых AB и CD. Докажите, что средняя линия трапеции делит отрезок EF пополам тогда и только тогда, когда прямая EF высекает на данных окружностях равные хорды.

Нижегородская (XXI Открытая) городская математическая олимпиада школьников
НИУ ВШЭ – Нижний Новгород, 16 ноября 2024 года

11 класс

1. Незнайка утверждает, что может вместо параметров a и b в уравнение $ax^2+bx+c=0$ подставить такие числа, что при любом значении параметра c уравнение будет иметь единственное решение. Прав ли Незнайка?

2. Углы α и β треугольника удовлетворяют равенству $\cos\alpha+\cos\beta=\sin\alpha+\sin\beta$. Верно ли, что треугольник – прямоугольный?

3. У прямоугольного параллелепипеда все стороны имеют целую длину. Каждое ребро увеличили на целое число n, при этом площадь всей поверхности параллелепипеда увеличилась на 2024. При каких n такое могло произойти?

4. Докажите, что длина гипотенузы вписанного в параболу $y=x^2$ прямоугольного треугольника будет не меньше 2.

5. Для положительных чисел x, y, z и w докажите неравенство

$$\sqrt{\frac{x}{y+z+w}}+\sqrt{\frac{y}{x+z+w}}+\sqrt{\frac{z}{x+y+w}}+\sqrt{\frac{w}{x+y+z}}\geq 2.$$

6. Дана равнобочная трапеция с основаниями AD и BC и точками E и F внутри. Оказалось, что описанные окружности треугольников ADE и BCF не пересекаются между собой и касаются прямых AB и CD. Докажите, что средняя линия трапеции делит отрезок EF пополам тогда и только тогда, когда прямая EF высекает на данных окружностях равные хорды.