Нижегородская (XXI открытая) городская математическая олимпиада школьников
НИУ Высшая Школа Экономики – Нижний Новгород, 16 ноября 2024 года

УСЛОВИЯ И ИДЕИ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ

Вариант олимпиады подготовлен Тигиной Аленой Романовной – студенткой 1 курса (НИУ ВШЭ – Нижний Новгород), Бирюковым Арсением Вячеславовичем (г.Нижний Новгород), Тихоновым Глебом Олеговичем (г.Уфа) – учащимися 11-го класса Школы ЦПМ, г.Москва, Галеевым Русланом Рустемовичем – учащимся 10-го класса лицея №153 г.Уфы и Дмитрием Юрьевичем Кузнецовым.

7 класс

1. Ваня родился 16 ноября 2024 года и, когда вырос, придумал записать дату своего рождения восьмизначным числом 20241116 – номера года (4 цифры), месяца и дня (по 2 цифры, как двузначные коды, возможно начинающиеся с 0). Каким восьмизначным числом тогда он запишет дату рождения его брата Саши, который младше Вани ровно на 2 года, 2 месяца и 2 дня?

Ответ: 20270118, т.к. Петя родился 18 января 2027 года.

Комментарий**:** *К сожалению, типичной ошибкой школьников стал ответ 20260118, когда прибавляя сначала 2 года и потом 2 месяца, школьники не замечали, что это будет уже январь следующего года. Тем самым попадались в стандартную ловушку, явно ещё не проснувшись. Идя на олимпиаду, обязательно надо размяться, решив несколько задач, попытавшись спрогнозировать типы возможных задач, вспомнив доказательства возможных фактов и теорем.*

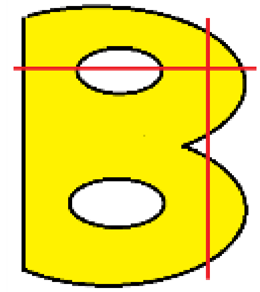
2. Маша написала ряд букв с неравенством «НИЖНИЙ < НОВГОРОД» и предложила Коле добавить несколько знаков «<» между буквами, заменив одинаковые буквы одинаковыми цифрами, а разные буквы – разными цифрами, чтобы получилась возрастающая последовательность натуральных чисел. Какое наибольшее количество чисел может получить Коля? Приведите ответ и пример (без обоснования оценки количества чисел).

Комментарий**:** *В продолжение комментария к первой задаче укажем, что некоторые школьники, не проснувшись и невнимательно прочитав условие задачи, пытались доказать максимальность набора из 6 чисел, потратив много времени зря.*

Ответ: 6 чисел, например, 1<2<3<120<145<64748 или 1<3<21<30<1456<4748.

Доказательство оценки, которое при написании решения задачи не надо было приводить: НИЖНИЙ в силу повтора букв-цифр не может быть возрастающей последовательностью однозначных чисел, значит, он заканчивается уже хотя бы двузначными числами, т.е. даёт нам не более 5 чисел, но ровно 5 чисел получиться не может, т.к. иначе Н<И<Ж<Н<ИЙ – противоречие на букве Н. Значит, НИЖНИЙ даёт не более 4 чисел. Если НО – двузначное число, то меньшее число ИЙ также будет двузначным, откуда следует, что И<Н, но тогда Н и И в начале не могут быть оба однозначными числами и не могут дать двузначное число, иначе НИ<ИЙ – противоречие. Тогда должно быть Н<ИЖ<Н<ИЙ (противоречие). Значит, НОВГОРОД начинается уже не менее чем с трёхзначного числа и даёт нам не более двух чисел. Откуда получаем, что Вася может получить не более 4+2=6 чисел.

3. Варя на день рождения младшего брата Васи испекла пиццу, а только что проснувшийся второклассник Вася, посмотрев на пиццу, сказал, что может её двумя прямолинейными разрезами поделить на 5 частей. Мог ли Вася быть прав?



<u>Ответ</u>: да, например, Варя могла испечь пиццу в виде буквы «В», а Вася мог её разрезать так, как показано на рисунке.

<u>Комментарий</u>**:** *Некоторые школьники посчитали пиццу круглой, хотя об этом в условии ничего не сказано. Сказалось отсутствие опыта участия в олимпиадах.*

4. На хоккейном матче между ХК "Ледяные короли" и ХК "Витязь" юный шахматист Вова задумался: "А можно ли на шахматную доску 8×8 поставить команду из 6 королей, команду из 6 витязей (офицеров-слонов) и шайбу (бить не умеет) так, чтобы ни одна фигура не била никакую другую фигуру?" Помогите Вове ответить на его вопрос. (*Задача предложена Глебом Тихоновым, ШЦПМ, 11 класс, Москва-Уфа, по мотивам задачи с Нижегородской городской олимпиады 2008 года.*)

к		к		к		к	
	к		ш				
в	в	в	в	в	в		к

<u>Решение</u>: Да, можно. На примере короли отмечены буквой «к», витязи-офицеры-слоны – буквой «в», шайба – буквой «ш».

5. *c* – наибольшее из положительных чисел *a, b* и *c*. Докажите, что $a(c–b)+b(c–a)\le c^2$.

<u>Комментарий 1</u>**:** *Ниже нами приведено несколько доказательств неравенства, некоторые из которых явным образом ещё не доступны семиклассникам. Но эта задача была предложена ещё восьмиклассникам и десятиклассникам, а разнообразие методов доказательства демонстрирует необходимость семиклассникам изучать нижеописанные методы.*

<u>Комментарий 2</u>**:** *Анализ методов доказательства классических неравенств показывает, что стандартный порядок идей по увеличению сложности является следующим: 1. когда в неравенстве равенство? (замена переменных); 2. выделение полных квадратов; 3. неравенство Коши – метод «кошизации»; 4. применение различных средних величин и теоремы о средних; 5. геометрическая интерпретация; 6. векторы, неравенство Коши-Буняковского, лемма Титу; 7. метод Штурма; 8. транснеравенство, неравенство Чебышёва; 9. индукция, а также другие идеи и методы – трюки, упорядочивание, однородность, метод «мэтра», производная, сведение к функции одной переменной, неравенства-посредники, неравенства Мюрхеда, Иенсена, Караматы и т.д.*

<u>Комментарий 3</u>: *«Когда в неравенстве равенство» – самая первая идея при доказательстве классических неравенств. И здесь она явным образом не работает, но с помощью замены переменных помогает в совокупности с очевидной идеей упорядочить числа.*

<u>Доказательство 1</u>: Не умаляя общности, можно считать, что $0<a\le b\le c$ и $c=b+y=a+x+y$, где $x\ge 0$, $y\ge 0$. Тогда $c^2-a(c-b)-b(c-a)=(b+y)^2-(b-x)y-b(x+y)$ = $b^2+2by+y^2-by+xy-bx-by$ = $b(b-x)+y^2+xy$ = $ab+y^2+xy\ge 0$, откуда следует требуемое неравенство $a(c–b)+b(c–a)\le c^2$.

<u>Комментарий 4</u>: *Но … стоит чуть подумать и не обращать внимания на упорядочивание, то замена переменных приведёт к более короткому решению.*

<u>Доказательство 2</u>: Пусть $c=a+x=b+y$, где x, y – неотрицательные числа, тогда $a(c–b)+b(c–a) = ay+bx < ay+bx+ab+xy = (a+x)(b+y)=c^2$, откуда по транзитивности следует требуемое неравенство.

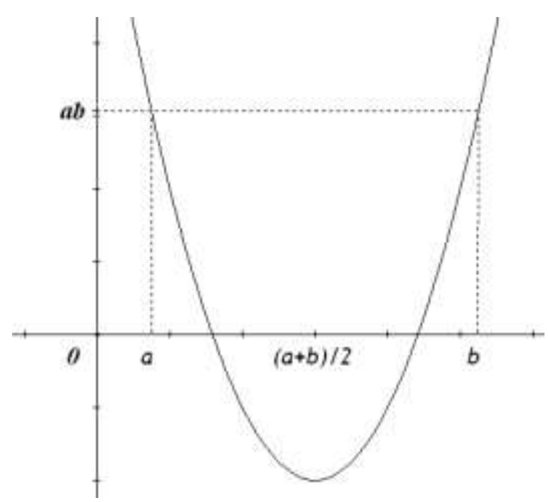
<u>Комментарий 5</u>: *Внимательный взгляд подсказывает, что можно обойтись и без замены переменных. И советуем увидеть связь доказательств 2 и 3 с самым последним доказательством, главным для этой задачи.*

<u>Доказательство 3</u>: $a(c–b)+b(c–a) \le c(c–b)+b(c–a) = c^2–cb+bc–ba < c^2$.

<u>Комментарий 6</u>: *Лингвистический анализ показывает, что в левой части неравенства фактически дана сумма попарных произведений, т.е. скалярное произведение векторов, значит, можно попытаться применить неравенство Коши-Буняковского-Шварца (эти выкладки рекомендуем читателю осуществить самому, т.к. фактически они приведены ниже, но в векторном виде).*

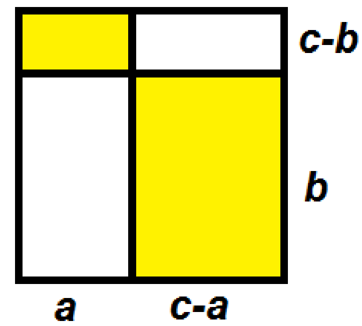
<u>Доказательство 4</u>: Рассмотрим два вектора $\vec{x}\{a;c-a\}$ и $\vec{y}\{b;c-b\}$, тогда по векторному неравенству Коши-Буняковского и для скалярного произведения в координатах $a(c-b)+(c-a)b=\vec{x}\cdot\vec{y}\le|\vec{x}|\cdot|\vec{y}|=\sqrt{a^2+(c-a)^2}\cdot\sqrt{(c-b)^2+b^2}\le c^2$ где каждый корень не превосходит c, т.к. $\sqrt{t^2+(c-t)^2}\le c \Leftrightarrow 2t^2+c^2-2tc\le c^2 \Leftrightarrow t\le c$ – верное неравенство для t, равного a и b.

<u>Комментарий 7</u>: *Переход к функциональному взгляду приводит ещё к одному доказательству с помощью теории квадратного трехчлена.*



<u>Доказательство 5</u>: Случай $a=b$ сразу даёт верное неравенство $0\le c^2$. Рассмотрим теперь случай $a\ne b$ и в силу симметрии будем считать, что $a<b$. Тогда требуемое неравенство будет следовать из теории квадратного трехчлена, если мы рассмотрим квадратный трехчлен $f(c)$ относительно c и докажем, что $f(x)=x^2–a(x–b)–b(x–a)=x^2–(a+b)x+2ab$ будет неотрицательным при любом $x\ge max(a,b)=b$. Имеем $f(a)=f(b)=ab>0$ и $f(x)=\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2+2ab-\frac{(a+b)^2}{4}$ со старшим положительным коэффициентом (ветви параболы вверх – см. график), значит, минимум достигается в точке $x_0=\frac{a+b}{2}$. Тогда при всех $x\ge max(a,b)=b$ получим, что $f(x)\ge f(b)=ab>0$, откуда и следует требуемое неравенство.

<u>Комментарий 8</u>: *Кроме того, напрашивается применить чисто геометрический взгляд на задачу и … тогда всё решение сразу видно из картинки. А ради этого решения и было дано неравенство на олимпиаде:☺. Практически стопроцентный прогноз оказался верным – никто из участников олимпиады площадями задачу не решил, т.к. на автомате все стремились выполнять какие-то алгебраические выкладки в этой простой* *задаче, решаемой многими методами. И тогда следующий вопрос к школьнику: «А у Вас короткое решение в одну-две строчки? Или длинный перебор и куча потраченного на олимпиаде зря времени?» Настоящие олимпиадные задачи должны решаться коротко и красиво!*

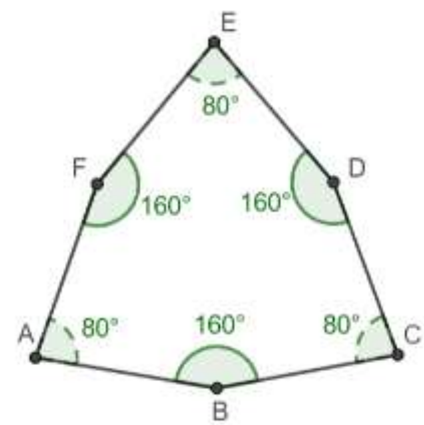


Доказательство 6: см. рисунок – сумма площадей двух выделенных прямоугольников (возможно, одного или даже ни одного, если какие-то из чисел a, b равны 0) не превосходит площади c^2 всего квадрата, что и требуется доказать.

***Вывод**: К ОЛИМПИАДАМ НАДО ГОТОВИТЬСЯ … ВСЕРЬЁЗ!*

6. Выпуклый равносторонний *n*-угольник назовём *двузначным*, если его углы принимают только 2 значения, отличающихся в 2 раза (α и 2α), и причём этих углов равное количество. При каком наибольшем *n* существует *двузначный n*-угольник?

Ответ: 6. ***Решение:*** $2\alpha<180° \Leftrightarrow \alpha<90°$. Сумма углов n-угольника равна $180°\cdot(n–2)=(\alpha+2\alpha)\cdot n/2 \Leftrightarrow 120°\cdot(n–2)=\alpha n$, откуда $n=240°/(120°–\alpha)<240°/30°=8$, но n – чётное число, значит, $n\leq 6$. В качестве примера подойдёт шестиугольник с углами 80° и 160° (по циклу) – см. рис. методом пропеллера. Данная конструкция получается, если на каждой стороне правильного треугольника *ACE* добавить надстройку в виде равнобедренного треугольника с углами 10°, 10° и 160°.



Комментарий: *О методе пропеллера можно прочитать статью в журнале «Квантик», №4, 2024 г.*

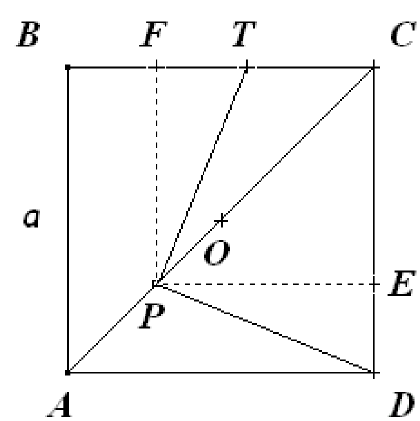
8 класс

1. Ребусы «*О·Д·И·Н*=1», «*Д·В·А*=2» (одинаковые буквы – одинаковые цифры, разные буквы – разные цифры) не имеют решений. А существует ли аналогичный ребус для какой-то цифры, имеющий решение?

Ответ: да, существует, например, ребус «Н·О·Л·Ь=0» или «Н·У·Л·Ь=0», где одна из букв-цифр равна 0, а остальные буквы – разные ненулевые цифры.

2. *O* – центр квадрата *ABCD*. Верно ли, что для любой точки *P* внутри отрезка *AO* существует такая точка *T*, лежащая на стороне *BC*, что треугольник *DPT* будет прямоугольным равнобедренным?

Ответ: да, верно. ***Доказательство:*** Для точки P, совпадающей с A и O, точкой T будут очевидным образом точки B и C (но по условию задачи эти случаи рассматривать не надо, т.к. точка P лежит внутри отрезка AO). Рассмотрим теперь точку P, лежащую между точками A и O. Пусть E и F – её проекции на стороны CD и BC соответственно, тогда $EP=FP$, т.к. P лежит на оси симметрии квадрата. Отметим также на отрезке FC такую точку T, что $FT=ED$ (см. рис.). Такая точка есть, т.к. $FC=EC$ – больше половины стороны квадрата (a), а $ED < a/2$. Тогда прямо-

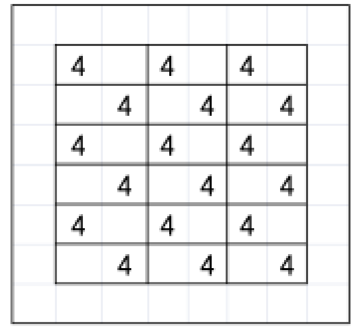


угольные треугольники *PFT* и *PED* равны (по двум катетам), значит, $PT=PD$ и $\angle FPT=\angle EPD$, откуда $\angle TPD=\angle FPE-\angle FPT+\angle EPD=90°-\angle FPT+\angle FPT=90°$. Следовательно, *DPT* – равнобедренный прямоугольный треугольник, что и требовалось доказать.

3. *c* – наибольшее из положительных чисел *a, b* и *c*. Докажите, что $a(c-b)+b(c-a)\le c^2$.

Комментарий: *см. решения задачи №5 для 7-го класса.*

4. Вася закрашивает по одной в некотором порядке клетки изначально белого квадрата 8×8, вписывая в каждую новую закрашенную клетку число ранее закрашенных её соседних (по стороне) клеток. Какое наибольшее количество клеток с числом 4 могло у него оказаться по окончании закрашивания?



Ответ: 18. ***Решение:*** 4-ка могла появиться только в клетке, не стоящей на краю, при этом 4-ки рядом не стоят, т.к. клетка, которая покрашена раньше соседки не может содержать 4-ки. Центральный квадрат 8×8 разбивается на 18 доминошек 1×2, в каждой из которых максимум одна 4-ка, значит, 4-ок не больше 18. В качестве примера см. рис., где сначала закрашиваем в произвольном порядке все клетки без 4-ок, а потом уже закрашиваем клетки, в которые ставим 4-ки.

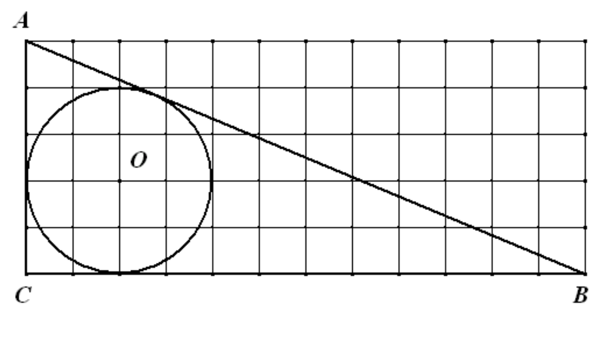
Комментарий: *К сожалению, подавляющее большинство школьников, получив очевидный пример на 18 четвёрок, не понимали, что ещё надо аккуратно доказать оценку. К ОЛИМПИАДАМ НАДО ГОТОВИТЬСЯ и ЗНАТЬ ЧАСТО ВСТРЕЧАЮЩИЕСЯ ИДЕИ!*

5. Коля написал *N* различных попарно взаимно простых натуральных чисел, не превосходящих 2025. При каком наименьшем *N* среди Колиных чисел гарантированно есть простое число?

Ответ: 16. ***Решение:*** Предположим, что среди этих $N\ge 16$ чисел нет простого. По крайней мере пятнадцать из них не равны 1, значит, являются составными и имеют в своём разложении на простые множители хотя бы 2 своих, отличных от других чисел, простых множителя. Упорядочим простые делители этих чисел ($p_1<p_2<\ldots$) и возьмём то число из наших пятнадцати, у которого наименьший из его простых чисел будет не меньше p_{15} (а 15-м простым числом будет 47 $\to$ 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47). Тогда это число будет не меньше $(p_{15})^2\ge 47^2>45^2=2025$ – противоречие. Значит, среди $N\ge 16$ чисел есть простое число. А для $N\le 15$ есть контрпример: 1, 2^2, 3^3, …, $43^2<2025$ – 1 и квадраты первых 14 простых чисел.

Комментарий: *Типичная ситуация в задачах на «гарантированно», когда при доказательстве оценки приводится контрпример.*

6. На клетчатой бумаге со стороной клетки 1 построена окружность радиуса 2 с центром *O* в узле решётки. Проведите линейкой три отрезка *AB, BC* и *CA* так, чтобы получился описанный около этой окружности треугольник *ABC*.



Решение: Например, это прямоугольный треугольник со сторонами 5, 12, 13, т.к. его площадь равна $5\cdot 12/2=30=15\cdot 2=p\cdot r$ (произведение полупериметра на радиус вписанной окружности).

9 класс

1. Назовём число *нереальным*, если оно равно сумме $k\geq 2$ точных кубов, где k – сумма цифр числа. Например, 2025 – *нереальное* число, т.к. $2025=1^3+2^3+3^3+\ldots+9^3$ и сумма цифр числа 2025 равна 9, при этом $k=9$. Существует ли ещё хотя бы одно *нереальное* число? (*Задача предложена Аленой Тигиной, 1 курс, НИУ ВШЭ – Нижний Новгород*)

***Ответ*:** да, существуют, например, следующие числа: 2024, т.к. $2024=2^3+3^3+\ldots+9^3$ и сумма цифр числа 2024 равна 8; $3025=1^3+2^3+3^3+\ldots+9^3+10^3$ и сумма цифр числа 3025 равна 10; $2=1^3+1^3$, $3=1^3+1^3+1^3$, …, $9=1^3+1^3+\ldots+1^3$ (девять слагаемых), $1001=1^3+10^3$ и много других вариаций с кубами степеней десятки.

Комментарий: *Всего-навсего … русский язык и …1.*☺.

2. Решите уравнение $|x+y| + |y+z| + |z+x| = |x+y+z|$.

***Ответ*:** $x=y=z=0$. ***Решение 1*:** Возведём уравнение в квадрат и получим, что $2(x^2+y^2+z^2)+2xy+2yz+2zx+2(|x+y|\cdot|y+z|+|y+z|\cdot|z+x|+|z+x|\cdot|x+y|)=x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx \Leftrightarrow$ $x^2+y^2+z^2+2(|x+y|\cdot|y+z|+|y+z|\cdot|z+x|+|z+x|\cdot|x+y|)=0$, откуда в силу неотрицательности квадратов и модулей следует, что каждый квадрат и модуль должен равняться 0, т.е. $x=y=z=0$.

***Комментарий 1*:** *Классика красивой работы с модулями – ВОЗВОДИ В КВАДРАТ! А в решении ниже воспользуемся другой классической идеей при суммировании модулей.*

***Решение 2*:** Сумма модулей не меньше модуля суммы, значит, $|x+y+z| = |x+y| + |y+z| + |z+x| \geq 2|(x+y)+(y+z)+(z+x)| = 2|x+y+z|$, откуда в силу неотрицательности модулей следует, что $|x+y+z|=0 \Leftrightarrow x+y+z=0$. Тогда наше исходное уравнение после замен примет вид: $|-z| + |-x| + |-y| = 0$, что возможно только при $x=y=z=0$.

***Комментарий 2*:** *И, конечно же, стандартным ходом практически всех школьников являлась попытка раскрывать модули, что при неграмотном подходе приводило к большим проблемам, так и не давшим никому из пытавшихся решения. Приведём ниже возможное, максимально короткое, переборное решение с раскрытием модулей.*

***Решение 3*:** Сделаем замены $x+y=a$, $y+z=b$, $z+x=c$, тогда $x+y+z=(a+b+c)/2$, и после умножения на 2 получим уравнение $2(|a|+|b|+|c|)=|a+b+c|$ (*). В силу симметрии можно упорядочить числа $a\geq b\geq c$. Рассмотрим теперь 4 случая расположения этих чисел относительно 0 и раскроем модули.

1 случай. $a\geq b\geq c\geq 0$, тогда $2(a+b+c)=a+b+c$, откуда $a+b+c=0$, значит, из уравнения (*) получаем, что $a=b=c=0$, т.е. $x+y=y+z=z+x=x+y+z=0$ и тогда $x=y=z=0$.

2 случай. $a\geq b\geq 0>c$, тогда $2(a+b-c)=\pm(a+b+c)$, откуда либо $a+b=3c$, либо $3(a+b)=c$, что в обоих случаях невозможно, т.к. слева стоит неотрицательное число, а справа – отрицательное, значит, и сам этот случай не возможен.

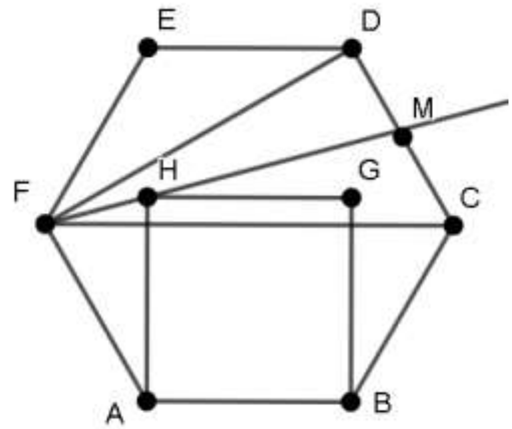
3 случай. $a\geq 0>b\geq c$, тогда $2(a-b-c)=\pm(a+b+c)$, откуда либо $a=3(b+c)$, либо $3a=b+c$, что в обоих случаях невозможно, т.к. слева неотрицательное число, а справа – отрицательное, значит, и сам этот случай не возможен.

4 случай. $0>a\geq b\geq c$, тогда $-2(a+b+c)=-(a+b+c)$, откуда $a+b+c=0$, что для отрицательных чисел невозможно, т.е. этот случай не возможен.

Значит, возможен только первый случай, который и даёт нам три числа, равных 0.

3. Внутри правильного шестиугольника *ABCDEF* взяты точки *G* и *H* так, что *ABGH* – квадрат. Проходит ли прямая *FH* через середину стороны *CD* шестиугольника?

Ответ: нет. ***Решение:*** В равнобедренном треугольнике AFH ($AF=AH$) $\angle FAH = \angle FAB - \angle HAB = 120° - 90° = 30°$, значит, $\angle HFA = (180° - 30°)/2 = 75°$ и $\angle HFC = \angle HFA - \angle CFA = 75° - 60° = 15° = \angle DFC/2$. Тогда FH – биссектриса $\angle DFC$ и делит сторону CD треугольника DFC согласно свойству биссектрисы в отношении $DF:CF<1$, т.е. не проходит через середину стороны CD.



Комментарий: *И, конечно же, можно было посчитать в координатах и убедиться, что точка M не попадает на прямую FH.*

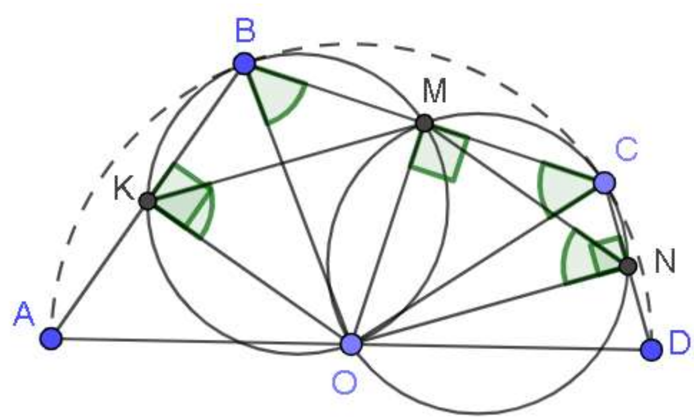
4. Какое наименьшее количество ладей можно поставить на шахматную доску 8×8 так, чтобы каждая ладья била ровно две ладьи, при этом новых ладей с таким свойством добавить нельзя?

Л	Л	Л	Л	Л	Л	Л	
Л						Л	

Ответ: 9. ***Решение:*** Самая левая среди самых верхних ладей должна бить вниз и направо, т.е. ладьи должны занимать хотя бы по два горизонтальных и вертикальных ряда. При этом если найдутся свободные 2 вертикальных и 2 горизонтальных ряда, то можно поставить 4 ладьи в клетках на пересечении этих двух пар рядов, получив 4 новых ладьи, где каждая ладья бьёт ровно 2 ладьи. Значит, у направления с меньшим количеством занятых рядов должно быть занято минимум 2, а у направления с наибольшим количеством рядов должен быть свободен максимум 1. Каждая ладья бьёт 2 своих стенки (стороны клеток на краю доски), значит, для их минимума нужен и минимум занятых рядов, каждый из которых нам даст 2 побитых стенки. Тогда нам надо занять минимум 7 рядов одного направления и 2 ряда другого направления, т.е. минимум 9 занятых рядов, 18 побитых стенок, тогда минимум 18:2=9 ладей. Пример – см. на рис.

5. На полуокружности с центром *O* и диаметром *AD* отмечены точки *B* и *C* так, что *B* лежит на дуге *AC*. Точки *K, M, N* – середины хорд *AB, BC* и *CD* соответственно. Докажите, что *OKMN* – параллелограмм.

Комментарий 1 (с доказательством 1): *Данная задача является очевидной задачей на параллелограмм Вариньона, образуемый серединами звеньев любой четырёхзвенной замкнутой ломаной (отрезки KM и ON равны и параллельны отрезку AC, как средние линии треугольников ABC и ADC соответственно). А тем, кто его не увидел, доступно получение решения, использующего вписанные углы*



Доказательство 2: *ОК, ОМ, ON* – высоты в равнобедренных треугольниках

OAB, *OBC* и *OCD*, значит, четырёхугольники *OKBM*, *OMCN* – вписанные (противоположные углы равны 90°), откуда следует, что $\angle OKM = \angle OBM = \angle OBC = \angle OCB = \angle OCM = \angle ONM$ и $\angle KON = 180° - \angle AOK - \angle NOD = 180° - \angle BOK - \angle CON = 180° - \angle BMK - \angle CMN = \angle KMN$, т.е. в четырёхугольнике *OKMN* противоположные углы равны, откуда и следует, что он – параллелограмм.

<u>Комментарий 2</u>: *В результате задача чётко вписывается в метод решения большого класса геометрических задач «ДОКАЗАТЬ РАВЕНСТВО УГЛОВ – ИЩИ ОКРУЖНОСТЬ +, возможно, параллельные палочки»! А одной из двух главных идей при доказательстве, что четырёхугольник – параллелограмм, как раз и является доказательство равенства противоположных углов. Тем более что в задаче уже откровенно дана окружность. Осталось только УВИДЕТЬ НУЖНЫЕ ОКРУЖНОСТИ!*

6. Для положительных чисел *x, y, z* и *w* докажите неравенство

$$\sqrt{\frac{x}{y+z+w}}+\sqrt{\frac{y}{x+z+w}}+\sqrt{\frac{z}{x+y+w}}+\sqrt{\frac{w}{x+y+z}}\ge 2.$$

(*Задача предложена Глебом Тихоновым, ШЦПМ, 11 класс, Москва-Уфа*)

<u>Доказательство</u>: Воспользуемся леммой, что для положительных чисел a и b верно неравенство $\sqrt{\frac{a}{b}} \ge \frac{2a}{a+b}$. Докажем её. Обе части неравенства неотрицательны, значит, можем возвести обе части в квадрат, после чего поделив на положительное число a и приведя к общему знаменателю, получим следующую цепочку верных неравенств: $\frac{a}{b} \ge \frac{4a^2}{a^2+2ab+b^2} \Leftrightarrow a^2+2ab+b^2 \ge 4ab \Leftrightarrow (a-b)^2 \ge 0$. Применим лемму для каждого корня и получим, что наша сумма корней будет не меньше $\frac{2x}{x+y+z+w}+\frac{2y}{x+y+z+w}+\frac{2z}{x+y+z+w}+\frac{2w}{x+y+z+w}=2$.

<u>Комментарий</u>: *Внимательный взгляд на лемму показывает, что это фактически неравенство между средним геометрическим и средним гармоническим для положительных чисел a/b и 1.*

<u>10 класс</u>

1. Незнайка утверждает, что может вместо параметров *a* и *b* в уравнение $ax^2+bx+c=0$ подставить такие числа, что при любом значении параметра *c* уравнение будет иметь единственное решение. Прав ли Незнайка?

<u>Ответ</u>: да, например, при a=0, b=1 уравнение $x+c=0$ при любом значении параметра c будет иметь единственное решение $x=-c$.

<u>Комментарий</u>: *Не задумавшись над условием задачи, многие школьники сразу бросились считать дискриминант, что автоматически привело их к неверному решению.*

2. *c* – наибольшее из положительных чисел *a, b* и *c*. Докажите, что $a(c-b)+b(c-a)\le c^2$.

<u>Решение</u>: *см. решения задачи №5 для 7-го класса.*

3. Выпуклый равносторонний *n*-угольник назовём *двузначным*, если его углы принимают только 2 значения, отличающихся в 2 раза (α и 2α), и причём этих углов равное количество. При каком наибольшем *n* существует *двузначный n*-угольник?

Решение: *см. решение задачи №6 для 7-го класса.*

4. Решите уравнение *sin x + cos x = tg x + ctg x*.

Ответ: данное уравнение корней не имеет. ***Решение:*** Заметим, что из свойств тангенса и неравенства Коши следует, что $|tgx+ctgx| = |tgx| + |ctgx| \ge 2\sqrt{tgx \cdot ctgx} = 2$. В то же время $|\sin x + \cos x| = \left|\sqrt{2}(\sin x \cos\frac{\pi}{4} + \cos x \sin\frac{\pi}{4})\right| = \sqrt{2}\left|\sin(x+\frac{\pi}{4})\right| \le \sqrt{2}$. Получаем, что множество значений функции *sin x + cos x* по модулю не превосходит $\sqrt{2}$, в то время, как множество значений *tg x + ctg x* по модулю не менее 2, значит, уравнение не имеет решений.

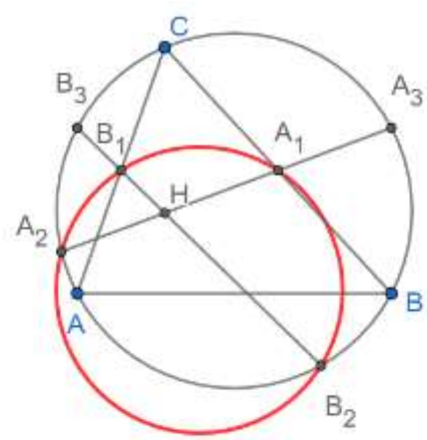
5. Назовём натуральное число *глобальным*, если оно является записью подряд слева направо первых *N* натуральных чисел и делится на *N*, причём *N* не является степенью десятки, например, глобальными являются числа 123456 и 123456789101112131415, т.к. делятся соответственно на 6 и 15. Докажите, что *глобальных* чисел бесконечно много.

Решение 1: При $N=2\cdot10^k$ для любого натурального k число данного вида всегда будет *глобальным*, т.к. оканчивается на 2 и k нулей, значит, после деления на 10^k будет оставаться чётное число, откуда и следует делимость на $N=2\cdot10^k$.

Решение 2: При $N=9\cdot10^k$ для любого натурального k число данного вида всегда будет *глобальным*, а чисел такого вида бесконечно много. Оно делится на 10^k, т.к. оканчивается на k нулей. $12\ldots N \equiv S(12\ldots N) \equiv S(1)+S(2)+\ldots+S(N) \equiv 1+2+\ldots+N \equiv N(N+1)/2 \equiv 0 \pmod 9$, где $S(a)$ – сумма цифр числа a, значит, по свойствам сравнений и признаку делимости на 9 это число делится на 9. Но 9 и 10^k – взаимно просты, следовательно, число такого вида делится на $N=9\cdot10^k$.

Комментарий: *Глобальными будут также числа при $N=3\cdot10^k$ и $N=6\cdot10^k$.*

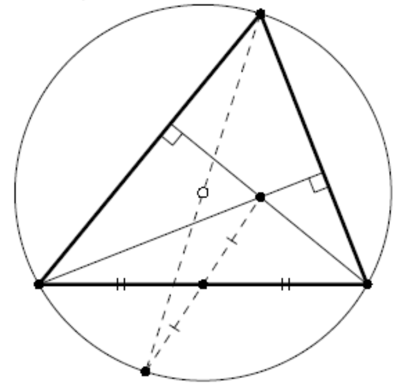
6. *H* – ортоцентр (точка пересечения высот) остроугольного треугольника *ABC*, A_1 и B_1 – середины сторон *BC* и *CA* соответственно. Точки A_2 и B_2 – точки пересечения лучей A_1H и B_1H с описанной окружностью треугольника *ABC*. Докажите, что $A_1B_1A_2B_2$ – вписанный четырёхугольник. (*по мотивам задачи Руслана Галеева, учащегося 10-го класса, г.Уфа*)



Доказательство: Заметим, что вторые точки пересечения прямых A_1H и B_1H с описанной окружностью треугольника ABC (соответственно A_3 и B_3) симметричны ортоцентру H относительно середин A_1 и B_1 (классический факт – см. факт 4.2.1. из книги Акопяна «Геометрия в картинках»). Тогда из вписанности четырёхугольника $A_2B_2A_3B_3$ следует, что $A_2H\cdot A_3H=B_2H\cdot B_3H$ (модуль степени точки H относительно описанной окружности треугольника ABC), но $A_3H=2A_1H$, $B_3H=2B_1H$, значит, $A_2H\cdot 2A_1H = B_2H\cdot 2B_1H \Leftrightarrow A_2H\cdot A_1H = B_2H\cdot B_1H$, что даёт вписанность четырёхугольника $A_1B_1A_2B_2$ согласно признаку через степень точки.

<u>Комментарий 1</u>: *Понятие «степень точки» является важным в современной олимпиадной геометрии, как и признаки вписанного четырёхугольника через степень точки или антипараллельность (см. ниже комментарий 2). Данная задача дана нами для напоминания школьникам, что с высокой вероятностью на региональном этапе Всероссийской олимпиады может быть геометрия, решаемая с помощью степени точки, радикальных осей и центра или антипараллельности, как это было в последние три года.*

4.2.1)



<u>Комментарий 2 (фактически доказательство 2 через антипараллельность)</u>: *Также задачу можно решить на языке антипараллельности, т.к. относительно угла A_2HB_2 отрезок A_3B_3 параллелен отрезку A_1B_1 (средняя линия в треугольнике A_3HB_3) и антипараллелен отрезку A_2B_2 (в силу вписанности четырёхугольника $A_2B_2A_3B_3$), значит, отрезки A_1B_1 и A_2B_2 антипараллельны относительно угла A_2HB_2, откуда и следует вписанность четырёхугольника $A_1B_1A_2B_2$.*

<u>Комментарий 3 (фактически коротко о доказательстве 3 через вписанные углы)</u>: *Ну и, конечно же, можно было рассуждать на стандартном школьном языке вписанных углов, опирающихся на одну дугу, что из предыдущего комментария про антипараллельность автоматически можно получить.*

<u>11 класс</u>

1. Незнайка утверждает, что может вместо параметров *a* и *b* в уравнение $ax^2+bx+c=0$ подставить такие числа, что при любом значении параметра *c* уравнение будет иметь единственное решение. Прав ли Незнайка?

<u>Ответ</u>: да, например, при $a=0$, $b=1$ уравнение $x+c=0$ при любом значении параметра c будет иметь единственное решение $x=-c$.

2. Углы *α* и *β* треугольника удовлетворяют равенству $\cos\alpha+\cos\beta=\sin\alpha+\sin\beta$. Верно ли, что треугольник – прямоугольный?

<u>Комментарий</u>: *К сожалению, школьники массово совершали банальную логическую ошибку. Подставляли в равенство углы прямоугольного треугольника и, убеждаясь, что они удовлетворяют равенству, делали неверный логически вывод, что треугольник обязательно прямоугольный. Жюри пришлось ввести особую оценку «кол» для всех, кто выполнял такие действия.*

<u>Ответ</u>: да. ***<u>Решение 1</u>:*** Перепишем данное соотношение в виде $2\cos(\alpha+\beta)/2)\cos((\alpha-\beta)/2)=2\sin((\alpha+\beta)/2)\cos((\alpha-\beta)/2)$. Заметим, что $\cos((\alpha-\beta)/2)\neq 0$, т.к. в противном случае $\alpha-\beta=180°$. Тогда $\cos(\alpha+\beta)/2)=\sin((\alpha+\beta)/2)$ и поэтому $tg((\alpha+\beta)/2)=1$ (здесь деление на $\cos(\alpha+\beta)/2)$ возможно, т.к. синус и косинус одного и того же угла не могут быть равны 0 одновременно). Итак, $(\alpha+\beta)/2=45°$, т.е. $\alpha+\beta=90°$, значит, треугольник является прямоугольным.

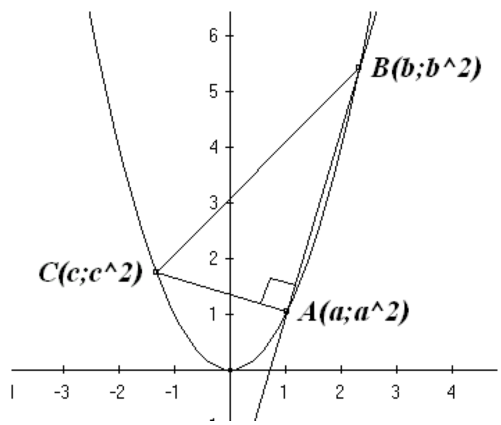
<u>Решение 2</u>: Перенесём равные углы в разные стороны и возведём обе части уравнения в квадрат: $(\cos\alpha-\sin\alpha)^2=(\sin\beta-\cos\beta)^2$. Тогда после применения основного тригонометрического тождества и формулы синуса двойного угла получим, что $\sin 2\alpha=\sin 2\beta$, откуда следует, что либо $\alpha=\beta$, либо $2\alpha+2\beta=180°$. Во втором случаем мы получаем прямоугольный треугольник ($\alpha+\beta=90°$), а в первом случае после подстановки в исходное уравнение получим, что $2\cos\alpha=2\sin\alpha$ (одновременно нулю не равны) $\Leftrightarrow$ $\mathrm{tg}\alpha=1$, откуда $\alpha=\beta=45°$ и получим равнобедренный прямоугольный треугольник.

3. У прямоугольного параллелепипеда все стороны имеют целую длину. Каждое ребро увеличили на целое число *n*, при этом площадь всей поверхности параллелепипеда увеличилась на 2024. При каких *n* такое могло произойти?

Ответ: 2. ***Решение:*** Общая площадь поверхности параллелепипеда изначально равна $S=2(ab+bc+ca)$, после увеличения каждого ребра на n она стала равна $S+2024 = 2\cdot((a+n)(b+n)+(b+n)(c+n)+(c+n)(a+n))= 2\cdot(ab+bc+ca+2n(a+b+c)+3n^2)= S+2\cdot(2n(a+b+c)+3n^2)$, откуда $2\cdot(2n(a+b+c)+3n^2)=2024 \Leftrightarrow 2n(a+b+c)+3n^2=1012=2^2\cdot 11\cdot 23$. Тогда $n=2k$ – чётное число. Получаем, что $k(a+b+c)+3k^2=11\cdot 23$, где k делитель произведения $11\cdot 23$, но за счёт слагаемого $3k^2$ получаем, что подходит только $k=1$. Значит, $n=2k=2$, $a+b+c=11\cdot 23–3=250$. В качестве примера подойдёт, например, прямоугольный параллелепипед со сторонами $a=b=100$, $c=50$.

4. Докажите, что длина гипотенузы вписанного в параболу $y=x^2$ прямоугольного треугольника будет не меньше 2.

Доказательство: Пусть вершина прямого угла A имеет координаты $(a;\ a^2)$, остальные вершины – $B(b;\ b^2)$, $C(c;\ c^2)$. Тогда скалярное произведение перпендикулярных векторов $\overrightarrow{AB}\{b-a;b^2-a^2\}$, $\overrightarrow{AC}\{c-a;c^2-a^2\}$ равно 0, т.е. $(b–a)(c–a)+(b^2–a^2)(c^2–a^2)=0 \Leftrightarrow 1+(b+a)(c+a)=0$ (после деления на ненулевое число $(b–a)(c–a)$, т.к. абсциссы a, b, c у всех вершин прямоугольного треугольника различны). Рассмотрим уравнение $1+(b+a)(c+a)=0$ как квадратное относительно a: $a^2+a(b+c)+bc+1=0$. Оно имеет корень a (абсциссу точки A), значит, дискриминант должен быть неотрицательным, т.е. $(b+c)^2–4(bc+1)=(b–c)^2–4\geq 0 \Leftrightarrow |b–c|\geq 2$. Следовательно, проекция гипотенузы BC на ось абсцисс будет не меньше 2, значит, и сама гипотенуза будет не меньше 2, причём ровно 2 гипотенуза будет равна в случае параллельности оси абсцисс, когда пройдёт через точку (0;1), т.е. координаты вершин треугольника равны $A(0;0)$, $B(1;1)$, $C(–1;1)$, что даёт прямоугольный треугольник с катетами $\sqrt{2}$ и гипотенузой 2.



5. Для положительных чисел *x, y, z* и *w* докажите неравенство

$$\sqrt{\frac{x}{y+z+w}}+\sqrt{\frac{y}{x+z+w}}+\sqrt{\frac{z}{x+y+w}}+\sqrt{\frac{w}{x+y+z}}\geq 2.$$

(*Задача предложена Глебом Тихоновым, ШЦПМ, 11 класс, Москва-Уфа*)

Решение: *см. решение задачи №6 для 9-го класса.*

6. Дана равнобочная трапеция с основаниями *AD* и *BC* и точками *E* и *F* внутри. Оказалось, что описанные окружности треугольников *ADE* и *BCF* не пересекаются между собой и касаются прямых *AB* и *CD*. Докажите, что средняя линия трапеции делит отрезок *EF* пополам тогда и только тогда, когда прямая *EF* высекает на данных окружностях равные хорды.

Решение: Докажем, что если хорды равны, то средняя линия делит *FE* пополам. Рассмотрим середину отрезка *FE* – точку *M* (см. рис.1). У неё одинаковая степень отно-

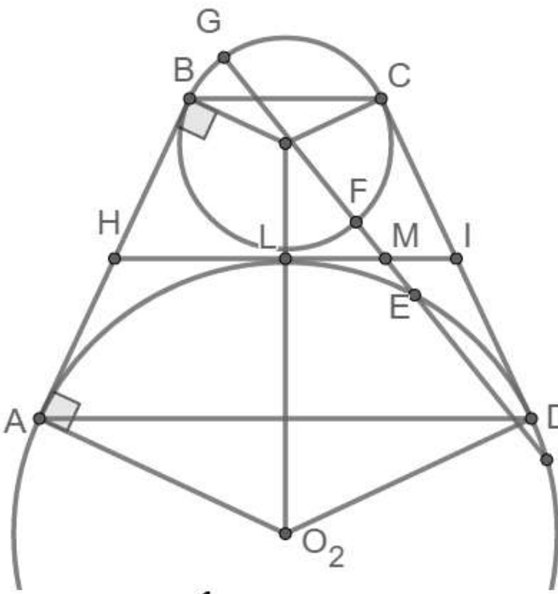


рис.1.

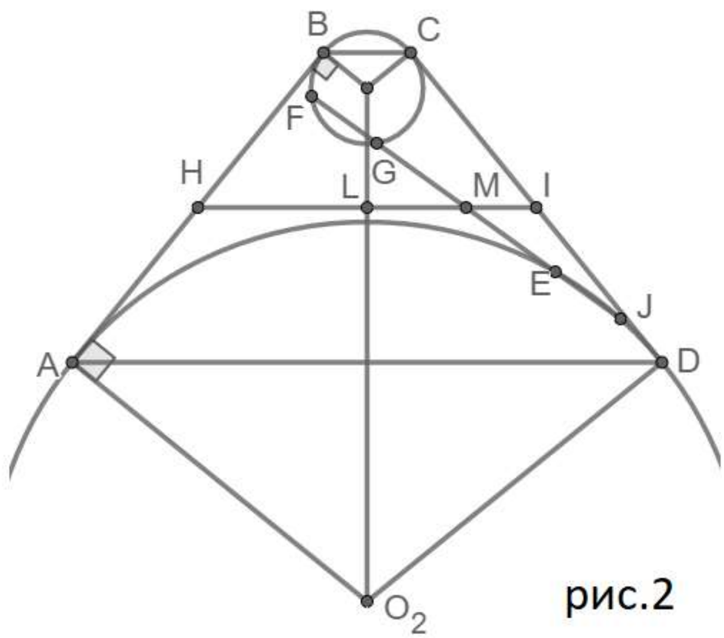


рис.2

сительно двух окружностей (*ADE*) и (*BCF*), значит, она лежит на их радикальной оси. Прямые *AB* и *CD* – общие касательные к окружностям, значит, прямая *HI* – средняя линия трапеции – радикальная ось. Значит, точка *M* лежит на *HI*.

Докажем, что если средняя линия трапеции делит отрезок *EF* пополам, то прямая *EF* высекает равные хорды на окружностях. Пусть точка *M* – середина *EF*. Заметим, что точка *M* лежит на радикальной оси данных двух окружностей (средней линии трапеции), значит, $MF\cdot(MF + FG) = ME\cdot(ME + EJ)$, а из $MF = ME$, => $GF = EJ$.

<u>Комментарий 1</u>: *Но … геометрия – это геометрия случаев, и анализ картинки показывает, что в формулировке допущена неточность. Например, если вся хорда FG окажется внутри трапеции, то точка M могла уже делить пополам отрезок EG, а не EF (см. рис.2), и, как следствие, в первой части решения при данной формулировке задачи допущена ошибка. Надеемся, что эта задача станет полезной и напомнит школьникам, что надо … внимательно перечитывать свои решения и слушать (на матбоях) чужие решения. А сама задача оказалась хитрее и умнее, чем думали решившие её школьники. При этом авторская формулировка (автор задачи – школьник) содержит требуемое замечание, с учётом которого приведённое выше решение будет верным.*

6. Дана равнобокая трапеция с основаниями *AD* и *BC* и точками *E* и *F* внутри. Оказалось, что описанные окружности треугольников *ADE* и *BCF* не пересекаются между собой и касаются прямых *AB* и *CD*, <u>а ещё отрезок *EF* лежит вне окружностей</u>.

Докажите, что средняя линия трапеции делит отрезок *EF* пополам тогда и только тогда, когда прямая *EF* высекает на окружностях равные хорды.

Комментарий 2: *Понятие «степень точки» является важным в современной олимпиадной геометрии, как и признаки вписанного четырёхугольника через степень точки или антипараллельность. Познакомиться со степенью точки можно, например, по книге Понарина «Элементарная геометрия.т.1». Данная задача дана нами для напоминания школьникам, что с высокой вероятностью на региональном этапе Всероссийской олимпиады может быть геометрия, решаемая с помощью степени точки, радикальных осей и центра или антипараллельности, как это было в последние три года.*