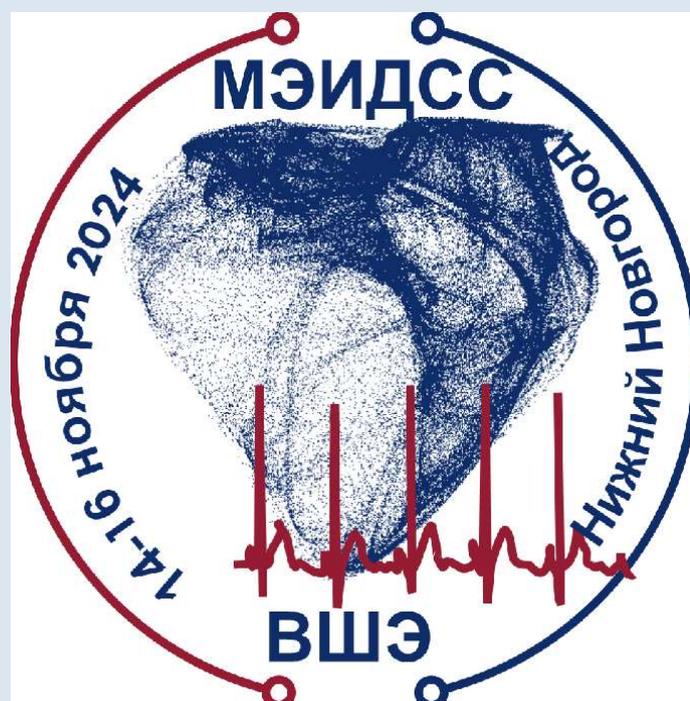


Всероссийская научная конференция

Моделирование и экспериментальные
исследования динамики сложных систем
МЭИДСС-2024



Сборник трудов

Нижний Новгород – 2024

Нижегородский филиал
федерального государственного автономного образовательного учреждения
высшего образования «Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»

«Моделирование и экспериментальные исследования
динамики сложных систем»

Сборник трудов Всероссийской научной конференции

14-16 ноября 2024 года

Нижний Новгород
2024

УДК 517.9, 519.25, 530.182
ББК 22.312
Н25

Моделирование и экспериментальные исследования динамики сложных систем / Сборник трудов Всероссийской научной конференции, 14-16 ноября 2024 года / Под ред. Н.В. Станкевич – Н.Новгород: НИУ ВШЭ – Нижний Новгород, 2024. – 91 с.

В сборнике опубликованы материалы Всероссийской научной конференции «Моделирование и экспериментальные исследования динамики сложных систем», прошедшей в Нижегородском филиале Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики» 14-16 ноября 2024 года. Работы участников связаны с анализом и обработкой экспериментальных данных в радиофизических экспериментах, а также данных, полученных в результате мониторингов, изучением сложных, хаотических процессов в динамических системах, применением методов нелинейной динамики в физиологии, медицинской диагностике, информационных системах, радиофизике.

Для научных работников, преподавателей, аспирантов, студентов, специализирующихся в области радиофизики, электроники, математическом моделировании.

Редакционная коллегия:

кандидат физ.-мат. наук Н.В. Станкевич (отв. редактор)

Рецензенты:

доктор физ.-мат. наук С.В. Гонченко (НИУ ВШЭ – Нижний Новгород)

доктор физ.-мат. наук А.Г. Масловская (Университет Иннополис)

Работа издана в авторской редакции

Конференция организована при финансовой поддержке
Национального исследовательского университета «Высшая школа
экономики», программа «Зеркальные лаборатории»

УДК 517.9, 519.25, 530.182
ББК 22.312

ISBN 978-5-907868-87-8

© Авторы статей
© НИУ ВШЭ – Нижний Новгород, 2024

Содержание

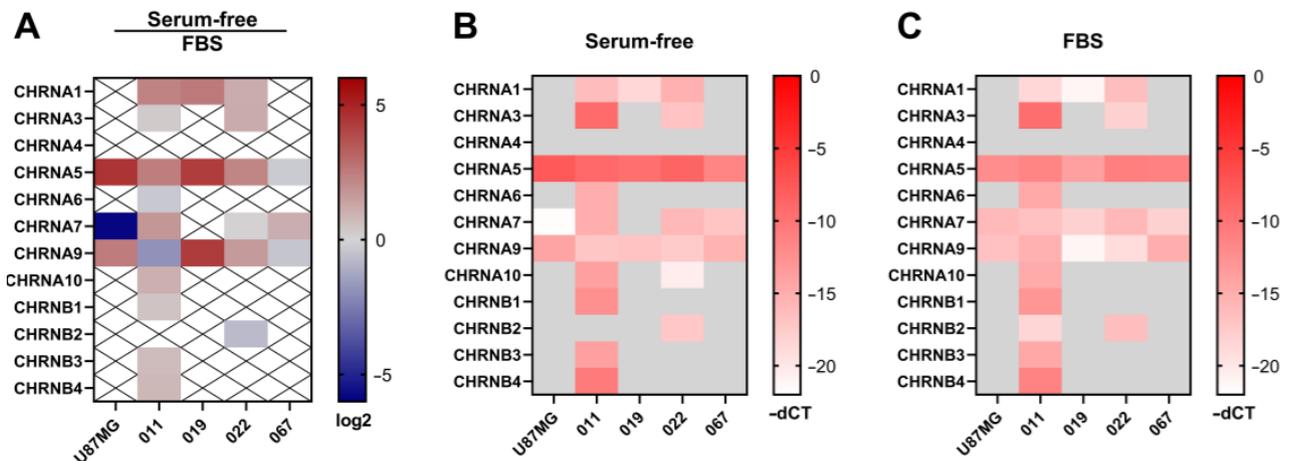
Секция 1 «Анализ экспериментальных данных»	7
Д.С. Кудрявцев Электрическая активность клеток: молекулярные механизмы, инструменты исследования и биологические последствия.....	9
П.В. Купцов Выявление характера динамики нелинейных систем при помощи быстрых ляпуновских индикаторов.....	11
Г.А. Гуйо Эффекты анестезии в электрокортикограммах крыс характеризуемые с помощью анализа флуктуаций относительно тренда.....	14
А.В. Наумов, И.М. Кипелкин, М.И. Самбунова, В.В. Разин, Н.В. Громов, Л.А. Смирнов, Т.А. Леванова, С.А. Герасимова, А.В. Лебедева Стимулирование нейронной активности в срезе гиппокампа мыши для восстановления физиологической активности с использованием сигналов, предсказанных LSTM.....	17
В.О. Салмиянов, А.Г. Масловская Мультифрактальная параметризация снимков компьютерной томографии легких в монохромном представлении.....	20
Секция 2 «Сложное поведение динамических систем»	23
N.V. Kuznetsov The theory of hidden oscillations: global stability boundary, hidden attractors and multistability.....	25
А.Г. Масловская, И. Шуай, И.А. Шевкун, С.К. Сарухян Гибридные подходы для <i>in silico</i> исследований процессов коммуникации в эволюционирующих микробных популяциях	27
В.В. Семенов Роль нелокальной связи при управлении стохастическим резонансом в ансамблях связанных бистабильных осцилляторов	30
Т.А. Алексеева Аналитико-численные методы прогнозирования и управления нерегулярной динамикой в математических моделях экономики	32
Д.А. Крылосова, П.В. Купцов, Н.В. Станкевич Сложная динамика системы ФитцХью-Нагумо в режиме устойчивого состояния равновесия с адаптивным внешним воздействием	35

Д.С. Никитин, Н.В. Станкевич Разрушение инвариантной кривой после каскада бифуркаций удвоений.....	38
К.А. Ганжа, Г.П. Неверова Влияние изъятия на режимы динамики модели Морана-Рикера с запаздыванием.....	41
А.А. Громыко, Г.П. Неверова Математическое моделирование динамики популяции с протандрией.....	44
А.А. Панюшев, О.М. Посненкова, Н.В. Станкевич Различные типы мультистабильности в отображении Киалво.....	47
Э.Р. Багаутдинова, Н.В. Станкевич Управление мультистабильностью в модели типа Ходжкина-Хаксли в результате учета дополнительного ионного канала	50
Секция 3 «Радиофизическое моделирование»	53
А.П. Кузнецов, Л.В. Тюрюкина К проблеме взаимодействия хаоса и сценария Ландау-Хопфа.....	55
Л.И. Мороз, А.Г. Масловская Дробно-дифференциальный подход к численному моделированию диффузионно-волновых процессов в сегнетоэлектриках.....	58
В.А. Корякин Аттрактор Лоренца в шестимерной модели, описывающей динамику лазера.....	61
А.Л. Шамсина, Н.В. Станкевич Динамика генератора квазипериодических колебаний под периодическим импульсным воздействием	64
А.К. Килина, Н.В. Станкевич Квазипериодическая и хаотическая динамика в системе Чуа под периодическим импульсным воздействием.....	67
Секция 4 «Теория динамических систем»	71
Н.В. Барабаш Аттракторы и бифуркации кусочно-гладких динамических систем	73
С.В. Гонченко Гомоклинический резонанс и эллиптические точки	74
Ж.Т. Жусубалиев, У.А. Сопуев, Е.Н. Иванова Вырожденные бифуркации удвоения периода в кусочно-линейном отображении	75

А.А. Александров О связи уравнения Хилла с динамическими системами на торе	78
А.Э. Рассадин Энтропия Кульбака-Лейблера растягивающих эндоморфизмов окружности	81
А.Н. Куликов, Д.А. Куликов Бифуркации инвариантных многообразий в уравнении Кана-Хиллиарда.....	83
О.М. Шилов О возникновении различных гиперболических множеств на двумерном торе.....	85
К.С. Зайчиков, А.О. Казаков Методы проверки псевдо-гиперболичности.....	86
Программный комитет	87
Программа конференции	88

Секция 1

«Анализ экспериментальных данных»



Электрическая активность клеток: молекулярные механизмы, инструменты исследования и биологические последствия

Д.С. Кудрявцев^{1,2}

¹Лаборатория лиганд-рецепторных взаимодействий отдела молекулярной нейроиммунной сигнализации ГНЦ ИБХ РАН

²Кафедра биологии и общей генетики, Институт цифрового биодизайна и моделирования живых систем научно-технологического парка биомедицины Сеченовского Университета, Москва

E-mail: kudryavtsev@ibch.ru.

Электрическая активность клеток является фундаментальным аспектом клеточной функции, влияющим на различные биологические процессы и механизмы. Эта активность в основном сводится к движению ионов через клеточные мембраны, на которых создается разность потенциалов, позволяющая генерировать электрические сигналы — потенциалы действия — необходимые для связи между клетками в возбудимых тканях (мышцы, сердце и нервная система). На молекулярном уровне электрическая активность клеток регулируется ионными каналами, транспортерами и рецепторами. Эти белки способствуют перемещению ионов натрия (Na^+), калия (K^+), кальция (Ca^{2+}) и хлора (Cl^-) через клеточную мембрану.

Для изучения электрической активности клеток были использованы:

1. Пэтч-кламп: метод позволяет измерять ионные токи, проходящие через отдельные ионные каналы, что позволяет получить представление об их функционировании и фармакологических свойствах.
2. Анализ экспрессии генов ионных каналов позволяет составить представление о том, какова проводимость мембран исследуемых клеток: к каким химическим веществам они чувствительны, для каких именно ионов проводимость мембран максимальна. Для исследования экспрессии генов подходят методы количественной полимеразной цепной реакции и секвенирования транскриптома.
3. Протеомика: подход позволяет понять, какие белки присутствуют в исследуемой клетке. При этом становится возможным количественно сравнить изменения представленности белков в одинаковых клеточных культурах (полученных от одного пациента) при воздействии различных веществ, влияющих на активность ионных каналов (например, лекарственных препаратов).

Биологические последствия изменения электрической активности клеток могут иметь весьма существенные последствия. Так, нами было исследовано лиганд-управляемые ионные каналы из семейства никотиновых ацетилхолиновых рецепторов на клетках первичных линий глиобластомы человека. Мультиформная глиобластома — один из наиболее опасных видов опухоли головного мозга с крайне неблагоприятным прогнозом и медианной выживаемостью в пятнадцать месяцев [1]. Были проанализированы общедоступные данные о пространственном распределении в опухоли уровней

экспрессии генов никотиновых рецепторов. Продемонстрирована неоднородность такого распределения: в лидирующем крае опухоли повышена экспрессия никотинового рецептора подтипа альфа7, а в глубине опухолевой массы рецептора типа альфа9. На клетках первичных линий глиобластомы человека из нескольких пациентов проанализирована реакция уровней экспрессии этих генов на различные условия среды, имитирующие окружение опухоли. Протеомный анализ показал возможные молекулярные механизмы такой реакции (путь киназы АКТ). Пэтч-кламп подтвердил функциональную активность рецепторов указанных подтипов на мембранах клеток. Полученные данные использованы для построения модели роста опухоли на основе клеточных автоматов, которая помогла объяснить наличие пространственной неоднородности экспрессии генов различных подтипов исследуемых ионных каналов.

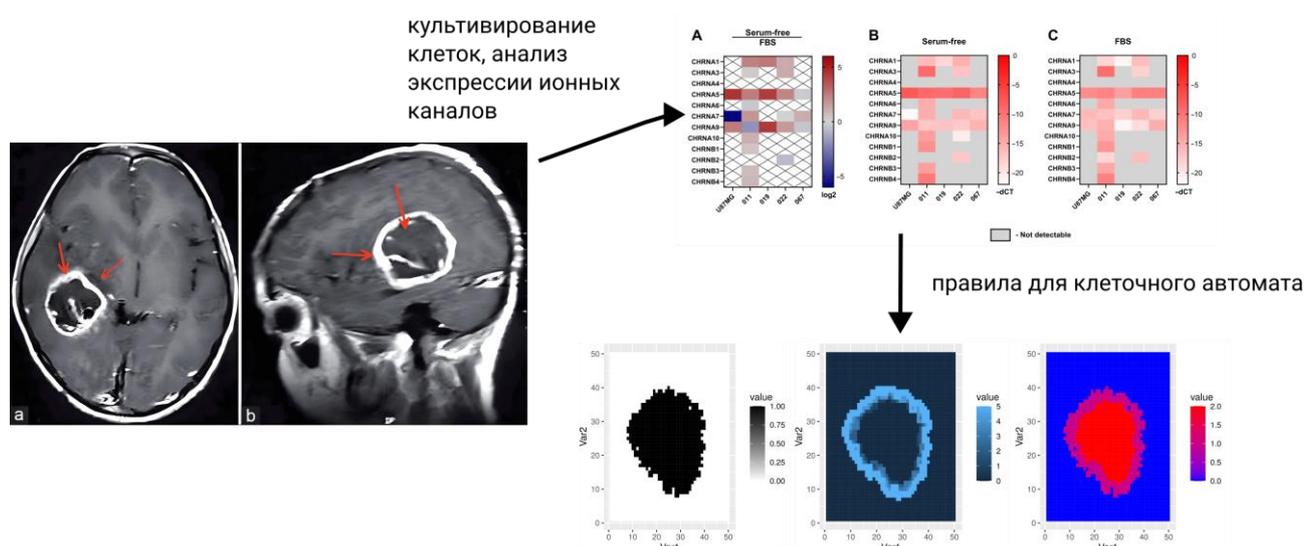


Рис. 1. Общая концепция исследования лиганд-управляемых ионных каналов в первичных пациентских линиях глиобластомы

Понимание электрической активности клеток предполагает изучение сложных молекулярных механизмов, использование передовых исследовательских инструментов и методов моделирования для иллюстрации происходящих процессов и предсказания поведения таких систем. Эта область продолжает развиваться, предлагая новые представления о функционировании клеток и потенциальных терапевтических приложениях.

Библиографический список

1. *I.KH. Almadhoun M, Hattab A. Pediatric Glioblastoma Multiforme: A Challenging Case of Rapid Growth and Clinical Deterioration in an 11-Year-Old Female Patient. Cureus 15(10): e47697. doi:10.7759/cureus.47697*

Выявление характера динамики нелинейных систем при помощи быстрых ляпуновских индикаторов

П.В. Купцов¹

¹Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»

Нижний Новгород

E-mail: kupav@mail.ru

При исследовании поведения нелинейных систем один из главных вопросов состоит в том, чтобы установить общий характер этого поведения: неподвижное равновесие, периодические колебания, квазипериодическая динамика, хаос или гиперхаос. С математической строгостью это удаётся сделать достаточно редко, поэтому в большинстве практически значимых случаев применяются подходы на основе численных методов. Среди них один из главных основан на вычислении спектра показателей Ляпунова [1]. Их количество совпадает с размерностью фазового пространства, и они по определению упорядочены в порядке убывания. При движении вдоль траектории системы, они характеризуют скорость экспоненциального роста или убыли в пространстве малых возмущений траектории мер геометрических структур разной размерности: первый показатель — рост или убыль длин отрезков, сумма двух первых показателей — рост или убыль площадей, например, окружностей или прямоугольников и так далее. Имея полный спектр показателей, можно идентифицировать любой из перечисленных выше режимов. Даже вычислив только старший, самый большой, показатель Ляпунова, можно получить много информации о поведении системы: старший показатель больше нуля — динамика хаотическая; ноль в системе с непрерывным временем — периодическое движение; отрицательный — неподвижная точка.

Обычная практика состоит в том, чтобы построить карту показателей Ляпунова — на плоскости двух управляющих параметров задаётся сетка с достаточно малым шагом, показатели вычисляются в каждом узле сети, и затем разным характерным конфигурациям спектра (например, знаку старшего показателя) сопоставляется точка того или иного цвета. Для корректного вычисления показателей Ляпунова требуется, чтобы траектория успела пробежать по значительной части исследуемого инвариантного множества, которому принадлежит. Поэтому построение такой плоскости даёт очень подробную информацию о характере динамики но требует достаточно длительных вычислений.

Быстрые ляпуновские индикаторы — это характеристические числа, позволяющие получить аналогичную ляпуновским показателям информацию о характере динамики за значительно более короткое время. Однако сразу отметим, что в отличие от показателей быстрые индикаторы менее надёжны.

Будут рассмотрены следующие быстрые критерии: FLI, OFLI, OFLI2, SALI и GALI.

Пусть имеется динамическая система

$$\dot{u} = F(u)$$

а её уравнение в вариациях имеет вид:

$$\dot{v} = J(u)v$$

Быстрый ляпуновский индикатор FLI предназначен для быстрого выявления хаотического режима. Идея его вычисления состоит в том, чтобы делать то же самое, что и при вычислении старшего показателя Ляпунова, но на коротком временном интервале. Это основано на предположении, что аттрактор обладает более или менее однородной структурой и если имеется хаос, то разбегание траекторий будет видно уже на достаточно коротком времени [2].

$$FLI(t, u(0), v(0)) = \sup_{0 < \tau < t} \ln \|v(\tau)\|$$

Начальное значение вектора возмущения берётся по норме единица, $\|v(0)\| = 1$. Так как время вычисления конечно, величина FLI зависит от выбора направления начального вектора. Для минимизации этого, величину FLI рекомендуется вычислять несколько раз, взяв в качестве стартовых некоторый ортогональный базис векторов $v(0)$. Затем в каждый момент времени выбирается максимальное значение FLI [2].

При исследовании одиночных траекторий диагностика режима выполняется по характеру зависимости FLI от времени. В режима хаоса эта величина нарастает быстрее всего — пропорционально t , на торах она ведёт себя пропорционально $\ln t$, на предельном цикле выходит на постоянное значение, а в неподвижной точке убывает как $-t$. При построении карт режимов на основе FLI диагностику выполняют по величине FLI, достигнутой к заданному, обычно небольшому, интервалу счёта. Обычно в случае хаоса эта величина будет максимальной.

Однако на небольших временах возможно ситуация, когда линейная функция за счёт малого коэффициента оказывается меньше по значению чем логарифм: $at < b \ln t$ где a и b — некоторые коэффициенты, значения которых зависят от свойств системы и которые неизвестны. Поэтому на картах режимах FLI могут возникать артефакты — области периодичности или квазипериодичности, которые ошибочно интерпретируются как хаотические.

Существование таких артефактов принципиально не устранимо из за конечного времени вычисления FLI, однако можно снизить вероятность их появления. С этой целью были предложены индикаторы OFLI и OFLI2 [2]. Идея OFLI основана на том, что вектора возмущения, направленные по касательной к траектории, в среднем не нарастают и не убывают во времени. Значит, чтобы максимально быстро выявить хаос, при вычислении $v(t)$ нужно исключить эту медленную составляющую вектора и следить за ростом во времени норм компонент, направленных по нормали к траектории. Идея, на основе которой строится метод вычисления OFLI2, состоит в том, что хаос — это с очевидностью принципиально нелинейное свойство. Поэтому при вычислении OFLI2 вместе с уравнением в вариациях первого порядка строят вариационное уравнение второго порядка, т.е. такое, которое учитывает квадратичную нелинейность при вычислении возмущений. Вектор, за ростом нормы которого

следят при вычислении OFLI2 строится как комбинация возмущений первого и второго порядка и также берётся только его ортогональная компонента.

Вычисление OFLI и в особенности OFLI2 более трудоёмко, но при этом нет гарантии, что построенные с их помощью карты режимов не будут содержать артефактов. Есть только качественные соображения, почему их должно быть меньше. Поэтому в общем случае их практическая польза под вопросом. Применение FLI оправдано тем, что карты режимов на их основе строятся в разы быстрее чем карты показателей Ляпунова. Поэтому представляется интересным их использовать на предварительных этапах исследования — сначала строим карты FLI, выявляем достойные внимание случаи и затем анализируем их более строго на основе построения карт показателей Ляпунова.

Принципиально иной подход используется при вычислении быстрых характеристических чисел SALI и GALI. Как известно, все вектора малых возмущений траектории стремятся выстроиться вдоль одного, самого быстрого направления, которое отвечает старшему показателю Ляпунова. Именно поэтому при вычислении более чем одного показателя требуется периодически выполнять ортогонализацию векторов возмущений. Однако, если в спектре имеются два идентичных показателя, то вдоль соответствующих им направлений выравнивания не будет. Например, у хаотических траекторий гамильтоновых систем с непрерывным временем всегда есть два нулевых показателя Ляпунова. Для проверки хаоса в гамильтоновой системе достаточно проследить за площадью параллелограмма, построенного на двух произвольных векторах малых возмущений. На хаотических траекториях площадь стремится к нулю, а на торах она будет флуктуировать около ненулевого значения. Такую проверку выполняет метод SALI. Метода GALI обобщает эту идею — рассматриваются N векторов, на которых строится N -мерный параллелепипед. Если его объём при движении вдоль траектории стремится к нулю, значит первые N показателей Ляпунова разные.

SALI и GALI не дают в общем случае возможность идентифицировать хаос в диссипативных системах с непрерывным временем, у которых обычно только один показатель Ляпунова равен нулю. Однако они могут быть эффективны для диагностики квазипериодичности. Также их применение может быть полезным для выявления хаотических режимов с двумя и более нулевыми показателями.

Работа подготовлена в результате проведения исследования в рамках проекта «Зеркальные лаборатории» НИУ ВШЭ

Библиографический список

1. Кузнецов С.П. Динамический хаос. Москва: Физматлит, 2006. 356 С.
2. Skokos Ch., Gottwald G. A., Laskar J. (Eds). Chaos Detection and Predictability. Springer, 2016. 280 С.

Оценка эффектов анестезии в электрокортикограммах крыс с помощью анализа флуктуаций относительно тренда

Г.А. Гуйо

Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н.Г.

Чернышевского, Саратов

E-mail: guyo199814@gmail.com.

Многие природные системы демонстрируют далекодействующие степенные корреляции в своей временной динамике [1]. Количественная оценка этих корреляций широко используется для определения текущего состояния системы или его изменений, вызванных переменными внутренними или внешними условиями. Для вычисления таких оценок для нестационарных наборов данных предложены подходы, основанные на флуктуационном анализе. Среди них флуктуационный анализ (DFA), вероятно, является наиболее популярным [2].

Недавние работы рассмотрели ограничения метода для различных типов нестационарного поведения и предложили дополненный подход, расширенный DFA (EDFA), который оценивает два показателя скейлинга [3]. Первый показатель количественно определяет особенности корреляций в соответствии с исходным методом DFA, а второй показатель характеризует, как распределение локальных флуктуаций профиля сигнала изменяется в зависимости от длины сегмента. С этой целью мы применяли EDFA к электроэнцефалограммам (ЭКоГ) двух групп животных, каждая из которых получала различный вид анестезии в рекомендуемых для операции дозах, а именно инъекционную анестезию или ингаляционную анестезию. Это исследование направлено на то, чтобы выявить различия в записях ЭКоГ, вызванных различными типами анестезии, и установить потенциал расширенного метода DFA для количественной оценки переходов между состояниями, бодрствование–анестезия.

DFA исходного сигнала $x(i)$, $i = 1, \dots, N$ включает следующие основные шаги. Первый шаг вычислений — построение профиля:

$$y(k) = \sum_{i=1}^k x(i) \quad (1)$$

Разделение профиля $y(k)$ на сегменты одинаковой длины n с оценкой локального тренда $y_n(k)$ для каждого из них. Обычно рассматривается линейный тренд, хотя может применяться использование других функций. Анализ флуктуаций с исключенным трендом для выбранного n :

$$F(n) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N [y(k) - y_n(k)]^2} \quad (2)$$

Повторяя эти шаги в широком диапазоне n , получаем зависимость $F(n) \sim n^\alpha$. Основная идея EDFA заключается в определении того, как различия в локальных флуктуациях F_{loc} , оцененных в пределах сегментов длины n , изменяются с изменением n . Стандартные отклонения F_{loc} вычисляются в широком диапазоне n для получения зависимости:

$$\sigma(F_{loc}(n)) \sim n^\beta$$

Экспериментальные процедуры проводили на крысах-самцах линии Вистар. Две группы крыс, каждая из которых состояла из 7 животных, были назначены на два вида анестезии. Эксперименты включали 30–40 мин регистрации ЭЭГ в состоянии бодрствования, а затем следующие 30–40 мин во время анестезии в оптимальной дозе, т.е. дозе, рекомендованной для операций. В каждом эксперименте регистрировали двухканальные корковые ЭЭГ.

Различия состояний зависят от анализируемого диапазона масштабов, и выбор оптимального диапазона может существенно улучшить диагностику происходящих изменений сигналов ЭЭГ. С этой точки зрения, оценка локальных скейлинговых показателей предпочтительнее, чем рассмотрение глобальных величин во всем диапазоне масштабов, поскольку усреднение может сделать индивидуальные различия менее выраженными. С целью численного сравнения таких различий мы рассчитали t -значения критерия Стьюдента для 10 сегментов ЭЭГ длительностью 1 минуту для бодрствования и 10 аналогичных сегментов для анестезии. Такое сравнение было проведено для локальных показателей, оцениваемых в пределах «окна» $\lg n = 0.7$. Существенные различия ($p < 0.05$) имеют место не для всех значений $\lg n$. Для рассмотренного примера (инъекционная анестезия) оптимальный диапазон $\lg n$ находится между 2,6 и 3,2, в то время как лучшая идентификация различий с использованием показателя скейлинга β метода EDFA достигается при меньших $\lg n$ (1.8 – 1.9). Поэтому необходимо учитывать как области относительно короткодействующих, так и далекодействующих корреляций.

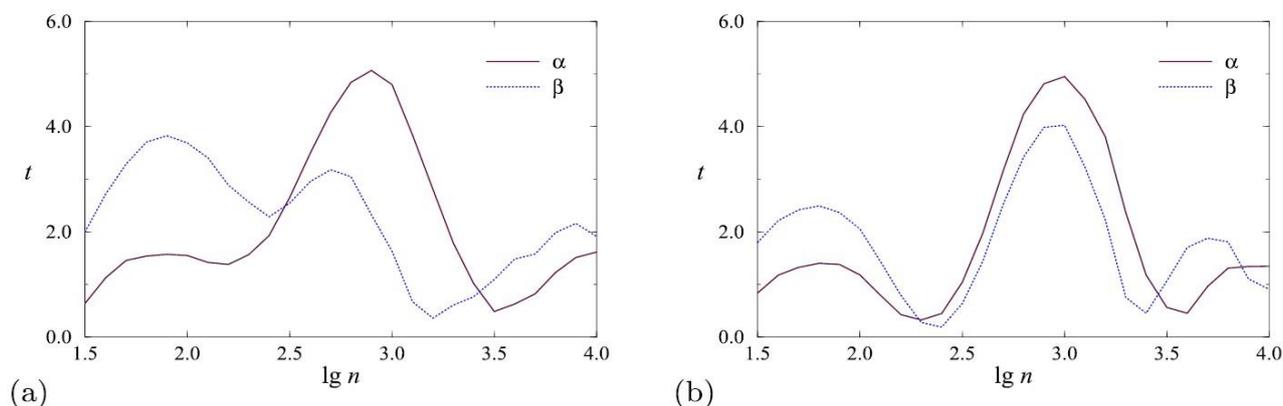


Рис. 1. Зависимости t -значений критерия Стьюдента от шкалы времени для сигналов ЭЭГ при инъекционной (а) и ингаляционной (б) анестезии.

Далее мы провели более тщательный анализ для групп животных и всех записей ЭЭГ и оценили локальные показатели скейлинга, количественно определив наиболее выраженные различия для каждой крысы в области относительно короткодействующих корреляций (диапазон $\lg n < 2,5$) и

дальнодействующих корреляций ($\lg n > 2,5$). Для короткодействующих корреляций различия между состояниями визуально распознаются не менее чем у 6 из 7 крыс. В области дальнодействующих корреляций наилучшее распознавание имеет место для показателя традиционного метода DFA (также не менее чем у 6 из 7 крыс). По этой причине можно сделать вывод, что анализ различий между ЭЭГ-сигналами в рассматриваемых состояниях не следует ограничивать одной областью, а предпочтительнее рассматривать более широкий диапазон $\lg n$.

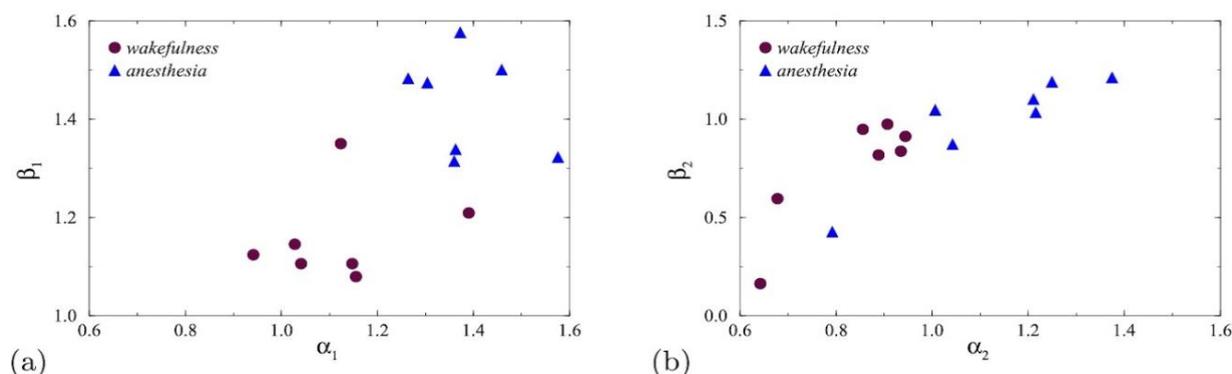


Рис. 2. Различия между показателями масштаба, количественно характеризующими области относительно короткодействующих корреляций (а) и дальнодействующих корреляций (б) для 1-го канала регистрации в экспериментах с инъекционной анестезией.

Согласно статистическому анализу для групп животных, традиционный подход DFA предпочтительнее, часто обеспечивая более высокие значения t -критерия Стьюдента, которые количественно оценивают различия между состояниями. Тем не менее, EDFA также демонстрирует существенные различия между состояниями бодрствования и анестезии, подтверждая заключение, полученное с помощью DFA, и в некоторых случаях улучшая диагностику, проводимую в рамках общепринятого алгоритма. По этой причине его применение полезно для тщательного изучения экспериментальных наборов данных, в частности, в длительных физиологических экспериментах, когда требуются чувствительные диагностические маркеры.

Публикация подготовлена в рамках гранта Программы «Мозг» АНО «Идея» № АСП-09-2022/II.

Библиографический список

1. G. Rangarajan, M. Ding (eds.), *Processes with long-range correlations: theory and applications* (Springer, Berlin, Heidelberg, 2003)
2. C.-K. Peng, S. Havlin, H.E. Stanley, A.L. Goldberger, *Chaos* 5, 82 (1995).
3. A.N. Pavlov, A.I. Dubrovsky, A.A. Koronovskii Jr., O.N. Pavlova, O.V. Semyachkina-Glushkovskaya, J. Kurths, *Chaos* 30, 073138 (2020)

Стимулирование нейронной активности в срезе гиппокампа мыши сигналами, предсказанными нейронной сетью LSTM

А.В. Наумов¹, И.М. Кипелкин¹, М.И. Самбурова¹, В.В. Разин¹, Н.В. Громов¹,
Л.А. Смирнов¹, Т.А. Леванова¹, С.А. Герасимова¹, А.В. Лебедева^{1,2}

¹ Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород

² Приволжский исследовательский медицинский университет, Нижний Новгород

E-mail: alexandr.naumov@unn.ru

Создание новых медицинских технологий для лечения нейродегенеративных заболеваний является актуальной задачей на стыке современной медицины, биологии, химии, физики, математики и инженерии [1]. Одним из перспективных направлений для решения этой проблемы является создание нейрочипов и нейроинтерфейсов, способных восстанавливать утраченные когнитивные функции [2].

Целью исследования является разработка подхода, характеризуемого добавлением искусственной нейрональной активности в виде предсказанных глубокой искусственной нейронной сетью различных типов сигналов по полученному заранее массиву нейрональных данных с целью получения биологического ответа (локального полевого потенциала, ЛПП) от нейронов гиппокампа. Данный подход был проверен в нейрофизиологических экспериментах *in vitro* с использованием срезов гиппокампа мышей и аппаратной платформы в виде платы Arduino UNO.

На первом этапе работы была проведена регистрация ЛПП. Мы собрали набор данных, содержащий записи ЛПП, зарегистрированные со срезов гиппокампа (400 мкм) у мышей линии C57BL/6 в возрасте 2–3 месяцев. Стимулирующий электрод был расположен в зубчатой фасции, два регистрирующих – в областях CA1 и CA3 гиппокампа. На втором этапе работы с использованием рекуррентной искусственной нейронной сети долгой краткосрочной памяти (LSTM) были предсказаны нейрональные сигналы в области CA1 гиппокампа мышей по входу. Сеть LSTM рассматривается как архитектура глубокого обучения первого выбора для прогнозирования временных рядов из-за своей способности изучать долгосрочные зависимости в данных. На третьем этапе предсказанный нейронной сетью цифровой сигнал в области CA1 гиппокампа (выходной сигнал в гиппокампе) кодировался в виде точек путем перевода из отрезка в милливольтгах в отрезок с диапазоном [0,4095]. После этого сигнал в аналоговом виде отображался на аппаратной плате Arduino UNO через программу для ЭВМ. На последнем этапе с помощью указанной платы осуществлялся схемотехнический перенос предсказанного гиппокампального сигнала для области CA1 через операционный усилитель на провода стимулирующего электрода, который устанавливался в области CA2 гиппокампа (находится непосредственно перед CA1 областью), а регистрирующий электрод устанавливался дендритах пирамидных нейронов в области CA1.

Результаты

Был проведен ряд экспериментов с вариацией амплитуды, длительности и частоты подаваемого предсказанного сигнала.

Первоначально, в данной серии не было получено положительного эффекта от подаваемого сигнала с целью получить корректный выходной сигнал в СА1 области гиппокампа мышей (см. рис. 1). По нашему предположению, это связано с тем, что подаваемый предсказанный сигнал имел большую длительность по сравнению с обычным стимулирующим сигналом от промышленного стимулятора. При этом получаемый сигнал терялся в «хвосте» подаваемого предсказанного сигнала.

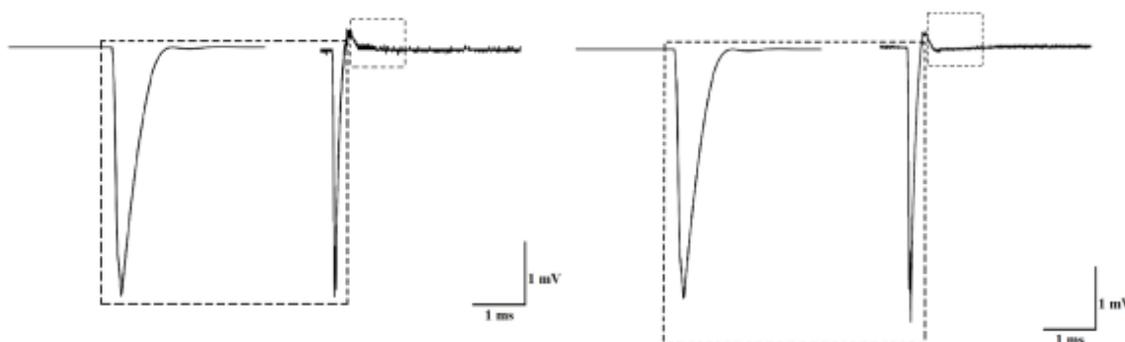


Рис. 1. Слева: Осциллограмма прогнозируемого сигнала гиппокампа, выделенного большим заштрихованным прямоугольником ниже. Справа: Результирующий ответ, выделенный маленьким заштрихованным прямоугольником выше.

В связи с этим было принято решение сделать предсказанный сигнал более «сглаженным», чтобы сделать получаемый ответ более различимым на его фоне. При сжатии сглаженного сигнала и подаче его на амплитуде в 4V был получен максимальный ЛПП (см. рис. 2), похожий на реальный сигнал в области СА1. Это свидетельствует о наличии реального отклика от дендритов пирамидных нейронов в СА1 области в ответ на подаваемую дополнительную нейрональную активность, закодированную на плате Arduino с помощью аналого-цифровых преобразования.

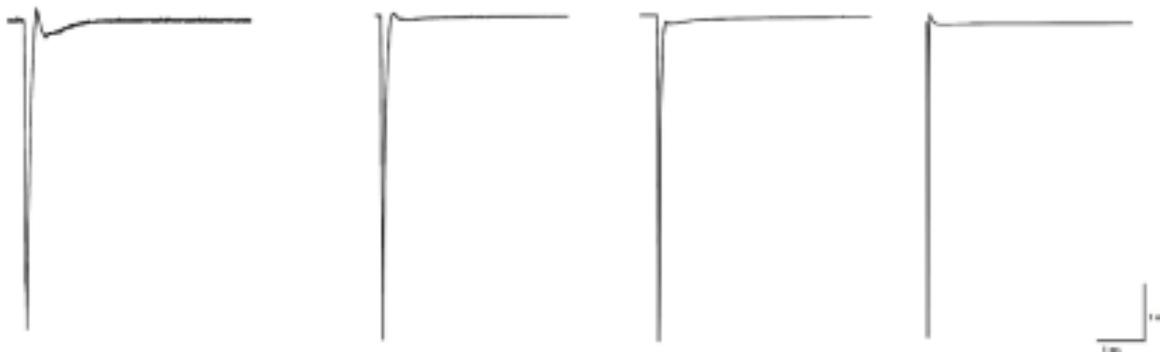


Рис. 2. Представление прогнозируемого сигнала различной амплитуды (2-4 В) в реальном эксперименте. Каждый сигнал содержит узкий, продолжительный «сглаженный» артефакт от подаваемого воздействия, за которым сразу следует результирующий ЛПП.

Таким образом, было проведено первое исследование по добавлению различных типов предсказанных сигналов в срезах гиппокампа для получения корректного выходного сигнала в CA1 области и при использовании междисциплинарного подхода – одновременного применения технологий искусственного интеллекта, схемотехники и нейробиологии.

Проведение экспериментальных работ по регистрации нейрональной активности в срезах гиппокампа и предъявлению предсказанного сигнала в биологическом эксперименте было поддержано грантом РФ (соглашение №23-75-10099). Проведение вычислений для получения предсказанного сигнала нейронной сетью было поддержано грантом Министерства науки и образования РФ (соглашение FSWR-2024-0005).

Библиографический список

1. *Steinmetz J. D. et al.* Global, regional, and national burden of disorders affecting the nervous system, 1990–2021: A systematic analysis for the global burden of disease study 2021. *The Lancet Neurology*, 23(4):344–381, 2024.
2. *Maksimenko V. A. Pisarchik A.N., Hramov A. E.* Physical principles of brain-computer interfaces and their applications for rehabilitation, robotics and control of human brain states. *Physics Reports*, 918:1–133, 2021.

**Мультифрактальная параметризация снимков
компьютерной томографии легких в монохромном представлении**

В.О. Салмиянов¹, А.Г. Масловская²

¹Амурский государственный университет,

г. Благовещенск

²Университет Иннополис,

г. Иннополис

E-mail: svsalmiyanov@mail.ru

Методы интеллектуального анализа представляют мощный инструмент для решения различных исследовательских проблем, в том числе и задач, связанных с классификацией объектов. Подобные методы адаптируют и применяют в клинической практике для предварительной диагностики заболеваний. Как правило, в подобных случаях требуется установить неявные особенности по данным медицинских показателей, представленных в виде временных рядов или цифровых изображений. Благодаря автоматизированным методам неинвазивной диагностики облегчается процесс принятия решения в постановке диагноза и снижается вероятность возникновения человеческой ошибки.

В настоящее время в аспекте медицинских приложений фокус внимания многих исследователей сосредоточен на применении широкого ряда методов интеллектуального анализа растровых изображений [1-3].

В рамках данной работы используется метод мультифрактальной параметризации для исследования морфологических особенностей структуры легких человека в случаях пневмонии. Мультифрактальный анализ основывается на классическом методе определения фрактальной размерности с помощью «box-counting» алгоритма. Существенным отличием от предыдущих работ [3-4] является применение мультифрактальной параметризации для растровых изображений в градациях серых оттенков. Специфика методов мультифрактального анализа заключается в оценке статистических фрактальных характеристик на основе оценки интенсивности меры в окрестностях каждого пикселя.

Алгоритм мультифрактального анализа монохромных изображений схож с алгоритмами мультифрактального анализа в исследовании бинарных изображений [5]. В отличие от мультифрактальной параметризации бинарных изображений, где подсчитываются количество кластеров, содержащих хотя бы одну точку исследуемой структуры, мультифрактальный анализ монохромных изображений основывается на подсчете яркости пикселей в исследуемом кластере с использованием следующего соотношения:

$$P_{ij}(\varepsilon) = \frac{z_{ij}}{\sum z_{ij}}, \quad (1)$$

где, z_{ij} представляет среднее значение яркости пикселя в кластере размера ε , а $\sum z_{ij}$ сумма значений яркости в кластере.

Далее вычисляется мера:

$$M_d(q, l) = \sum_{i,j=1}^k P_{i,j}^q \cdot l^d = N(q, l) l^d \xrightarrow{l \rightarrow 0} \begin{cases} 0, & d > \tau(q), \\ \infty, & d < \tau(q). \end{cases} \quad (2)$$

Затем взвешенное число клеток задается выражением:

$$N(q, l) = \sum_{i,j=1}^k P_{i,j}^q \propto l^{-\tau(q)}, \quad (3)$$

где показатель массы:

$$\tau(q) = -\lim_{l \rightarrow 0} \left(\frac{\ln N(q, l)}{\ln l} \right). \quad (4)$$

В завершении вариация коэффициента q позволяет вычислить спектр обобщенных фрактальных размерностей Реньи:

$$D(q) = \frac{\tau(q)}{q-1}. \quad (5)$$

В данном методе учитывается яркость пикселя, которая в компьютерном виде имеет закономерность: чем выше значение, тем светлее элемент изображения. Поэтому предпроцессорные алгоритмы должны быть направлены на заливку не интересующих областей черным цветом, а интересующие области должны визуализироваться в более светлых оттенках.

Для анализа были выбраны снимки компьютерной томографии легких человека. В процессе исследования снимков было выявлено, что малоконтрастные снимки являются менее чувствительными для классификации нормы и патологии. Поэтому предпроцессорные алгоритмы обработки были направлены на сегментацию изображений путем выделения объектов исследования и увеличение контраста представления изображений на основе расширения диапазона яркости изображения.

Алгоритм разделен на два последовательных шага. На первом этапе изображение загружается в растровом формате и в автоматическом режиме производятся преобразования, направленные на выделения объектов, относящихся к человеку. На втором шаге для преобразованного изображения применяется похожая процедура, но уже выделяются объекты исследования – человеческие легкие. Этапы алгоритма автоматизированной сегментации представлены на рисунке 1.

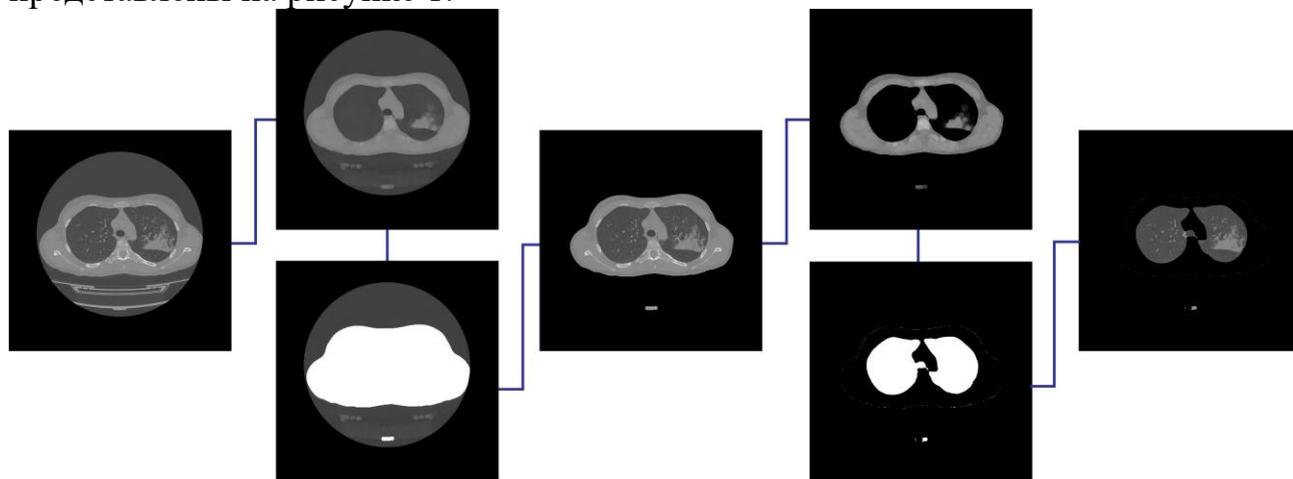


Рис.1. Этапы выделения легких методами автоматической сегментации

Результатами анализа являются рассчитанные спектры Реньи. Мы можем наблюдать, уширение спектра на снимках с диагностированной патологией (рис. 2). Стоит отметить, что значение при $q=0$ соответствует фрактальной размерности, определяемой классическим методом покрытий. Для снимков легких с диагностированной нормой и патологией фрактальная размерность установилась примерно на одном значении и соответствует 1.414 для нормы и 1.418 для патологии (для конкретного примера). Это свидетельствует о несостоятельности применения методики классического фрактального анализа для классификации изображений человеческих легких, так как значения размерности могут пересекаться для различных рассматриваемых случаев.

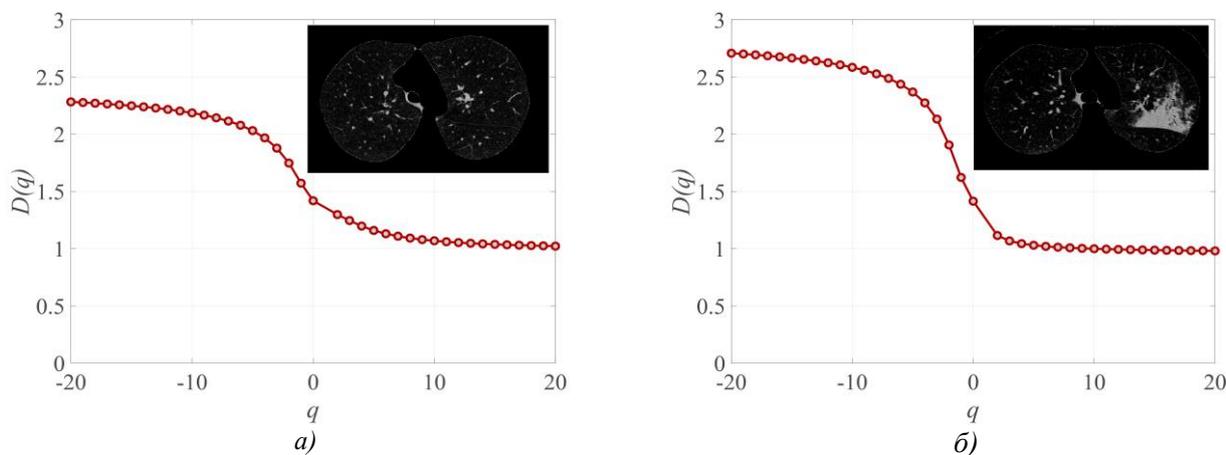


Рис.2. Мультифрактальный анализ снимков легких, соответствующих: норме – (а) и патологии – (б)

Таким образом, применение мультифрактальной параметризации является более чувствительной методикой (по сравнению с классическим фрактальным анализом) для классификации изображений человеческих легких и может быть применена в качестве вспомогательной методики для решения задач предварительной диагностики – выявления особенностей изображений по данным компьютерной томографии.

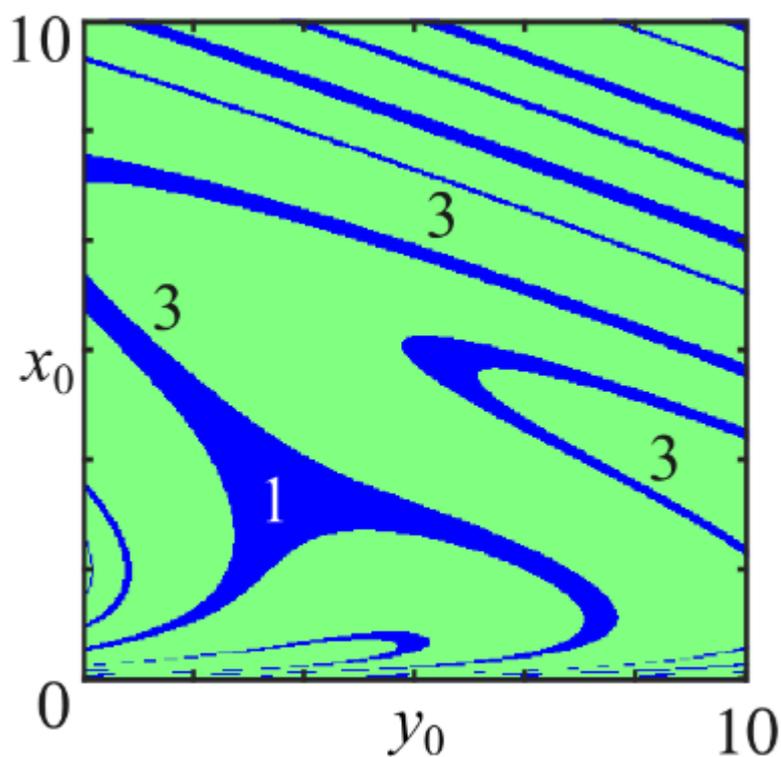
Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, проект №122082400001-8

Библиографический список

1. Jibi J. // Procedia Technology. 2016. V. 24. P. 957 – 963.
2. Yang L. // Helion. 2024. V. 10. №. 5. P. 18.
3. Troshin P.I. // International Journal of Pure and Applied Mathematics. 2015. V. 105. №. 2. P. 173-185.
3. Салмиянов В.О., Масловская А.Г. // Вестник Томского государственного университет. Управление, вычислительная техника и информатика, 2023. №65. С. 105 – 115.
4. Салмиянов В.О., Синагатулин А.А., Масловская А.Г. // Информатика и системы управления. 2024. №. 2(80) С. 97 – 109.
5. Falconer K.J. // Chichester: John Wiley and Sons. 2014. P. 338.

Секция 2

«Сложное поведение динамических систем»



The theory of hidden oscillations: global stability boundary, hidden attractors and multistability

N. V. Kuznetsov^{1,2}

¹*St. Petersburg State University, St. Petersburg,*

²*Institute for Problems in Mechanical Engineering RAS, St. Petersburg,*

E-mail: n.v.kuznetsov@spbu.ru

The development of the theory of global stability, the theory of bifurcations, the theory of chaos, and new computing technologies made it possible to take a fresh look at a number of well-known theoretical and practical problems in the analysis of multidimensional dynamical systems and led to the emergence of the theory of hidden oscillations which represents the genesis of the modern era of Andronov's theory of oscillations.

The theory of hidden oscillations is based on a new classification of oscillations and attractors as self-excited or hidden. By analogy with the notions "global attractor" and "local attractor", the notions "hidden attractor" (or "hidden oscillation") reflect the property of attractor's (oscillations') basin of attraction: the basin of attraction does not touch the equilibrium states of the system. The nonlocal birth through global bifurcations of hidden oscillations (e.g., the birth of a periodic trajectory via nonlocal bifurcation that preserves the stability in large of the only equilibrium) determines the hidden parts of the boundary of global stability in the parameter space, while the explicit parts of the boundary are determined by local bifurcations (e.g., by the bifurcation of the loss of local stability of the only equilibrium state).

In general the approach based on the existing methods of bifurcation theory and the numerical packages is effective in studying possible scenarios for the birth of attractors and for the analysis of already discovered attractors (e.g., as it happened historically with hidden Chua attractors). However, when solving problems of multistability or global stability, where it is necessary to find all nontrivial attractors or to establish their absence, often the key problem of this approach is inability to guarantee the absence of other attractors in the phase space than those found (see the history of 16th Hilbert problem on the maximum number of limit cycles of polynomial systems on the plane). Outer estimations of the global stability boundary in the space of parameters and the birth of self-excited oscillations in the phase space can be obtained by the linearization around equilibria and the analysis of local bifurcations and are related to various well-known conjectures on global stability by the first approximation (see, e.g. Andronov's proof of the conjecture on the Watt regulator global stability by the first approximation, Aizerman's and Kalman's conjectures on the global stability of control systems). Inner estimations of the global stability boundary can be obtained by classical sufficient criteria of global stability. In the gap between outer and inner estimations, there is an exact boundary of global stability which study requires the analysis of nonlocal bifurcations and hidden oscillations.

In various well-known theoretical and practical problems, the hidden attractors (their absence or presence and disposition) and the global stability boundary play an important role [1-8]. For example, in the control system, the transition of the system's state to a hidden attractor, caused by external disturbances, may result in undesirable behavior and is often the cause of accidents and catastrophes.

Pioneering works of N. Kuznetsov, laying out the foundations of the hidden oscillation theory, have attracted attention from the world scientific community and been recognized by the International Afraimovich Award from the NSC society (2021) and the Andronov prize from the Russian Academy of Science (2024).

Reference

1. Н.В. Кузнецов, Теория скрытых колебаний и устойчивость динамических систем”, Проект “Культура знаний, Пермский государственный национальный исследовательский университет, 23.12.2023, <https://rutube.ru/video/a1484bc7c1eb519c6bf7e4ca2d6b934a/>
2. N. Kuznetsov, Invited lecture "Hidden attractors in science and technologies", Academy of Finland, 2021 (<https://www.youtube.com/watch?v=-CzGtbfi8g0>)
3. Kuznetsov N.V., Theory of hidden oscillations and stability of control systems, *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 59(5), 2020, 647-668 (<https://doi.org/10.1134/S1064230720050093>)
4. Kuznetsov N.V., Lobachev M.Y., Yuldashev M.V., Yuldashev R.V., Kudryashova E.V., Kuznetsova O.A., Rosenwasser E.N., Abramovich S.M., The birth of the global stability theory and the theory of hidden oscillations, *Proc. of European Control Conf. (ECC-2020)*, St. Petersburg, 2020, 769–774 (<https://dx.doi.org/10.23919/ECC51009.2020.9143726>)
5. Dudkowski D., Jafari S., Kapitaniak T., Kuznetsov N.V., Leonov G.A., Prasad A., Hidden attractors in dynamical systems, *Physics Reports*, 637, 2016, 1-50 (<https://doi.org/10.1016/j.physrep.2016.05.002>)
6. N.V. Kuznetsov, T.N. Mokaev, O.A. Kuznetsova, E.V. Kudryashova, The Lorenz system: hidden boundary of practical stability and the Lyapunov dimension, *Nonlinear Dynamics*, 102(2), 2020, 713-732 (<https://doi.org/10.1007/s11071-020-05856-4>)
7. N. Kuznetsov, T. Mokaev, V. Ponomarenko, E. Seleznev, N. Stankevich, L. Chua, Hidden attractors in Chua circuit: mathematical theory meets physical experiments, *Nonlinear Dynamics*, 111, 2023 5859–5887, <https://doi.org/10.1007/s11071-022-08078-y>
8. Wang X., Kuznetsov N.V., Chen G., *Chaotic Systems with Multistability and Hidden Attractors*, Springer, 2021 (<https://doi.org/10.1007/978-3-030-75821-9>)

Гибридные подходы для *in silico* исследований процессов коммуникации в эволюционирующих микробных популяциях

А.Г. Масловская¹, И. Шуай², И.А. Шевкун², С.К. Саруханян²

¹Университет Иннополис,
Иннополис

²Амурский государственный университет,
Благовещенск

E-mail: a.maslovskaya@innopolis.ru.

В современном представлении бактерии – не просто совокупность индивидуальных микроорганизмов, имеющих примитивную организацию, эти микробы способны проявлять сложное коллективное поведение в сообществе. Бактериальные популяции, демонстрируя высокий уровень самоорганизации, возможность образования пленок и формирование факторов резистентности, становятся важным объектом междисциплинарных исследований. Одной из концепций, применяемой при изучении объектов микромира, является “*in silico*” – исследования, предполагающие изучение биосистемы в полном цикле вычислительного эксперимента с использованием технологий компьютерного моделирования.

На настоящем этапе установлено, что многие биопроцессы в бактериальных популяциях (матурация и образование структур, подвижность, биолюминесценция, резистентность к антибиотикам, и др.) для широкого ряда бактериальных видов регулируются процессами бактериальной коммуникации, в числе важнейших из которых – «чувство кворума» (quorum sensing). Чувство кворума позволяет бактериям воспринимать присутствие друг друга, формировать отклик на внешние раздражители, действуя коллективно за счет выработки специальной химической субстанции (аутоиндукторов) посредством экспрессии генов [1].

Для исследования процессов, регулируемых кворумом, и пространственно-временных характеристик бактериальной коммуникации активно применяют средства и методы математического моделирования [2]. В фокусе нашего внимания – процессы бактериального кворума для рода бактерий «Псевдомонады» (*Pseudomonas*) и детерминированный подход, который позволяет формализовать процессы динамики, диффузии, продуцирования, влияния обратной связи для двух основных химических субстанций – аутоиндукторов (аминокислоты AHL) и специального фермента лактоназы. Базовая модель [3] формализуется как начально-краевая задача для системы полулинейных уравнений типа «реакция-диффузия»:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = D_u \Delta u - \gamma_u u - \gamma_{L \rightarrow AHL} Lu + F_1 \\ \frac{\partial L}{\partial t} = D_L \Delta L - \gamma_L L + F_2 \end{cases}, \quad x \in \Omega, \quad 0 < t \leq \bar{t}, \quad (1)$$

$$u(x, 0) = u_0, \quad L(x, 0) = L_0, \quad x \in \Omega; \quad \left. \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\Gamma} = 0, \quad \left. \frac{\partial L}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\Gamma} = 0, \quad 0 < t \leq \bar{t}, \quad (2)$$

где $u(x,t)$ – пространственно-временное распределение концентрации АНЛ, моль/л; $L(x,t)$ – пространственно-временное распределение концентрации лактоназы, моль/л; Ω – расчетная область и Γ – ее граница; \bar{t} – время наблюдения; $D_u, D_L, \gamma_u, \gamma_L, \gamma_{L \rightarrow u}$ – положительные модельные параметры.

В системе (1) генерационные слагаемые, определенные F_1 и F_2 , отвечают за локацию бактериальных популяций, пространственно-временное распределение биомассы и характерную зависимость выработки субстанций, отвечающих за кворум от плотности популяции. Таким образом, очень важной составляющей процесса моделирования является инициализация объекта – бактериальные клетки, биопленка, бактериальная культура, выращенная на питательной среде.

В классическом подходе [3] для исследования характеристик кворума использованы простые геометрические примитивы и приближение среднего поля, чтобы описать бактериальную колонию. Ему предшествовали исторически еще более простые модели кворума на основе формализации в виде аппарата обыкновенных дифференциальных моделей. Однако на современном этапе имеется четкая тенденция к развитию гибридных подходов – сложных моделей, представляющих комбинации (и модификации) известных моделей эволюции микробиологических сообществ и бактериальных процессов коммуникации. В нашей работе мы представляем несколько таких гибридных концепций. Первый подход основан на интеграции модели бактериального кворума и модели роста бактериальной колонии на питательной среде. Последняя модель была предложена ранее Кавасаки [4]. На рис. 1 показан пример такой симуляции. Можно отметить, что при достаточно высоком уровне бактериального кворума наиболее активно коммуницирующей частью колонии является ее граница.

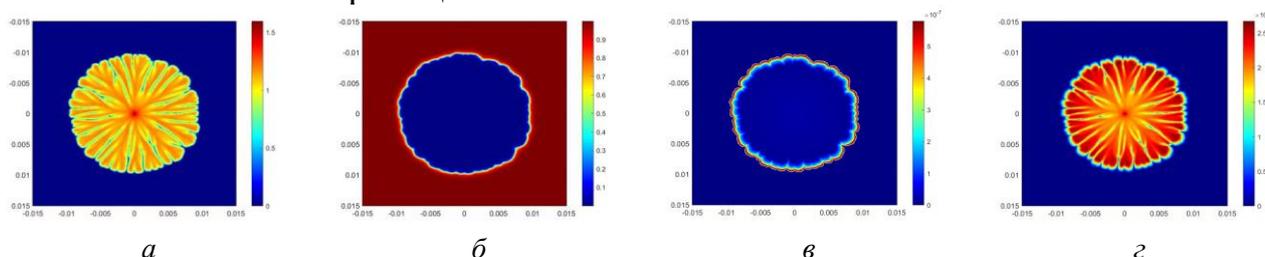


Рис.1. Пространственные распределения характеристик 2D модели в фиксированный момент времени: бактериальной массы – (а), потребления питания – (б), аминокислоты – (в) и лактоназы – (з)

Второе направление представляет альтернативу первому в части моделирования процесса роста биомассы на питательной среде. Однако он базируется на другом теоретическом подходе – модели Аллена-Кана, представляющей собой расширение модели Колмогорова-Фишера. Эта модель позволяет исследовать эффект Олли, который при поддержании определенных условий, диагностируется в микробиологических сообществах – существует некоторая пороговая численность популяции, только при достижении которой, популяция получит шанс на развитие. На рис. 2 показан пример реализации этой модели. Модель позволяет установить характеристик популяции в

присутствии хищников (например, бактериофагов) или ингибирующих воздействий [5].

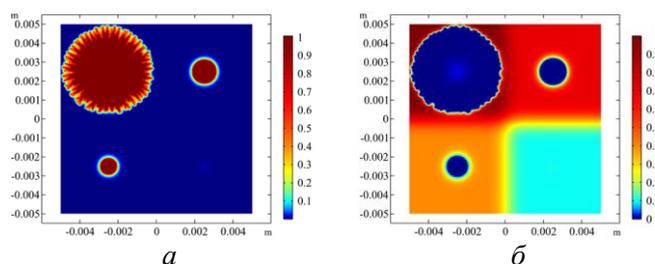


Рис.2. Пространственные распределения характеристик 2D модели в фиксированный момент времени: бактериальной массы – (а), потребления питания – (б) при вариации начального уровня питания и концентрации начального посева

Третьей реализуемой концепцией является соединение двух подходов – дискретно-динамического агентного моделирования на основе методологии клеточных автоматов и детерминированного, использующего аппарат уравнений с частными производными [6]. Мы предлагаем гибридную модель формирования бактериальной пленки с учетом процессов распространения (колонизации предоставляемой площади) за счет механизмов регуляции кворума. На рис. 3 показан пример симуляции пленки в условиях реализации режима инокуляции и в отсутствии него.

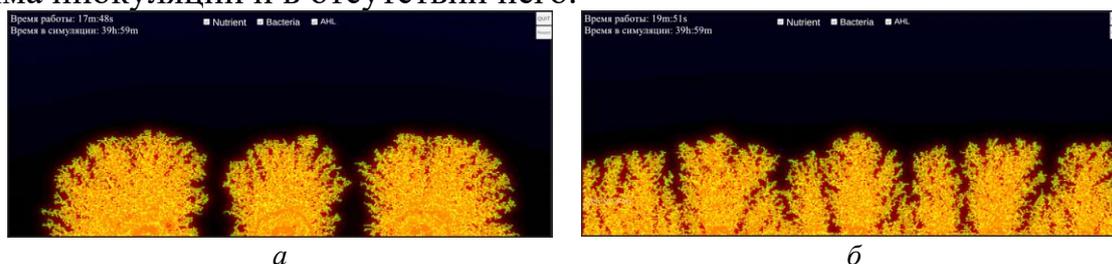


Рис.3. Визуализация фрагментов роста биопленки в 2D модели для режимов: локализованного роста – (а), с учетом процесса инокуляции, регулируемой кворумом – (б)

Таким образом, работа обобщает результаты цикла исследований коллектива, направленных на развитие гибридных подходов в целях комплексного исследования трудно формализуемых процессов коммуникации в эволюционирующих микробных популяциях.

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, проект № 122082400001-8.

Библиографический список

1. Greenberg E.P. // J Clin Invest. 2003. V. 112. №. 9. P. 1288.
2. P'erez-Vel'azquez J., G'olgeli M., Garc'ia-Contrera R. // Bull. Math. Biol. 2016. V. 78. P. 1585.
3. Shuai Y., Maslovskaya A.G., Kuttler C. // Mathematical Biology and Bioinformatics. 2023. V. 18. №. 1. P. 89.
4. Kawasaki K., Mochizuki A., Matsushita M., Umeda T., Shigesada N. // J. Theor. Biol. 1997. V. 188. P. 177.
5. Shuai Y., Maslovskaya A. // In Proc. of IEEE: Applied Mathematics, Computational Science and Mechanics: Current Problems (AMCSM), Voronezh, Russian Federation, 2024. P. 1.
6. Sarukhanian S., Maslovskaya A., Kuttler C. // Mathematics. 2023. V. 11. P. 3346.

Роль нелокальной связи при управлении стохастическим резонансом в ансамблях связанных бистабильных осцилляторов

В.В. Семенов¹

¹*Саратовский национальный исследовательский государственный университет
имени Н.Г. Чернышевского,
Саратов
E-mail: semenov.v.v.ssu@gmail.com*

В настоящее время науке известно большое количество методов управления характеристиками индуцированных шумом колебаний в режиме стохастического резонанса. Среди разработанных подходов можно отметить введение запаздывающей обратной связи [1,2], изменение характеристик шумового воздействия (к примеру, вариация времени корреляции [3]), одновременное использование аддитивного и мультипликативного шума [4], изменение силы связи в случае связанных осцилляторов [5,6]. В дополнение, в сетях связанных осцилляторов может быть реализован еще один метод управления: использование особенностей топологии связи (к примеру, см. работу [7], где была задействована топология многослойной сети «мультиплексинг»). Данный подход рассматривается в представленном докладе на примере стохастического резонанса в ансамбле нелокально связанных передемпфированных бистабильных осцилляторов. Уравнения модели имеют вид:

$$\frac{dx_i}{dt} = mx_i - x_i^3 + \sqrt{2D}n_i(t) + A \sin(\omega t) + \frac{\sigma}{2R} \sum_{j=i-R}^{i+R} (x_j - x_i) \quad (1)$$

где $i=1,2,\dots,N$ ($N=100$ – количество осцилляторов), $m=0.25$ отвечает режиму бистабильности парциального элемента ансамбля, $n_i(t)$ – статистически независимые источники белого Гауссова шума, D – интенсивность шума, A и ω – амплитуда и частота внешнего периодического воздействия, σ и R – сила и радиус связи.

Исследования стохастического резонанса базировались на анализе пространственно-временных диаграмм $x_i(t)$, последующем анализе спектров мощности колебаний осцилляторов, а также расчётах среднего по ансамблю соотношения «сигнал/шум». Прежде чем приступить к изучению эволюции индуцированной шумом динамики при увеличении радиуса связи, были проанализированы два предельных случая: наличие локальной (изучено ранее, см. работу [7]) и глобальной связи. Были выявлены диапазоны силы связи, при которых использование одной из двух рассматриваемых топологий более выгодно с точки зрения усиления регулярности индуцированных шумом колебаний, что выражается в увеличении пиковых значений соотношения «сигнал/шум». Было установлено, что при значениях силы связи σ меньшей или сопоставимой с единицей глобальная связь более эффективно усиливает эффект стохастического резонанса. Напротив, локальный характер взаимодействия

более предпочтителен при больших значениях силы связи. Таким образом, можно предположить, увеличение радиуса связи может приводить как к усилению, так и подавлению эффекта стохастического резонанса, что определяется силой связи. В частности, ожидается, что диапазон значений σ , в котором глобальная связь более эффективно усиливает стохастический резонанс, увеличение радиуса связи будет приводить к усилению эффекта. Напротив, если усиление при помощи локальной связи более эффективно по сравнению с глобальной связью, увеличение радиуса связи приведет к подавлению эффекта стохастического резонанса. Данные предположения были полностью подтверждены результатами численного моделирования (см. Рис. 1). Таким образом, нелокальная связь может выступать в роли как конструктивного (Рис. 1а), так и деструктивного (Рис. 1б) фактора при протекании эффекта стохастического резонанса в ансамблях связанных бистабильных осцилляторов. Следует отметить эффект насыщения, наблюдаемый в обоих случаях с ростом радиуса связи. Так, при $R > 20$ различия в динамике ансамбля с нелокальной и глобальной связью минимальны.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 24-72-00054)

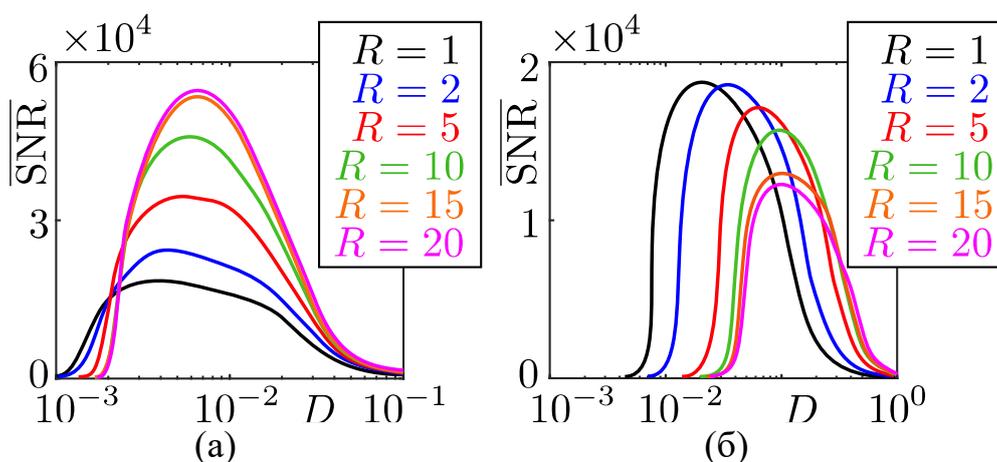


Рис.1. Эволюция зависимости среднего соотношения «сигнал/шум» от интенсивности шума в системе (1) с ростом радиуса связи при $\sigma = 0.2$ (а) и $\sigma = 5$ (б). Значения параметров: $m=0.25$, $A=0.04$, $\omega=0.005$.

Библиографический список

1. D. Meyer, L. Du and C. Wang // Journal of Statistical Physics. 2009. V. 137. P. 625.
2. Z.-L. Jia // Physica Scripta. 2010. V. 81. P. 015002.
3. P. Hänggi et al. // Journal of Statistical Physics. 1993. V. 70. P. 25.
4. Z.Qiao et al. // Phys. Rev. E. 2016. V. 94. P. 052214.
5. A. Neiman and L. Schimansky-Geier // Phys. Lett. A. 1995. V. 197, 379.
6. C. Nicolis and G. Nicolis // Phys. Rev. E. 2017. V. 96. P. 042214.
7. V. Semenov and A. Zakharova // Chaos. 2022. V. 32. P. 121106.

Аналитико-численные методы прогнозирования и управления нерегулярной динамикой в математических моделях экономики

Т. А. Алексеева^{1,2}

¹*Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»,
Санкт-Петербург,*

²*Санкт-Петербургский государственный университет,
E-mail: talekseeva@hse.ru.*

В экономике может возникать сложная нерегулярная динамика, которая нарушает функционирование экономической системы. В таких случаях система может перейти в нерегулярный режим, в том числе хаотический. При этом могут возникать трудности для прогнозирования и управления поведением экономики, а также для разработки экономической политики. Является ли нерегулярная динамика следствием внешних случайных воздействий (например, таких как крупные банкротства, нефтяные и валютные шоки, природные явления, эпидемии) или порождается скрытыми внутри экономического механизма детерминированными эндогенными силами? Этот важный вопрос активно обсуждается в современной экономической литературе (см., например, [1, 2]). В то же время обширная литература по исследованию колебаний в экономических моделях (см., например, [3, 4]) в первую очередь сосредоточена на постановке задач, изучении и разработке экономических механизмов и применении частных случаев классических методов анализа динамических систем для конкретных, в основном низкоразмерных, моделей. В результате комплексная картина анализа динамики остается за рамками исследований и не позволяет ответить на важные вопросы, связанные с прогнозированием предельной динамики и управлением нерегулярным поведением в моделях экономики. Интенсивное развитие в последние годы вычислительных средств, искусственного интеллекта и отдельных направлений теории динамических систем делают актуальной задачу пересмотра методов анализа предельной динамики математических моделей экономики и разработку комплексного подхода на базе аналитико-численных процедур для улучшения ее прогнозирования, расширения класса исследуемых моделей, а также управления нежелательной динамикой.

В экономической науке для построения адекватных математических моделей, обеспечивающих возможность исследования их динамики с помощью эффективных методов, важно учитывать информацию, определяющую принципы вывода (или выбора из некоторого множества) соответствующих моделей (в том числе положения экономической теории, предпосылки модели, допустимые значения показателей, возможные методы, доступные данные и др.). Для прогнозирования, анализа и управления нерегулярной детерминированной динамикой в полученных математических моделях решаются задачи выявления возможных установившихся поведений динамической системы после переходных процессов (задача выявления аттракторов и бассейнов их притяжения в фазовом пространстве системы) и разбиения пространства параметров системы на области, для которых

существуют определенные конфигурации аттракторов. В случаях отсутствия в системе аттракторов с регулярным поведением (стационарным или периодическим) или выявления аттракторов с нерегулярным поведением ставится задача введения в математическую модель дополнительного управления (с учетом возможности его соответствующей реализации в экономической модели) для появления в поведении системы регулярного аттрактора.

Современный этап изучения динамических систем, связанный с теорией скрытых колебаний и глобальной устойчивости [5, 6], теорией размерности [7], теорией управления хаосом [8], интервальным анализом [9] и методами искусственного интеллекта, стимулировал появление новых эффективных аналитических и аналитико-численных методов для анализа и управления предельной динамикой и сделал актуальным их применение для моделей в экономике. Разработанные в теории глобальной устойчивости методы позволяют получать в пространстве параметров консервативные (внутренние) оценки области глобальной устойчивости динамической системы. В случае потери устойчивости стационарного множества, в том числе связанной с нелокальными бифуркациями, для анализа сценариев рождения нетривиальных колебаний в фазовом пространстве системы используются методы теории бифуркаций и теории скрытых колебаний [5, 7]. При этом для анализа самовозбуждения колебаний и рождения самовозбуждающихся аттракторов, а также определяемых ими явных (тривиальных) участков границ глобальной устойчивости, можно эффективно использовать классические аналитические и численные методы. Анализ нелокального рождения скрытых колебаний и аттракторов, а также определяемых ими скрытых участков границ глобальной устойчивости, требует применения специальных аналитико-численных процедур. Для выявления аттракторов и бассейнов их притяжения при заданных параметрах применяются аналитические методы локализации и численное интегрирование для сетки точек из получаемого ограниченного поглощающего множества на конечных временных интервалах. В теории размерности разработаны аналитические и численные методы определения различных характеристик нерегулярного поведения. Методы управления хаосом, интервальный анализ и процедуры искусственного интеллекта позволяют синтезировать регулярное поведение в модели при помощи малого управления.

Соединение классических и развитых за последние годы теоретических методов анализа динамических систем с численными алгоритмами и процедурами искусственного интеллекта делают перспективным развиваемый в работе комплексный подход к прогнозированию, анализу и управлению нерегулярной динамикой в математических моделях экономики. Эффективность этого подхода демонстрируется на примере изучения новых модификаций актуальных экономических моделей. В том числе решаются такие комплексные задачи как вывод условий глобальной устойчивости, аналитическая и численная локализация аттракторов, количественная оценка нерегулярной динамики с помощью ляпуновских показателей [10-12, 18],

выявление и стабилизация неустойчивых периодических траекторий для подавления хаотического поведения в моделях [11, 13, 14]. С помощью специальных аналитико-численных процедур, эволюционных алгоритмов и методов обучения с подкреплением выполняется максимизация областей притяжения стабилизированных траекторий моделей [13, 18], а также прогнозирование их динамики в областях управляющих параметров с различными режимами экономической политики [15-17, 18].

Библиографический список

1. *Beaudry P., Galizia D., Portier F.* Putting the cycle back into business cycle analysis. // *American Economic Review*. 2020. V. 110, № 1. P. 1–47.
2. *Barnett W., Han R.* *Economic Bifurcation and Chaos* // *World Scientific Publishing*. 2024. 680 p.
3. *Hommes C.* *Behavioral Rationality and Heterogeneous Expectations in Complex Economic System* // *Cambridge University Press*. 2013. 268 p.
4. *Zhang W.-B.* *Chaos, Complexity, And Nonlinear Economic Theory* // *World Scientific Publishing*. 2023. 228 p.
5. *Кузнецов Н. В.* Теория скрытых колебаний и устойчивость систем управления // *Известия РАН. Теория и системы управления*. 2020. № 5. P. 5–27.
6. *Kuznetsov N., Lobachev M., Yuldashev M. et al.* The birth of the global stability theory and the theory of hidden oscillations // *European Control Conference Proceedings*. 2020. P. 769–774.
7. *Kuznetsov N., Reitmann V.* *Attractor Dimension Estimates for Dynamical Systems: Theory and Computation*. Springer, 2021.
8. *Chaos Control: Theory and Applications.* / Eds. *G. Chen, X. Yu.* Springer, 2003.
9. *Tucker W.* The Lorenz attractor exists // *Comptes Rendus de l'Academie des Sciences - Series I - Mathematics*. 1999. V. 328. № 12. P. 1197–1202.
10. *Alexeeva T., Barnett W., Kuznetsov N., Mokaev T.* Dynamics of the Shapovalov mid-size firm model // *Chaos, Solitons & Fractals*. 2020. V. 140. art.num. 110239.
11. *Alexeeva T., Barnett W., Kuznetsov N., Mokaev T.* Time delay control for stabilization of the Shapovalov mid-size firm model // *IFAC-PapersOnLine*. 2020. V. 53. № 2. P. 16971–16976.
12. *Alexeeva T., Kuznetsov N., Mokaev T.* Study of irregular dynamics in an economic model: attractor localization and Lyapunov exponents. // *Chaos, Solitons & Fractals*. 2021. V. 152. art.num. 111365.
13. *Alexeeva T., Diep Q.-B., Kuznetsov N., Zelinka I.* Forecasting and stabilizing chaotic regimes in two macroeconomic models via artificial intelligence technologies and control methods // *Chaos, Solitons & Fractals*. 2023. V. 170. art.num. 113377.
14. *Алексеева Т. А., Кузнецов Н. В., Мокаев Т. Н., Посудин К. М.* Моделирование и стабилизация нерегулярного механизма ценообразования на сети локальных рынков // *Дифференциальные уравнения и процессы управления*. 2023. № 4. P. 53–66.
15. *Alexeeva T., Mokaev T., Polshchikova I.* Dynamics of monetary and fiscal policy in a New Keynesian model in continuous time // *Differential Equations and Control Processes*. 2020. № 4. P. 88–114.
16. *Alexeeva T., Kuznetsov N., Mokaev T., Polshchikova I.* Macroeconomic model with monetary and fiscal policy and externality: Nonlinear dynamics, optimization and control // *IFAC-PapersOnLine*. 2021. V. 54. № 17. P. 26–31.
17. *Alexeeva T., Kuznetsov N., Lobachev M., Mokaev R., Mokaev T., Petrova A., Polshchikova I.* Complex dynamics and optimal control of monetary policy in a New Keynesian model with government debt // *IFAC-PapersOnLine*. 2022. V. 55. № 40. P. 157–162.
18. *Alekseeva T.* Forecasting and control in nonlinear economic models with application to economic policy // *Lappeenranta-Lahti University of Technology LUT. LUT University Press*. 2024. 169 p.

Сложная динамика системы ФитцХью-Нагумо в режиме устойчивого состояния равновесия с адаптивным внешним воздействием

Д. А. Крылосова¹, П.В. Купцов^{1,2}, Н. В. Станкевич²

¹Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.

²Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН
Саратов

E-mail: krylosovadarina@gmail.com

Во многих системах различной природы, в том числе радиофизических, биологических и других, наблюдаются колебательные процессы, при которых один объект воздействует на другой с помощью периодического сигнала, но в ситуации, когда фаза или частота воздействия зависит от состояния возбудимой системы [1-6]. Это могут быть системы сердечно-сосудистой регуляции живых организмов, системы фазовой автоподстройки частоты в электронике и др. Также в этом контексте могут быть рассмотрены базовые модели теории колебаний и нелинейной динамики, такие как осциллятор ван дер Поля и система Ресслера [7,8]. Возникающую в результате перестройку можно назвать адаптацией системы к внешним стимулам, так что сама система обладает адаптивными свойствами. Процесс адаптации будет зависеть от внутренних свойств самой системы.

Целью данной работы является численное исследование поведения модели нейрона ФитцХью-Нагумо при адаптивном внешнем воздействии по типу [5-8]. Исследуемая система имеет вид:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \varepsilon(y - a - bx), \\ \dot{y} &= y - \frac{y^3}{3} - x + A \sin(pt + kx). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь x, y – динамические переменные, характеризующие состояние нейрона; ε, a и b – его управляющие параметры; p, A – частота и амплитуда внешнего воздействия, k – параметр управления фазой воздействия.

Исследовано влияния адаптивного воздействия на систему ФитцХью-Нагумо проводилось в режимах, соответствующих устойчивому состоянию равновесия. В зависимости от параметров автономная система может иметь от одного до трех состояний равновесия. Были выбраны два набора параметров: 1) $a=1, b=0.5$, при которых имеет место единственное ненулевое устойчивое состояние равновесия; 2) $a=0, b=2$, при которых имеется три состояния равновесия (тривиальное – неустойчивое, и пара симметричных – устойчивых).

Исследование системы (1) проводилось методом карт динамических режимов [9]. На рис. 1 представлены карты системы (1) для значений параметров $a=1, b=0.5, \varepsilon=0.01$ и различных значений управляющего параметра k . Цвет на карте отвечает различным периодам колебаний системы, определяемым в стробоскопическом сечении Пуанкаре. Цветовая палитра и периоды колебаний указаны под рисунком. Серым цветом обозначены очень долгопериодические, хаотические С или квазипериодические режимы Q.

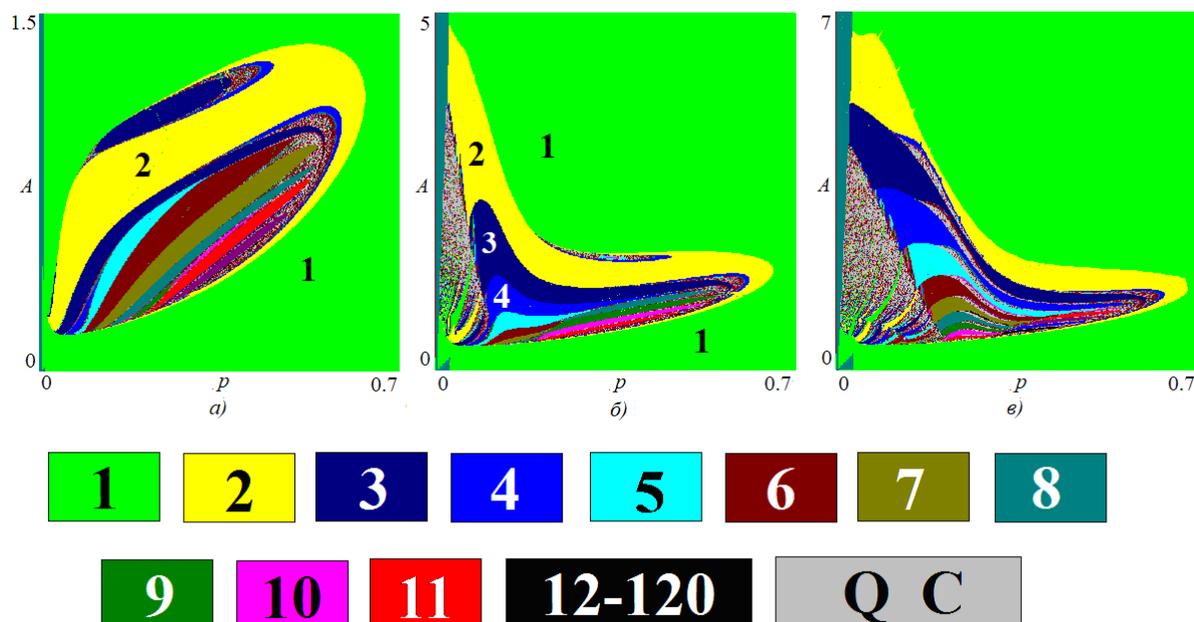


Рис. 1. Карты динамических режимов системы (1) на плоскости параметров (p, A) при $a=1$, $b=0.5$, $\varepsilon=0.01$ при значениях $a)$ $k=0$; $б)$ $k=5$; $в)$ $k=10$. Цифры на картах соответствуют простейшим режимам.

Рис. 1а представляет случай простого гармонического воздействия ($k=0$). В этом случае внешний сигнал возбуждает периодические автоколебания в системе (период 1 на карте). При увеличении амплитуды воздействия A наблюдается усложнение динамики; появляется область различных колебательных режимов, имеющая форму острова. Основу ее составляет 2-цикл удвоенного периода. Внутри острова наблюдаются структуры, характерные для бифуркаций добавления периода, а также небольшие области неперiodических режимов.

Учет адаптивных свойств внешнего сигнала приводит к изменениям картины, рис. 1б. Форма острова заметно модифицируется. Также при малой частоте воздействия p возникает область неперiodических режимов, достаточно большого размера по амплитуде A . В нее встроены языки различных периодических режимов. Эти особенности становятся заметно более выраженными при увеличении параметра k , отвечающего за управление фазы воздействия, рис. 1в.

Рассмотрим второй набор параметров автономной системы, когда наблюдается пара устойчивых симметричных равновесий. На рис. 2 представлены карты динамических режимов для данного случая. Так же основным является режим периода 1. При $k=1$ режим периода 2 не характерен, а наиболее выраженной является область периода 3, рис. 2а. Теперь неперiodические колебания возникают не при малых, а при больших частотах p . Эта особенность сохраняется и при возрастании k , рис. 2б,в. Отметим, что при $k=5$ визуально картина добавлений периода не так выражена, рис. 2б.

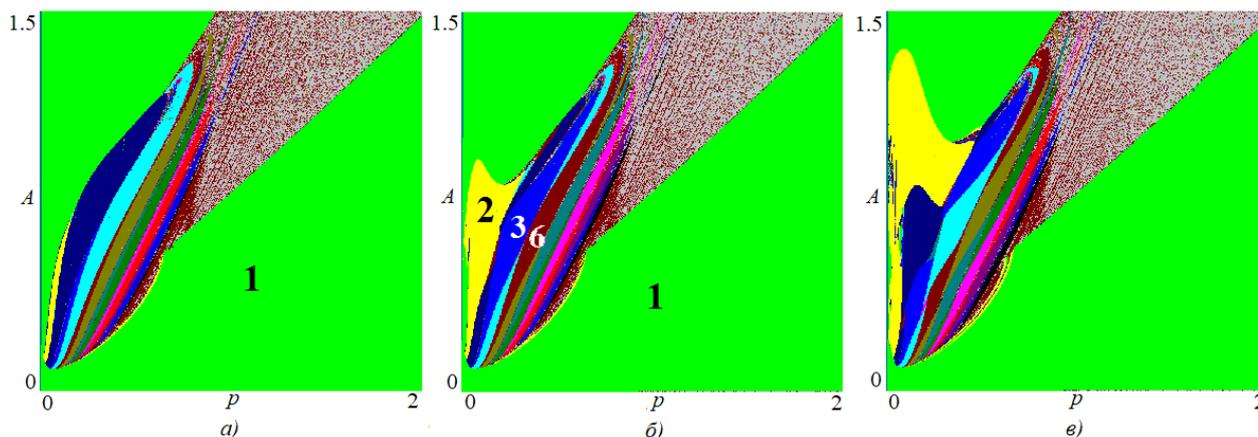


Рис. 2. Карты динамических режимов системы (1) на плоскости параметров (p, A) при: $a=0$; $b=2$; $\varepsilon=0.01$ при значении а) $k=1$; б) $k=5$; в) $k=10$.

В докладе будут обсуждаться также бифуркации, соответствующие усложнению динамики. Будет проведен анализ показателей Ляпунова, позволяющий различить области хаоса и квазипериодичности.

Работа выполнена в рамках госзадания Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН.

Библиографический список

1. Guyton, A.K. Medical physiology // Logosphere Publishing House, 2008. P. 1296.
2. Song S., Treves A. A, Yao H. A modular latching chain // Cognitive neurodynamics. 2014. V. 8. №1. P. 37–46.
3. Duncan J. // Nature reviews neuroscience. 2001. Vol. 2. No. 11. P. 820.
4. FitzHugh R. Mathematical models of threshold phenomena in the nerve membrane. // Bull. Math. Biophysics. 1955. Vol. 17. P.257-278.
5. Seleznev E.P., Stankevich N.V. Complex dynamics of a non-autonomous oscillator with a controlled phase of an external influence. // Letters to ZhTF. 2019. T.45. Issue 2. SS. 59-62
6. Krylosova D.A., Seleznev E.P., Stankevich N.V. Dynamics of Non-Autonomous Oscillator with a Controlled Phase and Frequency of External Forcing. // Chaos, Solitons & Fractals. 2020. Vol. 134, № 5. P. 109716.
7. Крылосова Д.А. и др. Автоколебательные системы с управляемой фазой внешнего воздействия // Известия высших учебных заведений // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2023. Т. 31, №. 5. С. 549-565.
8. Кузнецов А.П., Седова Ю.В., Станкевич Н.В. Хаотический осциллятор Ресслера с управляемой фазой воздействия // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2024. №. 1. С. 61-69.
9. Кузнецов С.П. Динамический хаос. Москва: Физматлит, Москва. 2001.

Разрушение инвариантной кривой после каскада бифуркаций удвоений

Д. С. Никитин¹, Н. В. Станкевич¹

¹Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»,

Нижний Новгород

E-mail: dsnikitin_1@edu.hse.ru

Бифуркация удвоения инвариантных кривых достаточно часто встречается в динамических системах различной природы. Каскад бифуркаций удвоения инвариантных кривых впервые был продемонстрирован в работах К.Канеко [1-2]. Несмотря на то, что данная бифуркация впервые была продемонстрирована достаточно давно, только в недавней работе [3] было предложено теоретическое описание бифуркации. Одним из дискуссионных вопросов в контексте данной бифуркации является вопрос о конечности каскада бифуркаций удвоения инвариантной кривой. В численных экспериментах обычно наблюдается конечный каскад удвоений и затем инвариантная кривая хаотизируется. Однако известны примеры длительных каскадов, когда инвариантная кривая сохраняет гладкость и [4-6]. Представляет интерес вопрос исследования сценариев разрушения инвариантных кривых после каскада удвоений, который рассматривается в рамках данной работы.

В качестве объекта исследования мы выбрали один из простейших объектов – обобщенное трехмерное отображение Эно:

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= y_n, \\y_{n+1} &= z_n, \\z_{n+1} &= Bx_n + Az_n + Cy_n - y_n^2.\end{aligned}\tag{1}$$

Здесь x_n, y_n, z_n , - динамические переменные, A, B, C – параметры системы. Отображение (1) имеет две неподвижные точки, которые могут терять устойчивость через бифуркацию Неймарка-Сакера, в результате чего в фазовом пространстве рождается устойчивая инвариантная кривая. В работе [7] показано, что при определенных параметрах разрушение инвариантной кривой может приводить к формированию хаоса и гиперхаоса, а также в системе возможны каскады бифуркаций удвоения инвариантной кривой.

Мы зафиксировали параметры $B=0.5$ и $A=1.44$, для которых можно наблюдать каскад бифуркаций удвоения инвариантной кривой. На рис.1а представлены графики трех старших показателей Ляпунова в зависимости от параметра C . При уменьшении параметра C неподвижная точка теряет устойчивость через бифуркацию Неймарка-Сакера (NS на рис.1а). С дальнейшим уменьшением параметра C на графиках обозначены точки, где происходит бифуркация удвоения инвариантной кривой: ICD-1, ICD-2. После удвоений хорошо отслеживается появление хаоса в системе. Характерной особенностью является присутствие в спектре хаотического аттрактора нулевого показателя Ляпунова. Наличие нулевого показателя в спектре является обязательным для потоковых систем, а для отображений может появляться при определенных условиях, например, после разрушения инвариантной кривой, возникшей в результате каскада бифуркаций удвоения

[4]. На рис. 1б, 1в, 1г показаны примеры фазовых портретов в проекции на плоскость (x, y) для первичной инвариантной кривой и после двух бифуркаций удвоения периода. С дальнейшим уменьшением параметра C четырехоборотная инвариантная кривая постепенно теряет гладкость и хаотизируется.

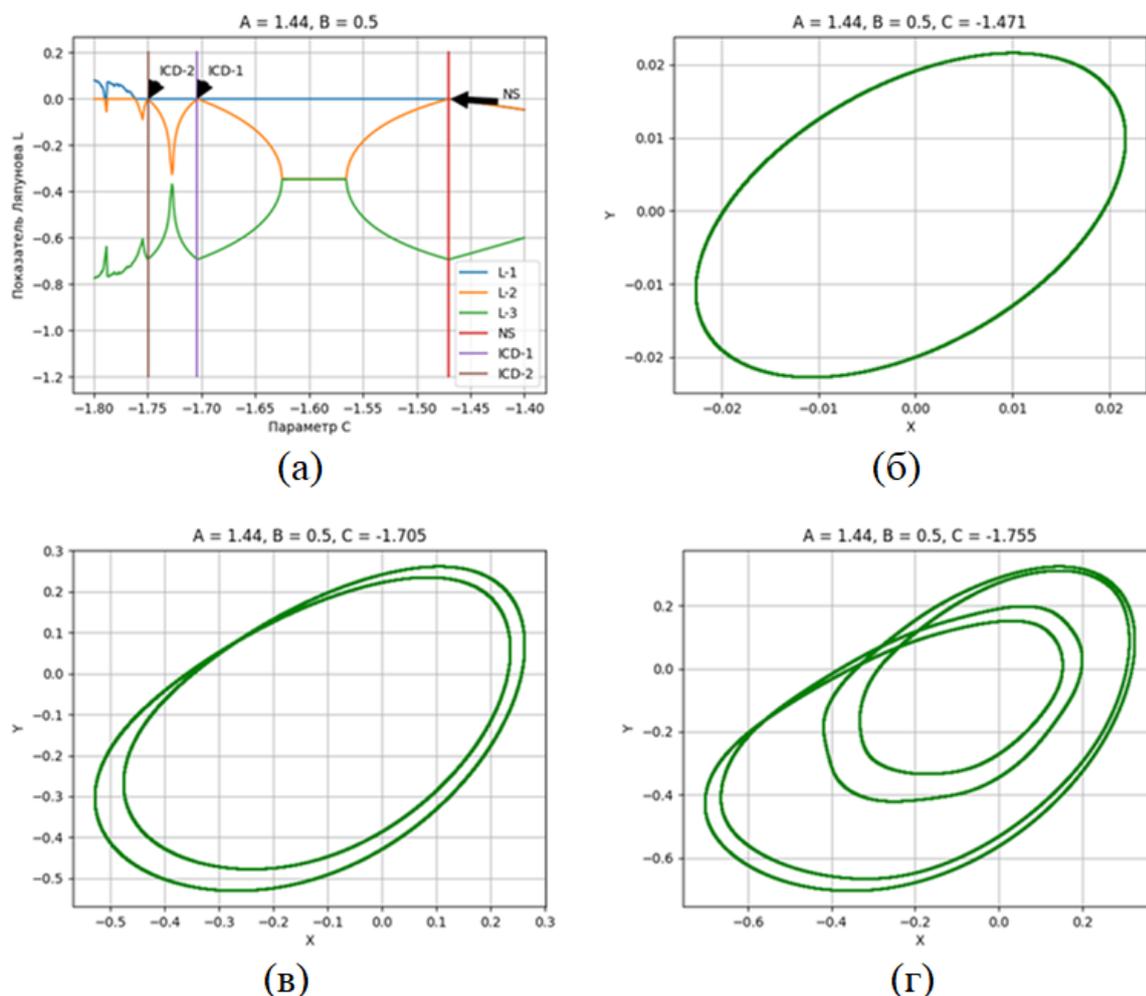


Рис.1. (а) — Графики трех старших показателей Ляпунова для обобщенного трехмерного отображения Эно (1) при параметрах $A=1.44, B=0.5$. NS – бифуркация Неймарка-Сакера, $ICD-i$ – бифуркация удвоения инвариантной кривой. (б) – (в) двумерные проекции фазовых портретов отображения (1)

В рамках данной работы мы сфокусированы на первичном разрушении инвариантной кривой. Для этого мы плавно уменьшали параметр C на пороге разрушения четырехоборотной инвариантной кривой. На рис.2 представлены примеры двумерных проекций фазовых портретов, где мы отслеживаем усложнение инвариантной кривой. На рис. 2а мы видим четырехоборотную инвариантную кривую с характерными локальными перегибами. С уменьшением параметра C в окрестности точек перегиба появляются небольшие спирали (рис.2б), всего таких спиралей по всей инвариантной кривой - 36. С дальнейшим уменьшением параметра C спирали становятся более выраженными, увеличивается размах колебаний в спирали, количество колебаний в спирали увеличивается. Для $C=-1.7618$ наблюдается уже хаотический аттрактор: инвариантная кривая размывается, на фазовом портрете

появляются точки за ее пределами, при этом они локализованы в некотором объеме.

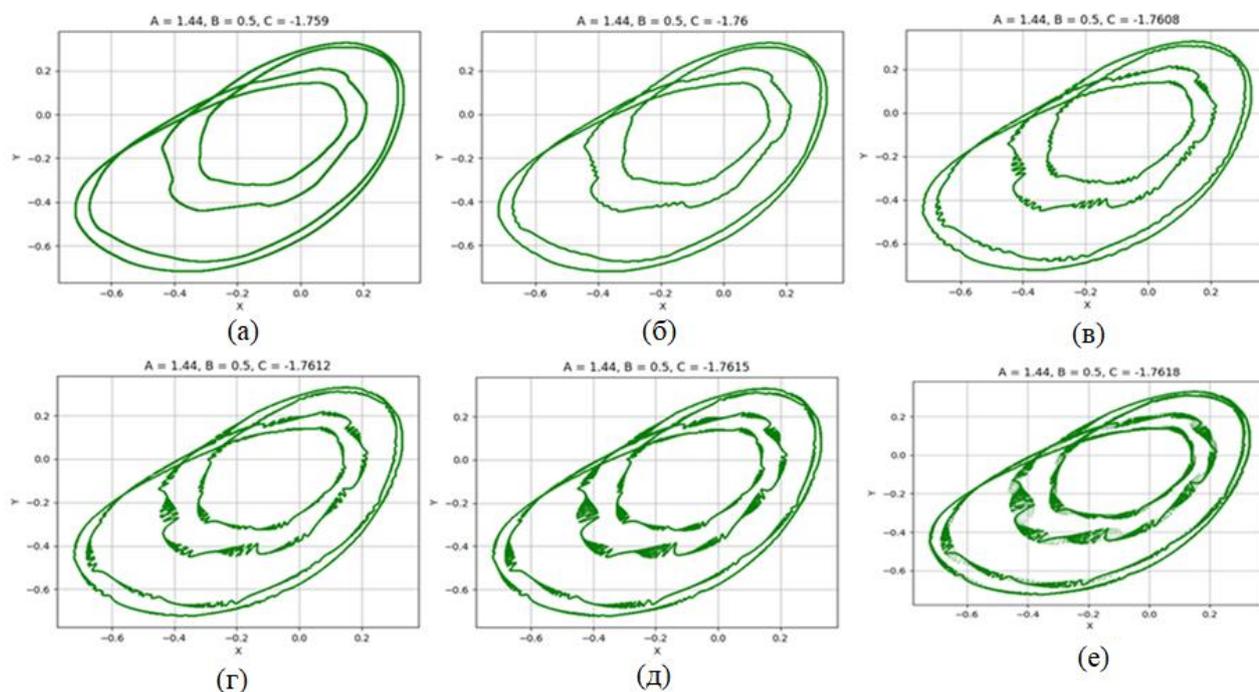


Рис.2. Двумерные проекции фазовых портретов отображения (1), $A=1.44$, $B=0.5$: (а) $C=-1.759$; (б) $C=-1.76$; (в) $C=-1.7608$; (г) $C=-1.7612$; (д) $C=-1.7615$; (е) $C=-1.7618$

В рамках доклада будут представлены более подробные иллюстрации разрушения многообротных инвариантных кривых, с примерами образования локальных спиралей на инвариантной кривой различного периода.

Работа выполнена в рамках проекта «Зеркальные лаборатории» НИУ ВШЭ – Нижний Новгород

Библиографический список

1. Kaneko K. // Progress of theoretical physics 1983. V.69. №6. P. 1806-1810.
2. Kaneko K. // Progress of theoretical physics 1984. V. 72. №2. P. 202-215.
3. Gonchenko A. S., Gonchenko S. V., and Turaev D. // Chaos. 2021. V. 31. №11 .
4. Попова Е.С., Станкевич Н. В., Кузнецов А. П. // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Физика 2020. Т. 20. №3. С. 222-232.
5. Stankevich N. V., et al. // Journal of Computational and Nonlinear Dynamics 2020. V. 15. №11. P. 111001.
7. Shykhmamedov A., et al. Nonlinearity 2023. V. 36. №7. P. 3501.

Влияние изъятия на режимы динамики модели Морана-Рикера с запаздыванием

К.А. Ганжа, Г.П. Неверова

*Дальневосточный Федеральный Университет,
Владивосток*

E-mail: ganzha.ka@dvfu.ru

В рамках данной работы рассматривается модель Морана-Рикера с однолетним запаздыванием с учетом изъятия, позволяющая анализировать и оценивать возможные сценарии развития популяций. Предполагается, что ежегодно проводятся мероприятия направленные на снижение численности популяции, в результате которых гибнет доля особей пропорциональная общей численности.

Уравнения динамики. Модель Морана-Рикера с запаздыванием в один год, соответствующее описанной ситуации имеет вид:

$$x_{n+1} = ax_n \exp(-b_0 x_n - b_1 x_{n-1}), \quad (1)$$

где x_n – численность популяции, с которой она вступает в n -ый период размножения, a – репродуктивный потенциал популяции, u ($0 \leq u \leq 1$) – доля «изъятия» особей, пропорциональная общей численности. В данном случае параметр u является управляющим параметром и синонимичен изъятию некоторой доли от общей численности с целью поддержки численности популяции на низком или «безопасном» уровне. Множитель $\exp(-b_0 x_n - b_1 x_{n-1})$ характеризует экологическое лимитирование роста численности популяции, когда текущее и предыдущее поколения оказывают влияние на развитие популяции. Параметр b_1 характеризует степень уменьшения величины необходимых ресурсов, связанного с их потреблением предыдущим поколением, то есть косвенная величина, характеризующая скорость восстановления кормовой базы. Параметр b_0 характеризует воздействие плотностно-зависимых факторов на популяцию, когда при большой плотности запускаются процессы саморегуляции, приводящие к снижению рождаемости [1].

Несложная замена переменных $y_n = x_{n-1}$ и переход к новой системе координат $b_0 x_n \rightarrow x_n$, $b_0 y_n \rightarrow y_n$ сводит модель (1) к системе без запаздывания, имеющей вид:

$$\begin{cases} x_{n+1} = ax_n(1-u) \exp((-x_n - \rho \cdot y_n)(1-u)) \\ y_{n+1} = x_n \end{cases}, \quad (2)$$

где $\rho = b_1/b_0$. Параметр ρ в этом случае характеризует относительный «вклад» предыдущего поколения в экологическое плотностно-зависимое лимитирование воспроизводства популяции.

Результаты исследования. Проведено аналитическое и численное исследование предложенной модели. Показано, что модель (2) имеет две

неподвижные точки: тривиальную, соответствующую гибели популяции, и нетривиальную. При этом анализ поведения стационарной ненулевой численности в зависимости от u демонстрирует возникновение эффекта Гидры: численность популяции увеличивается с ростом интенсивности изъятия [2].

В ходе исследования на устойчивость показано, что при $\rho < 1/3$ потеря устойчивости реализуется по сценарию Фейгенбаума, при $\rho > 1/3$ по сценарию Неймарка-Сакера, при $\rho = 1/3$ наблюдается простейшая бифуркация коразмерности два: резонанс 1:2 [3]. Следовательно, сценарий потери устойчивости определяется значением коэффициента ρ , при этом рост u ведет к монотонному расширению областей устойчивости обеих неподвижных точек.

Для анализа поведения модели (2) в области неустойчивости были построены карты динамических режимов при вариации значений коэффициента u (рис. 1). Как видно, рост u приводит к тому, что граница области устойчивости нетривиального равновесия, соответствующая потере устойчивости по сценарию Неймарка-Сакера, сдвигается вверх вдоль оси ординат и тем самым расширяет исходную область устойчивости. При этом потеря устойчивости происходит при более высоких значениях репродуктивного потенциала. С другой стороны, рост интенсивности изъятия сопровождается смещением линии бифуркации удвоения периода вдоль оси абсцисс, что также ведет к увеличению исходного размера области устойчивости. Как следствие, потеря устойчивости по сценарию Фейгенбаума реализуется при более низких значениях параметра ρ , то есть в популяции с изъятием двухгодичные колебания численности возникают при гораздо меньшем вкладе предыдущего поколения в конкурентное снижение рождаемости.

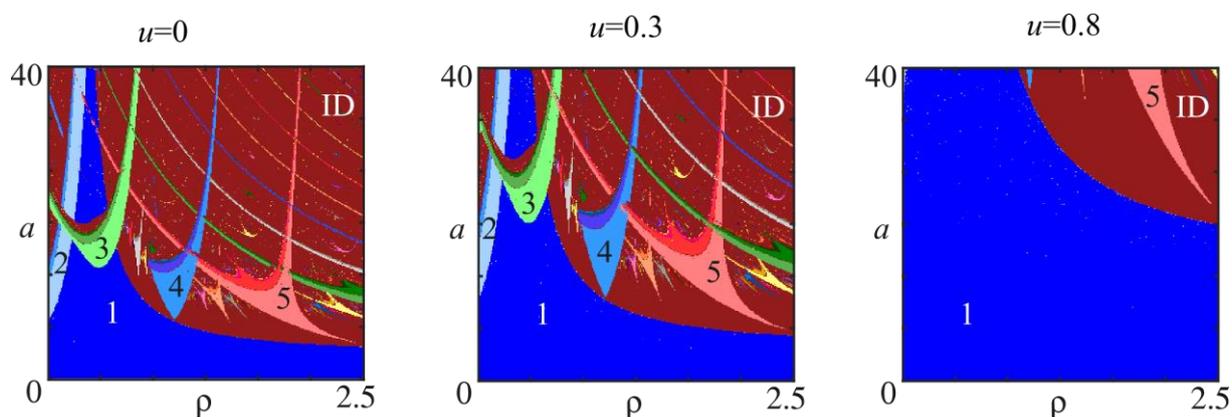


Рис. 1. Карты динамических режимов при начальном приближении $x_0 = y_0 = 1$. Цифры соответствуют длинам наблюдаемых предельных циклов.

ID – область нерегулярной динамики.

Построенные карты динамических режимов демонстрируют мультистабильность, т.к. нарушена целостность области устойчивости нетривиального равновесия. 3-цикл, а также динамические режимы, возникшие в результате его бифуркаций по сценарию Фейгенбаума, лежат поверх области притяжения стационарной ненулевой точки (рис.1). При этом рост доли изъятия приводит к тому, что 3-цикл возникает при более высоких значениях

репродуктивного потенциала. Кроме того, в области неустойчивости в зависимости от выбора начального условия могут проявляться как нерегулярные, так и регулярные колебания, например 2-цикл и 3-цикл или же квазипериодические и трехлетние колебания. Следовательно, в рамках данной модели возможно сосуществование нескольких динамических режимов.

На рисунке 2 представлены бассейны притяжения системы (2), демонстрирующие структуру пространства начальных условий при вариации значений параметров модели. Как видно, рост u расширяет область начальных условий, при которых траектории модели стремятся к устойчивому равновесию. Снижение рождаемости ведет к таким же изменениям пространства начальных условий, что согласуется с воздействием изъятия, поскольку снижение скорости роста популяции можно рассматривать как увеличение интенсивности «изъятия».

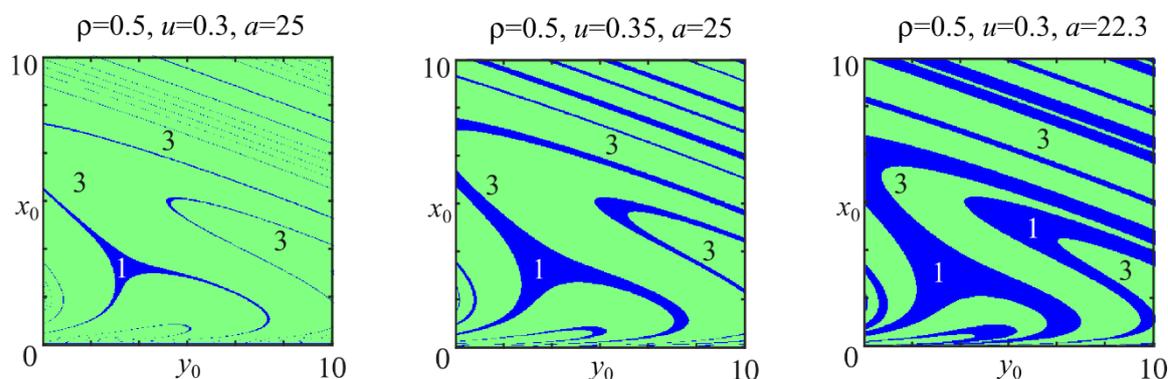


Рис. 2. Бассейны притяжения динамических режимов модели (2). Цифры соответствуют длинам наблюдаемых предельных циклов.

Таким образом, проведенное исследование позволяет заключить, что характер возникающих колебаний (сценарий потери устойчивости) определяется интенсивностью экологического лимитирования. При этом мероприятия направленные на снижение численности популяции в перспективе могут стабилизировать динамику. Однако вариация текущей численности популяции или же изменяющаяся интенсивность изъятия могут привести к смене наблюдаемого режима динамики, либо раскачивая, либо нивелируя колебания численности.

Библиографический список

1. Неверова Г.П., Фрисман Е.Я. Математическое моделирование динамики локальных однородных популяций с учетом эффектов запаздывания// Математическая биология и биоинформатика. 2015. Т. 10. № 2. С. 309-324.
2. Ревуцкая О. Л., Фрисман Е. Я. Промысловое воздействие на динамику популяции с возрастной и половой структурой: оптимальный равновесный промысел и эффект гидры //Компьютерные исследования и моделирование. – 2022. – Т. 14. – №. 5. – С. 1107-1130; 35-41
3. Кузнецов А.П., Седова Ю.В. Бифуркации трехмерных и четырехмерных отображений: универсальные свойства. Известия вузов «ПНД». 2012. Т. 20. №5. С.26-43.

Математическое моделирование динамики популяции с протандрией А. А. Громыко¹, Г. П. Неверова¹

¹Дальневосточный федеральный университет, Владивосток

E-mail: gromyko-04@bk.ru

В данной работе предлагается математическая модель с дискретным временем, ориентированная на описание динамики протандрических видов, особи которых рождаются самцами, а затем становятся самками. Изменение пола позволяет популяции более успешно адаптироваться к условиям среды, повышая ее шансы на выживание. Примерами таких видов являются рыбки-клоуны (род *Amphiprion*) и моллюски, например морские туфельки *Crepidula fornicata*. Изучению механизма изменения пола посвящено большое количество работ, которые, преимущественно акцентируются на биохимической составляющей процесса, например [1]. Другим популярным направлением является изучение генетического разнообразия в популяциях с последовательным гермафродитизмом и исследование возможных эволюционных последствий протандрии [2]. При этом особенности популяционной динамики таких видов с помощью методов математического моделирования рассматриваются довольно редко, хотя моделирование динамики и понимание механизмов изменения численности подобных видов может иметь практическую значимость [3].

Рассмотрим ситуацию, когда на начало очередного сезона размножения популяция может быть представлена двумя группами: самцами и самками. При этом предполагается, что уровень рождаемости определяется количеством самцов и самок в силу влияния плотностно-зависимого лимитирования, которое возникает в результате ограниченности ресурсов и внутривидовой конкуренцией. В целом динамика численности определяется рождаемостью и смертностью, при этом на воспроизводство оказывают влияние процессы смены пола, а именно за один шаг во времени часть самцов повзрослев, меняет пол, пополняя группу самок. Тогда, группа самцов на начало очередного сезона размножения представлена численностью «новорожденных» особей и выживших самцов, что еще не поменяли пол. Группа самок включает в себя выживших «старых» самок и тех самцов, что к началу данного сезона размножения поменяли пол. Дополнительно предполагается, что самцов всегда достаточно и численность «новорожденных» самцов определяется только числом самок.

Введем следующие обозначения: Y – численность самок, X – численность самцов, n – номер периода размножения, функция $a(X, Y)$ характеризует скорость роста популяции, параметр d ($0 \leq d \leq 1$) описывает долю самок/самцов, которые не поменяли пол, s ($0 \leq s \leq 1$) коэффициент выживаемости самок, v ($0 \leq v \leq 1$) – коэффициент выживаемости самцов. Функция $a(X, Y)$ выбрана по аналогии с моделью Рикера в виде $a(X, Y) = a \cdot e^{-\alpha X - \beta Y}$, где a – репродуктивный потенциал популяции с учетом

выживаемости «новорожденных» самцов, где α и β характеризуют интенсивность снижения рождаемости в результате конкуренции за ресурсы между самцами и самками соответственно. Тогда динамика численности такой популяции может быть описана следующей двухкомпонентной моделью с дискретным временем:

$$\begin{cases} Y_{n+1} = s \cdot (1 - d) \cdot X_n + v \\ X_{n+1} = a(X_n, Y_n) \cdot Y_n + s \end{cases} \quad (1)$$

В ходе работы было проведено аналитическое исследование модели (1). Показано, что система (1) имеет две неподвижные точки: тривиальную, соответствующую гибели популяции, и нетривиальную. Найдены условия устойчивости этих решений. Построены параметрические портреты, соответствующие областям устойчивости неподвижных точек при вариации значений параметров. На основе проведенного параметрического анализа можно заключить, что в модели динамики популяции с изменяющимся половым составом при увеличении потенциальных репродуктивных возможностей особей с учетом регуляции рождаемости возникают колебания численности, имеющие весьма сложную временную организацию. При этом сценарий потери устойчивости определяется значением параметра, характеризующего экологическое лимитирование. Показано, что увеличение выживаемости самок, а также доли самцов, не сменивших пол, расширяют область устойчивости. Действительно на рисунке видно, что рост значений параметра d , косвенно характеризующего скорость пополнения группы самок новыми особями, стабилизирует динамику. Чем больше d , тем меньше самок, участвующих в размножении, и соответственно ниже скорость роста популяции. В свою очередь увеличение репродуктивного потенциала самок ведет к усложнению динамики – возникают колебания численности, которые в случае потери устойчивости по сценарию Неймарка-Сакера сопровождаются возникновением на фазовой плоскости системы предельных инвариантных кривых.

Показано, что в модели возникает мультистабильность: при вариации начального условия притягивающими оказываются разные динамические режимы. В частности, возможно сосуществование устойчивого равновесия и 3-цикла, и режимов динамики, возникших в результате потери их устойчивости.

Таким образом, на основе исследования предложенной модели показано, что в популяциях, динамика которых может быть описана подобными системами, возможно возникновение колебаний, как регулярных, так и нерегулярных. Также возможна смена наблюдаемого режима динамики в силу вариации текущего состава популяции из-за влияния внешних факторов, что важно учитывать при анализе и оценке состоянии водных экосистем.

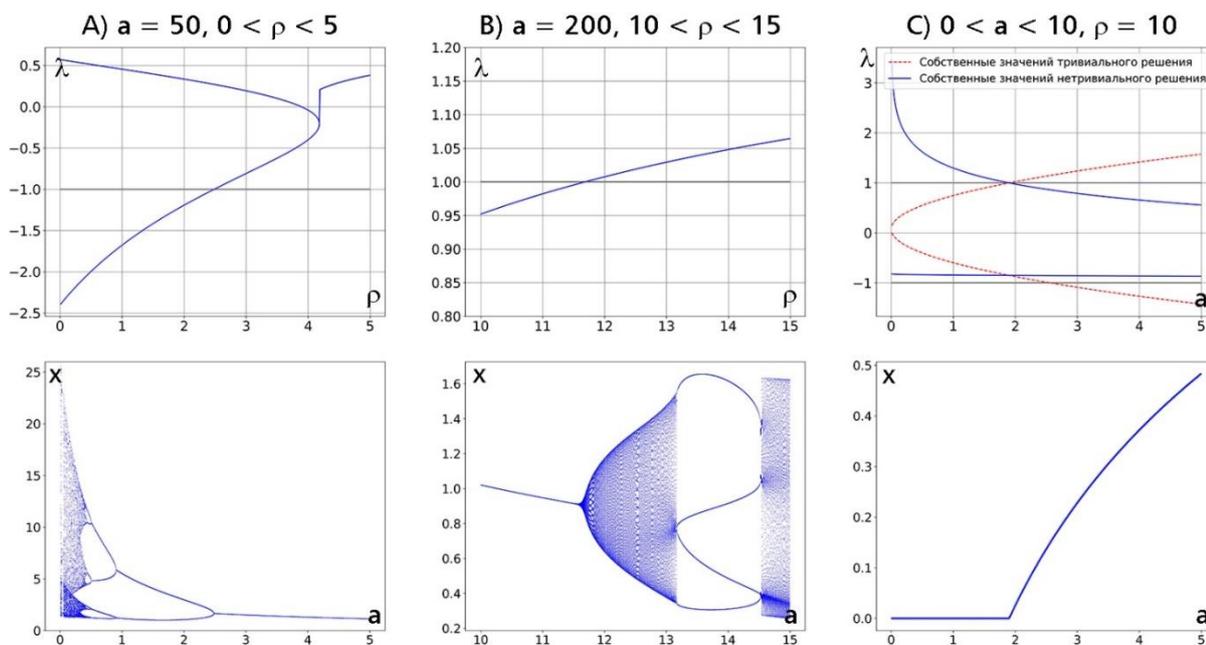


Рис.1. Сценарии потери устойчивости модели (1) при $v = 0.4$ $s = 0.4$ $d = 0.5$. Первый ряд: графики собственных значений (Графики действительных и модулей комплексных мультипликаторов решений системы); Второй ряд – бифуркационные диаграммы динамической переменной x

Библиографический список

1. Yamaguchi, S. Time required for sex change in teleost fishes: hormonal dynamics shaped by selection // Journal of theoretical biology. – 2016. – Vol. 407, P. 339-348.
2. Ecological and evolutionary consequences of alternative sex-change pathways in fish / Benvenuto C., Coscia I., Choquet J., Sala-Bozano M. and others. // Scientific Reports. – 2017. – Vol. 7, №1 – P. 1–12.
3. Stress, novel sex genes, and epigenetic reprogramming orchestrate socially controlled sex change / E. V. Todd, O. Ortega-Recalde, H. Liu, M. S. Lamm, K. M. Rutherford, H. Cross, N. J. Gemmel // Science Advances. – 2019. – V. 5 (7).

Различные типы мультистабильности в отображении Киалво А.А. Панюшев¹, О.М. Посненкова², Н.В. Станкевич¹

¹Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»,
Нижний Новгород

²Саратовский государственный медицинский университет им. В.И. Разумовского, Саратов
E-mail: aapanushev@mail.ru

В рамках данной работы исследуется свойство мультистабильности в модели нейрона с дискретным временем. Простейшая модель представляет собой динамическую систему в виде двумерного отображения, в качестве подходящего объекта мы выбрали отображение Киалво [1-7]. В рамках данной работы мы обсудим различные типы мультистабильности и их особенности, которые возможны в данном отображении.

Отображение Киалво описывается системой двух рекуррентно заданных уравнений, впервые введенных в работе [1]:

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= x_n^2 \exp(y_n - x_n) + I, \\ y_{n+1} &= ay_n - bx_n + c,\end{aligned}\tag{1}$$

Одни из реализующихся в системе типов мультистабильности - это мультистабильность резонансных и нерезонансных инвариантных кривых. На Рис. 1а представлен фрагмент карты динамических режимов, на котором отмечены области с сосуществующими аттракторами, мультистабильные режимы отмечены через запятую. Числа обозначают период цикла в случае периодических режимов, TORUS обозначает инвариантную кривую. Также отмечены бифуркационные линии неподвижных точек. L_{NS} обозначает линию бифуркации Неймарка-Сакера, L_{SN} линию седлоузловой бифуркации. Таким образом, хорошо видно, что границы языка синхронизации цикла периода 5, выходящего из линии бифуркации Неймарка-Сакера, являются мультистабильными. Для более детального анализа мультистабильных режимов рассмотрим бифуркационное дерево, построенное с наследованием при сканировании интервала параметров в различном направлении, представленное на рис.1б (на рис.1а розовой линией отмечено направление, вдоль которого построено дерево). На рис.1б красным цветом изображено дерево, построенное при сканировании слева направо, серым цветом изображено дерево, построенное при сканировании интервала справа налево. Хорошо видно, что неподвижная точка при увеличении параметра c при $c \approx 1.87$ претерпевает бифуркацию Неймарка-Сакера и рождается устойчивая инвариантная кривая, далее инвариантная кривая существует до $c \approx 1.917$, после чего появляется цикл периода 5. Однако при сканировании интервала в обратном направлении, мы видим, что цикл периода 5 в определенном интервале сосуществует с инвариантной кривой и исчезает при $c \approx 1.984$. На Рис. 1с, 1д изображены примеры бассейнов притяжения в области, где только появился цикл периода 5 ($c=1.919$, рис.1с), а также на границе исчезновения мультистабильности ($c=1.94$, рис.1д), на бифуркационном дереве отмечены

соответствующие точки. Как видно, сразу после появления резонансной инвариантной кривой бассейны перемешаны в примерно равной пропорции, а при увеличении параметра с области цикла периода 5 расширяются так, что находящиеся вне инвариантной кривой бассейны ее притяжения уменьшаются и становятся едва различимы. На пороге разрушения на инвариантной кривой формируются углы, таким образом, можно предположить, что инвариантная кривая разрушается в результате кризиса.

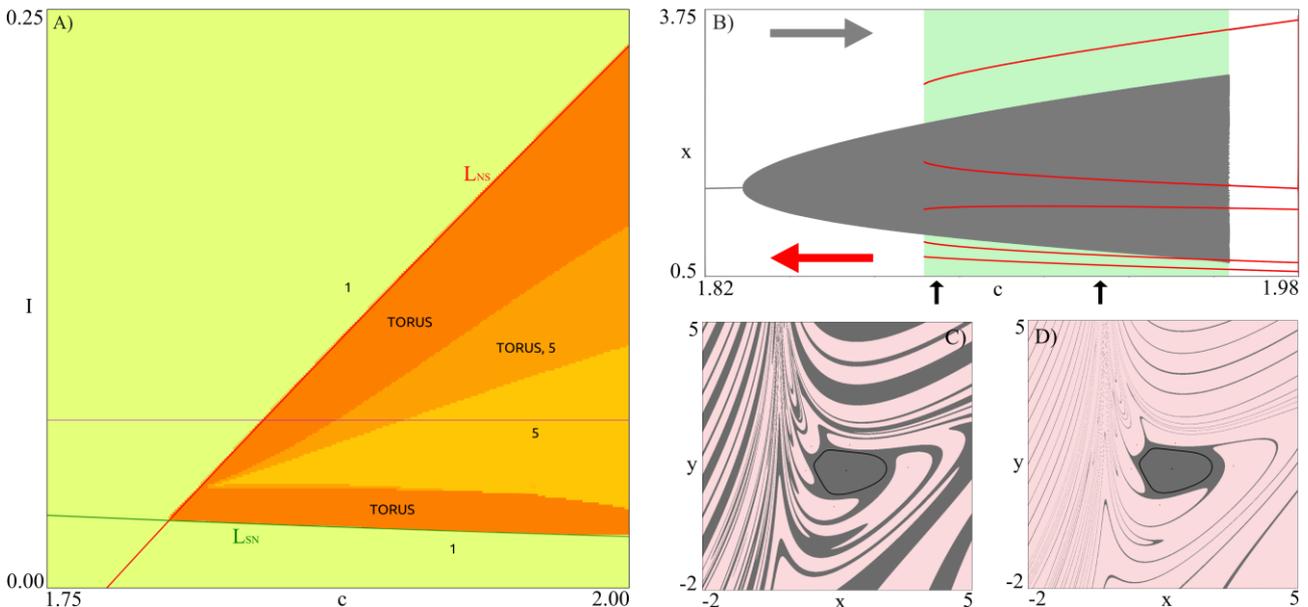


Рис 1. А) Двухпараметрическая бифуркационная диаграмма на плоскости (c, l) при фиксированных $a=0.2$, $b=0.6$, на которой отмечены динамические режимы. Сосуществующие режимы разделены запятой. В) Бифуркационное дерево, построенное в двух направлениях с наследованием начальных условий. Область мультистабильности выделена. С, D) Бассейны притяжения для $c=1.919$ и $c=1.94$. Бассейн притяжения инвариантной кривой выделен серым, 5-цикла розовым.

Другой наблюдаемый тип - это мультистабильность хаотического аттрактора и инвариантной кривой. Для меньших значений параметра l можно наблюдать сосуществование между инвариантной кривой и хаотическим аттрактором. На рис. 2а представлен увеличенный фрагмент карты показателей Ляпунова в данной окрестности. На карте ляпуновских показателей (рис 2.А) желтым отмечена инвариантная кривая, черным – хаос, красным периодические режимы. Для анализа мультистабильности мы также рассмотрели бифуркационные деревья, при разном сканировании интервала параметров, которые представлены на рис. 2В. На соответствующем этой области бифуркационном дереве (рис. 2В) показано их сосуществование до нелокальной бифуркации. Образование хаотического аттрактора после области мультистабильности в данном случае происходит через слияние устойчивой инвариантной кривой с неустойчивым хаотическим аттрактором. Бассейны притяжения в этом случае имеют сложно устроенную структуру на всей фазовой плоскости, однако вероятность попасть на хаотический аттрактор при случайном выборе точки значительно выше.

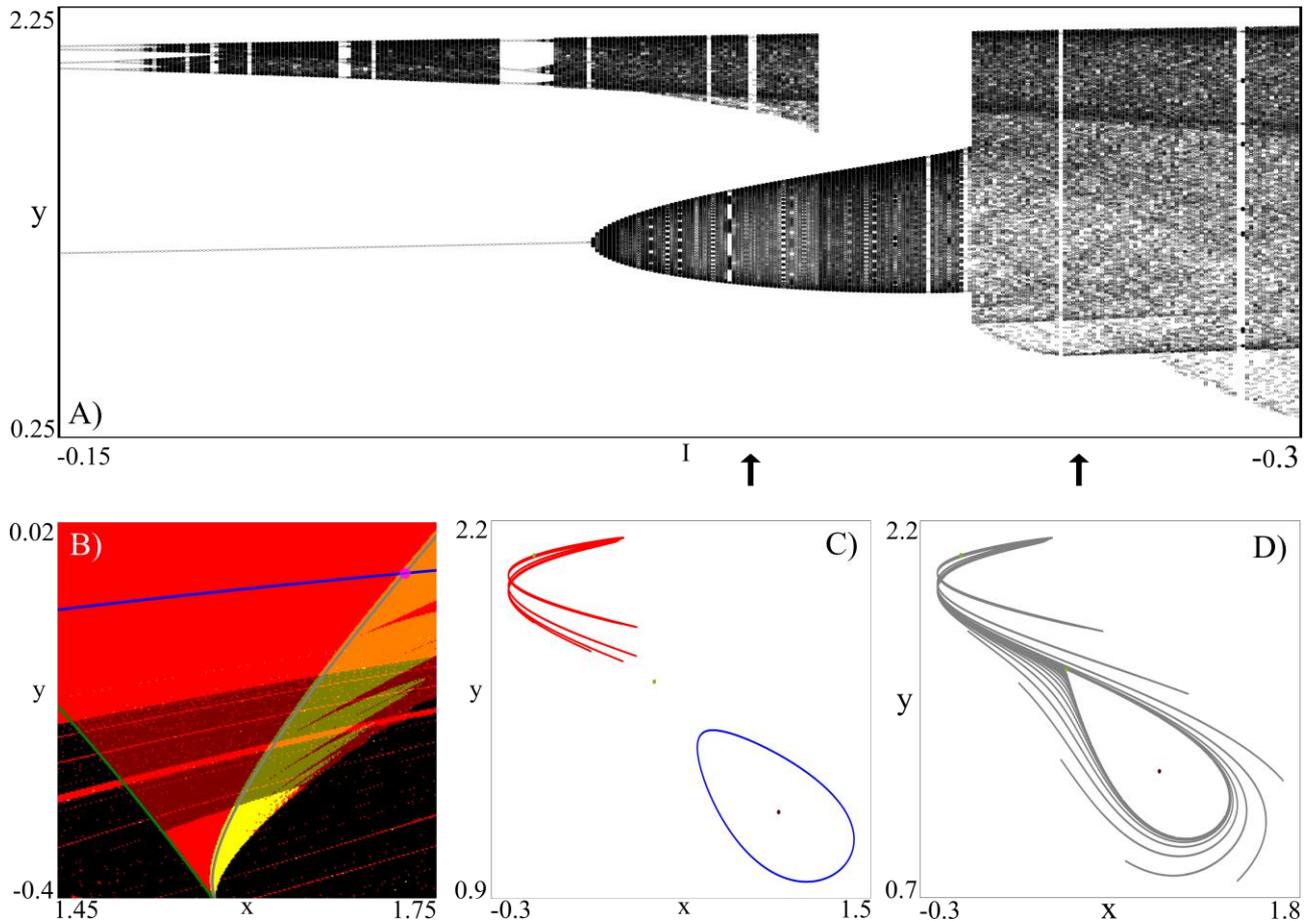


Рис 2. А) Бифуркационное дерево для фиксированных $a=0.2$, $b=0.6$, $c=1.6$ и динамического I , построенное с наследованием начальных условий в различных направлениях. В) Карта показателей Ляпунова. Черным обозначен хаос, желтым инвариантная кривая, красным периодические режимы. С, D) Фазовые портреты для $c \approx -0.22$ и $c = -0.3$.

Работа выполнена в рамках проекта «Зеркальные лаборатории НИУ ВШЭ»

Библиографический список

1. Chialvo DR. // Chaos, Solitons Fractals 1995;3-4(5):461–79
2. Bashkirtseva, I., Ryashko, L., Seoane, J. M., & Sanjuán, M. A. // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2023. V.116. P.106867.
3. Stankevich, N. V., Gonchenko, A. S., Popova, E. S., & Gonchenko, S. V. // Chaos, Solitons & Fractals. 2023. V. 172. P.113565.
4. Seoane, J. M., Bashkirtseva, I., Ryashko, L., & Sanjuán, M. A. // Chaos, Solitons & Fractals. 2024. V.183. P.114888.
5. Kuznetsov A.P., Sedova Y.V., Stankevich N.V. // Chaos, Solitons & Fractals. 2024, V.186. P. 115237
6. Rybalova, E., Ryabov, A., Muni, S. S., & Strelkova, G. // Chaos, Solitons & Fractals. 2024. V. 186. P. 115210
7. Pilarczyk, P., & Graff, G. // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2024. V. 132. P. 107947.

Управление мультистабильностью в модели типа Ходжкина-Хаксли в результате учета дополнительного ионного канала

Э.Р. Багаутдинова, Н.В. Станкевич

¹Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»,
Нижний Новгород

E-mail: bagautdinovaer@mail.ru

Мультистабильность является важным явлением в нейрофизиологии, определяя способность нейронных систем переходить между различными устойчивыми состояниями, что имеет значение для формирования различных типов колебательной активности [1, 2]. В модели типа Ходжкина-Хаксли дополнительные ионные каналы могут влиять на динамику и обеспечивать переходы между состоянием покоя и автоколебательной активностью.

В рамках данной работы мы исследуем модифицированную модель типа Ходжкина-Хаксли с дополнительным ионным каналом, которая предложена в [3]. Модель записывается системой трех обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \tau \dot{V} &= -g_{Ca} m_{\infty}(V)(V - V_{Ca}) - g_K n(V - V_K) - g_{K2} p_{\infty}(V)(V - V_K) - g_S S(V - V_K), \\ \dot{n} &= \sigma(n_{\infty}(V) - n), \\ \tau_S \dot{S} &= S_{\infty}(V) - S, \end{aligned} \quad (1)$$

где V – мембранный потенциал клетки, n и S интерпретируются как вероятностные характеристики открытия ионных каналов, при этом переменная n соответствует быстрому калиевому каналу, а S – это медленная переменная в системе, которая может описывать концентрацию ионов кальция в клетке. Параметры модели (1) можно найти в [3]. Функции активации ионных каналов имеют следующие формы:

$$f_{\infty}(V) = [1 + \exp \frac{V_f - V}{\theta_f}]^{-1} \quad (2)$$

$$p_{\infty}(V) = [\exp \frac{(V_p - V)}{\theta_p} + \exp \frac{-(V_p - V)}{\theta_p}]^{-1}. \quad (3)$$

В [3] модель дополнена уравнением, учитывающим ток через специфический калиевый канал с немонотонной активационной характеристикой (3): $I_{K2}(V) = g_{K2} p_{\infty}(V)(V - V_K)$. В результате учета данного канала в системе локально стабилизируется состояние равновесия, и в пространстве параметров появляются области, где наблюдается мультистабильность между устойчивым состоянием равновесия и автоколебательным аттрактором. Стабилизация равновесия происходит за счет того, что на быстрой нульклине появляется дополнительный локальный перегиб, который определяется параметрами учтенного ионного канала. Новый ионный канал характеризуется тремя параметрами: g_{K2} , V_p , θ_p . g_{K2} характеризует проводимость нового ионного канала, V_p – потенциал активации, он определяет место, на быстрой нульклине, где появляется дополнительный перегиб.

Параметр θ_p определяет ширину перегиба на нульклине. В рамках данной работы мы сконцентрированы на исследовании влияния ширины локального изменения нульклины на мультистабильность и картину режимов в системе.

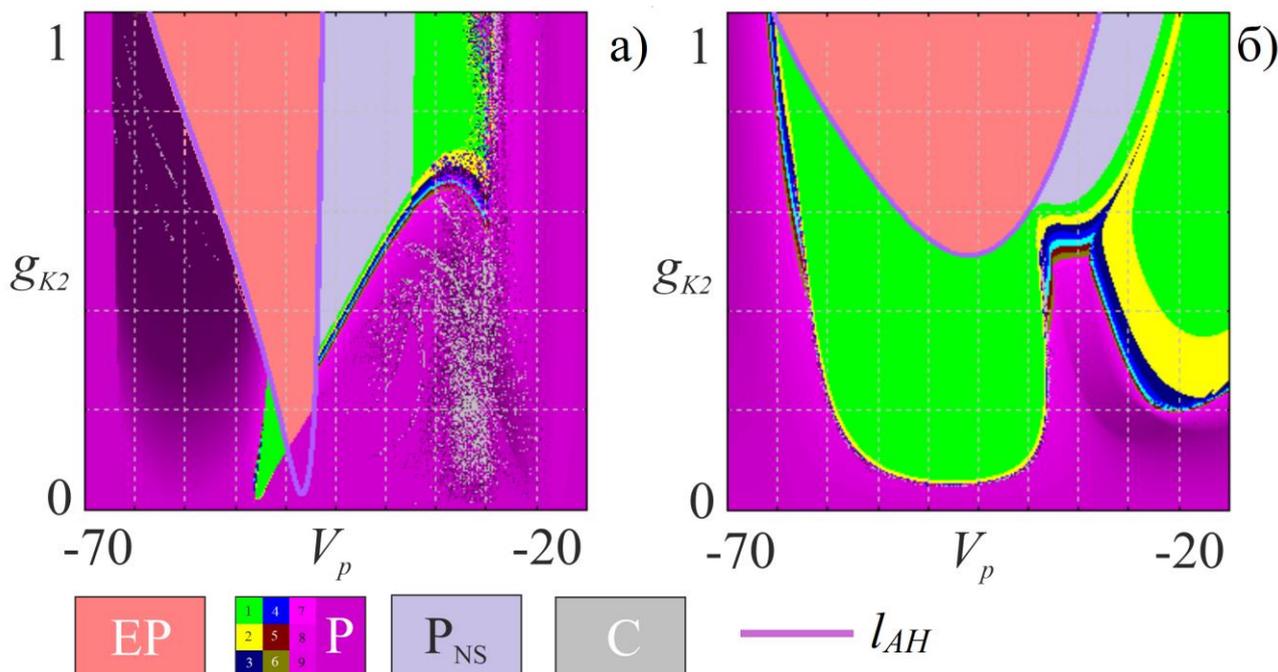


Рис 1. Карты динамических режимов модели типа Ходжкина-Хаксли с дополнительным ионным каналом для различных значений параметра ширины локального изменения нульклины а) $\theta_p=0.1$; б) $\theta_p=10.0$. EP – устойчивое состояние равновесия; P – периодические колебания, P_{NS} – периодические колебания, нет пересечения с секущей плоскостью, C – непериодические колебания

С помощью методов нелинейной динамики проведено исследование мультистабильности при изменении параметра, отвечающего за ширину локального изменения нульклины быстрого многообразия модели. Для модели построены бифуркационные диаграммы и карты динамических режимов. На рис.1 представлены карты динамических режимов для двух различных значений параметра ширины локального изменения нульклины а) $\theta_p=0.1$; б) $\theta_p=10.0$. При построении карт период режима определялся по количеству точек в сечении Пуанкаре плоскостью $n=0.02$. Цветовая палитра на картах определена следующим таким образом, чтобы можно было определить пачечные колебания. Период режима отвечает количеству спайков в пачке. Малопериодные колебания мы обозначали различными контрастными цветами (зеленый – период 1, желтый – период 2 и т.д.), а начиная с периода 7 использовали градиент фиолетового цвета от светлого к темному, чтобы видеть, где наблюдается увеличение и уменьшение числа спайков в пачке (характерные для нейронных моделей бифуркации добавления периода). Серым цветом отмечены точки, где период режима больше максимально определяемого (в наших численных экспериментах максимальный период равен 120)

При малых значениях параметра θ_p порог стабилизации состояния равновесия по параметру проводимости дополнительного ионного канала (g_{K2})

стремится к нулю. На пороге стабилизации состояния равновесия наблюдается мультистабильность между устойчивым состоянием равновесия и пачечным аттрактором, таким же как и в оригинальной системе. Область мультистабильности с одной стороны ограничена линией бифуркации Андронова-Хопфа, а с другой – линией глобальной бифуркации, отвечающей разрушению автоколебательного аттрактора. Бифуркация Андронова-Хопфа может быть как субкритической, которая и дает возможность развиваться мультистабильности, так и суперкритической. На рис.1а хорошо виден участок, где потеря устойчивости состояния равновесия сопровождается рождением устойчивого цикла периода 1, данная область как раз соответствует разрушению мультистабильности.

При увеличении параметра θ_p область мультистабильности смещается в сторону увеличения параметра проводимости ионного канала. Для больших значений параметра θ_p мультистабильность вырождается. На рис.1б хорошо видно, что потеря устойчивости состояния равновесия приводит к рождению цикла периода 1 без формирования мультистабильности.

Таким образом, учет дополнительного калиевого канала с немонотонной характеристикой позволяет управлять мультистабильностью в модели, что открывает возможности для стабилизации различных режимов колебательной активности. В рамках доклада также будут обсуждаться другие динамические режимы и бифуркации, возникающие в результате учета дополнительного ионного канала.

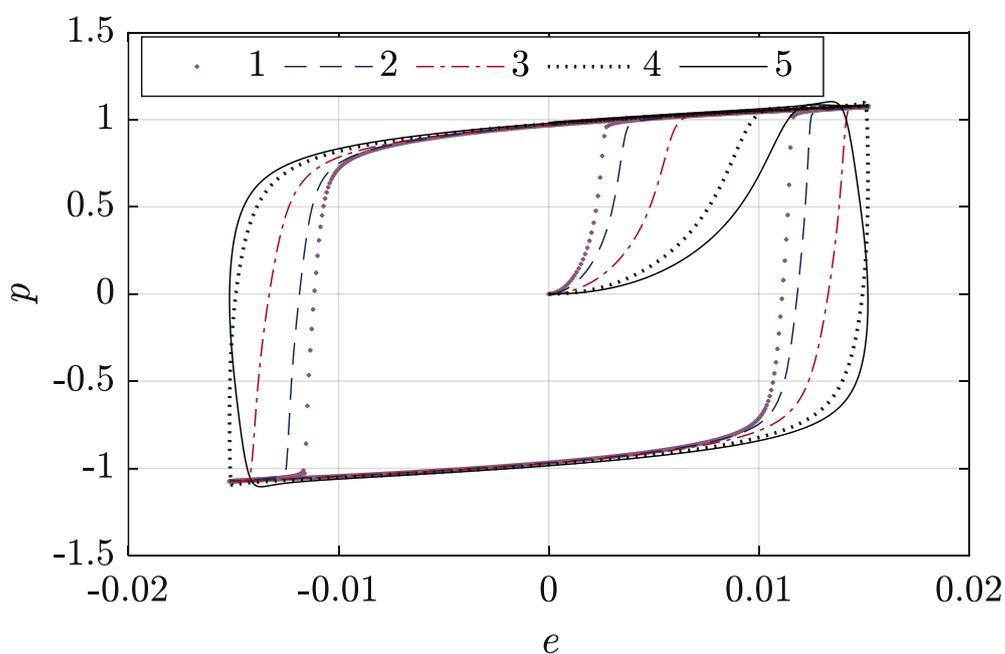
Работа выполнена в рамках проекта РНФ 20-71-10048-П (<https://rscf.ru/en/project/20-71-10048/>)

Библиографический список

1. Fisher R.S., van Emde Boas W., etc. // *Epilepsia*. 2005. Vol. 46(4). P. 470–472.
2. Hammond C., Bergman H., Brown P. // *Trends in Neurosciences*. 2007. Vol. 30(7). P. 357-364.
3. Stankevich N., Mosekilde E. // *Chaos*. 2017. V. 27, №. 123101. P. 12.

Секция 3

«Радиофизическое моделирование»



К проблеме взаимодействия хаоса и сценария Ландау-Хопфа

А.П. Кузнецов¹, Л.В. Тюрюкина^{1,2}

¹Саратовский филиал ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН

²Саратовский национальный исследовательский государственный университет

имени Н. Г. Чернышевского

E-mail: turukinalv@yandex.ru.

Проблема соотношения квазипериодической и хаотической динамики привлекает внимание, начиная с известных работ Ландау [1], Хопфа [2] и последующей работы Рюэля и Такенса [3]. Несмотря на критику [3], вопросы о многочастотной квазипериодичности и сценарии Ландау-Хопфа периодически появляются в литературе, например, [4-7]. Мы здесь обсудим некоторые аспекты данной проблематики на примере модели [7], в которой возможно несколько шагов сценария Ландау-Хопфа, связанной с системой Ресслера с хаосом.

Квазипериодическая подсистема имеет вид пяти глобально связанных осцилляторов ван дер Поля:

$$\ddot{x}_n - (\lambda_n - x_n^2)\dot{x}_n + (1 + \Delta_{n-1})x_n + \frac{\mu}{4} \sum_{i=1}^5 (\dot{x}_n - \dot{x}_i) = 0. \quad (1)$$

Здесь λ_n – параметр возбуждения n -го осциллятора, $\Delta_{n-1} = \Delta(n-1)/4$, так что Δ определяет частотную расстройку осцилляторов, а частота первого принята за единицу, μ – параметр диссипативной связи. Возможность сценария Ландау-Хопфа обусловлена неидентичностью осцилляторов по параметрам возбуждения. Соответственно далее полагаем $\lambda_1 = 0.1$, $\lambda_2 = 0.2$, $\lambda_3 = 0.3$, $\lambda_4 = 0.4$, $\lambda_5 = 0.5$. В зависимости от величины связи μ система (1) может демонстрировать квазипериодические колебания с разным числом несоизмеримых частот – от двух до пяти.

Уравнения связанных систем имеют вид:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_n - (\lambda_n - x_n^2)\dot{x}_n + (1 + (n-1)\frac{\Delta}{4})x_n + \frac{\mu}{4} \sum_{j=1}^5 (\dot{x}_n - \dot{x}_j) &= 0, \\ \ddot{x}_5 - (\lambda_5 - x_5^2)\dot{x}_5 + (1 + \Delta)x_5 + \frac{\mu}{4}(4\dot{x}_5 - \dot{x}_1 - \dot{x}_2 - \dot{x}_3 - \dot{x}_4) + k(\dot{x}_5 - \dot{x}) &= 0, \\ \dot{x} &= -y - z, \\ \dot{y} &= x + py + k(\dot{x}_5 - y), \\ \dot{z} &= q + (x - r)z. \end{aligned} \quad (2)$$

Для системы Ресслера значения параметров $p=0.15$, $q=0.4$, $r=8.5$ отвечают хаотическому режиму. Связь осуществляется через пятый, наиболее «сильный» осциллятор ван дер Поля, за ее величину отвечает параметр k .

В случае трехчастотных колебаний в подсистеме (1), при уменьшении ее связи с хаотической подсистемой k последовательно наблюдаются бифуркации Неймарка-Сакера, две квазипериодические бифуркации Хопфа [8] рождения торов более высокой размерности и три бифуркации удвоения 4-торов. В

результате рождается хаос, особенность которого состоит в наличии трех дополнительных нулевых ляпуновских показателей.

В случае пятичастотных колебаний в первой подсистеме, в объединенной системе в результате каскада квазипериодических бифуркаций Хопфа может рождаться шестичастотный тор, который также удваивается при уменьшении связи. Возникающий хаос характеризуется пятью дополнительными нулевыми ляпуновскими показателями. Таким образом, пополняется «коллекция» систем с дополнительными нулевыми ляпуновскими показателями [9-13]. В области пятичастотных торов наблюдаются окна четырехчастотных, типичными границами которых являются квазипериодические седло-узловые бифуркации торов [8], но может быть и квазипериодическая бифуркация Хопфа.

Интересные сценарии наблюдаются в случае вариации «внутреннего» параметра связи квазипериодической подсистемы μ , отвечающего за взаимодействие осцилляторов ван дер Поля. В случае слабой связи квазипериодической и хаотической подсистем при этом наблюдаются своеобразные бифуркации, обозначенные L_n , которые отвечают за последовательное увеличение числа дополнительных нулевых ляпуновских показателей хаотического режима (от нуля до пяти). Этот механизм иллюстрирует рис. 1а.

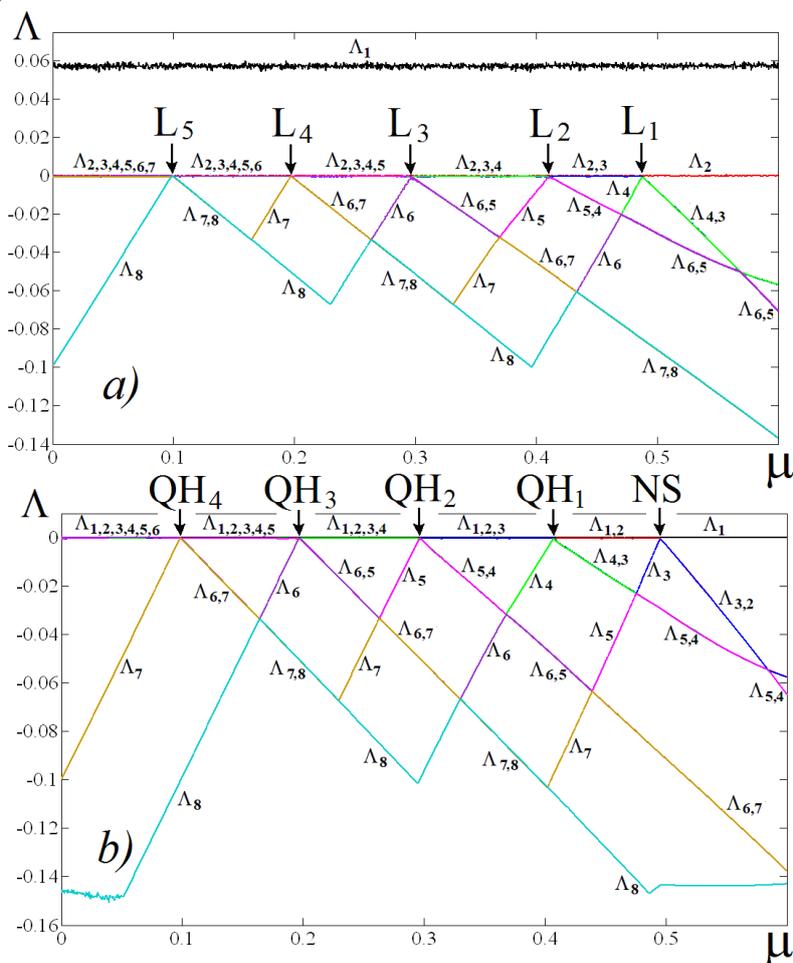


Рис. 1. Зависимость старших ляпуновских показателей системы (2) от параметра μ .
 а) $k=0.01$, б) $k=0.025$; значение $\Delta=3$.

Для большего значения параметра связи подсистем k наблюдается каскад из бифуркации Неймарка-Сакера NS и четырех квазипериодических бифуркаций Хопфа $QH_{1,2,3,4}$, вплоть до рождения шестичастотного тора, рис.1 *b*. Тип бифуркации определялся по поведению показателей вблизи точек бифуркаций, аналогично критерию [8]. Таким образом, наблюдаются характерные для сценария Ландау-Хопфа бифуркации, причем этот сценарий оказывается устойчивым к взаимодействию с хаотической подсистемой, и даже характеризуется увеличением максимальной размерности тора.

Показано, что наблюдаемые закономерности достаточно универсальны, для чего в качестве хаотической подсистемы был рассмотрен известный радиofизический генератор Кислова-Дмитриева [14].

Работа выполнена в рамках госзадания Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН.

Библиографический список

1. Landau L.D. // Dokl. Akad. Nauk USSR. 1944. V. 44. P. 311.
2. Hopf E. // Communications on Pure and Applied Mathematics. 1948. V. 1. №. 4. P. 303.
3. Ruelle D., Takens F. // Comm. Math. Phys. 1971. V. 20. P. 167.
4. Krysko A.V. et al. // Chaos, Solitons & Fractals. 2012. V. 45. №. 6. P. 709.
5. Herrero R. et al. // Chaos. 2022. V. 32. №. 2. P. 023116.
6. Kulikov A.N., Kulikov D.A. // Theoretical and Mathematical Physics. 2020. V. 203. №. 1. P. 501.
7. Kuznetsov A.P. et al. // Phys. Lett. A. 2013. V. 377. P. 3291.
8. Vitolo R., Broer H., Simó C. // Regul. Chaot. Dyn. 2011. V. 16. P. 154-184.
9. Broer H., Simó C., Vitolo R. // Nonlinearity. 2002. V. 15. №. 4. P. 1205.
10. Stankevich N.V. et al. // J. Computational and Nonlinear Dynamics. 2020. V. 15. №. 11. P. 111001.
11. Kuznetsov A.P., Sedova Y.V., Stankevich N.V. // Chaos, Solitons & Fractals. 2023. V. 169. P. 113278.
12. Grines E.A., Kazakov A., Sataev I.R. // Chaos. 2022. V. 32. №. 9. P. 093105.
13. Garashchuk I., Kazakov A., Sinelshchikov D. // Chaos, Solitons & Fractals. 2024. V. 182. P. 114785.
14. Дмитриев А., Ефремова Е., Максимов Н., Панас А. Генерация хаоса. Москва: Техносфера, 2012. 424 с.

Дробно-дифференциальный подход к численному моделированию диффузионно-волновых процессов в сегнетоэлектриках

Л.И. Мороз¹, А.Г. Масловская²

¹Амурский государственный университет,
Благовещенск

²Университет Иннополис,
Иннополис

E-mail: lubover@mail.ru.

В последние десятилетия особое внимание уделяется исследованию особого класса сложных и трудноформализуемых низкоразмерных систем – сегнетоэлектрическим структурам, таким как тонкие пленки, нанотрубки, наночастицы. С ростом спроса на миниатюризацию электронных устройств характеристика низкоразмерных сегнетоэлектрических материалов становится все более важной в поисках моделей, описывающих состояния поляризации за пределами стандартных подходов. Теория Ландау – Гинзбурга дает фундаментальный метод формализации процессов переключения поляризации и характеристик фазовых переходов в сегнетоэлектриках. В основе базовой математической модели лежит полулинейное уравнение диффузии. При этом для описания флуктуаций поляризации в низкоразмерных сегнетоэлектрических структурах все более актуальным становится волновой аналог уравнения Ландау – Халатникова [1]. Сегнетоэлектрики демонстрируют сложные масштабные свойства доменных конфигураций, самоподобие процессов зарождения доменов и эффекты памяти при переключении поляризации. Одним из возможных направлений в теории математического моделирования, используемым для описания сложных процессов и явлений, является аппарат дробно-дифференциального исчисления. Введение дробной производной по времени позволяет моделировать нелинейное поведение, характеризующееся эффектами памяти в динамических системах.

Ранее нами была предложена идея использования дробно-дифференциальной модификации уравнения Ландау – Халатникова для описания гистерезиса поляризации в сегнетоэлектриках с учетом эффекта памяти. Был рассмотрен режим субдиффузии [2], а также обобщенный диффузионно-волновой подход [3] для формализации процессов переключения поляризации в сегнетоэлектрических нанопроволках. Настоящая работа направлена на разработку эффективной численной схемы (на основе определения Капуто) для реализации дробно-дифференциальной диффузионно-волновой модификации модели Ландау – Халатникова и применения вычислительных методов для моделирования переключения поляризации в тонких сегнетоэлектрических пленках. Математическая постановка задачи в общем виде формализуется в виде начально-краевой задачи для дифференциального уравнения с дробной производной по времени:

$$\frac{\partial^\alpha p}{\partial t^\alpha} = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + p + bp^3 - cp^5 + \sigma e, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \leq \theta, \quad (1)$$

$$p|_{t=0} = p_0(x), \quad 0 < x < l, \quad (2)$$

$$\left. \frac{\partial p}{\partial t} \right|_{t=0} = \tilde{p}_0(x), \quad 0 < x < l, \quad 1 < \alpha \leq 2, \quad (3)$$

$$-\left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_{x=0} + qp|_{x=0} - g = 0, \quad \left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_{x=l} + qp|_{x=l} - g = 0, \quad 0 < t \leq \theta, \quad (4)$$

где $\frac{\partial^\alpha p}{\partial t^\alpha}$ – дробная производная Капуто; α – порядок дробного дифференцирования, $0 < \alpha \leq 2$; l – толщина пленки; t – время переключения поляризации; q, g – положительные параметры.

Введем в рассмотрение пространственно-временную сетку $\Omega_{\Delta x}^{\Delta t} = \{x_i = i\Delta x, \quad i = \overline{0, N}, \quad t^j = j\Delta t, \quad j = \overline{0, M}\}$. Для построения вычислительной схемы воспользуемся конечно-разностным представлением дробной производной по времени [4]:

$$\frac{\partial^\alpha p(x_i, t^{j+1})}{\partial t^\alpha} = \frac{\Delta t^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{k=0}^j \mu_k^\alpha (p_i^{j+1-k} - p_i^{j-k}) + O(\Delta t^{2-\alpha}), \quad (5)$$

где Γ – Гамма-функция, $\mu_k^\alpha = (k+1)^{1-\alpha} - k^{1-\alpha}$, $k = \overline{0, M}$. Производную по координате аппроксимируем с помощью формулы центральной разности.

В таком случае для $0 < \alpha < 1$ получим

$$\begin{aligned} & \frac{-1}{\Delta x^2} p_{i-1}^{j+1} + \left(\frac{\Delta t^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \mu_0^\alpha + \frac{2}{\Delta x^2} - 1 - b(p_i^j)^2 + c(p_i^j)^4 \right) p_i^{j+1} - \frac{1}{\Delta x^2} p_{i+1}^{j+1} = \\ & = -\frac{\Delta t^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \left(\sum_{k=1}^j \mu_k^\alpha (p_i^{j+1-k} - p_i^{j-k}) - \mu_0^\alpha p_i^j \right) + \sigma e^{j+1}, \quad i = \overline{1, N-1}, \quad j = \overline{0, M-1}. \end{aligned} \quad (6)$$

Для построения вычислительной схемы при $1 < \alpha < 2$, введем следующие обозначения $\alpha = 1 + \beta$, $\beta < 1$, $U(x, t) = \frac{\partial p(x, t)}{\partial t}$. Тогда уравнение (1) можно

представить в виде $\frac{\partial p}{\partial t} = U$, $\frac{\partial^\beta U}{\partial t^\beta} = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + p + bp^3 - cp^5 + \sigma e$.

Действуя аналогичным образом, как показано в (6), получим вычислительную схему для задачи (1)–(4):

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{\Delta x^2} p_{i-1}^{j+1} + \left(\frac{\Delta t^{-1-\beta}}{\Gamma(2-\beta)} \eta_0^\beta + \frac{2}{\Delta x^2} - 1 - b(p_i^j)^2 + c(p_i^j)^4 \right) p_i^{j+1} - \frac{1}{\Delta x^2} p_{i+1}^{j+1} = \\ & = -\frac{\Delta t^{-\beta}}{\Gamma(2-\beta)} \left(\sum_{k=0}^{j-1} (\eta_k^\beta - \eta_{k+1}^\beta) U_i^{j-k} + \frac{\eta_0^\beta}{\Delta t} p_i^j + \eta_j^\beta U_i^0 \right) + \sigma e^{j+1}, \end{aligned} \quad (7)$$

$$U_i^{j+1} = \frac{p_i^{j+1} - p_i^j}{\Delta t}, \quad i = \overline{1, N-1}, \quad j = \overline{0, M-1}. \quad (8)$$

Здесь веса η_k^β вычисляется также как и μ_k^α . Аппроксимация граничных условий проводилась с помощью асимметричных конечно-разностных формул

второго порядка точности. Кроме того, в силу наличия нелинейных слагаемых в вычислительные схемы была введена итерационная процедура.

На рисунке 1 показаны результаты моделирования зависимостей поляризации от поля $p(e)$ при различных значениях порядка дробной производной по времени α для тонкой пленки титаната бария. Значения входных параметров подробно описаны в работах [2, 3]. В серии вычислительных экспериментов α изменялась от 0.85 до 1.15 при фиксированном значении толщины пленки $l=1.37$ отн. е.

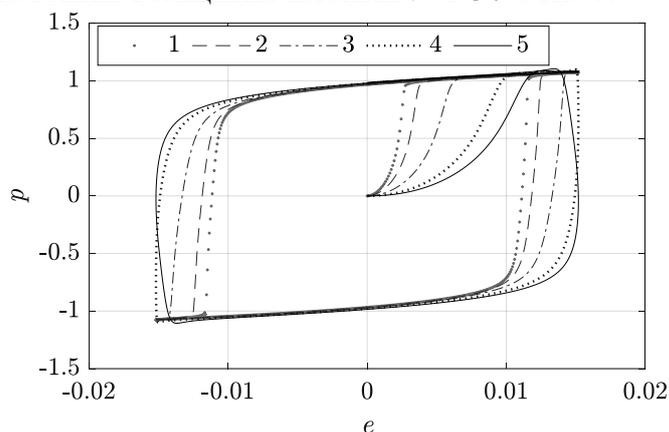


Рис.1. Гистерезисные зависимости $p(e)$ для тонкой пленки сегнетоэлектрика, рассчитанные при различных значениях порядка дробной производной по времени:
 $\alpha=0.85 - 1$, $\alpha=0.9 - 2$, $\alpha=0.99 - 3$, $\alpha=1.1 - 4$, $\alpha=1.15 - 5$

Таким образом, характерным управляющим параметром обобщенной модели становится динамическая фрактальная размерность или порядок дробной производной по времени. Полученные результаты позволяют предположить, что эффекты памяти проявляются в деформации петли, связанной с ее сужением. Переходные процессы супердиффузии, характеризующиеся деформацией петли, наблюдаются, начиная с $\alpha=1.3$.

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, проект № 122082400001-8.

Библиографический список

1. Amadou Y., Justin M., Hubert M.B., Betchewe G., Doka, S.Y., Crepin K.T Fractional effects on solitons in a 1D array of rectangular ferroelectric nanoparticles // Waves in Random and Complex Media. 2018. V. 30. P. 581 – 592.
2. Maslovskaya A.G., Moroz L.I. Time-fractional Landau-Khalatnikov model applied to numerical simulation of polarization switching in ferroelectrics // Nonlinear Dynamics. 2023. V. 111. P. 4543 – 4557.
3. Maslovskaya A., Moroz L. Fractional diffusion-wave modification of Landau-Khalatnikov model applied to polarization switching in ferroelectric nanowires // Proc. of the IEEE, Days on Diffraction, 2024. P. 1–6.
4. Liu F., Meerschaert M., McGough R., Zhuang P., Liu Q. Numerical methods for solving the multi-term time-fractional wave-diffusion equation // Fract. Calc. Appl. Anal. 2013. V.16. P. 9–25.

Аттрактор Лоренца в шестимерной модели, описывающей динамику лазера

В.А. Корякин¹,

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»,

Нижний Новгород

E-mail: vakoryakin@edu.hse.ru.

В данной работе проведено исследование шестимерной системы, описывающей динамику оптического лазера. Система представлена шестью дифференциальными уравнениями:

$$\begin{aligned}
 \dot{\beta} &= -\sigma\beta + gp_{23}, \\
 \dot{p}_{21} &= -p_{21} - \beta p_{31} + aD_{21}, \\
 \dot{p}_{23} &= -p_{23} - \beta D_{23} - ap_{31}, \\
 \dot{p}_{31} &= -p_{31} - \beta p_{21} - ap_{23}, \\
 \dot{D}_{21} &= -b(D_{21} - D_{21}^0) - 4ap_{21} - 2\beta p_{23}, \\
 \dot{D}_{23} &= -b(D_{23} - D_{23}^0) - 2ap_{21} - 4\beta p_{23}.
 \end{aligned} \tag{1}$$

Система (1) впервые была введена в работах [1], [2], где был также произведен аналитический и численный анализ данной системы с акцентом на исследование гомоклинических бифуркаций. При этом вопрос существования аттрактора Лоренца в этой системе ранее не рассматривался.

С помощью численной проверки критериев Шильникова [3] установлено, что в системе оптического лазера (1) существует аттрактор Лоренца. Выявлены соответствующие области значений параметров. Для подтверждения были построены бифуркационные диаграммы (Рис. 1). На диаграммах нанесены кривые отмеченные *Ном*, этим кривым в пространстве двух параметров соответствуют гомоклинические бифуркации обходности n и коразмерности один. Также обозначена кривая нейтрального седла $v=1$, точки S_0 и A_0 , в которых выполняются I и II критерии Шильникова, соответственно. При $\sigma = 1.15$ выполняется критерий Шильникова, а именно область с аттрактором Лоренца выходит из бифуркации коразмерности 2 гомоклинической восьмерки бабочки к нейтральному седлу (неустойчивое собственное число равно устойчивому по модулю). Также показано, что при данном значении параметра седловая величина вдоль гомоклинической бабочки может обнуляться. Таким образом, в данном случае возможна реализация двух критериев Шильникова.

Для численной проверки существования аттрактора Лоренца применяются критерии Шильникова [3]. Пусть седловое состояние равновесия O , имеет собственные числа $\gamma, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}$, при этом $\gamma > 0 > \lambda_1 > \text{Re}(\lambda_i), i \geq 2$.

I критерий:

- Обе неустойчивые сепаратрисы соответствующие γ , возвращаются в O при $t \rightarrow \infty$,

- седловой индекс O равен единице,
- сепаратрисная величина удовлетворяет условию $0 < |A| < 2$.

II критерий:

- Обе неустойчивые сепаратрисы соответствующие y , возвращаются в O при $t \rightarrow \infty$,
- в данной точке происходит зануление сепаратрисной величины вдоль петли сепаратрисы, также эта бифуркация называется inclination flip,
- седловой индекс точки O , лежит в пределах от 0.5 до 1.

Выполнение критерия Шильникова, гарантирует, что к точке в которой выполнены условия 1-3 прилежит открытая область в которой существует аттрактор Лоренца, который удовлетворяет геометрической модели Афрайовича, Быкова, Шильникова [5]. Также данные условия гарантируют что аттрактор является робастно хаотическим, что значит хаос не исчезает при изменении параметров, псевдогиперболическим - любая его траектория имеет положительный показатель Ляпунова.

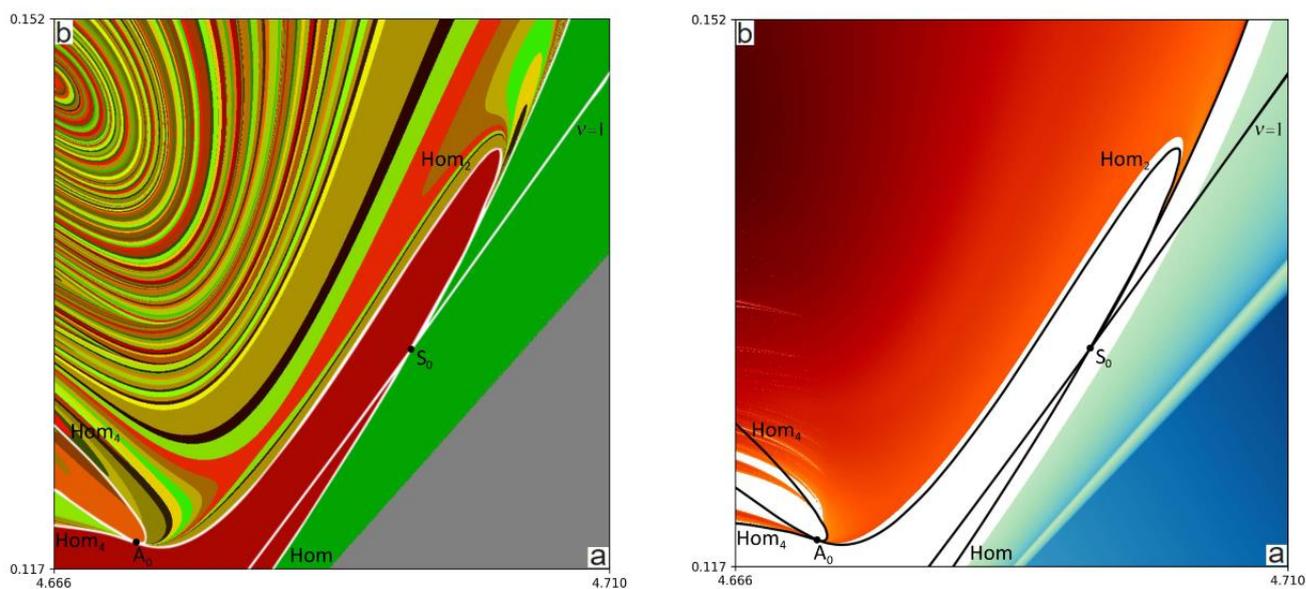


Рис. 1. Двухпараметрические диаграммы для системы лазера с $\sigma = 1.15$. а) Диаграмма нидинг инвариант. б) Диаграмма старшего ляпуновского показателя.

Для численного изучения данной системы были использованы диаграммы нидинг инвариантов, см. рис. 1а и диаграмма старшего ляпуновского показателя, см. рис. 1б. Диаграмма нидинг инвариант кодирует траекторию системы в последовательность символов 0 и 1, далее всем последовательностям присваивается уникальный цвет, таким образом схожие траектории имеют одинаковый цвет на двухпараметрической карте. Линии смены цветов отвечают гомоклиническим бифуркациям. С помощью диаграммы старшего ляпуновского показателя рассчитывается ляпуновский

показатель аттрактора, области в которых присутствует положительный показатель окрашиваются в красные цвета.

Работа подготовлена в результате проведения исследования в рамках проекта «Зеркальные лаборатории НИУ ВШЭ»

Библиографический список

- [1] Pusuluri K., Meijer H. G. E., Shilnikov A. L. Homoclinic puzzles and chaos in a nonlinear laser model //Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. – 2021. – Т. 93. – С. 105503.
- [2] Pusuluri K., Shilnikov A. Homoclinic chaos and its organization in a nonlinear optics model //Physical Review E. – 2018. – Т. 98. – №. 4. – С. 040202.
- [3] Shilnikov L. P. The bifurcation theory and quasi-hyperbolic attractors //Uspehi Mat. Nauk. – 1981. – Т. 36. – С. 240-241.
- [4] Ovsyannikov I. I., Turaev D. V. Analytic proof of the existence of the Lorenz attractor in the extended Lorenz model //Nonlinearity. – 2016. – Т. 30. – №. 1. – С. 115.
- [5] Afraimovich V. S., Bykov V. V., Shilnikov L. P. On the origin and structure of the Lorenz attractor //Akademiia Nauk SSSR Doklady. – 1977. – Т. 234. – С. 336-339.

Динамика генератора квазипериодических колебаний под периодическим импульсным воздействием

А.Л. Шамсина, Н.В. Станкевич

¹Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»,
Нижний Новгород
E-mail: alshamsina@edu.hse.ru

Системы под внешним периодическим воздействием и явление их синхронизации распространены в области естественных наук [1, 2]. Внешнее воздействие увеличивает размерность динамической системы, что может приводить к появлению в системе более сложного поведения. Возможно возникновение хаоса, или многомерного хаоса. В случае, когда автономная система демонстрирует квазипериодические колебания, могут появляться квазипериодические колебания с большим количеством несоизмеримых частот, а также наблюдаться новые сценарии развития многомерного хаоса. Целью данной работы является исследование сценариев развития многомерного хаоса в модели генератора квазипериодических колебаний с единственным состоянием равновесия под периодическим импульсным воздействием [3].

Модель автономного генератора квазипериодических колебаний записывается в виде следующей системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \ddot{x} - (\lambda + z + x^2 - \beta x^4) \dot{x} + \omega_0^2 x &= 0, \\ \dot{z} &= b(\varepsilon - z) - \kappa \dot{x}^2. \end{aligned} \quad (1)$$

Модель(1) - трёхмерная динамическая система, которая включает в себя две подсистемы: осцилляторная подсистема и «энергетический ресурс». В уравнениях (1) x , $y = \dot{x}$, z - динамические переменные генератора. Параметр λ отвечает за возбуждение автоколебаний в системе, ω_0 определяет одну из частотных характеристик системы. Параметр ε описывает поступление энергии от источника питания генератора, параметр b связан с инерционными свойствами энергетической цепи. Член, содержащий коэффициент κ , отвечает за отбор энергии в автогенератор. При вариации параметров системы может наблюдаться устойчивое состояние равновесия, периодические автоколебания, квазипериодические и хаотические колебания. Условие бифуркации Андронова-Хопфа, при котором теряется устойчивость состояния равновесия и рождается предельный цикл: $\lambda = \varepsilon$.

Система под периодическим импульсным воздействием имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \ddot{x} - (\lambda + z + x^2 - \beta x^4) \dot{x} + \omega_0^2 x &= A \Sigma \delta(t - nT), \\ \dot{z} &= b(\varepsilon - z) - \kappa \dot{x}^2. \end{aligned} \quad (2)$$

В модели (2) неавтономная компонента (периодическое импульсное воздействие) определяется следующими параметрами: A - амплитуда, T - период внешнего сигнала, δ - дельта-функция, n - номер импульса.

Зафиксируем параметры системы следующим образом: $\beta=1/18$, $\kappa=0.02$, $\omega_0=6$, $\varepsilon=0$, $\lambda=1$, для которых в автономной подсистеме имеют место автономные квазипериодические колебания и аттрактором является устойчивый тор. Динамику неавтономного генератора (2) будем исследовать с помощью анализа спектра показателей Ляпунова. На рис. 1 представлена карта показателей Ляпунова и ее увеличенный фрагмент для модели (2).

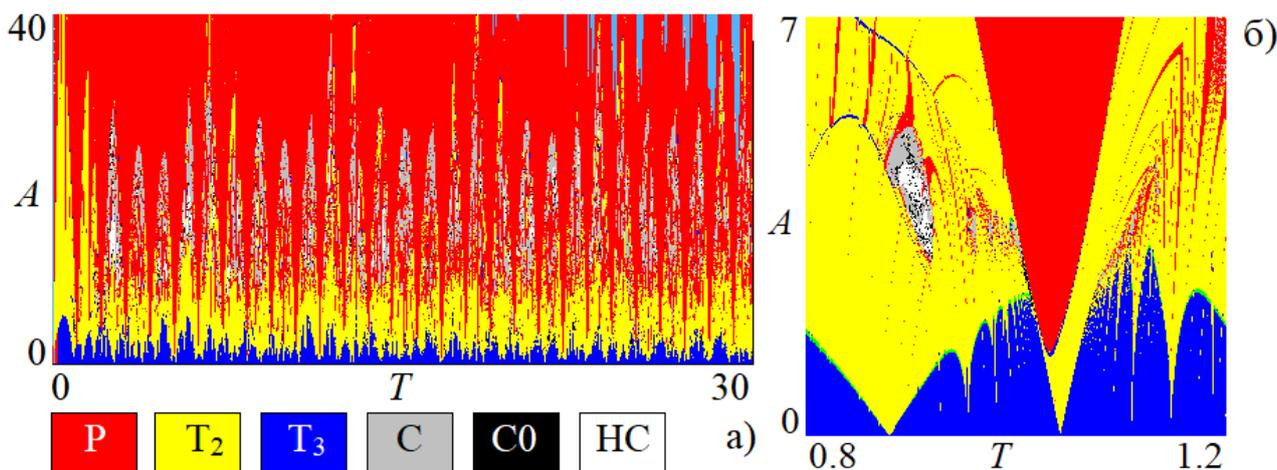


Рис.1. карта показателей Ляпунова и ее увеличенный фрагмент для модели (2) при $\beta=1/18$, $\kappa=0.02$, $\omega_0=6$, $\varepsilon=0$, $\lambda=1$. P - периодические колебания, T_2 - двухчастотные квазипериодические колебания, T_3 - трехчастотные квазипериодические колебания. Три типа хаотических колебания с различной сигнатурой спектра показателей Ляпунова: C (+, 0, -, -), C0 (+, 0, 0, -), HC (+, +, 0, -)

На картах хорошо видно, что при малых амплитудах внешнего сигнала возбуждаются трехчастотные квазипериодические колебания. В трехчастотную квазипериодику встроена система языков двухчастотных квазипериодических колебания, отвечающих частичной синхронизации: одна из частот синхронизуется внешним сигналом. С увеличением амплитуды двухчастотные колебания трансформируются в периодические: наблюдаются языки полной синхронизации. С ростом амплитуды между языками синхронизации можно обнаружить формирование хаоса, характеризующегося различной сигнатурой спектра показателей Ляпунова. При этом в системе наблюдается полное разнообразие хаотических аттракторов для четырехмерной системы.

Помимо сложной динамики в системе (2) возможна мультистабильность. Чтобы проверить систему (2) на наличие мультистабильности, мы строили однопараметрические бифуркационные деревья и графики показателей Ляпунова с наследованием и со сканированием в две стороны, которые представлены на рис.2. На рисунках можно выделить интервал, где имеет место мультистабильность (обозначен фиолетовыми линиями).

На рис.1(в, г) видно, что с уменьшением силы связи сначала происходит каскад удвоений тора. После второго удвоения тор разрушается, образуется хаос. Просматривается участок, на котором второй показатель Ляпунова близок

или равен нулю, что соответствует хаосу с дополнительным нулевым показателем Ляпунова. С дальнейшим уменьшением параметра хаос разрушается.

При сканировании в другую сторону рис.1(а, б), на месте удвоения торов можно наблюдать окна периодичности.

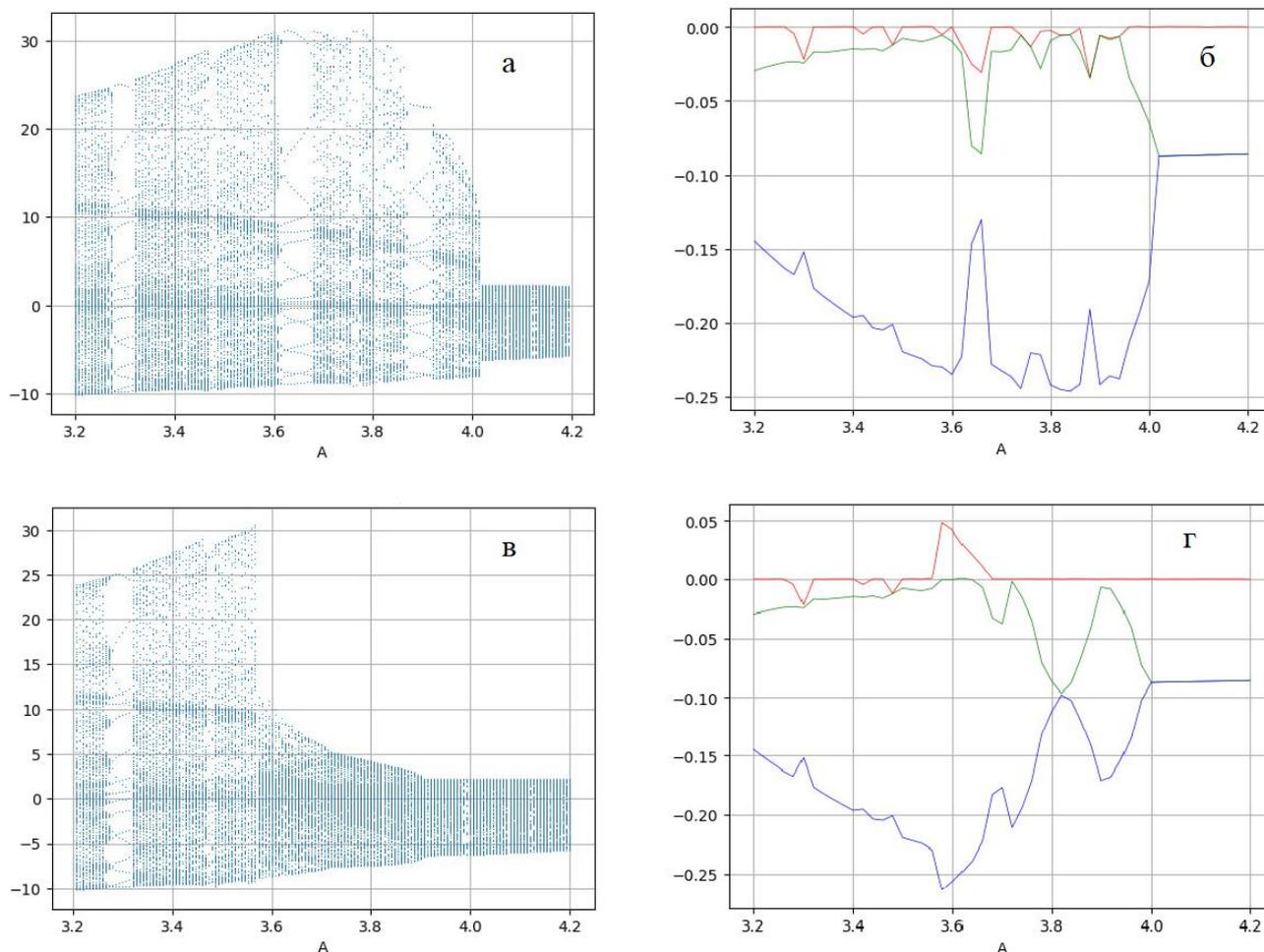


Рис.2. а) бифуркационное дерево, полученное сканированием с наследованием в прямом направлении; б) спектр показателей Ляпунова в прямом направлении; в) бифуркационное дерево в обратном направлении; г) спектр показателей Ляпунова в обратном направлении

Библиографический список

1. Kloeden, Peter E., and Martin Rasmussen. Nonautonomous dynamical systems. No. 176. American Mathematical Soc., 2011
2. Stefanovska, Aneta, and Peter VE McClintock, eds. Physics of biological oscillators: new insights into non-equilibrium and non-autonomous systems. Springer Nature, 2021
3. Кузнецов А. П., Станкевич Н. В. Автономные системы с квазипериодической динамикой. Примеры и свойства: Обзор //Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. – 2015. – Т. 23. – No. 3. – С. 71-93.
4. Кузнецов С. Динамический хаос. // М. Физматлит. -2001.

Квазипериодическая и хаотическая динамика в системе Чуа под периодическим импульсным воздействием

А.К. Килина, Н.В. Станкевич

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»,

Нижний Новгород

E-mail: akkilina@edu.hse.ru.

Процессы, описываемые системами под воздействием внешних сил, возникают в различных областях естественных наук [1, 2]. Особое внимание уделяется вопросам о поведении систем, на которые воздействуют периодические импульсы постоянной амплитуды [3]. При возникновении периодических автоколебаний в автономной системе наблюдается классическое явление синхронизации [4], когда собственная частота системы согласуется с внешним воздействием. Вне зависимости от динамики автономной системы, внешнее воздействие может привести к развитию хаотического поведения, если размерность фазового пространства неавтономной системы три или более. В работе [5] проведено исследование динамики трехмерного генератора Анищенко-Астахова под периодическим импульсным воздействием. Показано, что в такой системе возможно возникновение многомерного хаоса. Дана модель имеет достаточно простое фазовое пространство, в том смысле, что в системе всегда есть единственное тривиальное равновесие, на основе которого и развивается сложная динамика. В рамках данной работы проводится исследование другого известного трехмерного генератора – система Чуа [6], которая может иметь от одного до трех состояний равновесия и динамика системы может развиваться на базе различных равновесия.

Система Чуа представляет собой систему трех обыкновенных дифференциальных уравнений следующего вида:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \alpha(x - y) - \alpha f(x), \\ \dot{y} &= z - (y - x), \\ \dot{z} &= -\beta y - \gamma z\end{aligned}\tag{1}$$

где $f(x) = m_1 x + 0.5(m_0 - m_1)(|x+1| - |x-1|)$ - функция, описывающая вольт-амперную характеристику диода Чуа, который является единственным нелинейным элементом в цепи. Нелинейная характеристика представляет собой кусочно-линейную функцию. Параметры m_0 и m_1 соответствуют кусочно-линейной характеристике нелинейного элемента, в то время как α , β и γ характеризуют резистор, конденсатор и индуктивность в цепи. Модель в зависимости от параметров может иметь одно или три состояния равновесия. Данная особенность усложняет структуру фазового пространства системы. При этом нелинейность в системе – кусочно-гладкая. Таким образом, поведение в системе на каждом из участков линейно, что может упрощать динамику системы.

Система Чуа, подвергаемая периодическому импульсному воздействию, может быть записана в следующем виде:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \alpha(x - y) - \alpha f(x), \\ \dot{y} &= z - (y - x) + A \Sigma \delta(t - nT), \\ \dot{z} &= -\beta y - \gamma z\end{aligned}\quad (2)$$

Для исследования динамики модели Чуа под периодическим импульсным воздействием были построены карты динамических режимов и карты показателей Ляпунова. Карта динамических режимов строилась путем сканирования плоскости параметров с заданным шагом. Для каждой точки определялся динамический режим на основе числа неподвижных точек в стробоскопическом сечении. Режимам соответствовали различные цвета на карте. Карта показателей Ляпунова создавалась по аналогичному методу, но учитывался полный спектр показателей Ляпунова. Показатели Ляпунова вычислялись в соответствии с алгоритмом из работы [7], используя ортогонализацию Грамма-Шмидта.

В автономной системе при параметрах $m_0 = -0.3$, $m_1 = -0.05$ имеется единственное тривиальное состояние равновесия типа седло-фокус, а в фазовом пространстве наблюдается устойчивый предельный цикл. Подадим на данную систему импульсное воздействие по оси Oy и построим карту показателей Ляпунова, которая представлена на рис. 1. На карте при малых амплитудах воздействия наблюдаются двухчастотные квазипериодические колебания. С ростом амплитуды наблюдается переход к периодическим колебаниям. Отличительной особенностью карты является отсутствие областей хаотических режимов. Данная особенность связана с линейностью модели на отдельных участках кусочной нелинейной характеристики. На рис.1б показан пример типичного бифуркационного дерева в стробоскопическом сечении, где наблюдается бифуркация Неймарка-Сакера и показаны примеры отображений для периодического и квазипериодического поведения.

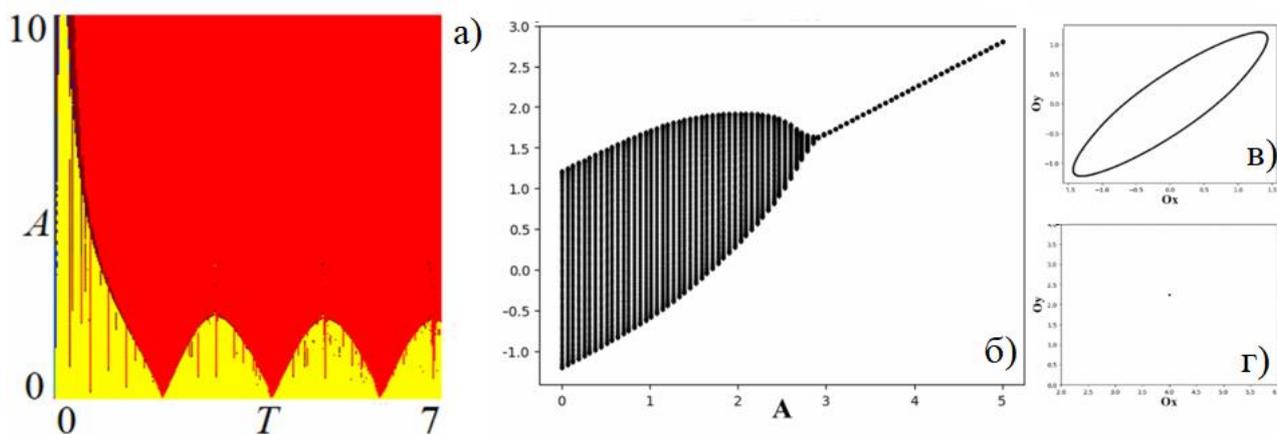


Рис.1. а) карта показателей Ляпунова системы Чуа (2) при $\alpha=8.4$, $\beta=12$, $\gamma=0.05$, $m_0=-0.3$, $m_1=-0.05$; б) бифуркационное дерево при $T=1$; стробоскопические сечения, $T=1$ с) $A=1$; д) $A=4$

Далее мы рассмотрели другие параметры, которые также отвечают простейшей ситуации, когда в системе есть единственное тривиальное седло-фокусное равновесие и устойчивый предельный цикл: $m_0=-0.5$, $m_1=-0.96$. Отличие этой ситуации от предыдущей заключается в том, что амплитуда колебаний предельного цикла значительно больше. На рис.2 представлена карта показателей Ляпунова, бифуркационное дерево и стробоскопические сечения для некоторых режимов. Как видно в данном случае в системе появляется хаотическое поведение. При этом наблюдается только классический хаос, многомерного хаоса в системе нет.

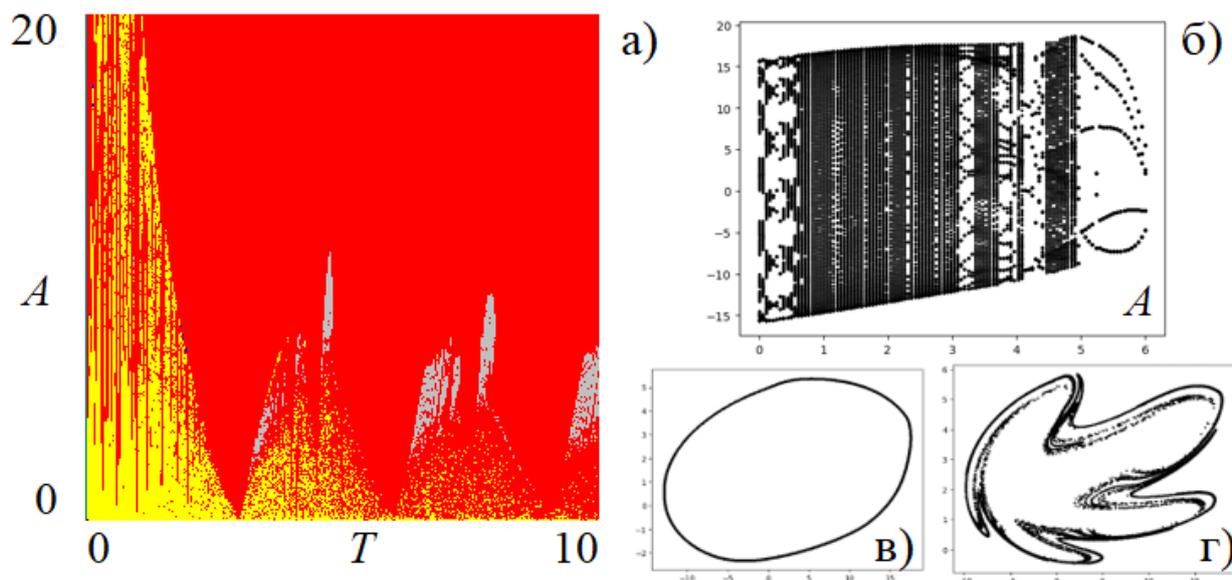


Рис.2. а) карта показателей Ляпунова системы Чуа (2) при $\alpha=8.4$, $\beta=12$, $\gamma=0.05$, $m_0=-0.5$, $m_1=-0.96$; б) бифуркационное дерево при $T=3.71$; стробоскопические сечения, $T=3.71$ в) $A=2.4$; г) $A=4.5$

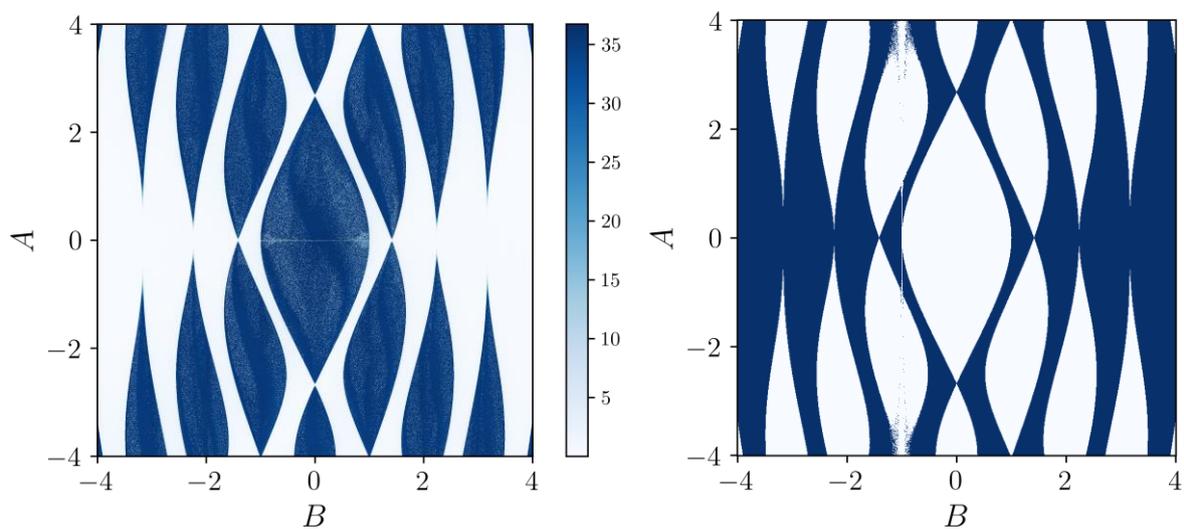
Исследование осуществлено в рамках программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ

Библиографический список

1. Christiansen L.E. et al. // Mathematics and computers in simulation. 2002. V.58, No. 4-6. P.385-405.
2. Safonov D.A., Klinshov V.V., Vanag V.K. // Physical Chemistry Chemical Physics. 2017. V.19, No. 19. P. 12490-12501.
3. Gonzalez D.L., Piro O. // Physical Review Letters. 1983. V. 50, No. 12. P. 870.
4. Pikovsky A., Rosenblum M., Kurths J. Synchronization. A Universal Concept in Nonlinear Sciences. Cambridge, 2002
5. Kilina A.K., Panteleeva P.Yu., Stankevich N.V. // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulations. 2024. V.135. PP. 108041
6. Chua L., Komuro M., Matsumoto T. // IEEE Trans. Circuits Syst. 1986. V.CAS-33, No.11. P. 1072
7. Benettin G. et al. // Meccanica. 1980. V. 15. P. 9-20.

Секция 4

«Теория динамических систем»



Аттракторы и бифуркации кусочно-гладких динамических систем Н.В. Барабаш^{1,2}

¹Волжский государственный университет водного транспорта
Нижний Новгород

²Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
Нижний Новгород

E-mail: barabash@itmm.unn.ru.

Кусочно-гладкие динамические системы (PWS, piecewise-smooth) интересны тем, что они позволяют проводить строгое исследование своих сложных неблуждающих множеств и их бифуркаций [1]. Интегрируемость таких систем в подобластях фазового пространства позволяет сводить задачи об аттракторах и бифуркациях потоков к изучению их отображений Пуанкаре, полученных в явном виде. При этом в ряде случаев удаётся перейти к одномерным отображениям, т.е. значительно понизить размерность исходной задачи [2]. Другим сильным преимуществом PWS-систем перед своими гладкими нелинейными аналогами, аналитическое исследование которых проводится в основном асимптотическими методами, является нелокальность результата. Это преимущество позволяет существенно дополнить и скорректировать классические представления о свойствах сложных аттракторов и их бифуркаций [3]. Важным достоинством PWS-систем является ясность результата, его доступность для понимания, что придаёт PWS-системам методическую значимость. По этим причинам PWS-системы зарекомендовали себя не только как мощный инструмент исследования сложной динамики, но и как самостоятельный объект изучения.

В докладе рассмотрены двумерные и трёхмерные PWS-потоки, воспроизводящие как хорошо известные результаты теории бифуркаций гладких систем, так и демонстрирующие совершенно новые динамические эффекты [4-6].

Работа выполнена при поддержке РФФ (проект № 24-71-00073).

Библиографический список

1. Levinson N. // Annals of Mathematics. 1949. V. 50, № 1. P. 127.
2. Belykh V. N., Barabash N. V., Belykh I. V. // Chaos. 2019. V. 29. №. 10. P. 103108.
3. Belykh V. N., Barabash N. V., Belykh I. V. // Chaos. 2023. V. 33. №. 4. P. 043119.
4. Filippov A. Diff. Equations with Discont. Right-hand Sides. Kluwer Academic Press. 1988. 304 p.
5. Belykh V. N., Barabash N. V., Belykh I. V. // Autom. & Rem. Control. 2020. V. 81. №. 8. P. 1385.
6. Belykh V. N., Barabash N. V., Belykh I. V. // Chaos. 2021. V. 31. №. 4. P. 043117.

Гомоклинический резонанс и эллиптические точки**С.В. Гонченко^{1,2}**¹ННГУ им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород²Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»,
Нижний Новгород

E-mail: sergey.gonchenko@mail.ru

В докладе дается обзор некоторых результатов, полученных нами при исследовании бифуркаций квадратичных гомоклинических касаний в случае двумерных симплектических диффеоморфизмов. Основные бифуркации таких касаний в диссипативном случае (якобиан отображения в седловой неподвижной точке меньше 1) были изучены еще в известной работе Гаврилова и Шильникова [1]. В этой работе, в частности, было показано, что эти бифуркации приводят к рождению устойчивых периодических траекторий (стоков). Один из самых известных результатов на эту тему — это т. н. теорема о каскаде периодических стоков, которая говорит о том, что в однопараметрических семействах, расщепляющих исходное гомоклиническое касание общим образом, существует счетное множество (каскад) непересекающихся интервалов δ_k значений параметра μ таких, что при μ из δ_k у соответствующего диффеоморфизма существует однообходная устойчивая траектория периода k (здесь однообходной траектории отвечает неподвижная точка соответствующего отображения первого возвращения вблизи исходной гомоклинической траектории). Эта теорема получила большое число обобщений, в том числе и на общий многомерный случай, см., например, [2,3], а также на рассматриваемый в докладе случай сохраняющих площадь отображений [4,5]. Однако в последнем случае интервалы δ_k , отвечающие уже существованию однообходных эллиптических траекторий, могут пересекаться. Более того, в случае т. н. *гомоклинического резонанса* они могут образовывать систему вложенных интервалов, содержащих точку $\mu = 0$. Таким образом, здесь возможна такая ситуация, когда исходное сохраняющее площадь отображение с гомоклиническим касанием имеет счетное множество эллиптических траекторий всех последовательных периодов $k_0, k_0 + 1, \dots$, начиная с некоторого k_0 . Интересно, что соответствующая теорема допускает точную формулировку на языке инвариантов исходной гомоклинической структуры. По нашему мнению, это пока единственный результат в теории консервативного хаоса, который связан с получением эффективно проверяемых условий существования у системы счетного множества эллиптических периодических траекторий.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ №~24-11-00339.

Библиографический список

1. Гаврилов Н.К., Шильников Л.П. // Мат. сб., 1973, т.90, №1, 139-156.
2. Гонченко С.В. // Мат. Заметки, 1983, т. 33, №.5, 745-755.
3. Gonchenko S.V., Shilnikov L.P., Turaev D. // Nonlinearity, 2008, v. 21, No.5, 923-972.
4. Гонченко С.В., Шильников Л.П. // Доклады Академии Наук, 2001, т.378, №6, 727-732.
5. Gonchenko S.V., Gonchenko M.S.// Regular and Chaotic Dynamics }, 2009, v.14, No.1, 116-136.

**Вырожденные бифуркации удвоения периода
в кусочно-линейном отображении
Ж.Т. Жусубалиев^{1,2}, У.А. Сопуев², Е.Н. Иванова¹**

¹Юго-Западный государственный университет, Международная
научная лаборатория динамики негладких систем, Курск

²Ошский государственный университет, Институт математики,
физики, техники и информационных технологий, Ош, Кыргызстан
E-mail: zhanubai@gmail.com

Многие задачи радиофизики, механики, теории управления, биологии, медицины, экономики и социальных наук сводятся к изучению кусочно-гладких непрерывных отображений [1–4]. Такие отображения «сшиваются» из отдельных гладких функций, области определения которых разделены так называемыми многообразиями переключения. При вариации параметров инвариантное множество, например, неподвижная или периодическая точка сталкивается с одним из многообразий переключения. Это вызывает специальный круг нелинейных явлений, получивших название бифуркаций «граничного столкновения» («border collision bifurcations») [5–7].

Бифуркации граничного столкновения не связаны с нарушением условия гиперболичности неподвижных или периодических точек и не имеют аналогов в гладких динамических системах. По этой причине они не поддаются описанию и интерпретации методами классической нелинейной динамики [8].

Кроме того, если отображение кусочно-линейное, то классические бифуркации, такие, например, как удвоение периода, транскритическая, вилообразная становятся вырожденными («degenerate bifurcations»), сочетая свойства гладких бифуркаций и бифуркаций граничного столкновения [9, 10].

В докладе представлены результаты исследований вырожденных бифуркаций удвоения периода в бимодальном кусочно-линейном отображении, которым посвящена часть работы [11]. В отличие от [11] мы вводим простое кусочно-линейное отображение, допускающее детальный численно-аналитический бифуркационный анализ. При этом оказывается, что такое отображение сохраняет главное свойство рассматриваемого класса дискретных моделей, которое доказано в [11]. Выявлено, что рассматриваемое отображение обладает и другим свойством, которое заключается в следующем. В точке бифуркации удвоения периода неподвижной точки появляется интервал I , на границах которого лежат две точки цикла удвоенного периода. Причем, любая точка I есть негиперболическая точка с периодом два.

Легко доказывается, что точки цикла удвоенного периода, лежащие на границе I , совпадают с двумя многообразиями переключения. В силу того, что отображение кусочно-линейное, уравнения бифуркационных границ получены в форме явной зависимости от параметров, решения которых находятся либо аналитически, либо численно.

Рассмотрим бимодальное кусочно-линейное непрерывное отображение

$$F : x \mapsto F(x), F(x) = \begin{cases} F_L(x) = a \cdot (x-1) + 1, & x \leq c_L; \\ F_M(x) = \frac{q}{q-1} \cdot a \cdot (x-1), & c_L < x < c_R; \\ F_R(x) = a \cdot x, & x \geq c_R, \end{cases} \quad (1)$$

где c_L, c_R – многообразия переключения: $c_L = (q-1)/a + 1$; $c_R = q$. Исследования проводились при следующих значениях параметров: $0.0 < a < 1.0$; $0.6 < q < 1.0$.

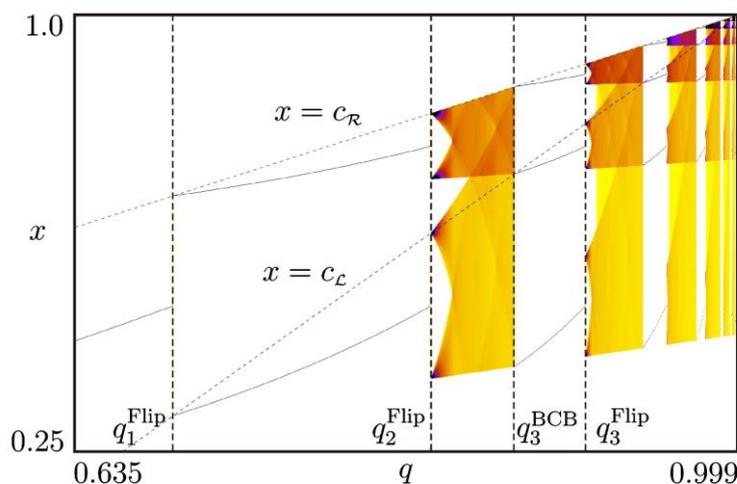


Рис.1. Бифуркационная диаграмма, $a = 0.451376$

На рис. 1 изображена бифуркационная диаграмма, рассчитанная численно, показывающая переход к нерегулярным колебаниям через каскад вырожденных бифуркаций удвоения периода и последовательность бифуркаций граничного столкновения. Бифуркационная диаграмма иллюстрирует типичный сценарий каскада «period incrementing» [10].

Отображение (1) имеет устойчивую неподвижную точку до $q_1^{Flip} = \frac{1}{1+a}$.

При $q = q_1^{Flip}$ неподвижная точка претерпевает вырожденную бифуркацию удвоения периода, когда мультипликатор неподвижной точки обращается в -1 . В результате этой бифуркации возникает цикл удвоенного периода. В точке бифуркации q_1^{Flip} появляется интервал I , на границах которого лежат точки 2-цикла. Причем обе точки цикла удвоенного периода совпадают с многообразиями переключения c_L, c_R . Более того, любая точка I , за исключением неподвижной, является негиперболической с периодом два [10].

При дальнейшем увеличении параметра q устойчивый 2-цикл претерпевает вырожденную бифуркацию удвоения периода (рис. 1), когда мультипликатор 2-цикла обращается в -1 . Из этого условия находится бифуркационное значение параметра q : $q_2^{Flip} = \frac{1}{1+a^2}$. В отличие от предыдущего случая, это приводит к рождению четырехполосного хаотического аттрактора, границы которого образованы двумя критическими

точками ранга один и их образами. В этом случае интервал I уже неодносвязный, но в точке бифуркации на границах I лежат две периодические точки 4-цикла, которые совпадают с двумя многообразиями переключения c_L , c_R . Далее наблюдаются каскады бифуркаций хаотических аттракторов [9, 10, 12], известные как кризисы хаотических аттракторов и связанные с гомоклиническими бифуркациями неустойчивых периодических орбит (рис. 1). Кризисы проявляются во внезапном («interior crisis») или плавном («merging crisis») изменении размеров хаотических аттракторов.

Хаотические аттракторы возникают из периодической орбиты через вырожденную бифуркацию удвоения периода (см. окна периодичности на рис. 1). Например, как показано на рис. 1, периодическая орбита периода 3 рождается в точке $q_3^{BCB} = \frac{1-a^2}{1-a^3}$ через бифуркацию граничного столкновения в

паре с неустойчивым циклом (аналог касательной бифуркации в гладких динамических системах) и далее в точке $q_3^{Flip} = \frac{1}{1+a^3}$ 3-цикл претерпевает

вырожденную бифуркацию удвоения периода. Нетрудно показать, что точки вырожденных бифуркаций удвоения периода m -цикла находятся по формуле

$q_m^{Flip} = \frac{1}{1+a^m}$, $m = 1, 2, 3, \dots$, а точки бифуркаций граничного столкновения –

$q_m^{BCB} = \frac{1-a^{m-1}}{1-a^m}$, $m = 3, 4, 5, \dots$.

Жусубалиев Ж.Т. и Иванова Е.Н. поддержаны Минобрнауки РФ в рамках «Программы стратегического академического лидерства Приоритет-2030» (проект № 1.7.21/4-24-7). Сопуев У.А. поддержан грантом № 19-24 Омского государственного университета.

Библиографический список

1. Banerjee S., Verghese C.C. (Eds.) Nonlinear Phenomena in Power Electronics. New York: IEEE Press, 2001. 441 p.
2. Zhusubaliyev Zh.T., Mosekilde E. Bifurcations and Chaos in Piecewise-Smooth Dynamical Systems. Singapore: World Scientific, 2003. 363 p.
3. Di Bernardo M., Budd C.J., Champneys A.R., Kowalczyk P. Piecewise-Smooth Dynamical Systems: Theory and Applications. London: Springer-Verlag, 2008. 483 p.
4. Di Bernardo M., Budd C.J., Champneys A.R., Kowalczyk P., Nordmark A.B., Tost G.O., Piiroinen P.T. //SIAM Review. 2008. V. 50. P. 629--701.
5. Feigin M. I. //Journal of Appl. Math. 1970. V. 34(5–6). P. 822–830.
6. Nusse H.E., Yorke J.A. //Physica D. 1992. V. 57. No. 1-2. P. 39--57.
7. Di Bernardo M., Feigin M.I., Hogan S.J., Homer M.E. //Chaos, Solitons and Fractals, 1999. V. 19. No.9. P. 1881—1908.
8. Guckenheimer J., Holmes P. Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields. Springer-Verlag: New York, 2013. 459 p.
9. Sushko I., Gardini L. //Int. J. Bifurcation and Chaos. 2010. V. 20. No. 7. P. 2045--2070.
10. Avrutin V., Gardini L., Sushko I., Tramontana F. Continuous and Discontinuous Piecewise-Smooth One-Dimensional Maps: Invariant Sets and Bifurcation Structures. Singapore: World Scientific, 2019. 648 p.
11. Zhusubaliyev Zh.T., Titov D.V., Yanochkina O.O., Sopuev U. A. // Automation and Remote Control. 2024. V. 85(2). P. 103–122
12. Grebogi C., Ott E., Yorke J. A. //Phys. Rev. Lett. 1982. V. 48. P. 1507--1510.

О связи уравнения Хилла с динамическими системами на торе А.А. Александров^{1,2,3}

¹Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»,
Москва, 119048

²Институт Проблем Передачи Информации РАН, Москва, 127994

³Московский Физико-технический институт, Долгопрудный, 141700

E-mail: aleksandrov.aa@phystech.edu

Данный доклад основан на промежуточных результатах, полученных совместно с А.А. Глуцюком, А.С. Горским и В.М. Бухштабером. Хорошо известно, что свойства динамической системы на торе можно исследовать посредством изучения диффеоморфизмов окружности. Для таких систем определено понятие числа вращения и, более того, для типичного диффеоморфизма окружности числа вращения являются иррациональными, а сам диффеоморфизм близок к повороту [1]. Однако существуют области в пространстве параметров задачи, внутри которых числа вращения являются рациональными и не меняются. Такие области называют *языками Арнольда*, также их называют *зонами фазового захвата*.

Среди динамических систем на торе существует особое семейство, которое демонстрирует нетипичные свойства: зоны фазового захвата таких систем соответствуют только целым числам вращения. Это явление называют «квантованием» числа вращения. Оказывается, что отображение Пуанкаре таких динамических систем сопряжено преобразованию Мёбиуса. Данные преобразования Мёбиуса могут быть представлены в виде элементов группы $SL(2, \mathbb{C})$. Такое отображение Мёбиуса можно представить в виде

$$M(z) = \zeta \frac{z-w}{1-\bar{w}z}, \quad M = \begin{pmatrix} \zeta & -w\zeta \\ -\bar{w}\zeta & \zeta \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{C}), \quad |\zeta|=1, |w|<1. \quad (1)$$

Таким образом анализируя тип и фиксированные точки отображения Мёбиуса, можно исследовать языки Арнольда данного семейства динамических систем на торе. Технически это сводится к решению системы ОДУ для параметров отображения Мёбиуса. В частности, наибольшая Ляпуновская экспонента динамической системы на торе может быть явно выражена через параметры отображения Мёбиуса,

$$\Lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \ln \frac{1+|w(t)|}{1-|w(t)|}, \quad (2)$$

а зоны фазового захвата посредством сравнения Λ с нулем: внутри зон $\Lambda > 0$, а на границах и вне зон $\Lambda < 0$.

Оказывается, что упомянутое семейство динамических систем на торе тесно связано с уравнением Хилла. Уравнением Хилла называют обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка вида

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + g_1(t) \frac{du}{dt} + g_2(t)u = 0, \quad (3)$$

где функции $g_1(t)$ и $g_2(t)$ периодические с периодом T . Уравнение (3) можно представить в виде системы двух ОДУ первого порядка и доказать следующий факт. Пусть $N(t_0)$ есть число нулей решения уравнения Хилла на отрезке $[0, t_0)$, тогда предел

$$\nu = \lim_{t_0 \rightarrow \infty} \frac{\pi N(t_0)}{t_0}$$

существует, не зависит от начальных условий и с точностью до умножения на 2 совпадает с числом вращения динамической системы на торе из указанного выше семейства. Данное утверждение широко известно [2], однако его аккуратного доказательства автору в литературе не встречалось.

Из этого утверждения следует следующая интересная связь. Пусть M_H есть матрица монодромии уравнения Хилла (3). Теорема Флоке-Ляпунова утверждает, что решения уравнения Хилла стабильны (в смысле того, что они ограничены с ростом t) если выполняется $|\operatorname{tr} M_H| < 2$ и нестабильны (т.е. не ограничены) если $|\operatorname{tr} M_H| > 2$. Эти условия задают области стабильности и нестабильности решений уравнения Хилла в зависимости от параметров задачи. Совокупность этих областей называют *зонной структурой*, причем области стабильности называют *зонами*, а области нестабильности – *щелями*. Оказывается, что в силу наличия связи между динамической системой на торе и величиной ν , монодромия M_H сопряжена отображению Мёбиуса M . Это приводит к следующему соответствию,

$$\boxed{\text{зоны фазового захвата}} \longleftrightarrow \boxed{\text{щели в зонной структуре}} \quad (4)$$

В качестве примера такого соответствия можно рассмотреть RSJ-модель, которая описывает Джозефсоновский контакт с сильной омической диссипацией. Этой модели соответствует следующая динамическая система,

$$\frac{d\phi}{dt} = -\sin \phi + I, \quad I = (B + A \cos \omega t), \quad (5)$$

где величина I есть внешний ток с частотой ω , поданный на контакт. Это уравнение в литературе также именуют *уравнением Джозефсона*. Посредством замен переменных, данная система приводится к следующему уравнению Хилла

$$\frac{d^2 u}{dt^2} - V(t)u = 0, \quad (6)$$

где потенциал $V(t)$ имеет вид

$$V(t) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} (B + A \cos \omega t)^2 - \frac{1}{4} \left(\frac{2A\omega^2 \cos \omega t}{1 + B + A \cos \omega t} + \frac{3A^2 \omega^2 \sin^2 \omega t}{(1 + B + A \cos \omega t)^2} \right). \quad (7)$$

Эффект «квантования» числа вращения для системы (5) хорошо изучен в литературе [3], а сведение RSJ-модели к уравнению Хилла (6) обсуждалось в работе [4]. Чтобы проиллюстрировать соответствие (4), нужно заметить, что потенциал (7) уравнения Хилла для RSJ-модели имеет особенности в виде полюсов при определенных значениях параметров. Это означает, что для

вычисления матрицы монодромии M_H требуется аккуратный выбор контура интегрирования по времени. Однако это затруднение можно легко обойти, внося малый комплексный сдвиг параметра. С учетом этого, численный расчет матрицы монодромии показывает идеальное согласие (см. рис. 1) с расчетом зон захвата на основе Ляпуновской экспоненты динамической системы на торе.

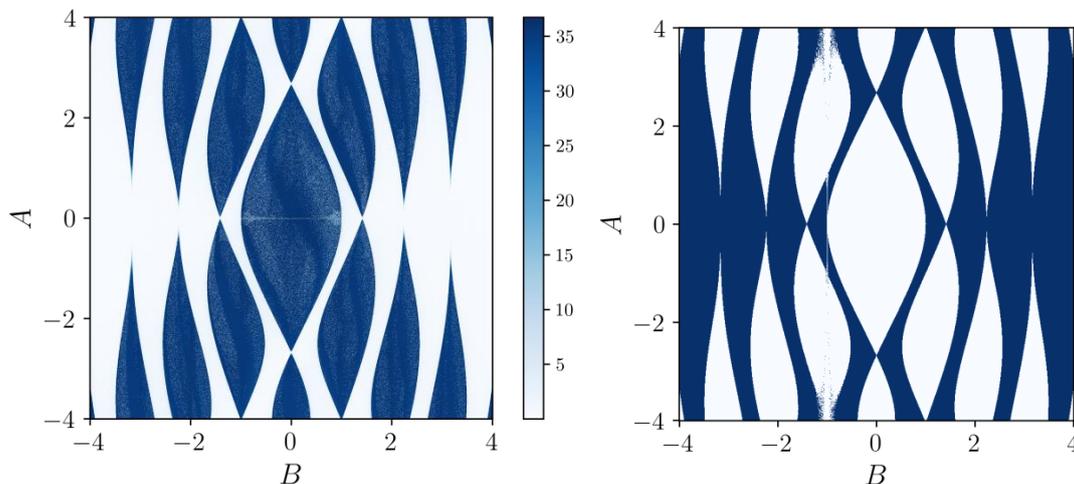


Рис. 1. Слева: расчет зон захвата в RSJ-модели посредством Ляпуновской экспоненты (закрашенные области соответствуют захвату фазы), справа: расчет зон зонной структуры для уравнения Хилла (зоны стабильности закрашены)

Описанное соответствие позволяет по-новому взглянуть на анализ свойств динамических систем на торе, в частности поднимает вопрос об интерпретации числа вращения в квантово-механическом контексте.

Автор благодарен А.А. Глуцюку за аккуратное доказательство теоремы про связь числа нулей решения уравнения Хилла с числом вращения, а также А.С. Горскому и В.М. Бухштаберу за многочисленные обсуждения.

Библиографический список

1. *Arnold V. I.* Geometrical methods in the theory of ordinary differential equations. // Springer Science & Business Media, 2012
2. *Hartman P.* Ordinary differential equations. // Society for Industrial and Applied Mathematics, 2002.
3. *Бухштабер В. М., Глуцюк А. А.* Собственные функции монодромии уравнений Гойна и границы зон фазового захвата в модели сильношунтированного эффекта Джозефсона // Труды Математического института имени ВА Стеклова. – 2017. – Т. 297. – С. 62-104.
4. *Renne M. J., Polder D.* Some analytical results for the resistively shunted Josephson junction // Revue de physique appliquée. – 1974. – Т. 9. – №. 1. – С. 25-28.

Энтропия Кульбака-Лейблера растягивающих эндоморфизмов окружности А.Э. Рассадин

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»,
Нижний Новгород
E-mail: brat_ras@inbox.ru.

Растягивающие эндоморфизмы окружности ($m = 2, 3, 4, \dots$):

$$x_{n+1} = mx_n \pmod{1} \quad (1)$$

являются одним из наиболее изученных примеров в теории динамических систем с дискретным временем [1].

Пусть начальные условия для эндоморфизмов (1) распределены на отрезке $[0, 1]$ с некоторой плотностью вероятности $p_0(x)$, то есть мы рассматриваем статистический ансамбль этих эндоморфизмов.

В этом случае эволюция этой начальной плотности в дискретном времени определяется следующим оператором Фробениуса-Перрона [2]:

$$p_{n+1}(x) = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} p_n\left(\frac{x+k}{m}\right). \quad (2)$$

Если известна полученная с помощью оператора (2) из начальной плотности вероятности $p_0(x)$ последовательность функций $\{p_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, то по ним можно вычислить специфическое расстояние между точками этой последовательности и начальным распределением вероятности, называемое энтропией Кульбака-Лейблера [3]:

$$D_{KL}(p_n \parallel p_0) = \int_0^1 p_n(x) \ln \frac{p_n(x)}{p_0(x)} dx. \quad (3)$$

Выберем начальное распределение вероятностей в виде производящей функции для полиномов Бернулли [2]:

$$p_0(x) = \frac{\gamma_0 \exp(\gamma_0 x)}{\exp \gamma_0 - 1}, \quad \gamma_0 > 0. \quad (4)$$

Оператор Фробениуса-Перрона (2) трансформирует функцию (4) в следующую последовательность функций:

$$p_n(x) = \frac{\gamma_n \exp(\gamma_n x)}{\exp \gamma_n - 1}, \quad \gamma_n = \frac{\gamma_0}{m^n}, \quad n \in N. \quad (5)$$

Примеры графиков функций (5) при $\gamma_0 = 2$ приведены на рис. 1.

Подстановка выражений (5) в формулу (3) для энтропии Кульбака-Лейблера даёт:

$$D_{KL}(p_n \parallel p_0) = \ln \left[\frac{\gamma_n \exp \gamma_0 - 1}{\gamma_0 \exp \gamma_n - 1} \right] + (\gamma_n - \gamma_0) \cdot \left(\frac{\exp \gamma_n}{\exp \gamma_n - 1} - \frac{1}{\gamma_n} \right). \quad (6)$$

Графики числовых последовательностей (6) приведены на рис. 2.

Также в докладе обсуждены свойства и иных величин, связанных с эндоморфизмами (1) и распределениями вероятностей (5).

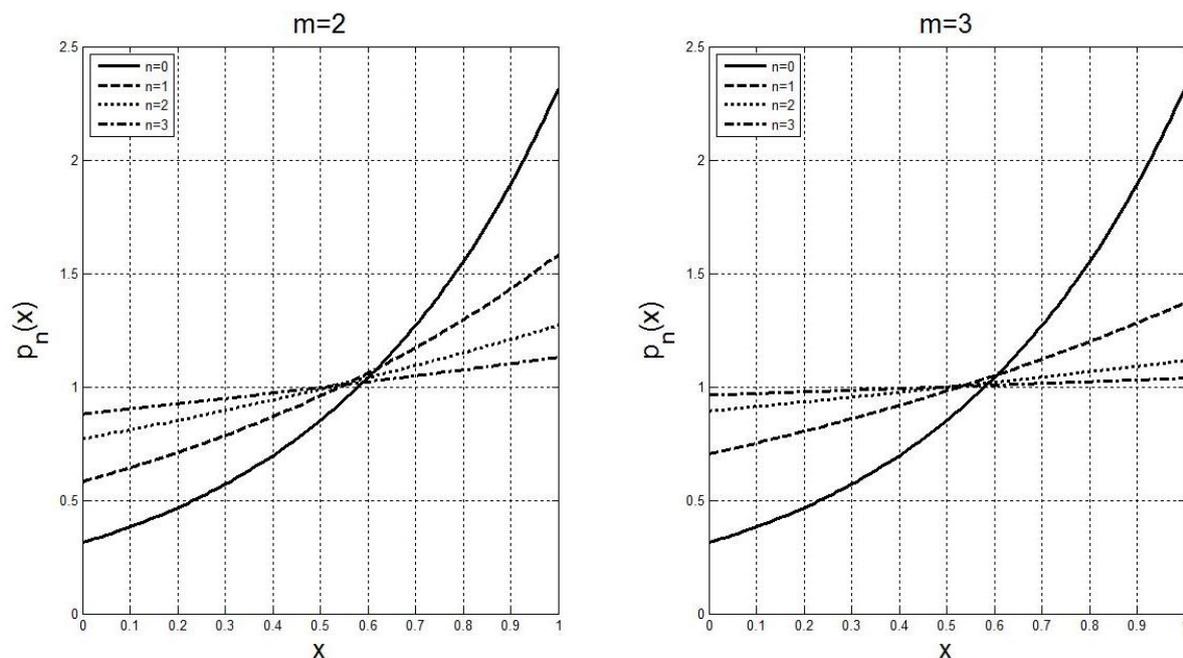


Рис.1. Временная эволюция плотности вероятности

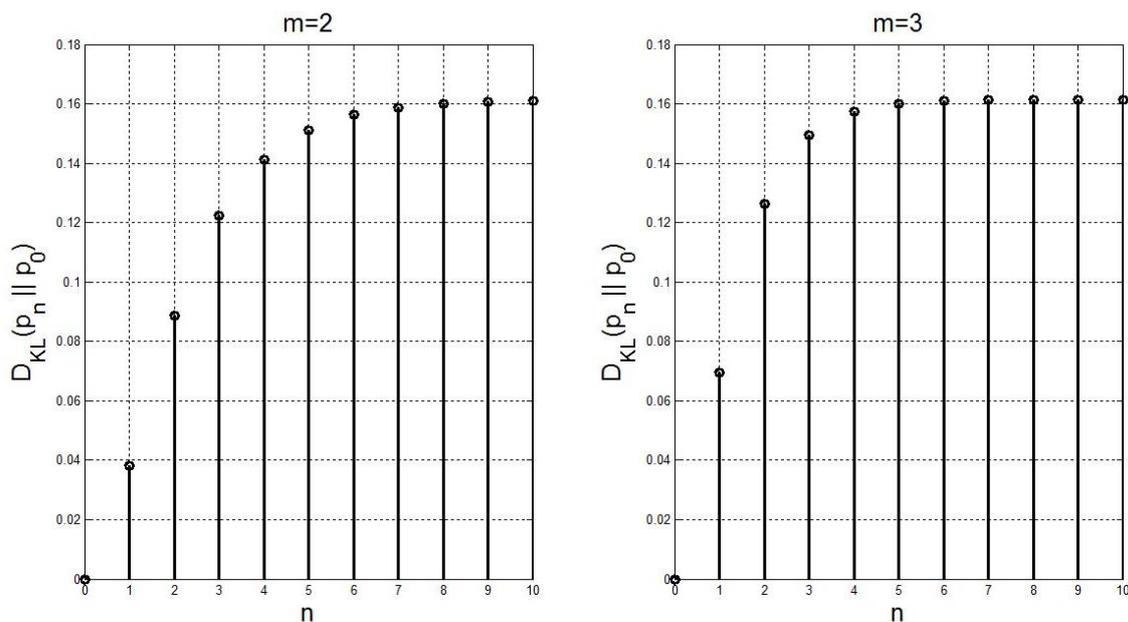


Рис.2. Временная эволюция энтропии Кульбака-Лейблера

Библиографический список

1. Каток А.Б., Хасселблат Б. Введение в современную теорию динамических систем. — М.: Факториал, 1999. 768 с.
2. Аникин В.М. Спектральные задачи для оператора Фробениуса-Перрона // Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2009. Т. 17. №. 4. Р. 35.
3. Kullbak S., Leibler R.A. On information and sufficiency // Annals of Mathematical Statistics. 1951. V. 22, Is.1. P.79-86.

Бифуркации инвариантных многообразий в уравнении Кана-Хиллиарда**А.Н. Куликов¹, Д.А. Куликов¹**¹Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,

Ярославль

E-mail: kulikov_d_a@mail.ru

В докладе речь пойдет о двух краевых задачах (КЗ) для обобщенного варианта уравнения Кана-Хиллиарда. В случае, когда неизвестная функция $u = u(t, x)$ зависит от одной пространственной переменной x . Это уравнение (т.е. обобщенное уравнение Кана-Хиллиарда) имеет следующий вид [1-3]

$$u_t + u_{xxxx} + (f(u))_{xx} + (g(u))_x + (h(u))_{xxx} = 0. \quad (1)$$

Здесь:

$$f(u) = f_1 u + f_2 u^2 + f_3 u^3,$$

$$g(u) = g_1 u + g_2 u^2 + g_3 u^3, h(u) = h_1 u + h_2 u^2 + h_3 u^3, f_j, g_j, h_j \in R, j = 1, 2, 3.$$

Если $g(u) = h(u) = 0$, то получаем классический вариант этого уравнения [1]. Уравнение (1) описывает химическую реакцию в некой активной среде, а $u(t, x)$ нормированная разность концентраций двух реагирующих веществ.

Дополним уравнение (1) периодическими краевыми условиями

$$u(t, x + 2\pi) = u(t, x), \quad (2)$$

которые приведены в нормированном виде.

Особо отметим, что выбор $f(u), g(u), h(u)$ не обязательно ограничивается кубическими многочленами, но они могут быть многочленами и иной степени. Вместе с тем в приложениях чаще рассматривают частные варианты выбора этих функций. Если $g(u) = a_2 u^2, h(u) = 0$, то получаем широко известный вариант этого уравнения – “конвективное уравнение Кана-Хиллиарда”.

Отметим, что КЗ (1), (2) имеет однопараметрическое семейство пространственно однородных состояний равновесия $u(t, x) = \alpha, \alpha \in R$. Пусть $M_0(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(t, x) dx$ – пространственное среднее. Можно доказать, что если $u(t, x)$ решение КЗ (1), (2), то $M_0(u) = \alpha \in R$ и такие функции формируют инвариантное многообразие для решений КЗ (1), (2).

Для КЗ (1), (2) показано, что существует множество α_j , где $j = 1, \dots, N$ и интервалов $I = (\alpha_j - \varepsilon, \alpha_j)$ или $I = (\alpha_j, \alpha_j + \varepsilon)$ таких, что при любом $\alpha \in I_j$ КЗ (1),(2) имеет предельный цикл $C(\alpha)$, а $U_{2,j} = \bigcup_{\alpha \in I_j} C(\alpha)$ формирует двумерное инвариантное многообразие $U_{2,j}$ для решений КЗ (1),(2).

Добавим также, что число таких инвариантных многообразий может быть асимптотически большим. Подчеркнем, что эти двумерные многообразия, как правило, седловые и локальным аттрактором может быть только одно из них или не имеет аттракторов вообще. Число таких многообразий (т.е. N) может быть сколь угодно большим. Так, будет, например, если $f_3 > 0$. Не исключен вариант, когда они отсутствуют.

Вопрос о выборе постоянных α_j и числе таких однородных состояний равновесия основной КЗ (1), (2) может быть сведен к определению корней алгебраического уравнения

$$3f_3\alpha^2 + 2f_2\alpha + f_1 - m^2 = 0, m = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3)$$

Напомним, что двумерные инвариантные многообразия, как правило, седловые (неустойчивые). Локальными аттракторами могут быть только два из них. Это те инвариантные многообразия, которые находятся в окрестности седловых состояний равновесия $\alpha_1(1), \alpha_2(1)$, где $\alpha_1(1), \alpha_2(1)$ корни уравнения (3), в котором $m^2 = 1$ ($m = 1$ или $m = -1$).

Аналогичные результаты могут быть получены для классической версии уравнения Кана-Хиллиарда (в уравнении (1) $g(u) = h(u) = 0$), если заменить краевые условия (2) на однородные краевые условия Неймана

$$u_x(t, 0) = u_x(t, \pi) = u_{xxx}(t, 0) = u_{xxx}(t, \pi) = 0. \quad (4)$$

У КЗ (1),(4) существуют одномерные инвариантные многообразия $U_{1,j}$, сформированные однопараметрическими семействами пространственно неоднородных состояний равновесия этой КЗ, если при данных значениях параметров существуют двумерные инвариантные многообразия КЗ (1),(2).

Обоснование этих результатов основана на использовании математически обоснованных методов теории динамических систем с бесконечномерным пространством начальных условий: метода инвариантных (интегральных) многообразий, нормальных форм Пуанкаре-Дюлака, а также асимптотических методов анализа динамических систем.

Достаточно подробное изложение этих результатов можно найти в следующих работах [4-6].

Работа выполнена в рамках реализации программы развития регионального научно-образовательного математического центра (ЯрГУ) при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (Соглашение о предоставлении из федерального бюджета субсидии № 075-02-2024-1442).

Библиографический список

1. Cahn J.W., Hilliard J.E. // J. Chem. Phys. 1959. V. 28. №. 6. P. 258-267.
2. Podolny A., Zaks M.A., Rubinstein B.Y., Golovin A.A., Nepomnyashchy A.A. // Physica D. 2005. V. 201. №. 3. P. 291-305.
3. Kudryashov N.A., Migita A.V. // Fluid. Dyn. 2005. V. 42. P. 463-471.
4. Kulikov A.N., Kulikov D.A. // Part. Differ. Equat. in App. Math. 2024. V. 12. Art. 100946.
5. Kulikov A.N., Kulikov D.A. // Comp. Math. and Math. Phys. 2024. V. 64. No. 10. P. 2399- 2416.
6. Kulikov A.N., Kulikov D.A. // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2024. V.45. No.11. P.5480-5489.

**О возникновении различных гиперболических множеств
на двумерном торе
О.М. Шилов¹**

¹*Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»,
Нижний Новгород
E-mail: omshilov@hse.ru*

Доклад посвящен исследованию гиперболической динамики двумерных диффеоморфизмов, полученных в результате возмущения двумерного отображения Аносова с помощью отображения Мёбиуса [1]. В этом докладе описываются возмущения двумерного отображения Аносова и полученные отображения численно проверяются на гиперболичность. Численная проверка гиперболичности проводится с помощью метода, описанного в [2, 3].

Для семейства диффеоморфизмов мы рассматривается возмущение, зависящее от двух параметров. На соответствующей плоскости параметров с помощью методов вычисления показателей Ляпунова и углов между касательными подпространствами выявлены области, соответствующие существованию гиперболического хаоса в прямом и обратном времени, DA-аттрактора, DA-репеллера, а также сосуществованию устойчивой и вполне неустойчивой неподвижных точек.

В областях параметров, где сосуществуют устойчивая и вполне неустойчивая неподвижные точки наблюдается существование хаотического седла. При некоторых параметрах численно найдены и проверены на гиперболичность траектории, аппроксимирующие такие хаотические множества. Численный метод нахождения таких траекторий представлен в [4].

В докладе представлены результаты совместной работы с А. Казаковым. *Исследование осуществлено в рамках Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ*

Библиографический список

1. Chigarev V., Kazakov A., Pikovsky A.; Kantorovich–Rubinstein–Wasserstein distance between overlapping attractor and repeller. *Chaos* 1 July 2020; 30 (7): 073114.
2. Kuptsov P.V. Fast numerical test of hyperbolic chaos // *Phys. Rev. E*. 2012.
3. Kuptsov P.V., Kuznetsov S.P. Numerical test for hyperbolicity in chaotic systems with multiple time delays // *Comm. in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 2018..
4. Nusse, HE ; Yorke, JA. / A procedure for finding numerical trajectories on chaotic saddles. In: *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 1989 ; Vol. 36, No. 1-2. pp. 137-156.

Методы проверки псевдогиперболичности**К.С. Зайчиков¹, А.О. Казаков¹**

¹Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»,
Нижний Новгород
E-mail: zaychikovkirill3@gmail.com.

Псевдогиперболичность – слабая версия гиперболичности. Аттрактор называется псевдогиперболическим, если в каждой точке его касательное пространство раскладывается на прямую сумму пространств E^{ss} и E^{cu} , в одном из которых объемы равномерно растягиваются. Отличие от гиперболичности заключается в том, что каждое из пространств может одновременно содержать как направления сжатия, так и растяжения.

Основы теории псевдогиперболичности были заложены в работе [1], где было показано, что этим свойством обладает дикий спиральный аттрактор. Также было показано, что этим свойством обладают классический аттрактор Лоренца [2], его дискретный аналог [3], а также «настоящий» дискретный аттрактор Лоренца [4].

Зачастую невозможно аналитически проверить псевдогиперболичность аттрактора, поэтому приходится использовать численные методы, о которых и пойдет речь в этом докладе.

Для проверки псевдогиперболичности используется стандартный алгоритм Беннетина [5], с его помощью ведется расчет показателей Ляпунова, которые используются для проверки растяжения объемов. Кроме того, с помощью этого метода вычисляются так называемые ляпуновские ковариантные вектора, которые являются базисами линейных подпространств E^{ss} и E^{cu} . В работе [6] было показано, что для непрерывности разбиения необходимо отсутствие касания между подпространствами.

Методы будут апробированы на таких моделях как система Лоренца, отображение Гонченко и прочих.

Работа подготовлена в ходе исследования в рамках проекта «Зеркальные лаборатории НИУ ВШЭ»

Библиографический список

1. Turaev D. V., Shil'nikov L. P. An example of a wild strange attractor //Sbornik: Mathematics. – 1998. – Т. 189. – №. 2. – С. 291.
2. Afraimovich V. S., Bykov V. V., Shilnikov L. P. Attractive nonrough limit sets of Lorenz-attractor type //Trudy Moskovskoe Matematicheskoe Obshchestvo. – 1982. – Т. 44. – С. 150-212.
3. Gonchenko S. V. et al. Three-dimensional Hénon-like maps and wild Lorenz-like attractors //International Journal of Bifurcation and Chaos. – 2005. – Т. 15. – №. 11. – С. 3493-3508.
4. Kazakov A. et al. Numerical study of discrete Lorenz-like attractors //Regular and Chaotic Dynamics. – 2024. – Т. 29. – №. 1. – С. 78-99.
5. Bennetin G. et al. All Lyapunov exponents are effectively computable //Physical Review A. – 1976. – Т. 14. – С. 2238.
6. Kuptsov P. V., Kuznetsov S. P. Lyapunov analysis of strange pseudohyperbolic attractors: angles between tangent subspaces, local volume expansion and contraction //Regular and Chaotic Dynamics. – 2018. – Т. 23. – С. 908-932.

Программный комитет

Гонченко С.В. – НИУ ВШЭ, Нижний Новгород, Россия
Караваев А.С. – СГМУ им. В.И. Разумовского, Саратов, Россия
Кудрявцев Д.С. – ИБХ РАН, Москва, Россия
Кузнецов Н.В. – СПбГУ, Санкт-Петербург, Россия
Масловская А.Г. – Университет Иннополис, Иннополис, Россия
Пономаренко В.И. – СФ ИРЭ РАН им. В.А. Котельникова, Саратов, Россия
Посненкова О.М. – СГМУ им. В.И. Разумовского, Саратов, Россия
Починка О.В. – НИУ ВШЭ, Нижний Новгород, Россия
Станкевич Н.В. – НИУ ВШЭ, Нижний Новгород, Россия

Доклады молодых ученых, отмеченные дипломами

Устные доклады:

Александров А.А. О связи уравнения Хилла с динамическими системами на торе.

Громыко А.А. Математическое моделирование динамики популяции с протандрией.

Постерные доклады:

Наумов А.В. Стимулирование нейронной активности в срезе гиппокампа мыши для восстановления физиологической активности с использованием сигналов, предсказанных LSTM.

Никитин Д.С. Разрушение инвариантной кривой после каскада бифуркаций удвоений.

Программа конференции

14 ноября, четверг, Большая Печерская 25/12, ауд. 305

09.00-09.50	Регистрация	
10.00-10.15	Открытие	
	Секция «Теория динамических систем»	
10.15-11.00 Пленарная лекция	Н.В. Барабаш Аттракторы и бифуркации кусочно-гладких динамических систем	
11.00-11.30	А.Э. Рассадин Энтропия Кульбака-Лейблера растягивающих эндоморфизмов окружности	
11.30-12.00	Кофе-брейк	
	Секция «Сложное поведение динамических систем»	
12.00-12.45 Пленарная лекция	А.Г. Масловская Гибридные подходы для <i>in silico</i> исследований процессов коммуникации в эволюционирующих микробных популяциях	
12.45-13.15	М.И. Болотов Химерные состояния в системе стационарных и движущихся детерминированных частиц, обладающих дополнительной внутренней степенью свободы	
13.15-13.30	Э.Р. Багаутдинова Управление мультистабильностью в модели типа Ходжкина-Хаксли в результате учета дополнительного ионного канала	
13.30-13.45	Д.А. Крылосова Сложная динамика системы Фитцхью-Нагумо в режиме устойчивого состояния равновесия с адаптивным внешним воздействием (on-line)	
13.45-15.00	Обед	
15.00 – 15.30	Л.В. Тюрюкина К проблеме взаимодействия хаоса и сценария Ландау-Хопфа (on-line)	
15.30 – 16.00	О.М. Посненкова, Н.В. Станкевич Физические методы анализа многосуточной динамики артериального давления и пульса у пациентов с артериальной гипертензией (on-line)	
16.00-18.00	Постерная секция	

Список постерных докладов

Бобровский А.А. Влияние шума на смешанную динамику в системе Топажа-Пиковского

Бондаренко И.А. Хаотические аттракторы в модели сердечно-сосудистой системы человека

Зайчиков К.С. Методы проверки псевдогиперболичности

Корякин В.А. Аттрактор Лоренца в шестимерной модели, описывающей динамику лазера

Наумов А.В. Стимулирование нейронной активности в срезе гиппокампа мыши для восстановления физиологической активности с использованием сигналов, предсказанных LSTM

Никитин Д.С. Разрушение инвариантной кривой после каскада бифуркаций удвоений

Сафонова А.С. Динамика дискретизированной системы Хиндмарша-Роуза: бифуркации и разрушение инвариантной кривой

Шилов О.М. О возникновении различных гиперболических множеств на двумерном торе

Юлин А.А. Исследование смешанной динамики с трехмерной динамической системе

Программа конференции

15 ноября, пятница, Большая Печерская 25/12, ауд.305

10.00-10.15	Кофе-брейк	
10.15– 11.00 Пленарная лекция	П.В. Купцов Выявление характера динамики нелинейных систем при помощи быстрых ляпуновских индикаторов (on-line)	
	Секция «Теория динамических систем»	
11.00-11.45 Пленарная лекция	С.В. Гонченко Гомоклинический резонанс и эллиптические точки	
11.45 – 12.15	А.А. Александров О связи уравнения Хилла с динамическими системами на торе	
12.15-13.30	Обед	
	Секция «Сложное поведение динамических систем»	
13.30-14.15 Пленарная лекция	Н.В. Кузнецов Теория скрытых колебаний: границы глобальной устойчивости, скрытые аттракторы и мультиустойчивость	
14.15-14.45	Т.А. Алексеева Аналитико-численные методы прогнозирования и управления нерегулярной динамикой в математических моделях экономики	
14.45-15.00	Кофе-брейк	
15.00-17.00	Активная площадка «Математические горизонты»	

Программа конференции

16 ноября, суббота, Большая Печерская 25/12, ауд.313

09.45-10.00	Кофе-брейк	
	<i>Секция «Сложное поведение динамических систем»</i>	
10.00 – 10.15	К.А. Ганжа Влияние изъятия на режимы динамики модели Морана-Рикера с запаздыванием (on-line)	
10.15 – 10.30	А.А. Громько Математическое моделирование динамики популяции с протандрией (on-line)	
	<i>Секция «Теория динамических систем»</i>	
10.30 – 11.00	Л.И. Мороз Дробно-дифференциальный подход к численному моделированию диффузионно-волновых процессов в сегнетоэлектриках (on-line)	
11.00-11.30	Д.А. Куликов Бифуркации инвариантных многообразий в уравнении Кана-Хиллиарда (on-line)	
11.30-12.00	Ж.Т. Жусубалиев Вырожденные бифуркации в кусочно-линейных отображениях (on-line)	
	<i>Секция «Радиофизическое моделирование»</i>	
12.00-12.30	В.В. Семенов Роль нелокальной связи при управлении стохастическим резонансом в ансамблях связанных бистабильных осцилляторов (on-line)	
12.30-12.45	А.А. Панюшев Различные типы мультистабильности в отображении Киалво	
12.45 – 13.00	А.К. Килина Квазипериодическая и хаотическая динамика в системе Чуа под периодическим импульсным воздействием	
13.00 - 13.15	А.Л. Шамсина Динамика генератора квазипериодических колебаний под периодическим импульсным воздействием	
	<i>Секция «Анализ экспериментальных данных»</i>	
13.15 – 13.30	В.О. Салмиянов Мультифрактальная параметризация снимков компьютерной томографии легких в монохромном представлении (on-line)	
13.30-14.00	Обед	
14.00-14.45	А.С. Караваяев Математические модели сердечно-сосудистой системы для изучения различных физиологических состояний человека (on-line)	
14.45-15.30	Д.С. Кудрявцев Электрическая активность клеток: молекулярные механизмы, инструменты исследования и биологические последствия	
15.30-15.45	Г.А. Гуйо Эффекты анестезии в электрокортикограммах крыс характеризуемые с помощью анализа флуктуаций относительно тренда (on-line)	
15.45-16.00	Заккрытие	